UQTR Université du Québec à Trois-Rivières

Fonds de recherche Nature et technologies Québec

ISM Institut des sciences mathématiques

UQTR ÉCOLE D'INGÉNIERIE

# Plonger dans les formules pour mieux refaire surface

**Vincent Chalifour**

## Résumé

La théorie des surfaces fait appel au calcul différentiel afin de considérer une surface localement comme étant une déformation d'un plan dans l'espace.

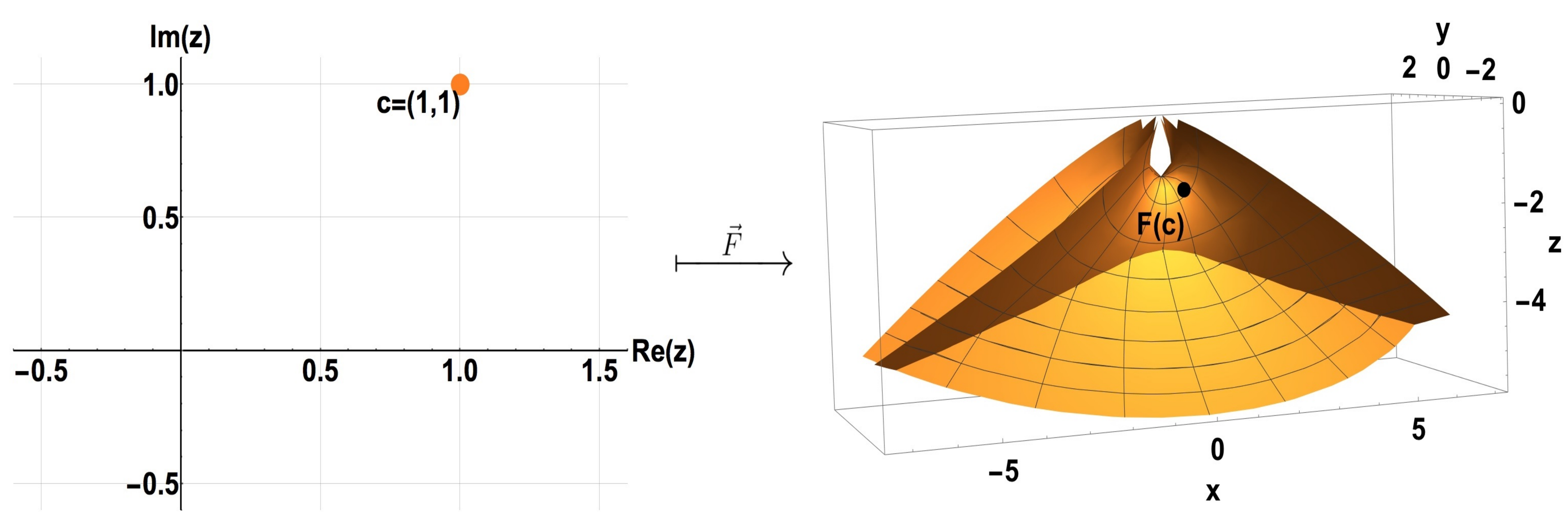
Au XIXème siècle, Karl Weierstrass a montré qu'il existe un lien entre la formule d'Enneper-Weierstrass décrivant une surface dans l'espace à 3 dimensions $\mathbb{R}^3$ et les équations de Gauss-Weingarten (GW) auxquelles est soumise la surface. Dans [1], Bobenko a étendu ces résultats aux matrices de dimensions $2 \times 2$.

Nous montrons que sous certaines hypothèses, ce lien s'exprime par une équation différentielle ordinaire (EDO). Cette EDO permet de déduire la forme explicite de la surface tout en solutionnant les équations GW. Plusieurs fonctions de la physique sont solution d'une EDO de ce type. Nous en tirons profit afin de calculer les surfaces décrivant des polynômes orthogonaux classiques : Legendre, Bessel, Chebyshev, Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel et Gegenbauer.

## Fonction d'immersion décrivant la surface

Soit $\vec{F}$ la fonction associant à tout point $c$ de son domaine $D_F$ un point $(x, y, z)$ de la surface dans l'espace à 3 dimensions $\mathbb{R}^3$

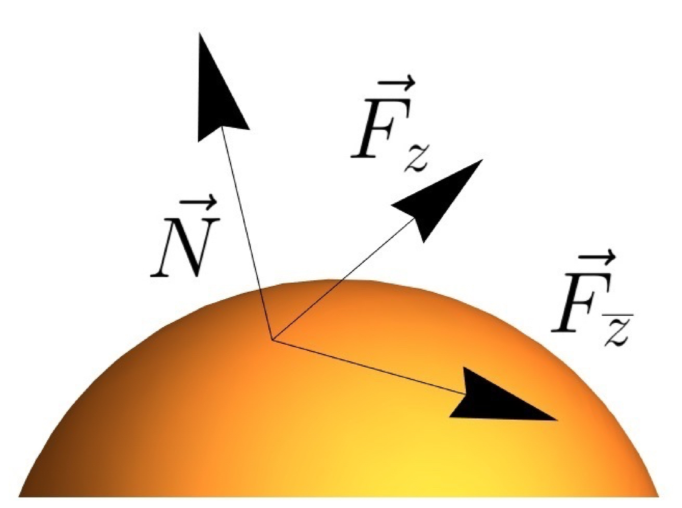
$$\vec{F}: \quad c \in \mathcal{D}_F \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$




Immersion du point $c = (1, 1)$ dans l'espace à 3 dimensions $\mathbb{R}^3$.

## Repère mobile

La fonction $F(z, \bar{z})$ est une **paramétrisation** de la surface. Elle est dite conforme si elle préserve les angles et l'orientation. Cette cohérence géométrique est assurée par des contraintes liées au **repère mobile** sur la surface. Ce repère est formé de deux vecteurs tangents $\vec{F}_z, \vec{F}_{\bar{z}}$ et d'un vecteur normal $\vec{N}$.




$$\vec{F}_z \cdot \vec{N} = 0, \quad \text{(perpendiculaires)}$$
$$\vec{F}_{\bar{z}} \cdot \vec{N} = 0, \quad \text{(perpendiculaires)}$$
$$\vec{N} \cdot \vec{N} = 1. \quad \text{(vecteur unitaire)}$$

Repère mobile sur la surface.

## Surface minimale

La courbure moyenne, notée $H$, est une caractéristique fondamentale de la surface. On étudie celle-ci **localement**. La définition suivante montre qu'il est possible d'**optimiser** l'aire de la surface et revêt donc une grande utilité dans divers problèmes en physique.

**Définition**: Une **surface minimale** $S$ est une surface qui respecte un ensemble de contraintes tout en minimisant son aire. Sa courbure moyenne est alors nulle $(H = 0)$.

## Formule d'Enneper-Weierstrass

La formule d'Enneper-Weierstrass décrit une surface minimale dans $\mathbb{R}^3$ en termes de fonctions arbitraires $\eta(z)$ et $\chi(z)$ d'une seule variable complexe $z = x + iy$

$$\vec{F}(z) = \left( \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{z_0}^{z} (1-\chi^2)\eta^2 d\xi\right],\ -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{z_0}^{z} (1+\chi^2)\eta^2 d\xi\right],\ \mathrm{Re}\left[\int_{z_0}^{z} \chi\eta^2 d\xi\right] \right) \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

## Equations de Gauss-Weingarten

La surface est soumise aux équations de Gauss-Weingarten (GW) décrites par le **problème linéaire**

$$\Psi_z = \mathcal{U}\Psi, \qquad \Psi_{\bar{z}} = \mathcal{V}\Psi. \tag{3}$$

Les matrices de potentiel $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont présentées dans [2]. L'inconnue à déterminer est la fonction d'onde $\Psi$. Nous présentons une méthode de **transformations de jauges** faisant appel à la théorie des groupes afin de simplifier le problème linéaire (3) et d'y introduire les fonctions $\eta$ et $\chi$ de (2):

$$\tilde{\Psi}_z = \tilde{\mathcal{U}}(\eta, \chi)\tilde{\Psi}, \qquad \tilde{\Psi}_{\bar{z}} = 0. \tag{4}$$

## EDO découlant des surfaces minimales

La sélection de surfaces de courbure moyenne nulle $(H = 0)$ entraîne une forme particulière du problème simplifié (4). En posant $\Psi = (f, g)^T$, le problème devient

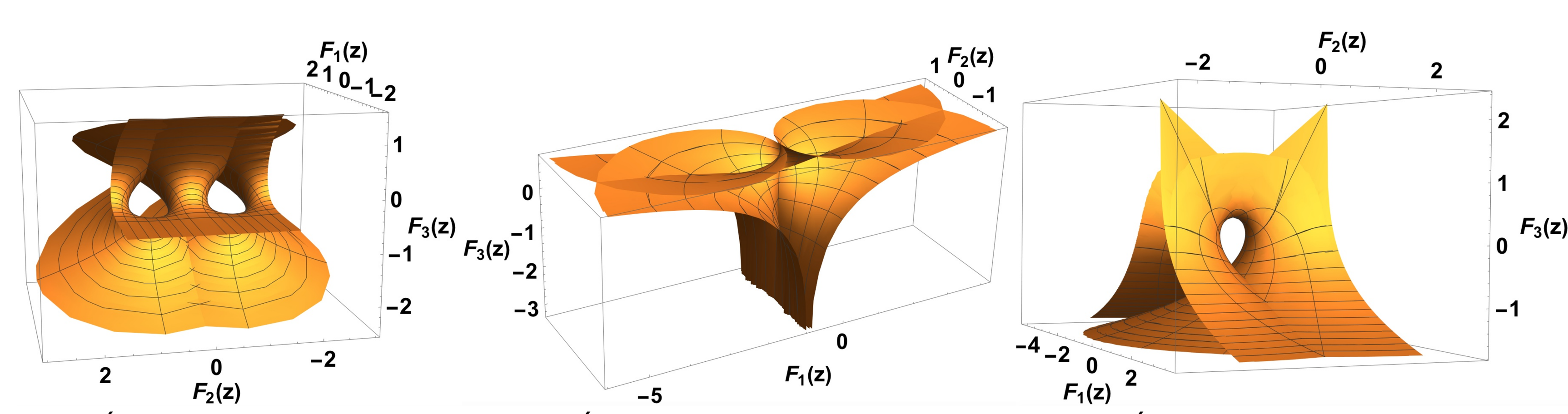
$$f'' - (2\eta^{-1}\eta')\, f' - (\lambda\eta^2\chi')f = 0. \tag{5}$$

Les polynômes orthogonaux étudiés sont solution d'une EDO du type

$$f'' \;+\; p\, f' \;+\; q\, f \;= 0. \tag{6}$$

En associant les coefficients de (5) et de (6), nous obtenons un système d'équations permettant de calculer les fonctions $\eta$ et $\chi$ décrivant le comportement de (6). Ce faisant, le système (4) est satisfait et la substitution de $\eta$ et $\chi$ dans (2) donne la forme explicite de la surface décrivant les polynômes orthogonaux.

## Analyses de cas




(a) Équation de Bessel. (b) Équation de Laguerre. (c) Équation de Legendre.

Dans le cas de l'équation de Bessel, la formule d'Enneper-Weierstrass (2) s'écrit

$$\vec{F}(z) = \left( \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\log(z) - \frac{z^4}{4} + \frac{1}{4}\right),\ -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\log(z) + \frac{z^4}{4} - \frac{1}{4}\right),\ \mathrm{Re}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \right) \in \mathbb{R}^3. \tag{7}$$

## Conclusions

Par un choix judicieux de transformations de jauges, les fonctions arbitraires $\eta$ et $\chi$ de la formule d'Enneper-Weierstrass (2) peuvent être introduites dans le problème linéaire associé aux équations GW (3). Ce faisant, le problème peut être simplifié pour obtenir le système (4).

Celui-ci peut alors être réécrit sous la forme de l'EDO (5), que nous associons à une forme particulière de l'équation (6) décrivant des polynômes orthogonaux classiques de la physique mathématique. Cette association permet de déterminer les fonctions $\eta$ et $\chi$, de satisfaire le problème linéaire (3) et de calculer la forme explicite de la surface minimale (2). Cette surface est une représentation géométrique d'une classe de polynômes orthogonaux.

## Références

[1] Bobenko, A. I. (1994) **Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases**, Harmonic maps and integrable systems, Springer.

[2] Bobenko, A. I., Eitner, U. (2000) **Painlevé equations in the differential geometry of surfaces**, Berlin, Springer-Verlag.