UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
KHELIFA REGGAS

COPULES MULTIDIMENSIONNELLES ET STRATÉGIES POUR ESTIMER LEURS PARAMÈTRES

SEPTEMBRE 2018

REMERCIEMENTS

Je tiens à saluer ici les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la concrétisation de ce travail. Ces remerciements sont rédigés dans un moment de doux relâchement intellectuel, sans véritable rigueur ni souci taxinomique. J'ai laissé au hasard de ma mémoire, plus impressionnée par les événements récents, répétés, ou chargés d'émotions, le soin de retrouver ces personnes. Dans un autre état d'esprit, ces remerciements auraient certainement été tout autres, et j'aurais peut-être oublié des noms. Néanmoins, je suis convaincu que ce mémoire est loin d'être un travail solitaire, et n'aurait jamais pu se réaliser sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité et la bonne humeur m'ont permis de progresser dans cette phase délicate d'apprenti-chercheur. Je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon cœur, en acceptant ces remerciements.

Plus concrètement, je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Jean-François Quessy, ainsi que mon co-directeur, le professeur Mhamed Mesfioui, pour m'avoir proposé ce sujet d'étude et de m'avoir dirigé. Leur disponibilité, leur grande connaissance ainsi que leur expérience m'ont été précieux tout au long de mon cheminement, notamment lors de la rédaction du mémoire. Leur soutien n'est pas étranger à l'aboutissement de cette recherche. Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à l'Institut des sciences mathématiques (ISM) ainsi qu'au Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) du Canada pour leur soutien financier qui m'a permis de me concentrer à temps plein sur mes recherches. Une mention particulière aux membres du Département de mathématiques et d'informatique de l'UQTR pour leur encadrement et leur environnement où il fait bon étudier.

Je remercie aussi les membres du jury, MM. Boucif Amar Bensaber et Sébastien Tremblay, pour avoir accepté d'évaluer mon mémoire ; leurs commentaires m'ont permis d'améliorer la version finale de ce travail. Enfin, une pensée toute spéciale ira à ma famille et à mes amis, notamment à Tarik Bahraoui et à Mohamed Belalia, pour leur support et leurs encouragements.

Table des matières

Introduction

La théorie des copules est une théorie relativement nouvelle dans le monde des probabilités et statistique. Le concept de copule a été introduit à la fin des années 1950, en 1959 précisément, par un mathématicien américain du nom de Abe Sklar, professeur de mathématiques appliquées à l'Institut de technologies de l'Illinois. Il a toutefois fallu attendre plusieurs années pour que cette idée soit utilisé de façon beaucoup plus régulière en statistique. En effet, c'est dans les années 1970 que certains mathématiciens comme Kimeldorf, Sampson et Deheuvels ont décidé de faire utilisation des copules dans leurs travaux de recherche.

L'étude systématique des copules ,et le développement d'une théorie s'y intéressant débutent au milieu des années 1980 avec Christian Genest et son équipe de chercheur. Fait intéressant, Christian Genest est un mathématicien québécois qui est à la fois professeur à l'université McGill à Montréal. À la fin des années 1990, de nombreux livres paraissent sur le sujet et la théorie prend de l'ampleur, notamment grâce au nombre grandissant de gens qui s'y intéressent. Ce soudain intérêt pour cette théorie réside dans le fait de la découverte de son utilisation dans certains secteurs appliqués, particulièrement dans le domaine des finances ainsi que pour la modélisation spatiale. C'est cette dernière application qui nous intéressera pour ce document.

Chapitre 1

Théorie des copules

1.1 Sur les lois multivariées en général

1.1.1 Fonctions de répartitions univariées

La fonction de répartition d'un variable aléatoire réelle X est définie par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Si X prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\mathcal{X}$, alors on définit sa fonction de masse par $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. Dans ce cas, on a la relation

$$F(x) = \sum_{s \in \mathcal{X} : s \leq x} f(s).$$

Dans le cas d'une variable aléatoire définie sur un ensemble non-dénombrable $\mathcal{X}$, alors il existe une densité de probabilité f telle que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Si la loi de X est F, on dit alors qu'elle est continue. Sa densité se retrouve à partir de sa fonction de répartition F en faisant

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

Inversement, une fonction réelle F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;

(ii) F est non-décroissante et continue à droite, c'est-à-dire que

$$\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

La fonction de survie d'une variable aléatoire X est simplement

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x).$$

1.1.2 Fonctions de répartitions bivariées

Soit (X, Y), un couple de variables aléatoires ; on dit également que (X, Y) est un vecteur aléatoire à deux dimensions. La fonction de répartition associée à ce couple est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$H(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

On retrouve les comportements marginaux de X et de Y via les relations

$$F(x) = \lim_{y\to\infty} H(x,y) \quad \text{et} \quad G(y) = \lim_{x\to\infty} H(x,y).$$

Si X et Y sont continues, alors outre le fait qu'elles possèdent des densités marginales $f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$ et $g(y) = \mathrm{d}G(y)/\mathrm{d}y$, la paire (X,Y) possède une densité conjointe h telle que

$$h(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} H(x,y).$$

À l'inverse, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ soit une fonction de répartition bivariée sont :

(i) H est continue à droite ;

(ii) $\lim_{x\to-\infty} H(x,y) = 0$ et $\lim_{y\to-\infty} H(x,y) = 0$;

(iii) Pour tout $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$, on a

$$H(x_2,y_2) - H(x_1,y_2) - H(x_2,y_1) + H(x_1,y_1) \geq 0.$$

1.1.3 Vecteurs aléatoires d-dimensionnels

Les notions de fonction de répartition et de densité se généralisent aisément au cas à $d > 2$ variables aléatoires. Ainsi, pour un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, sa fonction de répartition est définie pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ par

$$H(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \mathbb{P}\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_1\right).$$

Le comportement marginal de X_j se retrouve à partir de $H_{\mathbf{X}}$, à savoir que

$$F_j(x_j) = \mathbb{P}(X_j \leq x_j) = \lim_{x_i\to\infty; i\neq j} H(\mathbf{x}).$$

Les marges de $\mathbf{X}$ sont donc $F_1, \ldots, F_d$ et peuvent s'extraire de $H_{\mathbf{X}}$. Si ces marges sont continues, alors $H_{\mathbf{X}}$ possède une densité conjointe donnée par

$$h(\mathbf{x}) = \frac{\partial^d}{\partial x_1 \cdots \partial x_d} H(\mathbf{x}).$$

1.2 Théorème de Sklar et copules

1.2.1 Définition d'une copule

La notion de copule a été motivée par les travaux de [2] et introduite formellement par [11]. Les copules sont aussi appelées *fonctions de dépendance* par [1]. Le résultat suivant, qui est justement dû à [11], constitue le fondement de la théorie des copules.

Théorème 1.1. *Soit H, une fonction de répartition bivariée dont les marges F et G sont continues. Alors il existe une unique fonction $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ appelée copule telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$H(x,y) = C\left\{F(x), G(y)\right\}. \tag{1.1}$$

Ce résultat est très important puisqu'il est possible de séparer, pour chaque loi bivariée, l'effet des marges, représenté par F et G, et l'effet de la dépendance, représenté par C. Ainsi, d'un coté nous avons les marges F et G, c'est-à-dire les lois unidimensionnelles, et de l'autre, la copule qui permet de relier ces marges. À l'inverse, une fonction $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ sera une copule si elle satisfait les conditions suivantes :

(i) Pour tout $u \in [0,1]$, $C(u,0) = C(0,u) = 0$ et $C(u,1) = C(1,u) = u$;

(ii) Pour tout $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

On peut montrer que toute copule C est uniformément continue sur $[0,1]^2$. En effet, il est possible d'établir que pour tout $(u,v),(u',v') \in [0,1]^2$,

$$|C(u,v) - C(u',v')| \leq |u'-u| + |v'-v|.$$

Ce résultat, et bien d'autres, se retrouve dans l'excellente monographie de [9]. À noter enfin que si la loi du couple (X,Y) est continue, alors on sait qu'elle possède une densité conjointe h et des densités marginales f et g. À partir de l'Équation (1.1), cette densité conjointe peut s'écrire

$$h(x,y) = c\,\{F(x), G(y)\}\, f(x)\, g(y),$$

où c est la densité de la copule C, c'est-à-dire

$$c(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v).$$

1.2.2 Extraction de la copule d'une loi bivariée

Soit une loi bivariée H de marges continues F et G. On a vu que le Théorème de [11] assure qu'il existe une unique copule C telle que $H(x,y) = C\{F(x), G(y)\}$. Ainsi, à partir d'une fonction de répartition conjointe H, on peut extraire son unique copule C. En effet, en posant simplement $u = F(x)$ et $v = G(y)$, l'Équation (1.1) devient

$$C(u,v) = H\left\{F^{-1}(u), G^{-1}(v)\right\}. \tag{1.2}$$

Deux exemples pour illustrer ce procédé sont décrits dans la suite.

Exemple 1.1. *Soit la loi* $H : [0,1]^2 \to [0,1]$ *telle que*

$$H(x,y) = \sqrt{\frac{x\,y}{x+y-xy}}.$$

Les marges de H sont alors $F(x) = H(x,1) = \sqrt{x}$ et $G(y) = H(1,y) = \sqrt{y}$. De là, $F^{-1}(u) = u^2$ et $G^{-1}(v) = v^2$. On montre alors que la copule de H est

$$C(u,v) = \left(u^{-2} + v^{-2} - 1\right)^{-1/2}.$$

En effet, une application de l'Équation (1.2) *amène*

$$C(u,v) = H\left(u^2, v^2\right) = \sqrt{\frac{u^2v^2}{u^2+v^2-u^2v^2}} = \left(u^{-2} + v^{-2} - 1\right)^{-1/2}.$$

Exemple 1.2. *Soit la fonction de répartition logistique bivariée de [5], à savoir $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ définie par*

$$H(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}.$$

Les lois marginales de cette distribution sont

$$F(x) = \lim_{y\to\infty} H(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad et \quad G(y) = \lim_{x\to\infty} H(x,y) = \frac{1}{1+e^{-y}}.$$

De là, on obtient que les fonctions inverses sont

$$F^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right) \quad et \quad G^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right).$$

La copule logistique associée à H est donc de la forme

$$C(u,v) = \frac{uv}{u+v-1}.$$

En effet, de l'Équation (1.2), *on obtient*

$$
\begin{aligned}
C(u,v) &= H\left\{-\ln\left(\frac{1}{u}-1\right), -\ln\left(\frac{1}{v}-1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{1+\exp\left\{\ln\left(\frac{1}{u}-1\right)\right\}+\exp\left\{\ln\left(\frac{1}{v}-1\right)\right\}} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}-1\right)+\left(\frac{1}{v}-1\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-1} \\
&= \frac{uv}{u+v-1}.
\end{aligned}
$$

1.2.3 Copules de survie

La fonction de survie d'un couple (X, Y) est définie par $\bar{H}(x,y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y)$. On montre facilement que dans le cas continu,

$$\bar{H}(x,y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y).$$

On retrouve alors les fonctions de survie marginales de X et de Y en faisant

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = \lim_{y\to-\infty} \bar{H}(x,y) \quad \text{et} \quad \bar{G}(y) = \mathbb{P}(Y > y) = \lim_{x\to-\infty} \bar{H}(x,y).$$

Puisque $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ et $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$, la fonction de survie conjointe de (X, Y) peut s'exprimer par

$$\bar{H}(x,y) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C\left\{1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)\right\}$$

Ainsi, en posant $\widehat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$, on écrit de façon équivalente

$$\bar{H}(x,y) = \widehat{C}\left\{\bar{F}(x), \bar{G}(y)\right\}.$$

La fonction $\widehat{C}$ s'appelle la *copule de survie* de (X,Y). Il s'agit d'un analogue au Théorème de Sklar (1959) pour H. On peut définir, dans la même veine, les copules de *semi-survie*. À cette fin, soit

$$\widetilde{H}(x,y) = \mathbb{P}(X > x, Y \leq y) = G(y) - H(x,y).$$

On déduit alors que pour la copule de *semi-survie* $\widetilde{C}(u,v) = v - C(1-u, v)$,

$$\widetilde{H}(x,y) = \widetilde{C}\left\{\bar{F}(x), G(y)\right\}.$$

Par une démarche semblable, on peut identifier également une seconde copule de *semi-survie*, à savoir $\widetilde{C}(u,v) = u - C(u, 1-v)$.

1.2.4 Extension multidimensionnelle

Le théorème de Sklar se généralise aux vecteurs aléatoires d dimensionnels. En effet, soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ dont la loi conjointe $H : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ possède des marges continues $F_1, \ldots, F_d$. Alors la version d-dimensionnelles du Théorème de [11] stipule qu'il existe une unique fonction $C : [0,1]^d \to [0,1]$ telle que pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$H(\mathbf{x}) = C\left\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right\}. \tag{1.3}$$

Réciproquement, la copule de H s'obtient en posant, dans l'Équation (1.3),

$$u_1 = F_1(x_1), \ \ldots, \ u_d = F_d(x_d).$$

On extrait alors la copule de H par

$$C(u_1, \ldots, u_d) = H\left\{F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d)\right\}.$$

1.3 Mesures de concordance

La fonction de concordance entre deux couples indépendants (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) est

$$Q = \mathbb{P}\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\right] - \mathbb{P}\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\right].$$

Il s'agit de la différence entre les probabilités de concordance et de discordance entre ces deux couples. Dans le cas particulier où les lois H_1 et H_2 respectives à (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont les mêmes marges, alors on peut montrer que

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4\int_0^1\int_0^1 C_2(u, v)\,\mathrm{d}C_1(u, v) - 1.$$

Les mesures d'association de Kendall et de Spearman sont des cas particuliers de mesures de concordance. En effet, en prenant (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) indépendants et provenant de la même loi H de copule C, alors le tau de Kendall est défini par

$$\tau(C) = Q(C, C) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u, v)\,\mathrm{d}C(u, v) - 1.$$

La mesure de dépendance de Spearman émerge en supposant que la copule de (X_1, Y_1) est C, alors que celle de (X_2, Y_2) est l'indépendance, à savoir $C_2(u, v) = \Pi(u, v) = uv$. Par la définition de Q ci-dessus, le rho de Spearman peut donc s'écrire

$$\rho_S(C) = 3\,Q(C, \Pi) = 12\int_0^1\int_0^1 uv\,\mathrm{d}C(u, v) - 3.$$

1.4 Dépendance codale

Les indices de dépendance de queue sont des mesures de la dépendance asymptotique ; celles-ci s'avèrent très utiles, notamment dans le contexte des valeurs extrêmes bivariées. Pour les définir, soit le couple (X,Y) de fonctions de répartition marginales F et G. L'indice de dépendance de queue inférieur de (X,Y) est défini par

$$\lambda_L = \lim_{q\downarrow 0} \mathbb{P}\left\{X \leq F^{-1}(q) \middle| Y \leq G^{-1}(q)\right\}.$$

Cet indice mesure la propension qu'ont les variables X et Y à prendre simultanément des valeurs très petites. À l'inverse , la propension qu'ont les variables X et Y à prendre simultanément des valeurs très grandes se mesure à l'aide de l'indice de dépendance de queue supérieur, à savoir

$$\lambda_U = \lim_{q\uparrow 1} \mathbb{P}\left\{X > F^{-1}(q) \middle| Y > G^{-1}(q)\right\}.$$

Bien que ces définitions de λ_L et de λ_U ne le laissent pas nécessairement transparaître au premier coup d'oeil, ce sont des notions exclusivement basées sur les copules des couples aléatoires. En effet, si C est la copule de (X,Y), alors on montre, directement à partir des définitions de λ_L et de λ_U, que

$$\lambda_L = \lim_{q\downarrow 0} \frac{C(q,q)}{q} \quad \text{et} \quad \lambda_U = \lim_{q\uparrow 1} \frac{1-2q+C(q,q)}{1-q}.$$

Exemple 1.3. *Soit la copule* $C(u,v) = \left(u^{-2}+v^{-2}-1\right)^{-1/2}$. *Par un calcul direct,*

$$\begin{aligned}
\lambda_L = \lim_{q\downarrow 0} \frac{\left(2\,q^{-2}-1\right)^{-1/2}}{q} &= \lim_{q\downarrow 0} \left(\frac{2\,q^{-2}-1}{q^{-2}}\right)^{-1/2} \\
&= \lim_{q\downarrow 0} \left(2-q^2\right)^{-1/2} \\
&= 1/\sqrt{2} \\
&\approx 0,707.
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la règle de l'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + \left(2\,q^{-2} - 1\right)^{-1/2}}{1 - q} \\
&= \lim_{q \uparrow 1} \frac{-2 - (1/2)\left(2\,q^{-2} - 1\right)^{-3/2}(-4q^{-3})}{-1} \\
&= 2 \lim_{q \uparrow 1} \left[1 - \left\{q^2\left(2\,q^{-2} - 1\right)\right\}^{-3/2}\right] \\
&= 2 \lim_{q \uparrow 1} \left\{1 - (2 - q^2)^{-3/2}\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cette copule possède donc de la dépendance inférieure de queue significative, mais pas de dépendance de queue supérieure.

Chapitre 2

Modèles de copules à $d = 2$ et $d > 2$ dimensions

2.1 Trois copules particulières

2.1.1 Copule d'indépendance

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_d$ de marges respectives $F_1, \ldots, F_d$ sont indépendantes si et seulement si

$$H(\mathbf{x}) = F_1(x_1) \times \cdots \times F_d(x_d).$$

Une application directe de la formule (1.3) relative au Théorème de Sklar d-dimensionnel implique alors que

$$H(\mathbf{x}) = \Pi \left\{ F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d) \right\},$$

où $\Pi(u_1, \ldots, u_d) = u_1 \times \cdots \times u_d$ est la copule d'indépendance.

2.1.2 Bornes de Fréchet–Hoeffding

On peut montrer que toute fonction de répartition d-dimensionnelle H de marges $F_1, \ldots, F_d$ est telle que pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\max\{0, F_1(x_1) + \cdots + F_d(x_d) - d + 1\} \leq H(\mathbf{x}) \leq \min\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\}. \quad (2.1)$$

Soient maintenant les fonctions $W : [0,1]^d \to [0,1]$ et $M : [0,1]^d \to [0,1]$ définies par

$$W(u_1, \ldots, u_d) = \max(0, u_1 + \cdots + u_d - d + 1) \quad \text{et} \quad M(u_1, \ldots, u_d) = \min\{u_1, \ldots, u_d\}.$$

La fonction W est la borne inférieure de Fréchet–Hoeffding, alors que M s'appelle la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding. Maintenant, l'équation (2.1) peut s'écrire

$$W\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\} \leq C\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\} \leq M\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\}.$$

Ainsi, en posant $u_1 = F_1(x_1), \ldots, u_d = F_d(x_d)$, on peut affirmer que toute copule C est telle que pour tout $(u_1, \ldots, u_d) \in [0,1]^d$,

$$W(u_1, \ldots, u_d) \leq C(u_1, \ldots, u_d) \leq M(u_1, \ldots, u_d).$$

À noter que M est une copule, alors que W ne l'est pas.

2.2 Copules Archimédiennes

Dans cette section, nous allons introduire une classe importante de copules, à savoir la famille des copules Archimédiennes. Celles-ci sont très utilisées en pratique.

Définition 2.1. *Soit une fonction $\phi : [0,1] \to [0,\infty]$ décroissante et convexe telle que*

$\phi(1) = 0$. *Alors la copule Archimédienne de générateur* ϕ *est définie par*

$$C_\phi(u, v) = \phi^{-1}\left\{\phi(u) + \phi(v)\right\}.$$

Sachant qu'une certaine copule C appartient à la famille Archimédienne, il est possible de déduire sont générateur. Il s'agit de remarquer que

$$\frac{\phi'(u)}{\phi'(v)} = \frac{\partial C(u,v)/\partial u}{\partial C(u,v)/\partial v}.$$

Par exemple, pour la copule d'indépendance $C(u, v) = uv$, alors il faudra résoudre

$$\frac{\phi'(u)}{\phi'(v)} = \frac{v}{u}.$$

De là, pour certaines constantes K_1, K_2, on déduit que $\phi'(u) = K_1/u$, et ainsi $\phi(u) = K_1 \ln u + K_2$. La condition $\phi(1) = 0$ pousse $K_2 = 0$, alors que la décroissance de ϕ permet de déduire que $K_1 < 0$. Par conséquent, la fonction $\phi(u) \propto -\ln u$ génère la copule d'indépendance.

Plus généralement, une copule C à d dimensions est Archimédienne si elle peut s'écrire sous la forme $C_\phi(u_1, \ldots, u_d) = \phi^{-1}\{\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d)\}$ en terme d'un générateur $\phi : [0, 1] \to [0, \infty)$ tel que $\phi(1) = 0$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$(-1)^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\,\phi(t) > 0.$$

Cette dernière condition implique que ϕ est complètement monotone. À noter qu'à l'instar du cas bivarié, la copule d'indépendance d-dimensionnelle est générée par $\phi(u) = -\ln u$.

De façon générale, la densité d'une copule, si elle existe, est définie par

$$c(u_1, \ldots, u_d) = \frac{\partial^d}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} C(u_1, \ldots, u_d).$$

Dans le cas d'une copule Archimédienne de générateur ϕ, on a pour $\Psi = \phi^{-1}$ que

$$c_\phi(u_1, \ldots, u_d) = \frac{\Psi^{(d)}\left\{\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d)\right\}}{\Psi'\{\phi(u_1)\} \times \cdots \times \Psi'\{\phi(u_d)\}}.$$

Exemple 2.1. *La fonction $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$, $\theta > -1$, permet de générer la copule de Clayton dont l'expression dans le cas $d = 2$ est*

$$C_\theta(u, v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}.$$

On peut montrer que sa densité est

$$c_\theta(u, v) = (uv)^{-\theta-1}\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-(1+2\theta)/\theta}.$$

L'extension d-dimensionnelle nécessite de supposer que $\theta > -1/(d-1)$, dans lequel cas la copule s'écrit

$$C_\theta(u_1, \ldots, u_d) = \left(u_1^{-\theta} + \cdots + u_d^{-\theta} - d + 1\right)^{-1/\theta}.$$

Exemple 2.2. *La définition de la copule de Frank bivariée est donnée pour $\theta \in \mathbb{R}$ par*

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left\{1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right\}.$$

La densité de cette copule est

$$c_\theta(u, v) = \frac{\theta\left((1 - e^{-\theta})(e^{-\theta(u_1+u_2)})\right)}{\left[(1 - e^{-\theta}) - (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_1} - 1)\right]^2}.$$

2.3 Copules à valeurs extrêmes

Soit $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$, où $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{id})$, un échantillon de vecteurs aléatoires d-dimensionnels indépendants et identiquement distribuées de fonction de répartition F, de lois marginales $F_1, \ldots, F_n$ et de copule C. De là, on définit M_n comme le vecteur aléatoire dont les composantes sont les maxima observés pour chacune des d-composantes, c'est-à-dire que

$$M_n = (M_{n,1}, \ldots, M_{n,n}), \quad \text{où } M_{n,j} = \max_{1 \leq i \leq n} X_{ij}.$$

Alors on dit que la loi F est à valeurs extrêmes d-dimensionnelle s'il existe des suites réelles $a_{n,j} \in \mathbb{R}$ et $b_{n,j} \in \mathbb{R}^+$ telles que

$$F(x_1, \ldots, x_d) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_{n,1} - a_{n,1}}{b_{n,1}} \leq x_1, \ldots, \frac{M_{n,d} - a_{n,d}}{b_{n,d}} \leq x_d \right).$$

On peut montrer que la copule $C^\star$ de F satisfait, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C^\star(u_1, \ldots, u_d) = \left\{ C\left(u_1^{1/n}, \ldots, u_d^{1/n} \right) \right\}^n. \tag{2.2}$$

En fait, on peut définir la famille des copules à valeurs extrêmes comme l'ensemble des copules qui satisfont l'Équation (2.2). À partir de cette définition, on peut déduire qu'une copule à valeurs extrêmes s'écrit toujours sous la forme

$$C_A(u, v) = \exp\left\{ \log(uv)\, A\left(\frac{\log(u)}{\log(uv)} \right) \right\},$$

où $A : [0,1] \to [0, 1/2]$ s'appelle la *fonction de dépendance extrême*; elle satisfait $A(0) = A(1) = 0$ et $\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1$. Dans le cas général d-dimensionnel, on a pour $\prod(\mathbf{u}) = u_1 \ldots u_d$ que

$$C_A(u_1, \ldots, u_d) = \exp\left\{ \left[\log\left(\prod(\mathbf{u}) \right) A\left(\frac{\log(u_1)}{\log \prod(\mathbf{u})}, \cdots, \frac{\log(u_{d-1})}{\log \prod(\mathbf{u})} \right) \right] \right\}.$$

2.4 Copules Archimax

La classe de copules Archimax construite à partir d'une fonction décroissante convexe continue $\phi : [0,1] \to [0,\infty]$, $\phi(1) = 0$, appelé générateur et une fonction convexe $A : [0,1] \to [0,1]$, $\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$, appelée fonction de dépendance. Ensuite, la copule Archimax est une copules à la fois valeur extrême et Archimédienne. Soit ϕ, un générateur, et A, une fonction de dépendance. Une copule Archimax est définie par

$$C_{\phi,A}(u,v) = \phi^{-1}\left[\{\phi(u)+\phi(v)\}\, A\left\{\frac{\phi(u)}{\phi(u)+\phi(v)}\right\}\right].$$

En posant $A(t) = 1$, on retrouve la copule Archimédienne

$$C_{\phi,1}(u,v) = \phi^{-1}\{\phi(u)+\phi(v)\}.$$

Si on pose $\phi(t) = -\ln t$, et donc $\phi^{-1}(s) = e^{-s}$, on obtient la forme générale des copules à valeurs extrêmes, car alors

$$C_{-\ln t,A}(u,v) = \exp\left\{\ln uv A\left(\frac{\ln u}{\ln uv}\right)\right\}.$$

À noter également que si $A(t) = \max(t, 1-t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
C_{\phi,A_M}(u,v) &= \phi^{-1}\left[\{\phi(u)+\phi(v)\}\min\left\{\frac{\phi(u)}{\phi(u)+\phi(v)}, \frac{\phi(v)}{\phi(u)+\phi(v)}\right\}\right] \\
&= \phi^{-1}\left[\min\{\phi(u),\phi(v)\}\right] \\
&= \min(u,v) \\
&= M(u,v).
\end{aligned}$$

Ceci est vrai peu importe le générateur ϕ.

2.5 Copules elliptiques

2.5.1 Copule Normale

La copule Normale de paramètre $\rho \in [-1, 1]$ s'exprime par

$$C^{\mathrm{N}}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{ \frac{-(s^2 + \rho st + t^2)}{2(1-\rho)} \right\} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $N(0, 1)$. La copule Normale de dimension d de paramêtre $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, où Σ est une matrice de corrélations, est donnée par

$$C_{\Sigma}(u_1, \ldots, u_d) = \Phi_{\Sigma} \left\{ \Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_d) \right\},$$

où Φ_{Σ} est la fonction de répartition de la loi Normale d-dimensionnelle de moyennes nulles et de variance-covariance Σ.

2.5.2 Copule de Student

La copule de Student bivariée est définie par

$$C_{R,\nu}(u_1, \ldots u_d) = t_{R,\nu} \left\{ t_{\nu}^{-1}(u_1), \ldots, t_{\nu}^{-1}(u_d) \right\},$$

où R est une matrice de corrélation, ν représente le degré de liberté, t_{ν} est la fonction de répartition de la loi de Student unidimensionnelle et $t_{R,\nu}$ est la fonction de répartition de la loi de Student d-variée.

2.5.3 Généralisation des copules Normale et Student

Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ suit une distribution elliptique de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de variance-covariance Σ s'il admet la représentation $\mathbf{X} = \mu + RAU$, où $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ satisfait $AA^\top = \Sigma$, R est une variable aléatoire positive indépendante du vecteur $U = U_1, \ldots, U_d$ distribué uniformément sur la sphère dans $\mathbb{R}^d$ de rayon unitaire. La copule elliptique associée correspond à la loi conjointe de

$$\left(F\left(\frac{X_1}{\sqrt{\Sigma_{11}}}\right), \ldots, F\left(\frac{X_d}{\sqrt{\Sigma_{dd}}}\right)\right).$$

2.6 Copules asymétriques de Khoudradji

2.6.1 Cas bidimensionnel

Une nouvelle classe de copules bivariées a été étudiée par [6]. Pour la décrire, soient d'abord deux copules C_1 et C_2. Ensuite, pour $\delta_1, \delta_2 \in [0, 1]$, on pose

$$C_{\delta_1,\delta_2}(u, v) = C_1\left(u^{\delta_1}, v^{\delta_2}\right) C_2\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}\right).$$

En particulier, si $C_1(u, v) = uv$ est la copule d'indépendance, alors on a

$$C_{\delta_1,\delta_2}(u, v) = u^{\delta_1} v^{\delta_2} C_2\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}\right).$$

En général, la copule C_{δ_1,δ_2} est asymétrique lorsque $\delta_1 \neq \delta_2$. Pour le cas à d dimensions, soient C_1 et C_2 deux copules à d-dimensions. Ensuite, on pose

$$C_{\delta_*}(u_*) = C_1(u^{\delta_*})\, C_2(u^{1-\delta_*}),$$

où $\delta_* = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, $u_*^{\delta_*} = (u_1^{\delta_1}, \dots, u_d^{\delta_d}$ et $u_*^{1-\delta_*} = (u_1^{1-\delta_1}, \dots, u_d^{1-\delta_d})$.

2.6.2 Cas tridimensionnel

Tel que défini précédemment, la copule de [6] pour $d = 3$ peut s'écrire

$$C_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(u, v, w) = u^{\delta_1} v^{\delta_2} w^{\delta_3} D\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right),$$

où D est une copule prédéfinie. La densité $c_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(u, v, w)$ de cette copule peut être calculée en introduisant les notations

$$D_{100} = D_u^{(1)}\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right) = \frac{\partial D(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3})}{\partial u}.$$

$$D_{010} = D_v^{(1)}\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right) = \frac{\partial D(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3})}{\partial v}.$$

$$D_{001} = D_w^{(1)}\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right) = \frac{\partial D(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3})}{\partial w}.$$

$$D_{110} = D_{u,v}^{(2)}\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right) = \frac{\partial^2 D(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3})}{\partial u \partial v}.$$

$$D_{101} = D_{u,w}^{(2)}\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right) = \frac{\partial^2 D(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3})}{\partial u \partial w}$$

$$D_{011} = D_{v,w}^{(2)}\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right) = \frac{\partial^2 D(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3})}{\partial v \partial w}$$

$$D_{111} = D_{u,v,w}^{(3)}\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right) = \frac{\partial^3 D(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3})}{\partial u \partial v \partial w}.$$

$$c_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(u, v, v) = \frac{\partial C_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(u, v, v)}{\partial u \partial v \partial w}.$$

Cette densité s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned}
c_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(u,v,v) &= u^{1-\delta_1}v^{1-\delta_2}w^{1-\delta_3}\delta_1\delta_2\delta_3 D\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right)\\
&\quad+\delta_1 vwD_{011}\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right)+\delta_2 uwD_{101}\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right)\\
&\quad+\delta_3 uvD_{110}\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right)+\delta_1\delta_2 wD_{001}\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right)\\
&\quad+\delta_1\delta_3 vD_{010}\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right)+\delta_2\delta_3 uD_{100}\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right)\\
&\quad+uvwD_{111}\left(u^{1-\delta_1},v^{1-\delta_2},w^{1-\delta_3}\right).
\end{aligned}$$

2.7 Copules de Farlie–Gumbel–Morgenstern

Une famille paramétrique de copules bivariées très populaire est définie pour $\theta \in [-1,1]$ par

$$C^{\text{FGM}}(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v).$$

La densité associée est

$$c^{\text{FGM}}(u,v) = 1 + \theta(2u-1)(2v-1).$$

Cette copule ne permet toutefois pas de modéliser de fortes dépendances. Une extension possible à d dimensions est

$$C_\theta(u_1,\ldots,u_d) = \prod_{i=1}^{d} u_i + \theta\prod_{i=1}^{d} u_i(1-u_i).$$

Chapitre 3

Estimation des paramètres d'une copule

3.1 Rappel sur l'estimation par maximum de vraisemblance

Soient $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de densité $f(x|\theta)$, où $\theta \in \Theta$. La fonction de vraisemblance est

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^{n} f(X_i|\theta).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est alors

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

Si $f(x|\theta)$ est régulière, alors il s'agit de résoudre $L'(\theta) = 0$.

Il est souvent très difficile de maximiser directement $L(\theta|x)$. Il généralement beaucoup plus facile à maximiser la fonction log-vraisemblance $\ln L(\theta|x) = \ell(\theta|x)$. Car la fonction $\ln(\cdot)$ est strictement croissante sur $]0, \infty]$. Par conséquent, nous pouvons également définir θ_{EMV} comme la valeur de θ qui résout

$$\frac{\partial \ln L(\widehat{\theta}_{EMV}; x)}{\partial \theta} = 0.$$

Lorsque θ est de l'ordre $(k \times 1)$ les équations non-linéaires permettant de trouver la l'EMV sont

$$\frac{\partial \ln L(\widehat{\theta}_{EMV}; x)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln\left(L(\widehat{\theta}_{EMV}; x)\right)}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln\left(L(\widehat{\theta}_{EMV}; x)\right)}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.1. *Considérons $f(x;\theta)$ la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ définie par*

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \; x \geq 0, \\ 0 & , \; x < 0. \end{cases}$$

Calculons l'EVM de λ. Ainsi le log-vraisemblance est donnée par :

$$\widetilde{L}(\lambda) = -n \log \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

sa dérivée par rapport à λ est

$$\widetilde{L}'(\lambda) = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La solution est $\widehat{\lambda}_{EVM} = \bar{X}$.

Exemple 3.2. *La densité Pareto est donnée par*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta \alpha^{\beta}}{X^{\beta+1}} \mathrm{I}\,(x \geq \alpha)\,.$$

La fonction de vraisemblance est alors

$$L(\alpha, \beta) = \frac{\beta^n \alpha^{n\beta}}{\prod_{i=1}^{n} X_i^{\beta+1}} \boldsymbol{I}\left(X_{(1)} \geq \alpha\right),$$

où $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$. *En fixant* α, *on trouve* $\widehat{\beta}_{Mv} = X_{(1)}$.

Exemple 3.3. *Si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont des variables alétoires i.i.d. de la loi normale* $N(\mu, \sigma^2)$, *alors la vraisemblance est donnée par*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right]^2\right).$$

Dans ce cas, on trouve

$$\ell(\mu, \sigma) = -n \log \sigma - \frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

De là,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) \quad et \quad \frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \sigma^{-3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

On obtient alors facilement

$$\widehat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad et \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

3.2 La pseudo-vraisemblance complète pour les copules

Considèrons une variable aléatoire $\mathcal{X}$ définie sur un espace probabiliste (Ω, T, P) ainsi qu'un vecteur de réalisations $x_1, \ldots, x_n$ indépendantes. La fonction de vraisemblance non paramétrique consiste plutôt à estimer F et G par

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}(x_i \leq x) \quad \text{et} \quad G_n(y) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}(Y_i \leq y).$$

Ces estimateurs de F et de G sont complètement non-paramétriques et ponctuellement convergent au sens où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ converge en probabilité vers

$F(x)$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $G_n(y)$ converge en probabilité vers $G(y)$. Le résultat de Glivenko–Cantelli va toutefois plus loin en établissant la convergence uniforme de ces estimateurs. Spécifiquement, on a pour $n \to \infty$ que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0 \quad \text{et} \quad \sup_{y\in\mathbb{R}} |G_n(y) - G(y)| \to 0.$$

La fonction de log–vraisemblance devient

$$\widetilde{L}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ell_\theta \left\{F_n(X_i), G_n(Y_i)\right\}.$$

Puisque

$$F_n(X_i) = \frac{R_i}{n+1} \quad \text{et} \quad G_n(Y_i) = \frac{S_i}{n+1},$$

on peut écrire

$$\widetilde{L}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ell_\theta \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1}\right).$$

Nous avons divisé par $(n+1)$ plutôt que par n pour éviter des problèmes numériques en $\ell_\theta(1, v)$ et $\ell_\theta(u, 1)$. Supposons que les distributions marginales $F_i, i = 1, \ldots, n$ et la copule C sont differentiables, alors la densité jointe notée f de la variable aléatoire $X = (X_1, X_2)$ prend la forme suivante

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) c\left\{F_1(x_1), F_2(x_2)\right\},$$

où, pour $1 \leq k \leq 2$, f_k est la densité de probabilité de X_k et c est la densité de la copule C définie par

$$c(u, v) = \frac{\partial}{\partial u \partial v} C(u, v).$$

Dans le cas multivarié, considérons les fonctions marginales $F_1, \ldots, F_d$ et la copule C. Dans ce cas , la densité conjointe f est donnée par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^d C\left\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right\}}{\partial x_1 \ldots \partial x_d} = c\left\{F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right\} \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i).$$

Ainsi, la densité de la copule est

$$\begin{aligned} c(u_1, \ldots, u_d) &= \frac{\partial^d C(u_1, \ldots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2, \ldots, \partial u_d} \\ &= \frac{\partial^d F\left\{F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_d^{-1}(u_d)\right\}}{\partial u_1 \partial u_2, \ldots, \partial u_d} \times \frac{1}{\left[f_1(F_1^{-1}(u_1)), \ldots, f_d(F_d^{-1}(u_d))\right]}. \end{aligned}$$

Dans le cas où la densité de la copule existe, on peut utiliser les estimateurs à vraisemblance maximal. Pour simplifier, on suppose qu'on utilise une copule C_θ ayant une densité c_θ et que les lois des marginales possèdent des densités. On note θ_1 et θ_2 les paramètres des lois marginales. La log-vraisemblance s'écrit sous forme

$$\begin{aligned} \log L\left(\theta_1, \theta_2, x_i, y_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \log c\left\{F(x_i, \theta_1), G(y_i, \theta_2), \theta\right\} \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n} \log(F(x_i, \theta_1)) + \sum_{i=1}^{n} \log(G(y_i, \theta_1)). \end{aligned}$$

Bien souvent, il n'existe pas d'expressions explicites des estimateurs maximisant la log-vraisemblance $\ln L$. On réalise donc une maximisation numérique.

Exemple 3.4 (Copule de Clayton)**.** *Considérons que la copule bivariée de Clayton exprimée par*

$$C_\theta(u, v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}$$

pour $\theta > 0$. *Selon [3], sa densité est donnée*

$$c_\theta = (u, v) = (\theta + 1)(uv)^{-\theta - 1}\left\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right\}^{\frac{-1}{\theta} - 2},$$

ainsi,

$$\ell_\theta(u, v) = -(\theta + 1)\ln(uv) - \left(\frac{1}{\theta} + 2\right)\ln\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right).$$

La fonction de log-vraisemblance est alors

$$L_\theta = -(\theta + 1)\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{R_i}{n+1} \cdot \frac{S_i}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{\theta} + 2\right)\sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\left(\frac{R_i}{n+1}\right)^{-\theta} + \left(\frac{S_i}{n+1}\right)^{-\theta} - 1\right\}.$$

Exemple 3.5 (Copules Archimédiennes). *L'expression de la vraisemblance pour copule Archimédienne de générateur ϕ_θ est donnée par :*

$$L(\theta, u) = \log(c_\theta(u)) = \log\left\{(-1)^d \phi_\theta^d(t_\theta(u))\right\} + \sum_{j=1}^{d} \log\bigl(-\phi_\theta^{-1}(u_j)\bigr)(u_{ij})$$

pour tout $U_i \in [0, 1]$. Les formules pour les dérivés de générateur pour les familles des copules Archimèdienne plus utilisés spécialement. En particulier, pour la copule de Frank,

$$c_\theta(u) = \left\{\frac{\theta}{1 - e^{-\theta}}\right\}^{d-1} Li_{-(d-1)}\left\{h_\theta^f(u)\right\} \frac{e^{-\theta \sum_{j=1}^{d} u_j}}{h_\theta^f(u)},$$

avec

$$h_\theta^f(u) = \left\{1 - e^{-\theta}\right\}^{(1-d)} \prod_{j=1}^{d} 1 - \exp(-\theta u_j).$$

Nous dérivons des formules explicites pour les dérivés des générateurs pour toutes ces familles Archimèdienne donnés pour $d \in \mathbb{N}_0$.

3.3 Les vraisemblances composites et par paires

La vraisemblance par paires (L_{paire}) associée à un vecteur aléatoire de dimension Y est construit par

$$L_{paire}(y, \theta) = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} f(y_i, y_j; \theta)^{w_{ij}}.$$

Par suite la fonction de log-vraisemblance basée sur la vraisemblance composée par paires est

$$\ell_{paire}(y; \theta) = \log\left[L_{paire}(y, \theta)\right] = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} w_{ij} \log f(y_i, y_j : \theta).$$

Dans les extensions construit à partir de grands ensembles d'observations

$$L_{paire}(y,\theta) = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} f\left(y_i, y_j; \theta\right),$$

et

$$\ell_{paire}(y,\theta) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \log f\left(y_i, y_j : \theta\right).$$

Si les paramètres liés à la dépendance sont également intéressants il est nécessaire de modéliser les blocs d'observations par paires. Selon [12], si la vraie valeur du paramètre θ_0 appartient à l'intérieur de l'espace des paramètres compacte, l'estimation pondérée de vraisemblance maximale par paires de θ notée par $\widetilde{\theta}$ sera la solution. La fonction composée de Score, $S_{paire}(y,\theta)$ est obtenue comme étant la dérivée premiére de ℓ_{paire} par rapport à θ, à savoir

$$S_{paire}(y,\theta) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f\left\{(y_i, y_j, \theta)^{w_{ij}}\right\} = 0.$$

La fonction globale composite log-vraisemblance est donc

$$\ell_c(\theta, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \ell(\theta : y_i) = \sum_{i=1}^{n} \log L(\theta : y_i).$$

Dans leur papier, [7] estiment la fonction score associée par paires

$$\begin{aligned} S_{paires}(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} w_{ij} \frac{\partial}{\partial\theta} \log f_j(y_i, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^{n} S_{paires}(\theta, y_i). \end{aligned}$$

Dans des conditions générales selon [8] l'estimateur de maximum vraisemblance par paires est convergent et asymptotiques normal. La matrice de covariance donnée par la formule [3], dite sandwich

$$\mathrm{Var}_\theta(\theta) = H(\theta)^{-1} I(\theta) H(\theta)^{-1},$$

avec

$$I(\theta) = \mathrm{E}\left[S_{paires}(\theta, Y) S_{paire}(\theta, Y)^T\right]$$

et

$$H(\theta) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial S_{paire}(\theta, Y)}{\partial \theta^T}\right),$$

où S_{paire} désigne la fonction Score par paires. Comme il est nécessaire de modéliser les blocs d'observations, [12] définit la vraisemblance par paire par

$$L_{paire}(\theta; y) = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i+1}^{m} f(y_i, y_j; \theta).$$

D'une facon générale nous distinguons la matrice de sensitivité

$$H(\theta) = E_\theta \left\{-\nabla_\theta S(y; \theta)\right\} = \int \left\{-\nabla_\theta S(y; \theta)\right\} f(Y; \theta)\, dy,$$

et la matrice de variablilité

$$J(\theta) = \delta_\theta \left\{S(\theta; Y)\right\},$$

avec

$$S(y; \theta) = \nabla_\theta \ell(\theta; y) \quad \text{et} \quad G(\theta) = H(\theta) J(\theta)^{-1} H(\theta),$$

où $G(\theta)$ est la matrice d'information de [4].

3.4 Une nouvelle méthode de pseudo-vraisemblance par paires pour les copules multidimensionnelles

3.4.1 Idée générale

Avant d'entamer l'objectif de la simulation, nous prenons le cas $d = 3$. Afin de cibler notre objectif et de comparer les deux estimateurs suivants :

$$\widehat{\theta}^{EMV} = \arg\max_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \log c_{\theta}\left(\frac{R_{i1}}{n+1}, \frac{R_{i2}}{n+1}, \frac{R_{i3}}{n+1}\right),$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}^{Paires} \quad = \quad & \arg\max_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \left\{\log c_{\theta}^{(12)}\left(\frac{R_{i1}}{n+1}, \frac{R_{i2}}{n+1}\right) + \log c_{\theta}^{(13)}\left(\frac{R_{i1}}{n+1}, \frac{R_{i3}}{n+1}\right)\right. \\ & \left. + \log c_{\theta}^{(23)}\left(\frac{R_{i2}}{n+1}, \frac{R_{i3}}{n+1}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Pour calculer la densité composite dans le cas $d = 3$, nous devons à chaque fois calculer les densités par pairs $h^{(12)}(x_1, x_2)$, $h^{(13)}(x_1, x_3)$ et $h^{(32)}(x_3, x_2)$. Par la suite, nous calculons la vraisemblance composite $L^{Composite}$ qui sera estimée par

$$L^{Composite} = \sum_{i=1}^{n} \log h^{(12)}\left(X_{i1}, X_{i2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log h^{(13)}\left(X_{i1}, X_{i3}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log h^{(23)}\left(X_{i2}, X_{i3}\right).$$

Cette derniére peut s'écrire d'une façon équivalente sous la forme des rangs

$$L^{Composite} = \sum_{i=1}^{n} \log h^{(12)}\left(R_{i1}, R_{i2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log h^{(13)}\left(R_{i1}, R_{i3}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log h^{(23)}\left(R_{i2}, R_{i3}\right).$$

3.4.2 Cas particulier des copules Khi-deux

L'expression de la vraisemblance pour la copule khi-deux obtenue par [10] est

$$L^{composite}(\Sigma, a) = \sum_{i=1}^{n} \ln c^{\chi}_{\Sigma,a} \left\{F_{n_1}(X_{i_1}), \ldots, F_{n_d}(X_{i_d})\right\},$$

où $c^{\chi}_{\Sigma,a}$ est la densité des copule khi-deux. L'estimateur de maximum vraisemblance composite prend la forme suivant

$$\left(\Sigma^{composite}, a^{composite}\right) = \arg \max_{\Sigma \in \Lambda, a \in \mathbb{R}^d} \ell^{composite}\left(\Sigma, a\right),$$

où Λ est l'ensemble des matrices de corrélation définies positives. La vraisemblance par paires s'exprime par :

$$L^{Paire}(\Sigma, a) = \sum_{j<j' \in 1,\ldots,d} \sum_{i=1}^{n} \ln c_{p_{ij},a_j,a_{j'}} \left\{F_{n_j}(X_{ij}) F_{nj'}(X_{ij'})\right\}.$$

L'estimateur de vraisemblance par paire est

$$\left(\Sigma^{paire}, a^{paire}\right) = \arg \max_{\Sigma \in \Lambda, a \in \mathbb{R}^d} \ell^{paire}\left(\Sigma, a\right).$$

Un cas particulier de la densité de copule centrée de Khi-deux multivariée correspond à $d = 3$ est donnée par

$$\begin{aligned}
c^{\chi}_{\Sigma,0}(u_1, u_2, u_3) = {} & \frac{1}{8}\left\{c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}, \frac{1+u_3}{2}\right) + c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}, \frac{1-u_3}{2}\right)\right\} \\
& + \frac{1}{8}\left\{c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}, \frac{1+u_3}{2}\right) + c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}, \frac{1-u_3}{2}\right)\right\} \\
& + \frac{1}{8}\left\{c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1-u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}, \frac{1+u_3}{2}\right) + c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1-u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}, \frac{1-u_3}{2}\right)\right\} \\
& + \frac{1}{8}\left\{c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1-u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}, \frac{1+u_3}{2}\right)\right\} + \frac{1}{8}\left\{c^{N}_{\Sigma}\left(\frac{1-u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}, \frac{1-u_3}{2}\right)\right\},
\end{aligned}$$

où

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1, \rho_{12}, \rho_{13} \\ \rho_{12}, 1, \rho_{23} \\ \rho_{13}, \rho_{23}, 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas bivariée la densité de la copule centrée de Khi-deux sera donc

$$c_{\Sigma}^{\chi}(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{c_{\Sigma}^{N}\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}\right) + c_{\Sigma}^{N}\left(\frac{1-u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}\right)\right\},$$

avec c_{Σ}^{N} c'est la densité normale.

3.4.3 Cas particulier des copules de Clayton

Rappelons que la densité multivariée de Clayton est

$$c(u) = \left\{\prod_{i=1}^{d}(1+(i-1)\theta)\right\}\left\{\prod_{i=1}^{d} u_i^{-\theta-1}\right\}\left[\sum_{i=1}^{d} u_i^{\theta} - d + 1\right]^{-\frac{1}{\theta}-d}.$$

Pour $d = 3$, cette expression devient

$$c(u_1, u_2, u_3, \theta) = \theta^2\left(1+\frac{1}{\theta}\right)\left(2+\frac{1}{\theta}\right)\left(\prod_{i=1}^{3} u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} u_i^{-\theta} - 2\right)^{-\frac{1}{\theta}-3}.$$

Sachant que la densité de la copule de Clayton dans le cas bi-variée est de la forme :

$$c_\theta(u, v) = (uv)^{-\theta-1}\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}-2}.$$

$$\ell_\theta(u, v) = -(\theta+1)\ln(uv) - \left(\frac{1}{\theta}+2\right)\ln\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right).$$

La fonction de log-vraisemblance correspondante à cette copule est :

$$L_\theta = -(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{R_i}{n+1}\cdot\frac{S_i}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{\theta}+2\right)\sum_{i=1}^{n}\ln\left\{\left(\frac{R_i}{n+1}\right)^{-\theta} + \left(\frac{S_i}{n+1}\right)^{-\theta} - 1\right\},$$

où R_i et S_i sont des rangs. Ainsi, la vraisemblance composite pour $d = 3$ sera

$$L^{composites} = \sum_{i=1}^{n} \log c^{(12)}\left(R_{i1}, R_{i2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log c^{(13)}\left(R_{i1}, R_{i3}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log c^{(23)}\left(R_{i2}, R_{i3}\right).$$

3.4.4 Cas particulier des copules de Frank

La copule multivariée de Frank s'exprime par

$$C(\mathbf{u}, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{1}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \prod_{i=1}^{d} \left(e^{-\theta u_i} - 1\right)\right],$$

pour tout $u \in [0, 1]^d$. Lorsque $d = 3$,

$$C(u_1, u_2, u_3, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{1}{(e^{-\theta} - 1)^2} \prod_{i=1}^{3} (e^{-\theta u_i} - 1\right].$$

Cette expression peut être simplifiée comme suit :

$$C(u_1, u_2, u_3, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{g_{u_1} g_{u_2} g_{u_3}}{g_1^2}\right],$$

avec $g_{u_i} = e^{-\theta u_i} - 1$; $i = 1, 2, \ldots$. Cela nous permet de calculer les dérivées D_{111} et D_{011} de la densité de [6] selon les deux cas suivants. La densié de Frank est

$$c(u_1, u_2, u_3, \theta) = A + B - C,$$

où

$$A = \frac{\theta^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \theta u_i\right)}{(\exp^{-\theta} - 1)^2 \left\{1 + \frac{\prod_{i=1}^{3} (\exp^{-\theta u_i} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1)^2}\right\}}$$

$$B = \frac{2\theta^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \theta u_i\right) \prod_{i=1}^{3} (\exp^{-\theta u_i} - 1)^2}{(\exp^{-\theta} - 1)^6 \left\{1 + \frac{\prod_{i=1}^{3} (\exp^{-\theta u_i} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1)^2}\right\}^3}$$

et

$$C = \frac{3\theta^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \theta u_i\right) \prod_{i=1}^{3} (\exp^{-\theta u_i} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1)^4 \left\{1 + \frac{\prod_{i=1}^{3} (\exp^{-\theta u_i} - 1)}{(\exp^{-\theta} - 1)^2}\right\}^2}.$$

Sachant que la copule de Frank tri–variée est donnée par

$$C(u_1, u_2, u_3, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{1}{(e^{-\theta} - 1)^2} \prod_{i=1}^{3} (e^{-\theta u_i} - 1\right],$$

où R_1, R_2 et R_3 designent les rangs. Par une méthode similaire à celle qui était appliquée sur la copule de Frank dans les deux cas précédents, nous calculons la vraisemblance de cette copules. Sachant que la densité de la copule de Frank bi–variée est donnée par

$$c_\theta(u, v) = \frac{\theta \left((1 - e^{-\theta})(e^{-\theta(u_1 + u_2)})\right)}{\left[(1 - e^{-\theta}) - (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_1} - 1)\right]^2},$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Par conséquent la vraisemblance composite est

$$L^{composites} = \sum_{i=1}^{n} \log c^{(12)} (R_{i1}, R_{i2}) + \sum_{i=1}^{n} \log c^{(13)} (R_{i1}, R_{i3}) + \sum_{i=1}^{n} \log c^{(23)} (R_{i2}, R_{i3}).$$

où R_i sont des rangs. Les tables ci-dessous nous donnent les résultats de simulation.

3.4.5 Cas particulier des copules de Khoudraji

Rappelons que la copule [6] proposée dans le cas $d = 3$ est donnée par

$$C_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(u, v, w) = u^{\delta_1} v^{\delta_2} w^{\delta_3} D\left(u^{1-\delta_1}, v^{1-\delta_2}, w^{1-\delta_3}\right).$$

Pour la simulation de cette copule nous tenons en compte les points suivants comme cas particulier

$$\begin{cases} \delta_1 = \delta, \\ \delta_2 = \delta_3 = 0, \\ C_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(u,v,w) = u^{\delta} D\left(u^{1-\delta}, v, w\right). \end{cases}$$

Si D est la copule de Clayton ou Frank avec δ, θ des paramètres à estimer. L'expression de la densité de Khoudraji se réduit à

$$c_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(u,v,w) = c_{\delta,0,0}(u,v,w)\delta v w D_{011}\left(u^{1-\delta}, v, w\right) + uvwD_{111}\left(u^{1-\delta}, v, w\right).$$

Pour la copule de Frank, on obtient

$$\begin{aligned} D_{011}(u,v,w,\theta) &= -\frac{1}{\theta}\frac{g_1^2 g_v^{'} g_w^{'} g_u}{[g_1^2 + g_u g_v g_w]^2} \\ &= \frac{(-\theta)(\exp^{-\theta} - 1)^2 \exp^{(-\theta)(v+w)}(\exp^{-\theta u} - 1)}{[(\exp^{-\theta} - 1)^2 + (\exp^{-\theta u} - 1)(\exp^{-\theta v} - 1)(\exp^{-\theta w} - 1)]^2} \end{aligned}$$

et

$$D_{111}(u,v,w,\theta) = -\frac{1}{\theta}\frac{g_1^2 g_v^{'} g_w^{'} g_u^{'}\left[g_1^2 + g_u g_v g_w\right]^2 - 2 g_v g_w g_u^{'}}{[(\exp^{-\theta} - 1)^2 + (\exp^{-\theta u} - 1)(\exp^{-\theta v} - 1)(\exp^{-\theta w} - 1)]^4}.$$

Ainsi, $g_u = e^{-\theta u} - 1$, $g_u' = -\theta e^{-\theta u}$, $g_v = e^{-\theta u} - 1$, $g_v' = -\theta e^{-\theta v}$ $g_w = e^{-\theta u} - 1$, $g_w' = -\theta e^{-\theta w}$ et $g_1 = \exp^{-\theta} - 1$. Pour la copule de Clayton,

$$D_{011}(u,v,w,\theta) = \theta\left(1 + \frac{1}{\theta}\right) v^{-\theta-1} w^{-\theta-1}\left[u^{-\theta} + v^{-\theta} + w^{-\theta} - 1\right]^{-\frac{1}{\theta}-2}$$

et

$$D_{111}(u,v,w,\theta) = \theta^2\left(1 + \frac{1}{\theta}\right)\left(2 + \frac{1}{\theta}\right)(uvw)^{-\theta-1}\left(u^{-\theta} + v^{-\theta} + w^{-\theta} - 2\right)^{-\frac{1}{\theta}-3}$$

Conclusion

Le but premier de ce mémoire était d'explorer une nouvelle façon d'estimer les paramètres d'une copule dans le cas de dimensions supérieures à deux. La méthode générale proposée se situe au carrefour entre les méthodes d'estimation par vraisemblance composite et les méthodes d'estimation pour copules basées sur des vraisemblances de rangs. En effet, ce travail a proposé d'estimer les paramètres d'une copule multidimensionnelle à partir d'une vraisemblance par paires dans laquelle le manque d'information sur les marges est pallié par l'usage des rangs des observations.

Dans ce mémoire, plusieurs modèles de copules adéquats pour la modélisation de la dépendance entre plusieurs variables ont été recensés. Ensuite, un rappel sur les méthodes d'estimation par vraisemblance dans le cas classique, ainsi que leur adaptation au cas de modèles de copules, a été effectué. Enfin, la nouvelle méthode d'estimation composite de rangs a été décrite. Des calculs de vraisemblances de paires ont été également effectués pour quelques modèles.

Il aurait été intéressant d'effectuer une étude de simulations pour comparer la méthode proposée avec celle couramment employée basée sur la pseudo-vraisemblance complète. Une telle étude serait extrêmement pertinente, notamment dans le contexte de plus en plus fréquent ou un très grand nombre de variables est observé, comme c'est le cas dans les jeux de données massives (*big data*). En effet, la méthode qui utilise la vraiemblance complète devient lourde numériquement à mesure que le nombre de variables augmente, devenant même impraticable lorsqu'il y a plus de dix variables.

Bibliographie

[1] Paul Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, 65 :274–292, 1979.

[2] Maurice Fréchet. *Généralités sur les probabilités. Éléments aléatoires. 2d ed. Traité du calcul des probabilités et de ses applications, tome I, fasc. 3, premier livre.* Gauthier-Villars, Paris, 1950.

[3] V. P. Godambe. An optimum property of regular maximum likelihood estimation. *Ann. Math. Statist.*, 31 :1208–1211, 1960.

[4] V. P. Godambe and B. K. Kale. Estimating functions : an overview. In *Estimating functions*, volume 7 of *Oxford Statist. Sci. Ser.*, pages 3–20. Oxford Univ. Press, New York, 1991.

[5] E. J. Gumbel. Bivariate logistic distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 56 :335–349, 1961.

[6] A. Khoudraji. *Contributions à l'étude des copules et à la modélisation de valeurs extrêmes bivariées.* PhD thesis, Université Laval, Québec, Canada, 1995.

[7] Bruce G Lindsay, Grace Y Yi, and Jianping Sun. Issues and strategies in the selection of composite likelihoods. *Statistica Sinica*, 21(1) :71–105, 2011.

[8] Y. Malevergne and D. Sornette. Testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependences. *Quant. Finance*, 3(4) :231–250, 2003.

[9] Roger B. Nelsen. *An introduction to copulas.* Springer Series in Statistics. Springer, New York, second edition, 2006.

[10] Jean-François Quessy, Louis-Paul Rivest, and Marie-Hélène Toupin. On the family of multivariate chi-square copulas. *J. Multivariate Anal.*, 152 :40–60, 2016.

[11] Abe Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8 :229–231, 1959.

[12] Cristiano Varin, Nancy Reid, and David Firth. An overview of composite likelihood methods. *Statist. Sinica*, 21(1) :5–42, 2011.