UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
JESSICA BÉLISLE

NOUVELLE LOI EXPONENTIELLE BIDIMENSIONNELLE BASÉE
SUR LA MÉTHODE DES CHOCS COMONOTONES

MAI 2020

Avant-propos

Ce travail est le fruit d'un dur labeur et de nombreux sacrifices. Heureusement, plusieurs personnes ont contribué à faire de la rédaction de ce mémoire une expérience positive et enrichissante.

Merci à M. Mhamed Mesfioui, professeur à l'Université du Québec à Trois-Rivières, qui a été un véritable mentor pour moi et qui m'a épaulée en tant que directeur de recherche. J'ai énormément de gratitude à son égard pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de mes études de maîtrise.

Je suis également reconnaissante envers M. Christian Genest, professeur à l'Université McGill, qui a agi à titre de codirecteur et qui a su partager avec moi sa grande expérience en recherche et en communication scientifiques.

Merci à mes parents, Céline et Stéphane, qui ont toujours cru en moi et m'ont soutenue dans mon cheminement d'éternelle étudiante. Grâce à vous, je n'ai jamais baissé les bras.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont aidée de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail.

Ce travail a bénéficié de l'aide financière du Secrétariat des Chaires de recherche du Canada, du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et de l'Institut canadien des sciences statistiques par l'entremise de subventions accordées aux professeurs Genest et Mesfioui.

Table des matières

Introduction

Marshall et Olkin (1967) ont proposé une famille de lois exponentielles bivariées construites sur le principe du choc commun. Ce choc est une variable aléatoire qui affecte simultanément les deux composantes du modèle et, de ce fait, introduit une dépendance entre elles. Il est toutefois bien connu que cette construction souffre d'une limitation majeure du fait qu'elle ne permet pas de couvrir tous les degrés de dépendance possibles. L'étendue des corrélations permises par ce modèle peut se révéler assez étroite pour certains choix de paramètres marginaux.

L'objectif principal de ce mémoire est de pallier ce problème en proposant une nouvelle famille de lois exponentielles bivariées qui lève cette restriction tout en préservant la notion de dépendance induite par un choc commun. La nouvelle famille constitue donc une amélioration intéressante du modèle de Marshall et Olkin (1967). Pour obtenir une famille de lois exponentielles bivariées capable de modéliser tout le spectre des corrélations, nous adapterons l'approche récemment proposée par Genest, Mesfioui et Schulz (2018), laquelle est basée sur la notion de choc comonotone. Le principe mis de l'avant par ces auteurs consiste à engendrer la dépendance entre les marginales à travers des variables comonotones au lieu d'une unique variable commune, comme c'est le cas pour le modèle classique de choc commun. Ces auteurs ont exploité cette idée pour construire une nouvelle famille de lois de Poisson bivariées.

Le mémoire est structuré comme suit. Dans le chapitre 2, nous rappelons d'une manière succincte la loi exponentielle univariée et ses principales propriétés. En particulier, nous discutons des méthodes d'estimation du paramètre ainsi que certaines propriétés de fermeture.

Dans le chapitre 3, nous abordons la théorie des copules. Nous présentons d'abord la copule produit, les bornes de Fréchet–Hoeffding, le théorème de décomposition de Sklar et ses conséquences. Nous discutons ensuite du concept de copule de survie ainsi que de certaines propriétés des copules archimédiennes.

Dans le chapitre 4, nous exposons la famille de lois exponentielles bivariées de Marshall–Olkin. Nous présentons plusieurs propriétés intéressantes de cette famille. Nous terminons ce chapitre par une discussion des limites de ce modèle au niveau de la modélisation de la dépendance.

Dans le chapitre 5, nous présentons la contribution principale du mémoire. Nous commençons par définir la nouvelle famille de lois exponentielles bivariées basée sur le principe de chocs comonotones. Nous en exposons plusieurs propriétés. En particulier, nous établissons la fonction de survie du modèle, sa densité, sa fonction génératrice, ses moments mixtes d'ordre supérieur ainsi que quelques propriétés de fermeture et d'absence de mémoire. Puis, nous examinons en détail l'estimation des paramètres du modèle par la méthode des moments ainsi que par la méthode dite de la "fonction d'inférence" pour les marges. Nous concluons par quelques simulations permettant d'apprécier la qualité des estimateurs du paramètre de dépendance proposés.

Le chapitre 6 est consacré à la conclusion générale de ce travail et décrit quelques pistes pour de futures généralisations du présent modèle.

Chapitre 2

Rappels sur la loi exponentielle univariée

Dans ce chapitre, nous présentons la loi exponentielle univariée. Nous rappelons la définition de cette loi, ses principales propriétés et les différentes méthodes d'estimation de ses paramètres.

2.1 Définition de la loi exponentielle

On dit que la variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ si la densité de X est de la forme

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2.2 Propriétés de la loi exponentielle

Rappelons que la fonction de répartition de $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

De même son espérance mathématique et sa variance sont

$$\text{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Une des propriétés les plus importantes d'une variable aléatoire de loi exponentielle $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ est son absence de mémoire. Cette propriété se traduit par la relation suivante, valable pour tous $s, t > 0$:

$$\Pr(X > s + t | X > t) = \Pr(X > s).$$

En d'autres mots, la probabilité que X soit plus grand que $s + t$ sachant que X est plus grand que t est la même que la probabilité que X soit plus grand que s.

2.3 Estimation du paramètre

Le paramètre λ de la loi exponentielle peut être estimé par la méthode du maximum de vraisemblance ou par la méthode des moments. Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon aléatoire issu d'une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre inconnu λ.

2.3.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Comme son nom l'indique, la méthode du maximum de vraisemblance consiste à estimer le paramètre d'une loi exponentielle par la valeur $\lambda > 0$ qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire la densité $L(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ rattachée aux valeurs $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ observées dans l'échantillon. On cherche donc la valeur $\hat{\lambda} > 0$ qui est solution du problème d'optimisation

$$\max_{\lambda} L(x_1, \ldots, x_n, \lambda).$$

La valeur $\hat{\lambda}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ.

Puisque les observations sont supposées mutuellement indépendantes, la vraisemblance s'exprime sous la forme

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}},$$

où $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Un calcul élémentaire montre que la valeur de λ qui maximise $L(x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ est $\bar{x}$, de sorte que l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_{ML}$ de λ est

$$\hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

2.3.2 Méthode des moments

La méthode des moments consiste à déterminer un estimateur de λ en identifiant l'espérance mathématique de X (moyenne théorique) à la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$. Ainsi, l'estimateur des moments $\hat{\lambda}_M$ de λ est simplement

$$\hat{\lambda}_M = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Cet estimateur coïncide avec l'estimateur du maximum de vraisemblance.

2.3.3 Propriété de fermeture de la loi exponentielle

La propriété suivante, dite propriété de fermeture, a joué un rôle important dans la construction du modèle exponentiel multivarié proposé par Marshall et Olkin (1967). Dans ce mémoire, nous ferons appel à cette propriété pour introduire des modèles exponentiels selon la méthode des chocs comonotone et anti-comonotone.

Proposition 1. *Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires exponentielles mutuellement indépendantes de paramètres respectifs* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Alors* $Y = \min(X_1, \ldots, X_n)$ *est une variable aléatoire exponentielle de paramètre* $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la fonction de survie G_Y de Y est de la forme d'une survie d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. En effet, pour tout $y > 0$, on a

$$\begin{aligned} G_Y(y) &= \Pr\{\min(X_1, \ldots, X_n) > y\} \\ &= \Pr(X_1 > y \cap \cdots \cap X_n > y) \\ &= \Pr(X_1 > y) \times \cdots \times \Pr(X_n > y) \\ &= e^{-\lambda_1 y} \times \cdots \times e^{-\lambda_n y} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) y} = e^{-\lambda y}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$.

Chapitre 3

Notions théoriques sur les copules

La notion de copule joue un rôle primordial pour décrire et modéliser la dépendance entre des variables aléatoires continues. Dans ce chapitre, nous rappelons quelque notions de base des copules. Dans un premier temps, nous présentons la définition d'une copule ainsi que certains exemples pertinents. Nous abordons ensuite le théorème fondamental de Sklar (1959). Une classe importante des copules appelées copules archimédiennes est aussi discutée.

3.1 Généralités sur les copules

3.1.1 Définitions de base

Ci-dessous, nous donnons la définition mathématique d'une copule.

Définition 1. *Une copule à deux dimensions est une fonction* $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ *qui satisfait les propriétés suivantes :*

(i) pour tout $u \in [0,1]$, $C(0,u) = C(u,0) = 0$ *et* $C(u,1) = C(1,u) = u$ *;*

(ii) pour tous $u_1 \leq u_2$ *et* $v_1 \leq v_2$, $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de copules.

3.1.2 Copule produit

La copule d'indépendance, appelée aussi copule produit, est définie par

$$\Pi(u, v) = uv$$

pour tous $u, v \in [0, 1]$. Elle caractérise la situation d'indépendance entre les composantes marginales d'une paire aléatoire.

3.1.3 Bornes de Fréchet–Hoeffding

Les copules suivantes, définies pour tous $u, v \in [0, 1]$ par

$$M(u, v) = \min(u, v) \quad \text{et} \quad W(u, v) = \max(u + v - 1, 0),$$

sont appelées les bornes de Fréchet–Hoeffding. Elles représentent respectivement les copules maximale et minimale au sens de l'ordre de concordance. Ceci signifie que pour toute copule C, nous avons, pour tous $u, v \in [0, 1]$,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v).$$

3.1.4 Théorème de Sklar et conséquences

Dans cette section, nous présenterons le théorème de Sklar (1959), qui a joué un rôle important dans le développement de la théorie des copules. Nous aborderons également quelques résultats et propriétés qui en découlent.

Théorème 1. *Si H est une fonction de répartition bivariée de marges continues F et G, alors il existe une unique copule $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $H(x,y) = C\{F(x), G(y)\}$.*

Nous constatons, en vertu du théorème de Sklar (1959), que la fonction de répartition H d'un couple (X,Y) de variables aléatoires fait intervenir les comportements marginaux de X et de Y, représentés respectivement par F et G, ainsi que la dépendance entre X et Y, exprimée par C. En posant $u = F(x)$ et $v = G(y)$, et en utilisant le théorème de Sklar (1959), nous pouvons extraire la copule C correspondant à H par la relation

$$C(u,v) = H\{F^{-1}(u), G^{-1}(v)\},$$

valide pour tous $u, v \in (0,1)$. Ici, F^{-1} et G^{-1} représentent les fonctions quantiles associées à F et G.

L'exemple suivant sert à illustrer cette procédure d'extraction de la copule associée à un couple (X,Y) de variables aléatoires de fonction de répartition jointe H.

Exemple 1. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de fonction de répartition jointe $H(x,y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}$. Les fonctions de répartition marginales sont données, pour tous $x, y \in [0, \infty)$, par*

$$F(x) = \lim_{y \to \infty} H(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad \text{et} \quad G(y) = \lim_{x \to \infty} H(x,y) = H(1,y) = \frac{1}{1+e^{-y}}.$$

Les inverses des fonctions de répartition marginales sont donc données, pour tous

$u, v \in (0,1)$, *par*

$$F^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1-u}{u}\right) \quad et \quad G^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1-v}{v}\right).$$

Après quelques calculs, on trouve que la copule correspondante est donnée, pour tous $u, v \in (0,1)$, *par*

$$C(u,v) = H\{F^{-1}(u), G^{-1}(v)\} = \frac{uv}{u+v-uv}.$$

3.2 Copule de survie

Soit (X, Y) une paire aléatoire de fonction de répartition H et de fonction de survie $\bar{H}$. Soient F et G (resp. $\bar{F}$ et $\bar{G}$) les fonctions de répartition (resp. survie) marginales de X et Y. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\bar{H}(x,y) &= \Pr(X > x, Y > y) \\
&= 1 - \Pr(X \leq x) - \Pr(Y \leq y) + \Pr(X \leq x, Y \leq y) \\
&= 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) \\
&= 1 - F(x) - G(y) + C\{F(x), G(y)\} \\
&= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C\{1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)\}.
\end{aligned}$$

En définissant $\widehat{C} = (u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$ pour tous $u, v \in (0,1)$, on peut alors écrire

$$\bar{H}(x,y) = \widehat{C}\{\bar{F}(x), \bar{G}(y)\}.$$

La fonction $\widehat{C}$ est une copule appelée la copule de survie du couple aléatoire (X, Y). Elle permet de lier la fonction de survie jointe aux fonctions de survie marginales.

3.3 Copules archimédiennes

Nous présentons dans cette partie une classe importante de copules bivariées appelées copules archimédiennes. Ces dernières sont très fréquemment utilisées en pratique.

Définition 2. *Une copule est dite archimédienne si elle s'écrit sous la forme*

$$C_\phi(u,v) = \phi^{-1}\{\phi(u) + \phi(v)\},$$

pour tous $u, v \in (0,1)$, *où* $\phi : [0,1] \to [0,\infty)$ *est un générateur continu, convexe, strictement décroissant et tel que* $\phi(1) = 0$.

3.3.1 Certaines propriétés des copules archimédiennes

Soit C_ϕ, une copule archimédienne de générateur ϕ. Alors, C_ϕ est symétrique, c'est-à-dire que pour tous $u, v \in (0,1)$,

$$C_\phi(u,v) = C_\phi(v,u).$$

De même, la copule C_ϕ est associative, c'est-à-dire que pour tous $u, v, w \in (0,1)$,

$$C_\phi\{u, C_\phi(v,w)\} = C_\phi\{C_\phi(u,v), w\}.$$

3.3.2 Caractérisation pratique des copules archimédiennes

Le résultat suivant, rapporté par Genest et MacKay (1986), permet d'identifier le générateur d'une copule archimédienne.

Théorème 2. *Soit C_ϕ, une copule archimédienne de générateur ϕ. Alors pour tous $u, v \in (0,1)$, on a*

$$\phi'(u)\,\frac{\partial}{\partial v}\,C_\phi(u,v) = \phi'(v)\,\frac{\partial}{\partial u}\,C_\phi(u,v).$$

Ce résultat est illustré ci-dessous.

Exemple 2. *Soit la copule définie pour tous $u, v \in (0,1)$, par*

$$C(u,v) = \frac{uv}{u+v-w}.$$

On a alors

$$\frac{\partial}{\partial u}\,C(u,v) = \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-1\right)^{-2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial v}\,C(u,v) = \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-1\right)^{-2}.$$

Ainsi,

$$\frac{\phi'(u)}{\phi'(v)} = \frac{v^2}{u^2}.$$

Donc,

$$\phi'(u) = \frac{K_1}{u^2},$$

où $K_1 > 0$ est une constante. De cela, nous déduisons que

$$\phi(u) = \frac{-K_1}{u} + K_2$$

est également une constante. En utilisant les conditions $\phi(1) = 0$ et $\phi'(u) \leq 0$, on conclut que

$$\phi(t) = t^{-1} - 1.$$

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de copules archimédiennes très citées dans la littérature.

Exemple 3. *La copule de Clayton est définie pour tous $u, v \in (0,1)$ par*

$$C_\theta(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta},$$

où $\theta \in (0, \infty)$ est un paramètre au choix. Son générateur est de la forme

$$\phi_\theta(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta},$$

pour tout $t \in (0,1)$. La copule d'indépendance s'obtient à partir de cette famille lorsque θ tend vers 0, c'est-à-dire que pour tous $u, v \in (0,1)$,

$$\lim_{\theta \to 0} C_\theta(u,v) = uv = \Pi(u,v).$$

Exemple 4. *La forme de la copule de Frank est définie pour tous $u, v \in (0,1)$ par*

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 - \frac{(1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{1 - e^{-\theta}} \right\},$$

où $\theta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ est un paramètre au choix. Le générateur de cette copule est de la forme

$$\phi_\theta(t) = \ln \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta t}} \right)$$

pour tout $t \in (0,1)$. Notons que la copule d'indépendance ainsi que les bornes de Fréchet–Hoeffding s'obtiennent à partir de cette famille comme suit. Pour tous $u, v \in (0,1)$,

$$\lim_{\theta \to 0} C_\theta(u,v) = uv = \Pi(u,v),$$

$$\lim_{\theta \to \infty} C_\theta(u,v) = M(u,v) = \min(u,v),$$

$$\lim_{\theta \to -\infty} C_\theta(u,v) = W(u,v) = \max(u + v - 1, 0).$$

Chapitre 4

Loi exponentielle bidimensionnelle de Marshall–Olkin

L'objectif de ce chapitre est de rappeler la famille de lois exponentielles bivariées introduite par Marshall et Olkin (1967) selon le principe de choc commun. Plusieurs propriétés de cette classe de lois exponentielles bivariées en sont données. Plus spécifiquement, nous abordons la définition du modèle à travers une paramétrisation alternative permettant de fixer les lois marginales. Nous discutons ensuite de la fonction de survie de cette famille de lois ainsi que de sa fonction génératrice des moments. Nous terminons ce chapitre par une analyse de la structure de corrélation du modèle permettant de souligner ses limites au niveau de la modélisation de la dépendance sous-jacente.

4.1 Définitions

Marshall et Olkin (1967) ont défini une classe de lois exponentielles bivariées par une méthode très intuitive. Cette dernière induit la dépendance entre des composantes exponentielles indépendantes à travers une variable aléatoire exponentielle appelée choc commun.

Définition 3. *Soient Z_1, Z_2 et Z_0 trois variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres respectifs μ_1, μ_2 et μ_0. On dit qu'une paire aléatoire (X_1, X_2) suit une loi exponentielle bivariée basée sur le choc commun de paramètres $(\mu_1, \mu_2, \mu_0) \in (0, \infty)^3$, notée $\mathcal{MO}(\mu_1, \mu_2, \mu_0)$, si et seulement si elle s'exprime sous la forme*

$$X_1 = \min(Z_1, Z_0) \quad et \quad X_2 = \min(Z_2, Z_0), \tag{4.1}$$

Nous constatons à partir des équations (4.1) que la dépendance est introduite dans le modèle via la variable Z_0 appelée choc commun. De même, nous observons que les lois marginales de X_1 et X_2 sont exponentielles de paramètres respectifs $\mu_1 + \mu_0$ et $\mu_2 + \mu_0$. La classe $\mathcal{MO}(\mu_1, \mu_2, \mu_0)$ est appelée famille de loi exponentielles bivariées de Marshall–Olkin.

4.2 Paramétrisation alternative de $\mathcal{MO}(\mu_1, \mu_2, \mu_0)$

Pour étudier adéquatement la capacité de modélisation de la dépendance du modèle $\mathcal{MO}(\mu_1, \mu_2, \mu_0)$, nous adoptons la paramétrisation suivante qui consiste à fixer les lois marginales. Pour ce faire, posons

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_0, \quad \lambda_2 = \mu_2 + \mu_0 \quad \text{et} \quad \mu_0 = \theta.$$

Ceci revient à définir, d'une manière équivalente, la famille de Marshall–Olkin en posant

$$X_1 = \min(Y_1, Y_0) \quad \text{et} \quad X_2 = \min(Y_2, Y_0), \tag{4.2}$$

où Y_1, Y_2 et Y_0 sont trois variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres respectifs $\lambda_1 - \theta$, $\lambda_2 - \theta$ et θ. Dans la suite de ce chapitre, la famille des paires aléatoires définies par (4.2) sera notée $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ avec $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Notons que cette dernière peut être vue comme une famille de lois exponentielles bivariées dont les marges sont fixées. Le paramètre θ peut être considéré comme le paramètre de dépendance correspondant au modèle $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$. Toutefois, il est important de noter que le paramètre de dépendance θ est soumis aux contraintes $\lambda_1 - \theta > 0$ et $\lambda_2 - \theta > 0$. Ces dernières montrent que le support de θ, à savoir $[0, \min(\lambda_1, \lambda_2)]$, est affecté par les paramètres marginaux.

Il est intéressant de souligner que la remarque précédente sur le support de θ empêche la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ de contenir la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding lorsque les paramètres marginaux sont différents. Cela limite la capacité de modélisation de la dépendance de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$. Nous allons discuter en détail de ce point au niveau de la structure de corrélation de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$.

4.3 Propriétés de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$

4.3.1 Fonction de survie de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$

La proposition suivante établit l'expression de la fonction de survie du modèle $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$.

Proposition 2. *La fonction de survie du couple $(X_1, X_2) \sim \mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ est donnée, pour tous $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, par la formule*

$$\bar{H}_\theta(x_1, x_2) = e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta \min(x_1, x_2)}. \tag{4.3}$$

Démonstration. Partant du côté gauche de l'équation (4.3), on a

$$\begin{aligned}
\bar{H}_\theta(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > x_1, Y_0 > x_2) \\
&= \Pr\{Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1, x_2)\} \\
&= \Pr(Y_1 > x_1) \Pr(Y_2 > x_2) \Pr\{Y_0 > \max(x_1, x_2)\} \\
&= e^{-(\lambda_1 - \theta) x_1} e^{-(\lambda_2 - \theta) x_2} e^{-\theta \max(x_1, x_2)} \\
&= e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta\{x_1 + x_2 - \max(x_1, x_2)\}} \\
&= e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta \min(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)}
\end{aligned}$$

pour tous $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, ce qu'il fallait démontrer. □

4.3.2 Fonction génératrice des moments de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$

Marshall et Olkin (1967) ont établi la fonction génératrice des moments de la famille $\mathcal{MO}(\mu_1, \mu_2, \mu_0)$. Ce résultat peut s'adapter facilement afin de déduire la fonction génératrice des moments de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ comme suit.

Proposition 3. *Si $(X_1, X_2) \sim \mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$, alors la fonction génératrice de (X_1, X_2) est exprimée, pour tous $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$, par*

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2, \theta}(t_1, t_2) = \mathrm{E}(e^{-t_1 X_1 - t_2 X_2}) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + t_1 + t_2 - \theta)\lambda_1 \lambda_2 + t_1 t_2 \theta}{(\lambda_1 + \lambda_2 + t_1 + t_2 - \theta)(t_1 + \theta)(t_2 + \theta)}.$$

Pour une démonstration de ce résultat, voir l'article de Marshall et Olkin (1967).

4.3.3 Moments mixtes de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$

Nous rappelons ci-dessous les expressions des moments mixtes de la loi $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$.

Proposition 4. *Si* $(X_1, X_2) \sim \mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$, *alors pour tous entiers naturels* i *et* j, *le moment d'ordre* (i, j) *est donné par*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_1^i X_2^j) = j\Gamma(i+1) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\Gamma(j+k)}{\Gamma(k+1)\lambda_1^{i-k}(\lambda_1 + \lambda_2 - \theta)^{j+k}} \\ + i\Gamma(j+1) \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Gamma(i+k)}{\Gamma(k+1)\lambda_2^{j-k}(\lambda_1 + \lambda_2 - \theta)^{i+k}},\end{aligned} \tag{4.4}$$

où pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, $\Gamma(j+1) = j!$.

La démonstration de ce résultat se trouve dans l'article de Marshall et Olkin (1967). Son idée principale consiste à exprimer $\mathrm{E}(X_1^i X_2^j)$ en fonction de la survie du modèle $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_1^i X_2^j) &= ij \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{i-1} x_2^{j-1} \bar{H}_\theta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= ij \int_0^\infty \left\{ \int_0^{x_1} x_1^{i-1} x_2^{j-1} \bar{H}_\theta(x_1, x_2) dx_2 \right\} dx_1 \\ &\quad + ij \int_0^\infty \left\{ \int_{x_1}^\infty x_1^{i-1} x_2^{j-1} \bar{H}_\theta(x_1, x_2) dx_2 \right\} dx_1.\end{aligned}$$

Le résultat découle directement en calculant séparément les deux derniers termes de l'équation précédente, à savoir

$$\begin{aligned}ij \int_0^\infty \left\{ \int_0^{x_1} x_1^{i-1} x_2^{j-1} \bar{H}_\theta(x_1, x_2) dx_2 \right\} dx_1 &= ij \int_0^\infty \left\{ \int_0^{x_1} x_1^{i-1} x_2^{j-1} e^{-\lambda_1 x_1 - (\lambda_2 - \theta) x_2} dx_2 \right\} dx_1 \\ &= ij \int_0^\infty x_1^{i-1} e^{-\lambda_1 x_1} \left\{ \int_0^{x_1} x_2^{j-1} e^{-(\lambda_2 - \theta) x_2} dx_2 \right\} dx_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ij\int_0^\infty\left\{\int_{x_1}^\infty x_1^{i-1}x_2^{j-1}\bar{H}_\theta(x_1,x_2)dx_2\right\}dx_1 &= ij\int_0^\infty\left\{\int_{x_1}^\infty x_1^{i-1}x_2^{j-1}e^{-\lambda_2x_2-(\lambda_1-\theta)x_1}dx_1\right\}dx_1 \\ &= ij\int_0^\infty x_1^{i-1}e^{(\lambda_1-\theta)x_1}\left\{\int_{x_1}^\infty x_2^{j-1}e^{-\lambda_2x_2}dx_1\right\}dx_1. \end{aligned}$$

4.3.4 Analyse de la structure de corrélation de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda,\theta)$

D'après la Proposition 4, le moment mixte $\mathrm{E}(X_1X_2)$ de $(X_1,X_2)\sim\mathcal{MO}(\Lambda,\theta)$ est donné par la formule (4.4) en prenant $i=j=1$. Ainsi, on a

$$\mathrm{E}(X_1X_2)=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2-\theta}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right).$$

Cela permet de déduire la covariance de $(X_1,X_2)\sim\mathcal{MO}(\Lambda,\theta)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X_1,X_2) &= \mathrm{E}(X_1X_2)-\mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2) \\ &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2-\theta}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)-\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \\ &= \frac{\theta}{(\lambda_1+\lambda_2-\theta)\lambda_1\lambda_2}. \end{aligned}$$

Finalement, la corrélation de $(X_1,X_2)\sim\mathcal{MO}(\Lambda,\theta)$ est de la forme

$$\mathrm{corr}_\theta(X_1,X_2)=\frac{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)\mathrm{var}(X_2)}}=\lambda_1\lambda_2\,\mathrm{cov}(X_1,X_2)=\frac{\theta}{\lambda_1+\lambda_2-\theta}.$$

L'expression précédente montre que $\mathrm{corr}_\theta(X_1,X_2)$ est une fonction croissante du paramètre de dépendance soumis à la restriction $\theta\in[0,\min(\lambda_1,\lambda_2)]$. Par conséquent la corrélation maximale de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda,\theta)$ est obtenue lorsque $\theta=\min(\lambda_1,\lambda_2)$, soit

$$\rho_{\max}=\frac{\min(\lambda_1,\lambda_2)}{\lambda_1+\lambda_2-\min(\lambda_1,\lambda_2)}=\frac{\min(\lambda_1,\lambda_2)}{\max(\lambda_1,\lambda_2)}.$$

Nous constatons que le support de corrélation de la famille $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ est

$$\left[0, \frac{\min(\lambda_1, \lambda_2)}{\max(\lambda_1, \lambda_2)}\right].$$

Or, le support de corrélation dans l'espace de toutes les lois bivariées dont les marginales sont exponentiellement distribuées de paramètres fixés est $[0, 1]$. En comparant le support $[0, \min(\lambda_1, \lambda_2)/\max(\lambda_1, \lambda_2)]$ à $[0, 1]$, on voit que le modèle $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ est très limité pour modéliser la structure de corrélation, particulièrement lorsque les paramètres marginaux λ_1 et λ_2 sont assez différents.

Dans le chapitre qui suit. nous allons proposer un modèle de lois exponentielles bivariées construit à partir d'une nouvelle approche appelée chocs comonotones. Nous allons montrer que cela produit un modèle exponentiel bivarié qui atteint le cas comonotone, et qui peut donc modéliser toute dépendance positive. En particulier, le support des corrélations de ce nouveau modèle est l'intervalle $[0, 1]$.

Chapitre 5

Nouvelle loi exponentielle bivariée à chocs comonotones

Ce chapitre représente la contribution principale de ce mémoire. Il s'agit d'une nouvelle famille de lois exponentielles bivariées définie via la méthode de chocs comonotones proposée par Genest, Mesfioui et Schulz (2018). La famille de lois contient la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding. Elle permet donc de modéliser tout le support des corrélations positives, contrairement au modèle de Marshall–Olkin discuté au chapitre précédent.

Dans la suite, plusieurs propriétés pertinentes de fermeture et d'absence de mémoire du nouveau modèle sont discutées. On propose aussi l'estimation des paramètres de ce modèle par la méthode des moments ainsi que par la méthode d'inférence pour les marginales. De plus, une étude par simulation permettant d'apprécier la qualité des estimateurs du paramètre de dépendance est présentée.

Dans tout le chapitre, nous notons respectivement par F_1 et F_2 les fonctions de répartition des variables aléatoires X_1 et X_2, et par $\bar{F}_1$ et $\bar{F}_2$ leurs fonctions de survie respectives. Les fonctions de répartition et de survie jointes de (X_1, X_2) sont notées respectivement H et $\bar{H}$.

5.1 Comonotonicité

Dans cette section, nous rappelons le concept des variables comonotones qui sera très utile pour décrire le modèle exponentiel proposé.

Définition 4. *Soit (X_1, X_2) une paire aléatoire de fonction de répartition jointe H. On note par F_1 et F_2 les fonctions de répartition marginales respectives de X_1 et X_2. On dit que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont comonotones si leur fonction de répartition jointe est la borne de Fréchet–Hoeffding supérieure, c'est-à-dire que pour tous $x_1, x_2 \in [0, \infty)$,*

$$H(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}.$$

Le lien précédent est aussi valable pour les fonctions survie, à savoir

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \min\{\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)\}.$$

Notons que si deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont comonotones, alors il existe une variable aléatoire U uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que

$$X_1 = F_1^{-1}(U) \quad \text{et} \quad X_2 = F_2^{-1}(U).$$

5.2 Définition du modèle

Nous allons définir dans cette section un modèle exponentiel bivarié basé sur la notion de comonotonicité.

Définition 5. *On dit qu'une paire aléatoire (X_1, X_2) suit une loi exponentielle bivariée basée sur les chocs comonotones de paramètres $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in (0, \infty)^2$ et $\theta \in [0, 1]$, notée $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$, si et seulement si elle s'exprime sous la forme*

$$X_1 = \min(Y_1, Z_1) \quad et \quad X_2 = \min(Y_2, Z_2), \tag{5.1}$$

où les paires aléatoires (Y_1, Y_2) et (Z_1, Z_2) sont mutuellement indépendantes et telles que

(i) les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont mutuellement indépendantes et, pour tout $j \in \{1, 2\}$, $Y_i \sim \text{Exp}\{(1 - \theta)\lambda_j\}$;

(ii) les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont comonotones et, pour tout $j \in \{1, 2\}$. $Z_i \sim \text{Exp}(\theta\lambda_j)$.

Notons que la représentation (5.1) peut aussi être réécrite sous la forme

$$X_1 = \min\{Y_1, F_{Z_1}^{-1}(U)\} \quad \text{et} \quad X_2 = \min\{Y_2, F_{Z_2}^{-1}(U)\}, \tag{5.2}$$

où $F_{Z_1}^{-1}$ et $F_{Z_2}^{-1}$ désignent respectivement les fonctions inverses des fonctions de répartition des variables Z_1 et Z_2 tandis que U est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$.

Nous donnons ci-dessous une formulation intéressante et équivalente à (5.1)–(5.2).

Proposition 5. *$(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ si et seulement si il existe une variable aléatoire Z de loi exponentielle de paramètre 1, telle que*

$$X_1 = \min(Y_1, \lambda_1^{-1}\theta^{-1}Z) \quad et \quad X_2 = \min(Y_2, \lambda_2^{-1}\theta^{-1}Z). \tag{5.3}$$

Démonstration. Puisque les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont comonotones, elles sont liées par la relation $F_{Z_1}(Z_1) = F_{Z_2}(Z_2)$. Cette dernière est équivalente à $\lambda_1 Z_1 = \lambda_2 Z_2 = \theta^{-1}Z$, où Z est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Ceci permet d'écrire que $Z_1 = \lambda_1^{-1}\theta^{-1}Z$ et $Z_2 = \lambda_2^{-1}\theta^{-1}Z$. Ainsi, le résultat est déduit à partir de (5.1). □

Notons que les équations données par (5.3) montrent que le modèle exponentiel bivarié basé sur les chocs comonotones peut être vu comme un modèle de choc proportionnel, du fait que le rapport entre les variables chocs $\lambda_1^{-1}\theta^{-1}Z$ et $\lambda_2^{-1}\theta^{-1}Z$ est égal à la fraction λ_2/λ_1.

5.3 Propriétés de la loi $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$

5.3.1 Fonction de survie de la famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$

L'objectif de cette sous-section est d'établir une expression explicite de la fonction de survie du modèle exponentiel bivarié proposé.

Proposition 6. *La fonction de survie de $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ est donnée, pour tous $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, par la formule*

$$\bar{H}_\theta(x_1, x_2) = e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta \min(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)}. \tag{5.4}$$

Démonstration. À partir des relations (5.3), nous avons

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_\theta(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= \Pr\{Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, F_{Z_1}^{-1}(U) > x_1, F_{Z_2}^{-1}(U) > x_2\} \\
&= \Pr[Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, U > \max\{F_{Z_1}(x_1), F_{Z_2}(x_2)\}] \\
&= \Pr(Y_1 > x_1) \Pr(Y_2 > x_2) \Pr[U > \max\{F_{Z_1}(x_1), F_{Z_2}(x_2)\}] \\
&= e^{-(1-\theta)\lambda_1 x_1} e^{-(1-\theta)\lambda_2 x_2} \{1 - \max(1 - e^{-\theta\lambda_1 x_1}, 1 - e^{-\theta\lambda_2 x_2})\} \\
&= e^{-(1-\theta)\lambda_1 x_1} e^{-(1-\theta)\lambda_2 x_2} \min(e^{-\theta\lambda_1 x_1}, e^{-\theta\lambda_2 x_2}) \\
&= e^{-(1-\theta)\lambda_1 x_1} e^{-(1-\theta)\lambda_2 x_2} e^{-\theta \max(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)} \\
&= e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - \max(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)\}} \\
&= e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta \min(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)}
\end{aligned}
$$

pour tous $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

5.3.2 Moments mixtes de la famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$

L'objectif de cette section est d'établir les moments mixtes de la loi $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$. Ces quantités joueront un rôle important pour étudier l'estimation des paramètres du modèle proposé.

Proposition 7. *Si $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$, alors pour tous entiers naturels i et j, le moment d'ordre (i, j) est donné par*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1^i X_2^j) = \frac{i!j!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(2-\theta)^{k+i}} \binom{i+k-1}{k} \\
+ \frac{i!j!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(2-\theta)^{k+j}} \binom{j+k-1}{k}. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Démonstration. Il est connu que le moment mixte s'exprime en terme de la fonction de survie de $\bar{H}_\theta$ comme suit :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1^i X_2^j) &= ij \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{i-1} x_2^{j-1} \bar{H}_\theta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= ij \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{i-1} x_2^{j-1} e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta \min(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)} dx_1 dx_2.
\end{aligned}
$$

En effectuant le changement de variables, $s_1 = \lambda_1 x_1$ et $s_2 = \lambda_2 x_2$, il résulte que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1^i X_2^j) &= \frac{ij}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \int_0^\infty \int_0^\infty s_1^{i-1} s_2^{j-1} e^{-s_1 - s_2 + \theta \min(s_1, s_2)} ds_1 ds_2 \\
&= \frac{ij}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{s_1 \le s_2\}} s_1^{i-1} s_2^{j-1} e^{-s_1 - s_2 + \theta s_1} ds_1 ds_2 \\
&+ \frac{ij}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{s_1 > s_2\}} s_1^{i-1} s_2^{j-1} e^{-s_1 - s_2 + \theta s_2} ds_1 ds_2 \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Ce deux dernières intégrales peuvent se simplifier comme suit :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{ij}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{s_1 \le s_2\}} s_1^{i-1} s_2^{j-1} e^{-s_1 - s_2 + \theta s_1} ds_1 ds_2 \\
&= \frac{ij}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \int_0^\infty s_1^{i-1} e^{-s_1(1-\theta)} \left(\int_{s_1}^\infty s_2^{j-1} e^{-s_2} ds_2 \right) ds_1 \\
&= \frac{ij}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \int_0^\infty s_1^{i-1} e^{-s_1(1-\theta)} \Gamma(j, s_1) ds_1,
\end{aligned}
$$

où $\Gamma(j, x)$ désigne la fonction gamma incomplète définie par

$$
\Gamma(j, x) = \int_x^\infty t^{j-1} e^{-t} dt = (j-1)! e^{-x} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{x^k}{k!}.
$$

Il en résulte que

$$
I_1 = \frac{ij!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k!} \int_0^\infty s_1^{k+i-1} e^{-s_1(2-\theta)} ds_1.
$$

En effectuant le changement de variable $x = s_1(2-\theta)$ et en utilisant le fait que

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!,$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{ij!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k!(2-\theta)^{k+i}} \int_0^\infty x^{k+i-1} e^{-x} dx \\
&= \frac{ij!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k!(2-\theta)^{k+i}} (k+i-1)! \\
&= \frac{i!j!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(2-\theta)^{k+i}} \frac{(k+i-1)!}{k!(i-1)!} \\
&= \frac{i!j!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(2-\theta)^{k+i}} \begin{pmatrix} i+k-1 \\ k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Des calculs similaires permettent de conclure que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{ij}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{s_1 > s_2\}} s_1^{i-1} s_2^{j-1} e^{-s_1 - s_2 + \theta s_2} ds_1 ds_2 \\
&= \frac{i!j!}{\lambda_1^i \lambda_2^j} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(2-\theta)^{k+j}} \begin{pmatrix} j+k-1 \\ k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration de la Proposition 7. □

La structure de corrélation du modèle proposé est obtenue comme conséquence du résultat précédent.

Corollaire 1. *Si* $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$, *alors*

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \frac{\theta}{\lambda_1 \lambda_2 (2-\theta)} \quad et \quad \operatorname{corr}(X_1, X_2) = \frac{\theta}{2-\theta}.$$

Démonstration. En utilisant la formule (5.5), on voit que

$$E(X_1 X_2) = \frac{2}{\lambda_1 \lambda_2 (2-\theta)}, \tag{5.6}$$

ce qui entraîne que

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{2}{\lambda_1\lambda_2(2-\theta)} - \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\theta}{\lambda_1\lambda_2(2-\theta)}.$$

De même, on a

$$\mathrm{corr}(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)\mathrm{var}(X_2)}} = \frac{\frac{\theta}{\lambda_1\lambda_2(2-\theta)}}{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{\theta}{2-\theta},$$

ce qui conclut l'argument. □

Ci-dessous, nous fournissons quelques moments mixtes qui seront utilisés pour établir la loi asymptotique de l'estimateur des moments du paramètre de dépendance θ.

Corollaire 2. *Si* $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$, *alors*

$$E(X_1^2 X_2) = \frac{2(4-\theta)}{\lambda_1^2 \lambda_2 (2-\theta)^2}, \tag{5.7}$$

$$E(X_1 X_2^2) = \frac{2(4-\theta)}{\lambda_1 \lambda_2^2 (2-\theta)^2}, \tag{5.8}$$

$$E(X_1^2 X_2^2) = \frac{8(4-\theta)}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 (2-\theta)^3}. \tag{5.9}$$

Démonstration. Les expressions (5.7), (5.8) et (5.9) s'obtiennent aisément en remplaçant (i, j) respectivement par $(2, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$ dans la formule (5.5). □

5.3.3 Propriété de fermeture par multiplication constante

Il est connu que si X est une variable aléatoire loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tout $a > 0$, aX est aussi une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ/a. La famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ satisfait à cette propriété, comme le montre le résultat suivant. Notons que la famille de lois exponentielles bivariées $\mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ de Marshall–Olkin ne vérifie pas cette propriété.

Proposition 8. *Si* $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$, *alors pour tous* $a_1 > 0$ *et* $a_2 > 0$, $(a_1X_1, a_2X_2) \sim \mathcal{BE}[(\lambda_1/a_1, \lambda_2/a_2), \theta]$.

Démonstration. Supposons que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$. Alors pour tous $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, on a

$$\begin{aligned}\Pr(a_1X_1 > x_1, a_2X_2 > x_2) &= \Pr(X_1 > x_1/a_1, X_2 > x_2/a_2) \\ &= e^{-\lambda_1 x_1/a_1 - \lambda_2 x_2/a_2 + \theta \min(\lambda_1 x_1/a_1, \lambda_2 x_2/a_2)}\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $(a_1X_1, a_2X_2) \sim \mathcal{BE}[(\lambda_1/a_1\lambda_2/a_2), \theta]$. □

Corollaire 3. $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ *si et seulement si* $(\lambda_1X_1, \lambda_2X_2) \sim \mathcal{MO}[(1,1), \theta]$.

Démonstration. Supposons que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$. D'après la Proposition 8, on voit que $(\lambda_1X_1, \lambda_2X_2) \sim \mathcal{BE}[(1,1), \theta]$. Puisque les familles $\mathcal{BE}[(1,1), \theta]$ et $\mathcal{MO}[(1,1), \theta]$ coïncident, alors $(\lambda_1X_1, \lambda_2X_2) \sim \mathcal{MO}[(1,1), \theta]$. On peut donc conclure.

Réciproquement, supposons que $(\lambda_1X_1, \lambda_2X_2) \sim \mathcal{MO}[(1,1), \theta]$, ce qui est équivalent à $(\lambda_1X_1, \lambda_2X_2) \sim \mathcal{BE}[(1,1), \theta]$. En utilisant à nouveau la Proposition 8, on voit que

$$(X_1, X_2) = \left(\frac{1}{\lambda_1}\lambda_1X_1, \frac{1}{\lambda_2}\lambda_2X_2\right) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta),$$

ce qui complète la démonstration. □

5.3.4 Fonction génératrice des moments de la famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$

Le Corollaire 3 peut être exploité afin de déduire l'expression de la fonction génératrice des moments de la famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ à partir de celle de Marshall–Olkin.

Proposition 9. *Si $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$, alors la fonction génératrice de (X_1, X_2) est exprimée, pour tous $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$, par*

$$\psi_{\lambda_1,\lambda_2,\theta}(t_1, t_2) = \frac{2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 t_1 + \lambda_1 t_2 - \theta(\lambda_1\lambda_2 - t_1 t_2)}{(2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 t_1 + \lambda_1 t_2 - \theta\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2 t_1 + \theta\lambda_1\lambda_2)(\lambda_1 t_2 + \theta\lambda_1\lambda_2)}.$$

Démonstration. Rappelons que la fonction génératrice des moments de $(X_1, X_2) \sim \mathcal{MO}(\Lambda, \theta)$ est donnée, pour tous $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$, par

$$\tilde{\psi}_{\lambda_1,\lambda_2,\theta}(t_1, t_2) = \mathrm{E}(e^{-t_1 X_1 - t_2 X_2}) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + t_1 + t_2 - \theta)\lambda_1\lambda_2 + t_1 t_2 \theta}{(\lambda_1 + \lambda_2 + t_1 + t_2 - \theta)(t_1 + \theta)(t_2 + \theta)}.$$

En particulier, pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, on a

$$\tilde{\psi}_{1,1,\theta}(t_1, t_2) = \frac{2 + t_1 + t_2 - \theta + t_1 t_2 \theta}{(2 + t_1 + t_2 - \theta)(t_1 + \theta)(t_2 + \theta)}.$$

D'après le Corollaire 3, on observe que la fonction génératrice des moments $\psi_{\lambda_1,\lambda_2,\theta}$ de $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ est liée à $\tilde{\psi}_{1,1,\theta}(t_1, t_2)$ comme suit :

$$\psi_{\lambda_1,\lambda_2,\theta}(t_1, t_2) = \mathrm{E}(e^{-t_1 X_1 - t_2 X_2}) = \mathrm{E}\left(e^{-\frac{t_1}{\lambda_1}\lambda_1 X_1 - \frac{t_2}{\lambda_2}\lambda_2 X_2}\right) = \tilde{\psi}_{1,1,\theta}\left(t_1/\lambda_1 . t_2/\lambda_2\right).$$

Par conséquent, on déduit que

$$\begin{aligned}
\psi_{\lambda_1,\lambda_2,\theta}(t_1, t_2) &= \frac{2 + \frac{t_1}{\lambda_1} + \frac{t_2}{\lambda_2} - \theta + \frac{t_1}{\lambda_1}\frac{t_2}{\lambda_2}\theta}{\left(2 + \frac{t_1}{\lambda_1} + \frac{t_2}{\lambda_2} - \theta\right)\left(\frac{t_1}{\lambda_1} + \theta\right)\left(\frac{t_2}{\lambda_2} + \theta\right)} \\
&= \frac{2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 t_1 + \lambda_1 t_2 - \theta(\lambda_1\lambda_2 - t_1 t_2)}{(2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 t_1 + \lambda_1 t_2 - \theta\lambda_1\lambda_2)(\lambda_2 t_1 + \theta\lambda_1\lambda_2)(\lambda_1 t_2 + \theta\lambda_1\lambda_2)}.
\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. □

5.4 Singularité de la famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$

Ci-dessous, on montre que la famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ comporte à la fois une partie singulière et une partie absolument continue. La présence d'une partie singulière découle du fait que si $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$, alors l'événement $\lambda_1 X_1 = \lambda_2 X_2$ se réalise avec une probabilité positive, tandis que la droite $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$ a une mesure de Lebesgue en deux dimensions qui est nulle.

Proposition 10. *La fonction de survie $\bar{H}$ de $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ s'écrit, pour tous $x_1 > 0, X_2 > 0$, sous la forme*

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \frac{2-2\theta}{2-\theta}\, \bar{H}_a(x_1, x_2) + \frac{\theta}{2-\theta}\, \bar{H}_s(x_1, x_2),$$

où $\bar{H}_s$ et $\bar{H}_a$ représentent respectivement les parties singulière et continue de la fonction survie $\bar{H}$, exprimées, pour tous $x_1 > 0, x_2 > 0$, par

$$\bar{H}_s(x_1, x_2) = e^{-(2-\theta)\max(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)}$$

et

$$\bar{H}_a(x_1, x_2) = \frac{2-\theta}{2(1-\theta)}\, e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 + \theta \max(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)} - \frac{\theta}{2(1-\theta)}\, e^{-(2-\theta)\max(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)}.$$

Démonstration. Soit $\tilde{H}$ la fonction de survie du couple aléatoire $(\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2) \sim \mathcal{MO}[(1,1), \theta]$. Selon Marshall et Olkin (1967), la fonction de survie $\tilde{H}$ peut se décomposer comme suit :

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = \frac{2-2\theta}{2-\theta}\tilde{H}_a(x_1, x_2) + \frac{\theta}{2-\theta}\tilde{H}_s(x_1, x_2),$$

où

$$\tilde{H}_s(x_1, x_2) = e^{-(2-\theta)\max(x_1, x_2)}$$

et

$$\tilde{H}_a(x_1,x_2) = \frac{2-\theta}{2(1-\theta)}\, e^{-x_1-x_2+\theta\max(x_1,x_2)} - \frac{\theta}{2(1-\theta)}\, e^{-(2-\theta)\max(x_1,x_2)}.$$

Ainsi, le résultat découle directement de la relation entre $\bar{H}$ et $\tilde{H}$, à savoir

$$\bar{H}(x_1,x_2) = \tilde{H}(\lambda_1 x_1, \lambda_1 x_2).$$

La démonstration est donc achevée. □

5.5 Densité de la famille $\mathcal{BE}(\Lambda,\theta)$

Dans cette section, nous allons établir la fonction de densité des parties singulière et absolument continue d'un couple aléatoire (X_1,X_2) de loi $\mathcal{BE}(\Lambda,\theta)$. Ce résultat sera utilisé plus tard pour examiner l'estimation du paramètre de dépendance θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Proposition 11. *La fonction de densité jointe de la partie absolument continue de $(X_1,X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda,\theta)$ est donnée par*

$$f_\theta(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{2-\theta}{2(1-\theta)}\, f_1(x_1,x_2) & si\ 0<\lambda_1 x_1<\lambda_2 x_2, \\ \frac{2-\theta}{2(1-\theta)}\, f_2(x_1,x_2) & si\ 0<\lambda_2 x_2<\lambda_1 x_1, \end{cases}$$

où

$$f_1(x_1,x_2) = \lambda_1\lambda_2(1-\theta)e^{-\lambda_1 x_1(1-\theta)-\lambda_2 x_2}, \quad f_2(x_1,x_2) = \lambda_1\lambda_2(1-\theta)e^{-\lambda_2 x_2(1-\theta)-\lambda_1 x_1}.$$

De plus, la densité de la partie singulière est donnée par $f_0(x) = (2-\theta)e^{-(2-\theta)x}$ sur l'ensemble $\{0<\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 = x\}$.

Démonstration. Les deux premières expressions de la fonction f_θ, à savoir f_1 et f_2, sont obtenues directement en dérivant partiellement la fonction de survie H_θ comme suit :

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{H}_\theta(x_1, x_2) \quad \text{pour tous } 0 < \lambda_1 x_1 < \lambda_2 x_2$$

et

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{H}_\theta(x_1, x_2) \quad \text{pour tous } 0 < \lambda_2 x_2 < \lambda_1 x_1.$$

Après quelques calculs, on déduit que

$$f_1(x_1, x_2) = \lambda_1 \lambda_2 (1-\theta) e^{-\lambda_1 x_1 (1-\theta) - \lambda_2 x_2} \quad \text{pour tous } 0 < \lambda_1 x_1 < \lambda_2 x_2$$

et

$$f_2(x_1, x_2) = \lambda_1 \lambda_2 (1-\theta) e^{-\lambda_2 x_2 (1-\theta) - \lambda_1 x_1} \quad \text{pour tous } 0 < \lambda_2 x_2 < \lambda_1 x_1.$$

En effectuant le changement de variables $s_1 = \lambda_1 x_1$ et $s_2 = \lambda_2 x_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{\lambda_1 x_1 < \lambda_2 x_2\}} f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&\qquad = \lambda_1 \lambda_2 (1-\theta) \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{s_1 < s_2\}} e^{-s_1(1-\theta) - s_2} \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} ds_1 ds_2 \\
&\qquad = (1-\theta) \int_0^\infty \left\{ \int_{s_1}^\infty e^{-s_1(1-\theta) - s_2} ds_2 \right\} ds_1 \\
&\qquad = (1-\theta) \int_0^\infty e^{-s_1(1-\theta)} \left(\int_{s_1}^\infty e^{-s_2} ds_2 \right) ds_1 \\
&\qquad = (1-\theta) \int_0^\infty e^{-s_1(2-\theta)} ds_1 \\
&\qquad = \frac{1-\theta}{2-\theta}.
\end{aligned}$$

De même, on peut montrer que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{\lambda_2 x_2 < \lambda_1 x_1\}} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1-\theta}{2-\theta}.$$

On en conclut que le poids associé à la partie absolument continue de la loi de la paire (X_1, X_2) est égal à

$$\frac{1-\theta}{2-\theta} + \frac{1-\theta}{2-\theta} = \frac{2(1-\theta)}{2-\theta}.$$

Par conséquent, le poids de la partie singulière est

$$1 - \frac{2(1-\theta)}{2-\theta} = \frac{\theta}{2-\theta}.$$

Il s'agit là de la probabilité de l'événement $\{\lambda_1 X_1 = \lambda_2 X_2\}$. Sur cet ensemble, il découle des considérations précédentes que la fonction de survie de la partie singulière est donnée, pour tout $x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 \in [0, \infty)$, par

$$e^{-(2-\theta)\max(x_1,x_2)} = e^{-(2-\theta)x}.$$

Autrement dit, f_0 est une densité exponentielle d'espérance $1/(2-\theta)$. Ceci complète la démonstration. □

Remarque 1. *La fonction de densité jointe de $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ peut être déduite directement à partir de la Proposition 10. En effet, les fonctions f_0 et f_1 s'obtiennent en dérivant successivement par rapport à x_1 et x_2 la partie absolument continue de la fonction survie $\bar{H}$, alors que f_0 est le résultat de la dérivée première de la composante singulière de $\bar{H}$ par rapport à $x \in \{x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2\}$. Plus spécifiquement, on a*

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{2(1-\theta)}{2-\theta} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{H}_a(x_1, x_2) \quad \textit{pour tous } 0 < \lambda_1 x_1 < \lambda_2 x_2,$$

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{2(1-\theta)}{2-\theta} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \bar{H}_a(x_1, x_2) \quad \textit{pour tous } 0 < \lambda_2 x_2 < \lambda_1 x_1,$$

$$f_0(x) = -e^{-(2-\theta)x} \quad \textit{pour tout } 0 < x = \lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2.$$

5.5.1 Propriété sans mémoire de la loi $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$

Rappelons que la loi exponentielle univariée est caractérisée par la propriété sans mémoire. Ceci signifie que si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ alors, pour tous $s, t > 0$,

$$\Pr(X > s + t | X > t) = \Pr(X > s).$$

L'équation précédente s'interprète comme le fait que la probabilité de survivre au temps $s+t$ compte tenu de la survie au temps t est exactement la probabilité marginale de survie au temps s. Cette propriété se traduit aussi en terme de la fonction de survie $\bar{F}$ de X. En fait, il est clair que, pour tous $s, t > 0$,

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

Dans ce qui suit, nous examinons une extension bivariée de cette propriété spécifique pour la famille $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$.

Proposition 12. *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2. Alors $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$ si et seulement si pour tous $s_1 > 0. s_2 > 0$ et $t > 0$,*

$$\Pr\left(X_1 > s_1 + \frac{t}{\lambda_1}, X_2 > s_2 + \frac{t}{\lambda_2} \mid X_1 > \frac{t}{\lambda_1}, X_2 > \frac{t}{\lambda_2}\right) = \Pr(X_1 > s_1 X_2 > s_2)$$

ou, d'une manière équivalente,

$$\bar{H}\left(s_1 + t/\lambda_1, s_2 + t/\lambda_2\right) = \bar{H}\left(s_1, s_2\right) \bar{H}\left(t/\lambda_1, t/\lambda_2\right), \tag{5.10}$$

où $\bar{H}$ désigne la fonction de survie de (X_1, X_2).

Démonstration. Supposons que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$. D'après l'expression de la survie de (X_1, X_2) décrite dans l'équation (5.4), on voit que

$$\begin{aligned}
\bar{H}\left(s_1 + t/\lambda_1, s_2 + t/\lambda_2\right) &= e^{-\lambda_1(s_1+t/\lambda_1)-\lambda_2(s_2+t/\lambda_2)+\theta\min\{\lambda_1(s_1+t/\lambda_1),\lambda_2(s_2+t/\lambda_2)\}} \\
&= e^{-\lambda_1 s_1 - \lambda_2 s_2 + \theta\min(\lambda_1 s_1, \lambda_2 s_2)} \times e^{-t(2-\theta)} \\
&= \bar{H}\left(s_1, s_2\right) \bar{H}\left(t/\lambda_1, t/\lambda_2\right).
\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que la fonction de survie $\bar{H}$ de (X_1, X_2) satisfasse la propriété (5.10). Soit $\tilde{H}$ la fonction de survie associée au couple aléatoire $(\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2)$.

Il est clair que $\tilde{H}$ est liée à $\bar{H}$ par la relation

$$\tilde{H}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \bar{H}(x_1, x_2),$$

ce qui implique que $\tilde{H}$ satisfait, pour tous $s_1 > 0, s_2 > 0$ et $t > 0$, la relation

$$\tilde{H}(\lambda_1 s_1 + t, \lambda_2 s_2 + t) = \tilde{H}(\lambda_1 s_1, \lambda_2 s_2)\tilde{H}(t, t)$$

ou d'une manière équivalente, pour tous $s_1 > 0, s_2 > 0$ et $t > 0$,

$$\tilde{H}(s_1 + t, s_2 + t) = \tilde{H}(s_1, s_2)\tilde{H}(t, t). \tag{5.11}$$

En particulier, pour tous $s > 0$ et $t > 0$, on a

$$\tilde{H}(s + t, s + t) = \tilde{H}(s, s)\tilde{H}(t, t),$$

ce qui montre que la fonction $t \mapsto \tilde{H}(t, t)$ est de la forme exponentielle. Ceci signifie qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\tilde{H}(t, t) = e^{-\alpha t}.$$

En choisissant d'une part $s_1 = s$ et $s_2 = 0$ et d'autre part $s_1 = 0$ et $s_2 = s$, il vient de la relation (5.11) que

$$\tilde{H}(s + t, t) = \tilde{H}(s, 0)\tilde{H}(t, t) \quad \text{et} \quad \tilde{H}(t, s + t) = \tilde{H}(0, s)\tilde{H}(t, t).$$

Comme $\tilde{H}(s, 0)$ et $\tilde{H}(0, s)$ représentent respectivement les fonctions de survie de $\lambda_1 X_1 \sim$Exp(1) et $\lambda_2 X_2 \sim$Exp(1), les relations précédentes nous fournissent

$$\tilde{H}(s + t, t) = \tilde{H}(t, s + t) = e^{-s-\alpha t}.$$

Les égalités ci-dessus montrent que pour tous $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ tels que $x_1 \geq x_2$, on a

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = \tilde{H}\{(x_1 - x_2) + x_2, x_2\} = e^{-(x_1-x_2)-\alpha x_2} = e^{-x_1-x_2+(2-\alpha)x_2}.$$

D'une manière similaire, on a, pour tous $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ tels que $x_2 \geq x_1$,

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = e^{-x_1-x_2+(2-\alpha)x_1},$$

ce qui prouve que

$$\tilde{H}(x_1, x_2) = e^{-x_1-x_2+(2-\alpha)\min(x_1,x_2)}.$$

Comme $\tilde{H}$ n'est une fonction de survie que si $\theta = 2 - \alpha \in [0, 1]$, on peut conclure que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$. □

5.6 Estimation des paramètres du modèle $\mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$

5.6.1 Méthode des moments

Dans cette section, nous nous intéressons à l'estimation des paramètres $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in (0, \infty)^2$ et $\theta \in [0, 1]$ par la méthode des moments. Pour ce faire, soient $(X_{11}, X_{12}), \ldots, (X_{n1}, X_{n2})$ des copies indépendantes du couple aléatoire $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$. Le principe de cette méthode consiste à déduire les estimateurs des paramètres λ_1, λ_2 et θ en identifiant les moments théoriques aux moments empiriques. Ceci revient à résoudre les équations suivantes :

$$\mathrm{E}(X_k) = \bar{X}_k, \quad k \in \{1, 2\} \quad \text{et} \quad \mathrm{cov}(X_1, X_2) = m_{\lambda_1,\lambda_2}(\theta) = S_{12}, \tag{5.12}$$

où

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ik}, \quad k \in \{1,2\} \quad \text{et} \quad S_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n}(X_{\ell 1} - \bar{X}_1)(X_{\ell 2} - \bar{X}_2).$$

En utilisant le fait que

$$\mathrm{E}(X_k) = \frac{1}{\lambda_k}, \quad k \in \{1,2\} \quad \text{et} \quad m_{\lambda_1,\lambda_2}(\theta) = \frac{\theta}{\lambda_1\lambda_2(2-\theta)}, \tag{5.13}$$

il découle de (5.12) et (5.13) que

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{\bar{X}_k}, \quad k \in \{1,2\} \quad \text{et} \quad \hat{\theta} = \frac{2\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 S_{12}}{1+\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 S_{12}} = \frac{2S_{12}}{\bar{X}_1\bar{X}_2 + S_{12}}.$$

Il est connu que la variance échantillonnale S_{12} est un estimateur convergent de $m_{\lambda_1,\lambda_2}(\theta)$ et asymptotiquement normal, comme le stipule le Théorème 8 à la page 52 du livre de Ferguson (1996). Plus précisément, lorsque $n \to \infty$, on a

$$\sqrt{n}\,\{S_{12} - m_{\lambda_1,\lambda_2}(\theta)\} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left[0, \sigma^2(\theta, \lambda_1, \lambda_2)\right],$$

où

$$\sigma^2(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{var}\{(X_1 - \lambda_1^{-1})(X_2 - \lambda_2^{-1})\}.$$

Par conséquent, une application de la méthode Delta (aussi appelée lemme de Slutsky) permet d'établir la loi asymptotique de l'estimateur des moments $\hat{\theta}$ qui sera valide pour tout $\theta \in (0,1)$.

Proposition 13. *Lorsque $n \to \infty$, on a*

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left[0, \frac{16(2-\theta+\theta^2)}{(1-\lambda_1\lambda_2\theta)^2(2-\theta)^3}\right].$$

Démonstration. En appliquant la méthode Delta (Lemme de Slutsky), on a

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left[0, \left\{g'_{\lambda_1\lambda_2}(\theta)\right\}^2 \sigma^2(\theta, \lambda_1, \lambda_2)\right],$$

où pour tout $\theta \in [0,1)$, $g_{\lambda_1\lambda_2}(\theta) = m^{-1}_{\lambda_1,\lambda_2}(\theta)$. On commence par calculer le terme

$$\begin{aligned}\sigma^2(\theta,\lambda_1,\lambda_2) &= \operatorname{var}\{(X_1-\lambda_1^{-1})(X_2-\lambda_2^{-1})\}\\ &= \mathrm{E}\{(X_1-\lambda_1^{-1})^2(X_2-\lambda_2^{-1})^2\} - \operatorname{cov}^2(X_1,X_2) \qquad (5.14)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{(X_1-\lambda_1^{-1})^2(X_2-\lambda_2^{-1})^2\} &= \mathrm{E}(X_1^2X_2^2) - \frac{2}{\lambda_2}\mathrm{E}(X_1^2X_2) - \frac{2}{\lambda_1}\mathrm{E}(X_1X_2^2)\\ &+ \frac{4}{\lambda_1\lambda_2}\mathrm{E}(X_1X_2) + \frac{1}{\lambda_2^2}\mathrm{E}(X_1^2) + \frac{1}{\lambda_1^2}\mathrm{E}(X_2^2)\\ &- \frac{2}{\lambda_1\lambda_2^2}\mathrm{E}(X_1) - \frac{2}{\lambda_1^2\lambda_2}\mathrm{E}(X_2) + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}. \qquad (5.15)\end{aligned}$$

Puisque $X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$, on sait que

$$\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \mathrm{E}(X_2) = \frac{1}{\lambda_2}, \quad \mathrm{E}(X_1^2) = \frac{2}{\lambda_1^2}, \quad \mathrm{E}(X_2^2) = \frac{2}{\lambda_2^2}.$$

Par suite, l'équation (5.15) devient

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left\{(X_1-\lambda_1^{-1})^2(X_2-\lambda_2^{-1})^2\right\} &= \mathrm{E}(X_1^2X_2^2) - \frac{2}{\lambda_2}\mathrm{E}(X_1^2X_2) - \frac{2}{\lambda_1}\mathrm{E}(X_1X_2^2)\\ &+ \frac{4}{\lambda_1\lambda_2}E(X_1X_2) + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}.\end{aligned}$$

En insérant les expressions (5.6), (5.7), (5.8) et (5.9) dans la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{(X_1-\lambda_1^{-1})^2(X_2-\lambda_2^{-1})^2\} &= \frac{8(4-\theta)}{\lambda_1^2\lambda_2^2(2-\theta)^3} - \frac{8(4-\theta)}{\lambda_1^2\lambda_2^2(2-\theta)^2}\\ &+ \frac{8}{\lambda_1^2\lambda_2^2(2-\theta)} + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\operatorname{cov}^2(X_1,X_2) = \frac{\theta^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2(2-\theta)^2}$$

et en combinant (5.14), (5.15) et (5.6), on déduit que

$$\sigma^2(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\left[\frac{8(4-\theta)}{(2-\theta)^3} - \frac{\{8(4-\theta)+\theta^2\}}{(2-\theta)^2} + \frac{8}{2-\theta} + 1\right].$$

Après quelques simplifications, la formule précédente se réduit à

$$\sigma^2(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{4(2-\theta+\theta^2)}{\lambda_1^2\lambda_2^2(2-\theta)^3}.$$

Rappelons que

$$m_{\lambda_1\lambda_2}(\theta) = \text{cov}\,(X_1, X_2) = \frac{\theta}{\lambda_1\lambda_2(2-\theta)}.$$

Après quelques calculs élémentaires, on voit que

$$g_{\lambda_1\lambda_2}(\theta) = \frac{2\lambda_1\lambda_2\theta}{1+\lambda_1\lambda_2\theta} \quad \text{et} \quad g'_{\lambda_1\lambda_2}(\theta) = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(1+\lambda_1\lambda_2\theta)^2}.$$

Par conséquent, la variance asymptotique de l'estimateur des moments de θ est explicitement donnée par

$$\{g'_{\lambda_1\lambda_2}(\theta)\}^2\sigma^2(\theta, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{16(2-\theta+\theta^2)}{(1-\lambda_1\lambda_2\theta)^2(2-\theta)^3}.$$

5.6.2 Méthode de vraisemblance maximale

L'objectif de cette section est d'examiner l'estimation des paramètres $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in (0, \infty)^2$ et $\theta \in [0, 1]$ par la méthode de vraisemblance maximale. Pour ce faire, nous allons adopter la méthode d'inférence pour les marginales. Le principe de cette méthode consiste à estimer dans un premier temps les paramètres des lois marginales et ensuite estimer le paramètre de dépendance en maximisant la pseudo-vraisemblance. Plus spécifiquement, soient $(X_{11}, X_{12}), \ldots, (X_{n1}, X_{n2})$ des copies mutuellement indépendantes du couple aléatoire $(X_1, X_2) \sim \mathcal{BE}(\Lambda, \theta)$. Notons que les estimateurs de vraisemblance maximale des paramètres marginaux λ_1 et λ_2 sont

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{\bar{X}_1} \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{\bar{X}_2}$$

avec $\bar{X}_k = (X_{1k} + \cdots + X_{nk})/n$ pour $k \in \{1,2\}$. Pour estimer le paramètre de dépendance, on remplacera λ_k par $\hat{\lambda}_k$ pour $k \in \{1,2\}$ dans la vraisemblance. Puis, on maximise cette dernière par rapport à θ. Définissons d'abord les ensembles

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{i \in \{1,\ldots,n\} : \hat{\lambda}_1 X_{i1} < \hat{\lambda}_2 X_{i2}\},\\
\mathcal{A}_2 &= \{i \in \{1,\ldots,n\} : \hat{\lambda}_1 X_{i1} > \hat{\lambda}_2 X_{i2}\},\\
\mathcal{A}_3 &= \{i \in \{1,\ldots,n\} : \hat{\lambda}_1 X_{i1} = \hat{\lambda}_2 X_{i2}\},
\end{aligned}$$

et notons par n_1, n_2 et n_3 les cardinaux respectifs des ensembles $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$. Ainsi, la vraisemblance (calculée par rapport à la somme des mesures de Lebesgue sur la droite réelle et dans le plan) est donnée par

$$\begin{aligned}
L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_{i1}, X_{i2})\\
&= \prod_{i \in \mathcal{A}_1} f_\theta(X_{i1}, X_{i2}) \prod_{i \in \mathcal{A}_2} f_\theta(X_{i1}, X_{i2}) \prod_{i \in \mathcal{A}_3} f_\theta(X_{i1}, X_{i2})\\
&= \prod_{i \in \mathcal{A}_1} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 (1-\theta) e^{-\hat{\lambda}_1 X_{i1}(1-\theta) - \hat{\lambda}_2 X_{i2}}\\
&\qquad \times \prod_{i \in \mathcal{A}_2} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 (1-\theta) e^{-\hat{\lambda}_2 X_{i2}(1-\theta) - \hat{\lambda}_1 X_{i1}}\\
&\qquad\qquad \times \prod_{i \in \mathcal{A}_3} \theta e^{-(2-\theta)\hat{\lambda}_1 X_{i1}},
\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire aussi comme suit

$$\begin{aligned}
L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \theta) &= \hat{\lambda}_1^{n_1} \hat{\lambda}_2^{n_1} (1-\theta)^{n_1} e^{-\{\hat{\lambda}_1 (1-\theta) n_1 \bar{X}_{1(1)} + \hat{\lambda}_2 n_1 \bar{X}_{2(1)}\}}\\
&\qquad \times \hat{\lambda}_1^{n_2} \hat{\lambda}_2^{n_2} (1-\theta)^{n_2} e^{-\{\hat{\lambda}_2 (1-\theta) n_2 \bar{X}_{2(2)} + \hat{\lambda}_1 n_2 \bar{X}_{1(2)}\}}\\
&\qquad\qquad \times \theta^{n_3} e^{-(2-\theta)\hat{\lambda}_1 n_3 \bar{X}_{1(3)}}
\end{aligned}$$

où, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\bar{X}_{1(k)} = \frac{1}{n_1} \sum_{i \in \mathcal{A}_k} X_{i1} \quad \text{et} \quad \bar{X}_{2(k)} = \frac{1}{n_2} \sum_{i \in \mathcal{A}_k} X_{i2}.$$

Par conséquent, la log-vraisemblance est

$$\begin{aligned} H(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \theta) &= \ln\{L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \theta)\} \\ &= n_1 \ln(1-\theta) - \hat{\lambda}_1(1-\theta) n_1 \bar{X}_{1(1)} - \hat{\lambda}_2 n_1 \bar{X}_{2(1)} \\ &\quad + n_2 \ln(1-\theta) - \hat{\lambda}_2(1-\theta) n_2 \bar{X}_{2(2)} - \hat{\lambda}_1 n_2 \bar{X}_{1(2)} \\ &\quad + n_3 \ln(\theta) - (2-\theta)\hat{\lambda}_1 n_3 \bar{X}_{1(3)} \\ &\quad + (n_1 + n_2) \ln(\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2). \end{aligned}$$

Pour identifier l'estimateur à vraisemblance maximale, on cherche d'abord la dérivée de la log-vraisemblance, qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial \theta} H(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \theta) = -\frac{n_1}{1-\theta} - \frac{n_2}{1-\theta} + \frac{n_3}{\theta} + n_1 \hat{\lambda}_1 \bar{X}_{1(1)} + n_2 \hat{\lambda}_2 \bar{X}_{2(2)} + n_3 \hat{\lambda}_1 \bar{X}_{1(3)}.$$

Comme, pour tout $\theta \in (0, 1)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} H(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \theta) = -\frac{n_1}{(1-\theta)^2} - \frac{n_2}{(1-\theta)^2} - \frac{n_3}{\theta^2} \leq 0,$$

l'estimateur à vraisemblance maximale de θ sera la solution $\hat{\theta}$ de l'équation

$$-\frac{n_1}{1-\hat{\theta}} - \frac{n_2}{1-\hat{\theta}} + \frac{n_3}{\hat{\theta}} + n_1 \hat{\lambda}_1 \bar{X}_{1(1)} + n_2 \hat{\lambda}_2 \bar{X}_{2(2)} + n_3 \hat{\lambda}_1 \bar{X}_{1(3)} = 0.$$

En posant $A = n_1 \hat{\lambda}_1 \bar{X}_{1(1)} + n_2 \hat{\lambda}_2 \bar{X}_{2(2)} + n_3 \hat{\lambda}_1 \bar{X}_{1(3)}$, l'équation précédente devient

$$\frac{n\hat{\theta} - n_3}{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})} = A,$$

qui est équivalent à l'équation de second degré suivante :

$$A\hat{\theta}^2 + (n - A)\hat{\theta} - n_3 = 0.$$

Cette équation possède deux solutions distinctes exprimées par

$$\frac{-(n-A) \pm \sqrt{(n-A)^2 + 4n_3A}}{2A}.$$

La solution appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, qui sera l'estimateur à vraisemblance maximale, est

$$\hat{\theta} = \frac{-(n-A) + \sqrt{(n-A)^2 + 4n_3A}}{2A}.$$

En effet, on peut facilement vérifier que la quantité précédente est toujours positive et que

$$\frac{-(n-A) + \sqrt{(n-A)^2 + 4n_3A}}{2A} \leq 1 \iff n_3 \leq n,$$

relation qui est toujours vraie.

5.7 Étude des performances des estimateurs des paramètres de dépendance par simulation

Nous rappelons que nous avons établi deux estimateurs du paramètre de dépendance θ. Le premier estimateur $\hat{\theta}_{MM}$ se base sur la méthode des moments. Pour sa part, le deuxième estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ est fondé sur la méthode du maximum de vraisemblance. Dans cette section, nous allons comparer les deux estimateurs par le critère de l'erreur quadratique moyenne (EQM). Nous allons simuler plusieurs scénarios en prenant différentes valeurs du paramètre de dépendance θ. Nous choisirons également plusieurs tailles d'échantillon.

Les tableaux suivants, fondés sur $k = 1000$ répétitions, présentent la valeur de l'EQM multipliée par 10^4 pour faciliter la lecture et la comparaison des résultats.

$\theta = 0.9$

Taille n	50	100	300	1000
EQM($\hat{\theta}_{MV}$)	12,979	31,700	0,403	1,945
EQM($\hat{\theta}_{MM}$)	19,495	7,712	0,630	0,195

$\theta = 0.8$

Taille n	50	100	300	1000
EQM($\hat{\theta}_{MV}$)	16,694	0,935	2,928	8,133
EQM($\hat{\theta}_{MM}$)	15,694	3,477	0,339	0,111

$\theta = 0.6$

Taille n	50	100	300	1000
EQM($\hat{\theta}_{MV}$)	54,486	7,443	1,485	14,023
EQM($\hat{\theta}_{MM}$)	9,176	1,349	0,294	0,099

$\theta = 0.4$

Taille n	50	100	300	1000
EQM($\hat{\theta}_{MV}$)	0,067	5,225	7,578	1,692
EQM($\hat{\theta}_{MM}$)	13,311	1,748	0,106	0,095

$\theta = 0.2$

Taille n	50	100	300	1000
EQM($\hat{\theta}_{MV}$)	2,511	0,147	8,459	21,559
EQM($\hat{\theta}_{MM}$)	11,306	3,230	1,038	0,048

$\theta = 0.1$

Taille n	50	100	300	1000
EQM($\hat{\theta}_{MV}$)	15.708	19,802	0,175	3,971
EQM($\hat{\theta}_{MM}$)	7.275	3,548	1,236	0,201

Pour ce qui concerne la méthode des moments, les résultats sont cohérents, au sens où l'EQM diminue à mesure que la taille d'échantillon augmente. Il est également intéressant de mentionner que la relation entre l'EQM et la valeur attribuée à θ n'est pas monotone.

Pour ce qui touche la méthode du maximum de vraisemblance, les résultats sont très variables d'une taille à l'autre, ce qui jette du discrédit sur leur validité ou sur la méthode. En l'état, aucune comparaison avec la méthode des moments n'est possible sur cette base. Une piste de solution pourrait être de vérifier la convergence ou la non-convergence de l'estimateur obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance. En prenant pour exemple la valeur $\theta = 0.6, n = 50$ pour lequel l'EQM se situe à 54,486 comme point de départ, nous avons simulé de nouvelles données pour différentes valeurs de θ s'approchant de 0.6. Cela a pour but de vérifier si une certaine convergence est observée.

Valeur θ	0.5955	0.595	0.59	0.55
EQM($\hat{\theta}_{MV}$)	54,892	57,398	61,318	79,863

Il faudrait étudier plus en profondeur cette piste pour conclure qu'il y a bien convergence de l'estimateur obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance.

5.7.1 Intervalle de confiance pour la méthode des moments

En l'absence de fiabilité de la méthode du maximum de vraisemblance, nous ne pouvons que recommander l'emploi de la méthode des moments pour le moment. Grâce à la Proposition 13, cette méthode permet d'ailleurs de calculer un intervalle de confiance du paramètre de dépendance. En effet, cette proposition garantit la normalité asymptotique de l'estimateur des moments à savoir,

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_{MM} - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left[0, \frac{16(2-\theta+\theta^2)}{(1-\lambda_1\lambda_2\theta)^2(2-\theta)^3}\right].$$

Ceci permet de construire un intervalle de confiance asymptotique pour le paramètre de dépendance θ. Ainsi, les limites de l'intervalle de confiance à $100 \times (1-\alpha)\%$ sont données par la formule

$$\hat{\theta}_{MM} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{16(2-\hat{\theta}_{MM}+\hat{\theta}_{MM}^2)}{n(1-\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\theta}_{MM})^2(2-\hat{\theta}_{MM})^3}}.$$

À titre d'illustration, voici des exemples de calcul d'intervalle de confiance à 95% pour différentes tailles d'échantillon et deux valeurs du paramètre de dépendance, soit $\theta \in \{0.5, 0.8\}$.

$\theta = 0.8$

Taille n	50	100	300	1000
$\hat{\theta}_{MM}$	0.773	0.798	0.794	0.803
IC à 95%	[0,470 ;1]	[0,585 ; 1]	[0,671 ; 0,917]	[0,736 ; 0,870]

$\theta = 0.5$

Taille n	50	100	300	1000
$\hat{\theta}_{MM}$	0,454	0,504	0,491	0,496
IC à 95%	[0,012 ; 0,897]	[0,223 ; 0,784]	[0,325 ; 0,657]	[0,406 ; 0,586]

Nous constatons que les valeurs générées pour le paramètre de dépendance θ se retrouvent à chaque fois dans l'intervalle de confiance.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons introduit et étudié les principales propriétés d'une nouvelle famille de lois exponentielles bivariées. Cette famille de lois a été construite selon le principe des chocs comonotones.

Après avoir rappelé la notion de comonotonicité, nous avons défini le modèle et montré qu'il permet de couvrir tous les degrés possibles de dépendance positive, ce qui constitue une amélioration appréciable par rapport au modèle à choc commun de Marshall et Olkin (1967). Nous avons ensuite présenté la fonction génératrice des moments et les moments mixtes de la nouvelle famille de lois. Nous avons aussi documenté le fait que la famille comporte des parties absolument continue et singulière.

Pour ce qui concerne l'inférence dans le cadre du nouveau modèle, nous avons spécifiquement proposé deux estimateurs du paramètre de dépendance : un estimateur des moments et un estimateur à vraisemblance maximale. Nous avons pu établir la loi limite de l'estimateur des moments, mais pas celle de l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui semble complexe du fait que les conditions classiques de normalité asymptotique ne sont pas vérifiées.

Par le biais d'une étude de simulation, nous avons étudié la performance des estimateurs pour plusieurs valeurs fixées et différentes tailles d'échantillon. L'estimateur des moments semble généralement satisfaisant et il est possible d'y adjoindre un intervalle de confiance asymptotique. Son emploi peut donc être recommandé. On ne peut pas en dire autant de l'estimateur du maximum de vraisemblance, dont l'erreur quadratique moyenne ne semble pas décroître à mesure que la taille d'échantillon augmente. Cette question devra faire l'objet d'une étude plus approfondie. De même, la méthode que nous avons développée pourra être appliquée à différents jeux de données, par exemple pour évaluer le risque lié aux assurances-vie ou la récurrence du cancer abordé dans l'article de Sankaran (2008).

Dans des travaux futurs, il serait en outre intéressant d'étendre les résultats présentés dans ce mémoire au cas des lois exponentielles multivariées.

Bibliographie

[1] T.S. Ferguson (1996). A Course in Large Sample Theory. *Chapman & Hall*, Londres.

[2] C. Genest & R.J. MacKay (1986). Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *The Canadian Journal of Statistics*, 14, 145–159.

[3] C. Genest, M. Mesfioui, J. Schulz (2018). A new bivariate Poisson common shock model covering all possible degrees of dependence, *Statistics and Probability Letters*, 140, 202–209.

[4] A.W. Marshall & I. Olkin (1967). A generalized bivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 4, 291–302.

[5] P.G. Sankaran (2008). Association measures for bivariate lifetime data. *Communications in statistics – Theory and methods*, 37, 3228–3249.

[6] A. Sklar (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, 8, 229–231.