

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
GUILLAUME LAFLAMME

THÉORIE DES ORDRES STOCHASTIQUES
S-CONCORDANTS ET OUTILS EMPIRIQUES POUR LA
CONFECTION DE TESTS STATISTIQUES

NOVEMBRE 2014

©Guillaume Laffamme, 2014

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

REMERCIEMENTS

Je souhaite d'abord exprimer mes sentiments les plus sincères à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la préparation de ce mémoire. Plus particulièrement, je tiens à remercier mon directeur de recherche, M. Mhamed Mesfioui, ainsi que mon co-directeur de recherche, M. Jean-François Quessy, qui sont tous les deux professeurs au département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières. Leur disponibilité, leur flexibilité et leur écoute m'ont permis de concilier mes études aux cycles supérieurs avec mon travail à temps plein et ma vie de famille. Ils m'ont en outre encouragé à mener à terme la rédaction de cet ouvrage.

Je tiens également à remercier les membres de ma famille ainsi que mes amis, qui m'ont toujours encouragé à poursuivre mes études tout en ayant un travail à temps plein et un enfant. Leur support moral a été un facteur déterminant dans ma prise de décision concernant la poursuite de mes études dans le domaine de la statistique. Enfin, je remercie le département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières pour m'avoir octroyé une bourse d'étude.

SOMMAIRE

La théorie des ordres stochastiques a mené à un large éventail de travaux au cours des dernières décennies. Cette théorie trouve de nombreuses applications dans des domaines très diversifiés, incluant la finance et l'actuariat. Récemment, une nouvelle classe d'ordres stochastiques, à savoir les ordres s -concordants, a été introduite comme généralisation de l'ordre de concordance usuel. Le but de ce mémoire est d'explorer, dans un premier temps, cette nouvelle classe d'ordres stochastiques et ses principales propriétés. Dans un second temps, une nouvelle méthodologie statistique afin de tester l'ordre de s -concordance entre deux jeux de données bivariées sera proposée.

Table des matières

Remerciements	i
Sommaire	ii
Liste des figures	vi
Chapitre 1. Introduction	1
Chapitre 2. Notions fondamentales en probabilité	3
2.1 Définitions et propriétés	3
2.1.1 Définition classique d'une probabilité	3
2.1.2 Définition axiomatique d'une probabilité	4
2.1.3 Probabilités conditionnelles	5
2.1.4 Événements indépendants	6
2.1.5 Formules de calcul	7
2.2 Variables aléatoires	8
2.2.1 Définitions et propriétés	8
2.2.2 Lois de probabilités et fonctions de densité	9
2.2.3 Quelques lois de probabilités continues	10
2.2.4 La fonction de répartition	11
2.2.5 Espérance et moments	11

Chapitre 3. Lois bidimensionnelles et copules	12
3.1 Variables aléatoires bidimensionnelles	12
3.1.1 Lois de probabilités et fonctions de densité	12
3.1.2 Fonctions de répartition	13
3.1.3 Espérance et moments	14
3.2 Les copules	15
3.2.1 Théorème de Sklar (1959)	15
3.2.2 Quelques propriétés des copules	17
3.2.3 Les copules archimédiennes	18
3.2.4 Les copules de Plackett	23
3.2.5 Les copules de Durante	25
Chapitre 4. Les ordres stochastiques	26
4.1 L'ordre stochastique usuel	26
4.1.1 Définition et propriétés	26
4.1.2 Application à la valeur-à-risque	30
4.2 Les ordres convexe et concave	32
4.2.1 Propriétés des ordres convexe et concave	32
4.3 Les ordres convexe et concave croissants	34
4.4 Les ordres stochastiques s -concordants	37
Chapitre 5. Une proposition de test pour des relations d'ordre de concordance	41
5.1 Objectif de ce chapitre	41
5.2 Estimation d'une copule	42
5.2.1 La fonction de répartition empirique univariée	42
5.2.2 La fonction de répartition empirique bidimensionnelle	45

5.2.3	La copule empirique	46
5.3	Méthode de ré-échantillonnage du multiplicateur	47
5.3.1	Dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^d	47
5.3.2	Pour \mathbb{F}_n et \mathbb{H}_n	49
5.3.3	Pour \mathbb{C}_n	50
5.4	Tests pour les ordres s -concordants	51
5.4.1	Test pour l'ordre 1-concordant	51
5.4.2	Test pour l'ordre 2-concordant	53
	Conclusion	54
	Bibliographie	56

LISTE DES FIGURES

3.1	Densités de la copule de Clayton pour $\theta = 1$ et $\theta = 5$	23
3.2	Densités de la copule de Frank pour $\theta = 1$ et $\theta = 5$	24
3.3	Densités de la copule de Gumbel–Hougaard pour $\theta = 0,3$ et $\theta = 0,7$	25
4.1	Exemple où $X \prec_{st} Y$: fdr de X (en bleu) et fdr de Y (en rouge)	27
4.2	Exemple où $X \prec_{cx} Y$: fdr de X (en rouge) et fdr de Y (en vert)	35

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les ordres stochastiques sont de plus en plus utilisés dans plusieurs domaines associés aux probabilités et aux statistiques, notamment en finance et dans les sciences actuarielles. Dans ces domaines, il arrive fréquemment que l'on doive comparer des variables aléatoires ou des couples de variables aléatoires. La manière la plus simple de comparer deux variables aléatoires est de comparer leurs espérances. Cependant, la comparaison entre deux nombres ne donne souvent pas assez d'information; c'est entre autres pour cela que les ordres stochastiques sont souvent utilisés. Il existe plusieurs types d'ordres stochastiques. On utilise un type plutôt qu'un autre dépendamment de l'information que l'on désire obtenir. Par exemple, l'ordre convexe croissant nous informe non seulement sur les espérances de deux variables aléatoires, mais également sur leur variabilité, alors que l'ordre stochastique usuel permet de comparer leurs valeurs-à-risque, ce qui est souvent fait en actuariat.

Il se peut également que l'on désire comparer des couples (X, Y) de variables aléatoires. Dans ce cas, la notion de copule sera introduite comme une fonction des fonctions des densités marginales de X et de Y et il sera question

d'ordre de concordance. Tout dépendamment du type de concordance entre les couples de variables aléatoires étudiés que l'on veut vérifier, on utilisera un type de copule plutôt qu'un autre. Par exemple, dans le domaine des assurances, on peut s'intéresser au couple (pertes réelles, montant des réclamations) pour vérifier s'il existe une dépendance positive par quadrant entre ces variables. Dans ce cas, la copule de Frank ou la copule de Gumbell peuvent être utilisées afin de déterminer si une telle dépendance existe. Pour comparer les ordres de concordance entre deux copules, différents tests statistiques peuvent être réalisés. Dans ce travail, nous en décrirons deux.

Au Chapitre 2, un rappel des notions fondamentales en probabilité nécessaires à la compréhension des ordres stochastiques est présenté. Dans le Chapitre 3, nous allons définir la notion de variable aléatoire bidimensionnelle qui nous mènera à définir la notion de copule. Étant donné l'importance de cette dernière notion, plusieurs de ses propriétés seront abordées. Dans le Chapitre 4, nous allons étudier différentes classes d'ordres stochastiques dont l'ordre stochastique usuel, les ordres convexe et concave, les ordres convexe coissant et concave croissant (cas univariés) et, finalement, les ordres s -concordants qui servent à comparer l'ordre de concordance entre deux copules (cas bivarié). Le Chapitre 5 porte sur des tests statistiques utilisés pour comparer cet ordre de concordance entre deux copules. Pour décrire ces tests, il faudra préalablement définir les copules empiriques et comprendre la méthode du multiplicateur pour imiter le comportement asymptotique des copules empiriques. Ce chapitre conclut sur une description de la méthodologie statistique utilisée pour tester les ordres de concordance quand $s = 1$ et $s = 2$. Le mémoire se termine par une brève conclusion.

CHAPITRE 2

NOTIONS FONDAMENTALES EN PROBABILITÉS

2.1 Définitions et propriétés

2.1.1 Définition classique d'une probabilité

Soit une expérience aléatoire dont l'ensemble des valeurs possibles Ω , appelé espace échantillonnal, compte n épreuves équiprobables. Soit aussi $A \subseteq \Omega$, un événement rattaché à cette expérience. On suppose que A se produit par la réalisation de m éléments de Ω . On dit de ces m éléments qu'ils sont favorables à A . Alors on définit la probabilité de A par $P(A) = m/n$.

De la définition précédente découlent quelques propriétés concernant une probabilité. Quelques-unes sont décrites dans la suite.

- (i) $P(\Omega) = 1$;
- (ii) Si \emptyset est l'ensemble vide, alors $P(\emptyset) = 0$;

- (iii) Pour tout $A \subseteq \Omega$, on a $P(A) \in [0, 1]$;
- (iv) Pour $A^c = \Omega \setminus A$, on a $P(A^c) = 1 - P(A)$;
- (v) Pour tout $A, B \subseteq \Omega$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- (vi) Pour tout $A \subseteq \Omega$ tels que $A \subseteq B$, on a $P(A) \leq P(B)$.

2.1.2 Définition axiomatique d'une probabilité

Définition 2.1. On appelle σ -algèbre sur Ω un ensemble non vide $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tel que

- (1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
- (2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
- (3) Si $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} , alors

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Ainsi, tout élément de \mathcal{A} est appelé un événement.

Définition 2.2. Une mesure de probabilité définie sur (Ω, \mathcal{A}) est une fonction $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $P(\Omega) = 1$;
- (ii) $P(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$;

(iii) Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Un *espace probabilisé* est un triplet (Ω, \mathcal{A}, P) , où Ω est l'espace de référence, \mathcal{A} une σ -algèbre et P une mesure de probabilité définie sur (Ω, \mathcal{A}) .

On appelle *système complet d'événements* un ensemble $\{A_1, \dots, A_m\}$ tel que

- (1) $A_k \neq \emptyset$ pour chaque $k \in \{1, \dots, m\}$;
- (2) $A_1 \cup \dots \cup A_m = \Omega$;
- (3) $A_k \cap A_j = \emptyset$ pour tout $k \neq j \in \{1, \dots, m\}$.

Un système complet d'événements est donc une partition de Ω . De là,

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) = \sum_{k=1}^m P(A_k) = 1.$$

2.1.3 Probabilités conditionnelles

Soit $A \subseteq \Omega$, un événement tel que $P(A) > 0$. Alors la probabilité conditionnelle de l'événement $B \subseteq \Omega$ étant donné A est définie par

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (2.1)$$

On définit de manière similaire la probabilité de A étant donné B , en autant que $P(B) > 0$. De la formule (2.1), on déduit facilement

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A).$$

En interchangeant les rôles de A et de B dans la dernière formule, on a aussi $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$. Par conséquent, on a l'égalité

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

2.1.4 Événements indépendants

On dit que deux événements A_1 et A_2 sont indépendants si et seulement si $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2)$. Dans ce cas, en autant que $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$, il est facile de montrer que

$$P(A_1|A_2) = P(A_1) \quad \text{et} \quad P(A_2|A_1) = P(A_2).$$

Cette définition s'étend à k événements. Ainsi, on dit que les événements A_1, \dots, A_k sont indépendants si

$$P\left(\bigcap_{\ell \in \mathcal{B}} A_\ell\right) = \prod_{\ell \in \mathcal{B}} P(A_\ell)$$

pour tout $\mathcal{B} \subseteq \{1, \dots, k\}$. Ainsi, on voit que la condition

$$P\left(\bigcap_{\ell=1}^k A_\ell\right) = \prod_{\ell=1}^k P(A_\ell)$$

n'est pas suffisante pour conclure à l'indépendance de $k > 2$ événements. On dit de k événements A_1, \dots, A_k qu'ils sont mutuellement indépendants si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j) \quad \text{pour tout } i \neq j \in \{1, \dots, k\}.$$

Ainsi, $k > 2$ événements indépendants sont nécessairement mutuellement indépendants, mais le contraire est généralement faux.

2.1.5 Formules de calcul

Soient les événements A_1, \dots, A_n . Alors la probabilité qu'au moins un de ces événements se produise s'écrit $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Soit $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

On peut montrer par induction que

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{j < k} P(A_j \cap A_k) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right). \quad (2.2)$$

Dans le cas particulier de $n = 2$ événements, la formule se réduit à

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Si les événements A_1, \dots, A_n sont mutuellement incompatibles, alors

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

On sait que si les événements A_1, \dots, A_n sont indépendants, alors pour n'importe quel $\mathcal{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a

$$P\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathcal{I}} P(A_i). \quad (2.3)$$

Dans ce cas, la formule (2.2) devient

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{j < k} P(A_j)P(A_k) + \sum_{i < j < k} P(A_i)P(A_j)P(A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1) \cdots P(A_n).$$

La probabilité que les événements A_1, \dots, A_n se produisent simultanément est $P(A^*) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$. On montre que

$$P(A^*) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Dans le cas particulier de $n = 2$ événements, cette formule devient

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2|A_1).$$

Si les événements A_1, \dots, A_n sont indépendants, alors $P(A_i|A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}) = P(A_i)$ pour chaque $i \in \{2, \dots, n\}$ et on retrouve ainsi la formule (2.3) avec $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$, à savoir

$$P(A^*) = \prod_{k=1}^n P(A_k).$$

2.2 Variables aléatoires

2.2.1 Définitions et propriétés

Soit (Ω, \mathcal{A}) , un espace probabilisable. On dit que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une *variable aléatoire* si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, où \mathcal{B} est l'algèbre de Borel sur \mathbb{R} , *i.e.* la σ -algèbre engendrée par les intervalles de la forme $(-\infty, r]$, $r \in \mathbb{R}$. Dans cette définition, X^{-1} est l'image inverse de X , à savoir

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}.$$

Si X est une variable aléatoire, alors $X_+ = \max(0, X)$ et $X_- = \max(0, -X)$ sont aussi des variables aléatoires. En effet, puisque X est une variable aléatoire, alors $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. De plus, puisque

$$X_+^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x < 0; \\ X^{-1}((-\infty, x]), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

on déduit que $X_+^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$, car $\emptyset \in \mathcal{A}$. Donc, X_+ est une variable aléatoire. De façon similaire,

$$X_-^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x < 0; \\ X^{-1}((-x, \infty)), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On voit donc que $X_-^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$, ce qui permet de conclure que X_- est une variable aléatoire.

2.2.2 Lois de probabilités et fonctions de densité

On dit que la *loi de probabilité* de la variable aléatoire X est *discrète*, ou encore que X est une *variable aléatoire discrète*, s'il existe un ensemble dénombrable E tel que $P(X \in E) = 1$. On dit que la *loi de probabilité* de la variable aléatoire X est *continue*, ou encore que X est une *variable aléatoire continue*, s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ telle que pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x) dx.$$

Puisque l'on doit nécessairement avoir $P(X \in \mathbb{R}) = 1$, il est clair que la fonction f_X doit satisfaire

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1.$$

Dans le cas particulier où $A = [\kappa_1, \kappa_2]$, on a

$$P(X \in A) = P(\kappa_1 \leq X \leq \kappa_2) = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f_X(x) dx.$$

2.2.3 Quelques lois de probabilités continues

La densité de la loi Normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ est donnée par

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On écrit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ lorsque X est distribuée selon cette loi. Si $X \sim N(0, 1)$, on dit que X est la *variable aléatoire centrée réduite*. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$. La densité de la loi Gamma de paramètres $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ est

$$f_{\gamma_1,\gamma_2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma_1)\gamma_2^{\gamma_1}} x^{\gamma_1-1} e^{-x/\gamma_2}, \quad x \in (0, \infty),$$

où pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

est la fonction Γ . Dans le cas particulier où $\gamma_1 = 1$ (et en posant $\gamma_2 = \lambda$), on retrouve la densité de la loi exponentielle, à savoir

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Cette loi est souvent utilisée pour modéliser le temps d'attente avant qu'un événement se produise. La loi Beta de paramètres $\beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$ est

$$f_{\beta_1,\beta_2}(x) = \frac{\Gamma(\beta_1 + \beta_2)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)} x^{\beta_1-1} (1-x)^{\beta_2-1}, \quad x \in (0, 1).$$

Enfin, la loi uniforme sur l'intervalle $[\zeta_1, \zeta_2]$ a comme densité la fonction

$$f_{\zeta_1,\zeta_2}(x) = \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} \mathbb{I}\{x \in [\zeta_1, \zeta_2]\},$$

où \mathbb{I} est la fonction indicatrice. Quand $\zeta_1 = 0$ et $\zeta_2 = 1$, la loi uniforme est un cas particulier de la loi Beta avec $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

2.2.4 La fonction de répartition

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur \mathcal{A} . Alors la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie pour chaque $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ s'appelle la *fonction de répartition* de X . On peut démontrer les propriétés suivantes:

- (i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$;
- (iii) F_X est non décroissante, *i.e.* si $x \leq y$, alors $F_X(x) \leq F_X(y)$;
- (iv) F_X est continue à droite, *i.e.* $\lim_{y \downarrow x} F_X(y) = F_X(x)$.

2.2.5 Espérance et moments

L'espérance d'une variable aléatoire continue X de densité f_X est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx.$$

Cette définition s'étend à $Y = h(X)$. On a alors

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\{h(X)\} = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x) dx.$$

Si X est discrète et définie sur l'ensemble dénombrable $E = \{x_1, x_2, \dots\}$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

Enfin, la variance de X est définie par

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X))^2\} = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2.$$

CHAPITRE 3

LOIS BIDIMENSIONNELLES ET COPULES

3.1 Variables aléatoires bidimensionnelles

3.1.1 Lois de probabilités et fonctions de densité

On dit que la loi de probabilité du couple aléatoire (X, Y) est discrète s'il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ tel que $P((X, Y) \in E) = 1$. On dit que la loi de probabilité du couple aléatoire (X, Y) est continue s'il existe une fonction $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ telle que pour $A \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$P((X, Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

De là, on peut déduire pour $A_1 \subseteq \mathbb{R}$ que

$$P(X \in A_1) = \int_{A_1} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx.$$

On voit donc que la densité de X se déduit de $f_{X,Y}$ via

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy.$$

On parle alors de la *densité marginale* de X . Similairement,

$$P(Y \in A_2) = \int_{A_2} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy,$$

d'où on tire la densité marginale de Y via

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

Enfin, les densités conditionnelles de X étant donné $Y = y$ et de Y étant donné $X = x$ sont données respectivement par

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{et} \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

3.1.2 Fonctions de répartition

La fonction de répartition d'un couple aléatoire (X, Y) s'appelle la *fonction de répartition conjointe*. Elle est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

On en déduit facilement la fonction de répartition marginale de X , à savoir

$$F_X(x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = F_{X,Y}(x, \infty).$$

De même, la fonction de répartition marginale de Y est

$$F_Y(y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = F_{X,Y}(\infty, y).$$

À partir de $F_{X,Y}$, on peut calculer

$$P(X \leq x, Y > y) = P(X \leq x) - P(X \leq x, Y \leq y) = F_X(x) - F_{X,Y}(x, y).$$

De la même façon,

$$P(X > x, Y \leq y) = P(Y \leq y) - P(X \leq x, Y \leq y) = F_Y(y) - F_{X,Y}(x, y).$$

Enfin, des lois de *de Morgan*,

$$\begin{aligned} P(X > x, Y > y) &= 1 - P(X \leq x \cup Y \leq y) \\ &= 1 - \{P(X \leq x) + P(Y \leq y) - P(X \leq x, Y \leq y)\} \\ &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x, y). \end{aligned}$$

3.1.3 Espérance et moments

Soit un couple aléatoire (X, Y) continu dont la densité est $f_{(X,Y)}$. Alors on définit de façon générale l'espérance de $h(X, Y)$ par

$$E\{h(X, Y)\} = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Si $h(x, y) = h_1(x)$, alors

$$\begin{aligned} E\{h(X, Y)\} &= \int_{\mathbb{R}^2} h_1(x) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_1(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy \right\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_1(x) f_X(x) dx \\ &= E\{h_1(X)\}. \end{aligned}$$

De même, $E\{h(X, Y)\} = E\{h_2(Y)\}$ si $h(x, y) = h_2(y)$. Une situation particulière, où on s'intéresse aux moments associés à un couple (X, Y) , survient dans la définition de la covariance. Ainsi, la covariance entre X et Y est

donnée par

$$\text{cov}(X, Y) = E \{ (X - E(X)) (Y - E(Y)) \}.$$

On montre que $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$ et donc on peut écrire

$$\text{cov}(X, Y) = E \{ h(X, Y) \} - E \{ h_1(X) \} E \{ h_2(Y) \},$$

où $h(x, y) = xy$, $h_1(x) = x$ et $h_2(y) = y$. Il est facile de montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$. Enfin, on définit le *coefficient de corrélation* entre X et Y par

$$\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \text{var}(Y)}}.$$

Cet indice mesure le lien linéaire entre X et Y ; il est tel que $\text{cor}(X, Y) \in [-1, 1]$. On a, en fait, $|\text{cor}(X, Y)| = 1$ si et seulement si $Y = r_1 X + r_2$ pour $r_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $r_2 \in \mathbb{R}$.

3.2 Les copules

3.2.1 Théorème de Sklar (1959)

Dans cette section un théorème important, appelé théorème de Sklar (1959), sera introduit. Ce dernier établit une relation entre la fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires et sa copule sous-jacente. Ce résultat, ainsi que la plupart des notions théoriques reliées aux copules qui seront décrites dans la suite, se retrouvent dans l'excellent ouvrage de Nelsen (2006). Voir également les monographies de Cherubini et al. (2004) et de Salvadori et al. (2007) pour plus de détails sur la théorie des copules.

Théorème 3.1. *Soit $F_{X,Y}(x,y)$ une fonction de répartition bivariée avec $F_X(x)$ et $F_Y(y)$ continues. Alors, il existe une unique fonction $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ telle que*

$$F_{X,Y}(x,y) = C \{F_X(x), F_Y(y)\}$$

où C s'appelle la copule associée au couple aléatoire (X,Y) .

On dit qu'une fonction $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ est une copule si elle satisfait les conditions suivantes:

- (1) $C(u, 0) = C(0, v) = 0$;
- (2) $C(u, 1) = C(1, u) = u$;
- (3) $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$ pour tout $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$.

La copule C correspond à la fonction de répartition conjointe de $F_X(X)$ et de $F_Y(Y)$ sur $[0,1]^2$. En effet, comme $F_X(X)$ et $F_Y(Y)$ sont distribuées uniformément sur $(0,1)$, pour $u, v \in (0,1)$, on a que

$$\begin{aligned} P(F_X(X) \leq u, F_Y(Y) \leq v) &= P(X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(v)) \\ &= F_{X,Y}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) \\ &= C \{F_X(F_X^{-1}(u)), F_Y(F_Y^{-1}(v))\} \\ &= C(u, v). \end{aligned}$$

Pour illustrer, considérons un couple de variables aléatoires (X,Y) tel que

$$F_{X,Y}(x,y) = \sqrt{\frac{xy}{x+y-xy}}, \quad x, y \in [0,1].$$

On a $F_X(x) = F_{X,Y}(x, 1) = \sqrt{x}$ et $F_Y(y) = F_{X,Y}(1, y) = \sqrt{y}$. Ainsi, $F_X^{-1}(u) = u^2$ et $F_Y^{-1}(v) = v^2$, d'où on tire

$$\begin{aligned} C(u, v) &= F_{X,Y}(u^2, v^2) \\ &= \sqrt{\frac{u^2 v^2}{u^2 + v^2 - u^2 v^2}} \\ &= (u^{-2} + v^{-2} - 1)^{-1/2}. \end{aligned}$$

À noter qu'il existe une version du Théorème de Sklar (1959) pour les fonctions de survie. En effet, soit

$$\bar{F}_{X,Y}(x, y) = P(X > x, Y > y).$$

Si $\bar{F}_X(x) = \bar{F}_{(X,Y)}(x, -\infty)$ et $\bar{F}_Y(y) = \bar{F}_{(X,Y)}(-\infty, y)$. Alors, il existe une unique fonction $\hat{C} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\bar{F}_{(X,Y)}(x, y) = \hat{C} \{ \bar{F}_X(x), \bar{F}_Y(y) \}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{(X,Y)} &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y} \\ &= (1 - F_X(x)) + (1 - F_Y(y)) - 1 + C(F_X(x), F_Y(y)) \\ &= \bar{F}_X(x) + \bar{F}_Y(y) - 1 + C(1 - \bar{F}_X(x), 1 - \bar{F}_Y(y)) \\ &= \hat{C}(\bar{F}_X(x), \bar{F}_Y(y)), \end{aligned}$$

où $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$.

3.2.2 Quelques propriétés des copules

Comme X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y),$$

alors la copule associée à l'indépendance est $\Pi(u, v) = uv$. Également, on peut montrer que pour toute fonction de répartition conjointe $F_{X,Y}$,

$$\max \{F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0\} \leq F_{X,Y}(x, y) \leq \min \{F_X(x), F_Y(y)\}.$$

Ainsi, on déduit que pour toute copule C ,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v).$$

3.2.3 Les copules archimédiennes

Une copule est dite archimédienne si elle s'écrit sous la forme

$$C_\phi(u, v) = \phi^{[-1]} \{ \phi(u) + \phi(v) \},$$

où $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est un générateur continu, décroissant et convexe tel que $\phi(1) = 0$. Ici, la fonction $\phi^{[-1]} : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ est donnée par

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \phi(0); \\ 0 & \text{si } \phi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

À noter que si $\phi(0) = \infty$, alors $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$ et dans ce cas on dit que ϕ est un générateur strict. On vérifie facilement que $C(u, 0) = \phi^{[-1]} \{ \phi(u) + \phi(0) \} = 0$, $C(u, 1) = \phi^{[-1]} \{ \phi(u) + \phi(1) \} = \phi^{[-1]} \{ \phi(u) \} = u$. Ainsi, du fait que $C_\phi(u, v) = C_\phi(v, u)$, on déduit $C(0, v) = 0$ et $C(1, v) = v$.

Proposition 3.1. *Si C_ϕ est une copule archimédienne de générateur ϕ , alors C_ϕ est symétrique, i.e. $C_\phi(u, v) = C_\phi(v, u)$ pour tout $u, v \in [0, 1]^2$.*

Démonstration. Par un calcul direct,

$$C_\phi(u, v) = \phi^{[-1]} \{ \phi(u) + \phi(v) \} = \phi^{[-1]} \{ \phi(v) + \phi(u) \} = C_\phi(v, u),$$

ce qui complète la preuve. \diamond

Proposition 3.2. *Si C_ϕ est une copule archimédienne de générateur ϕ , alors C_ϕ est associative, i.e. pour tout $u, v, w \in [0, 1]$,*

$$C_\phi \{ u, C_\phi(v, w) \} = C_\phi \{ C_\phi(u, v), w \}.$$

Démonstration. D'un côté, on a

$$\begin{aligned} C_\phi \{ u, C_\phi(v, w) \} &= \phi^{[-1]} \left[\phi(u) + \phi \left\{ \phi^{[-1]} \{ \phi(v) + \phi(w) \} \right\} \right] \\ &= \phi^{[-1]} \{ \phi(u) + \phi(v) + \phi(w) \}. \end{aligned}$$

Similairement, on montre que

$$C_\phi \{ C_\phi(u, v), w \} = \phi^{[-1]} \{ \phi(u) + \phi(v) + \phi(w) \},$$

d'où on peut conclure que $C_\phi \{ u, C_\phi(v, w) \} = C_\phi \{ C_\phi(u, v), w \}$. \diamond

Proposition 3.3. *Soit $K > 0$, une constante. Alors $\tilde{\phi}(t) = K \phi(t)$ génère la même copule archimédienne que ϕ .*

Démonstration. On note premièrement que $\tilde{\phi}^{-1}(u) = \phi^{-1}(u/K)$. De là,

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\phi}}(u, v) &= \tilde{\phi}^{-1} \left\{ \tilde{\phi}(u) + \tilde{\phi}(v) \right\} \\ &= \tilde{\phi}^{-1} \left\{ K (\phi(u) + \phi(v)) \right\} \\ &= \phi^{-1} \{ \phi(u) + \phi(v) \} \\ &= C_\phi(u, v), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. \diamond

L'ensemble des courbes de niveaux d'une copule C est donné par

$$\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid C(u, v) = t\}.$$

Pour une copule archimédienne, une courbe de niveau correspond à l'ensemble des points $(u, v) \in [0, 1]^2$ tels que $\phi(u) + \phi(v) = \phi(t)$. On peut montrer que ces courbes de niveaux sont convexes. En effet, soit une copule archimédienne C_ϕ générée par ϕ . Pour t fixé, on a $v = L_t(u)$, où

$$L_t(u) = \phi^{[-1]} \{\phi(t) - \phi(u)\} = \phi^{-1} \{\phi(t) - \phi(u)\}.$$

Comme ϕ est convexe,

$$\begin{aligned} \phi(t) - \phi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &\geq \phi(t) - \left\{ \frac{\phi(u_1) + \phi(u_2)}{2} \right\} \\ &= \frac{\{\phi(t) - \phi(u_1)\} + \{\phi(t) - \phi(u_2)\}}{2}. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque ϕ^{-1} est décroissante et convexe,

$$\begin{aligned} L_t\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \phi^{-1} \left\{ \phi(t) - \phi\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \right\} \\ &\leq \phi^{-1} \left[\frac{\{\phi(t) - \phi(u_1)\} + \{\phi(t) - \phi(u_2)\}}{2} \right] \\ &\leq \frac{1}{2} [\phi^{-1} \{\phi(t) - \phi(u_1)\} + \phi^{-1} \{\phi(t) - \phi(u_2)\}] \\ &= \frac{L_t(u_1) + L_t(u_2)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui montre que L_t est mi-convexe. Cela est suffisant pour conclure que L_t est convexe, car elle est continue.

On montre que

$$\frac{\partial C_\phi(u, v) / \partial u}{\partial C_\phi(u, v) / \partial v} = \frac{\phi'(u)}{\phi'(v)}. \quad (3.1)$$

En effet, comme ϕ est convexe, alors ϕ' existe presque partout sur $(0, 1)$ et les dérivées partielles existent pour presque tout $u, v \in [0, 1]$. Comme $\phi\{C_\phi(u, v)\} = \phi(u) + \phi(v)$, une application de la règle de dérivation en chaîne implique

$$\phi' \{C_\phi(u, v)\} \frac{\partial}{\partial u} C_\phi(u, v) = \phi'(u).$$

De même, on obtient

$$\phi' \{C_\phi(u, v)\} \frac{\partial}{\partial v} C_\phi(u, v) = \phi'(v).$$

Puisque la fonction ϕ est strictement décroissante et que $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in (0, 1)$, on a le résultat annoncé.

Il est possible de déduire le générateur d'une copule archimédienne à partir de l'identité (3.1). Pour illustrer, soit la copule

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

Par des calculs simples, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) = u^{-2} (u^{-1} + v^{-1} - 1)^{-2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial v} C(u, v) = v^{-2} (u^{-1} + v^{-1} - 1)^{-2}.$$

De l'équation (3.1), on peut écrire

$$\frac{\phi'(u)}{\phi'(v)} = \frac{v^2}{u^2}.$$

On déduit alors que $\phi'(u) = r_1/u^2$ pour un certain $r_1 \in \mathbb{R}$. En intégrant, on peut également déduire que $\phi(u) = -r_1/n + r_2$ pour $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Puisque ϕ doit satisfaire les conditions $\phi(1) = 0$ et $\phi'(u) < 0$, on obtient $\phi(t) = t^{-1} - 1$.

Exemple 3.1. *Le générateur de la copule de Clayton est donné par*

$$\phi_\theta(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}, \quad \theta > 0.$$

La forme de la copule de Clayton est donc

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}.$$

Ce modèle de dépendance à été étudié par Clayton (1978). En utilisant d'abord le fait que

$$-\log C_\theta(u, v) = \frac{1}{\theta} \log (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1),$$

puis par une application de la règle de L'Hôpital, on montre que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = uv,$$

i.e. que $C_\theta(u, v)$ est la copule d'indépendance à la limite quand $\theta \rightarrow 0$.

Exemple 3.2. *Le générateur de la copule de Frank est*

$$\phi_\theta(t) = \log \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta t}} \right),$$

où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La forme de la copule associée est

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 - \frac{(1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{1 - e^{-\theta}} \right\}.$$

On peut montrer que

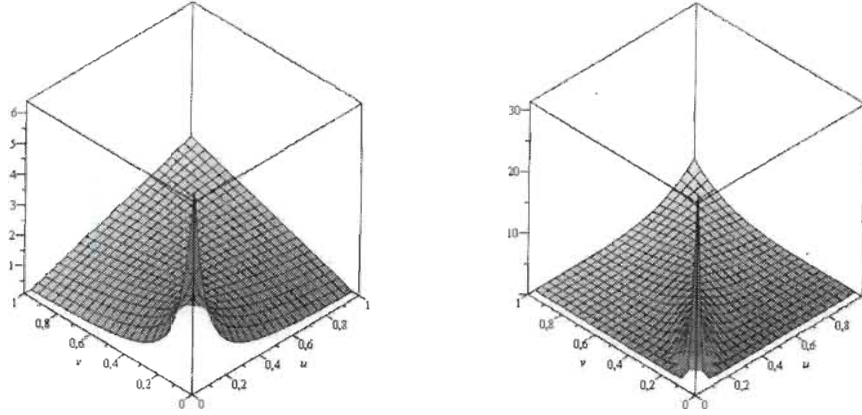
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(u, v) = uv.$$

Ce modèle a été introduit par Frank (1979) et étudié par Genest (1987).

Exemple 3.3. *Le générateur de la copule de Gumbel-Hougaard est, pour $\theta \in [0, 1]$, $\phi_\theta(t) = (-\log t)^{\frac{1}{1-\theta}}$. La forme de la copule de Gumbel-Hougaard est donc*

$$C_\theta(u, v) = \exp \left\{ - \left(|\ln u|^{\frac{1}{1-\theta}} + |\ln v|^{\frac{1}{1-\theta}} \right)^{1-\theta} \right\}.$$

On voit directement que $C_0(u, v) = uv$.

Figure 3.1: Densités de la copule de Clayton pour $\theta = 1$ et $\theta = 5$

3.2.4 Les copules de Plackett

Il y a un lien entre les copules de Plackett et le risque relatif. Tout d'abord, on définit le risque relatif associé à un événement de probabilité p par

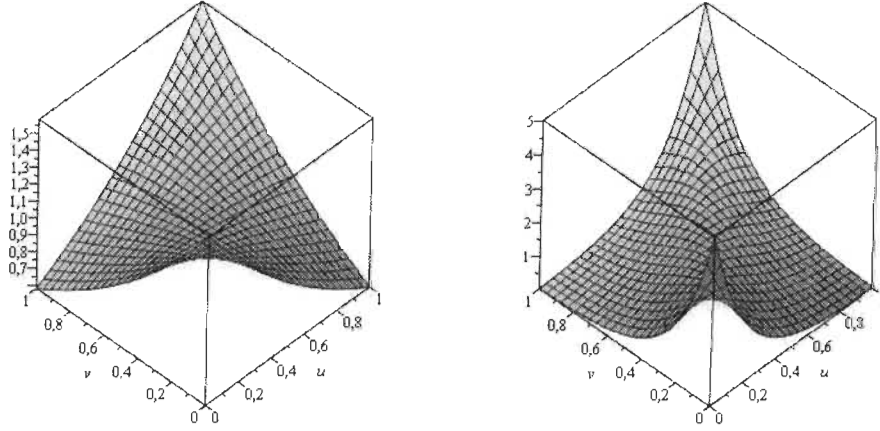
$$\text{RR} = \frac{p}{1-p}.$$

Si deux événements sont de probabilité p_1 et p_2 , alors le *odds ratio* est

$$\text{OR} = \frac{p_1/(1-p_1)}{p_2/(1-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}.$$

Maintenant, soit un couple de variables aléatoires (X, Y) de fonction de répartition $F_{X,Y}$. On s'intéresse à l'événement $X \leq x$ que l'on met en relation avec Y en considérant les événements conditionnels $X \leq x|Y \leq y$ et $X \leq x|Y > y$. On a

$$p_1 = P(X \leq x|Y \leq y) = \frac{F_{X,Y}(x, y)}{F_Y(y)}$$

Figure 3.2: Densités de la copule de Frank pour $\theta = 1$ et $\theta = 5$

et

$$p_2 = P(X \leq x | Y > y) = \frac{F_X(x) - F_{X,Y}(x, y)}{1 - F_Y(y)}.$$

De là,

$$\text{OR}(x, y) = \frac{F_{X,Y}(x, y) \{1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{X,Y}(x, y)\}}{\{F_Y(y) - F_{X,Y}(x, y)\} \{F_X(x) - F_{X,Y}(x, y)\}}.$$

La famille des lois de Plackett est définie comme l'ensemble des fonctions de répartition telles que le *odds ratio* est constant, c'est-à-dire que $\text{OR}(x, y) = \theta$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $x = F_X^{-1}(u)$, $y = F_Y^{-1}(v)$, et en invoquant le Théorème de Sklar (1959), l'équation $\text{OR}(x, y) = \theta$ peut s'écrire en terme de la copule C associée à $F_{X,Y}$ via

$$\frac{C(u, v) \{1 - u - v + C(u, v)\}}{\{v - C(u, v)\} \{u - C(u, v)\}} = \theta.$$

La solution à cette équation est

$$C_\theta(u, v) = \frac{L_\theta(u, v) - \sqrt{\{L_\theta(u, v)\}^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)},$$

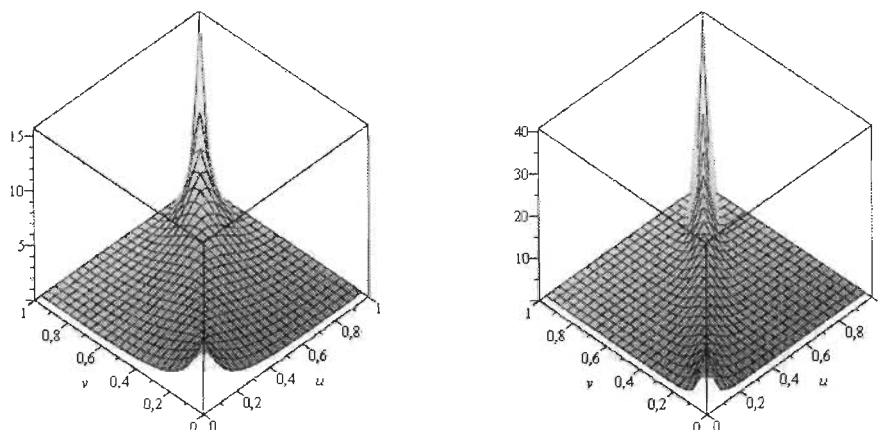


Figure 3.3: Densités de la copule de Gumbel–Hougaard pour $\theta = 0,3$ et $\theta = 0,7$

où $L_\theta(u, v) = 1 + (\theta - 1)(u + v)$; il s'agit de la forme générale des copules paramétriques de Plackett.

3.2.5 Les copules de Durante

Les copules de Durante sont de la forme $C_\psi(u, v) = \min(u, v) \psi\{\max(u, v)\}$, où $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction non décroissante sur $[0, 1]$ telle que $\psi(1) = 1$ et $\psi(x)/x$ est décroissante sur $[0, 1]$. Un cas particulier survient lorsque $\psi(x) = x^\theta$, ce qui permet de retrouver la copule de Cuadras–Augé.

CHAPITRE 4

LES ORDRES STOCHASTIQUES

4.1 L'ordre stochastique usuel

4.1.1 Définition et propriétés

Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition respectives sont F et G . On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre *stochastique usuel* si

$$F(u) \geq G(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

De manière équivalente, l'équation (4.1) est vraie si et seulement si

$$\bar{F}(u) \leq \bar{G}(u), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

où $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$ et $\bar{G}(u) = 1 - G(u)$ sont les fonctions de survie associées à F et G , respectivement. On écrit alors $X \prec_{st} Y$.

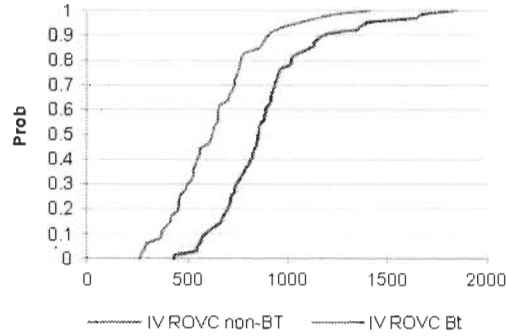


Figure 4.1: Exemple où $X \prec_{st} Y$: fdr de X (en bleu) et fdr de Y (en rouge)

Remarque 4.1. Soient X et Y , deux variables aléatoires discrètes prenant leurs valeurs dans \mathbb{Z} et telles que $p_i = P(X = i)$ et $q_i = P(Y = i)$. Alors $X \prec_{st} Y$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j \leq i} p_j \leq \sum_{j \leq i} q_j.$$

Dans la suite, certaines caractérisations de l'ordre usuel \prec_{st} sont énoncées; celles-ci s'avèrent très utiles dans la pratique.

Proposition 4.1. Soient X et Y , deux variables aléatoires. Alors $X \prec_{st} Y$ si et seulement si

$$E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}$$

pour toute fonction croissante ϕ dont les espérances précédentes existent.

Proposition 4.2. Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G . Si $X \prec_{st} Y$, alors il existe des variables aléatoires X^* et Y^* telles que $X^* \stackrel{st}{=} X$, $Y^* \stackrel{st}{=} Y$ et $X^* \leq Y^*$ presque partout.

Proposition 4.3. *Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G . Alors si $X \prec_{st} Y$, on a*

- (i) $E(X) \leq E(Y)$;
- (ii) $X =_{st} Y$, en autant que $E(X) = E(Y)$.

Démonstration. Pour (i), comme $\phi(x) = x$ est une fonction croissante, on a directement de la Proposition 4.1 que $E(X) \leq E(Y)$. Pour démontrer (ii), on note d'abord que

$$E(X) = \int_0^\infty \bar{F}(u) du \quad \text{et} \quad E(Y) = \int_0^\infty \bar{G}(u) du.$$

De là, puisque $E(X) = E(Y)$, on obtient

$$0 = E(Y) - E(X) = \int_0^\infty \{\bar{G}(u) - \bar{F}(u)\} du.$$

Cependant, puisque $X \prec_{st} Y$ on sait alors que $\bar{F}(u) - \bar{G}(u) \leq 0$ pour tout u . Donc, on a nécessairement $\bar{G} = \bar{F}$, où de façon équivalente $F = G$. Autrement dit, X et Y ont la même loi, ce qui complète la démonstration.

Proposition 4.4. *Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G . Alors si $X \prec_{st} Y$, on a*

- (i) $f(X) \prec_{st} f(Y)$, si f est une fonction croissante;
- (ii) $f(Y) \prec_{st} f(X)$, si f est une fonction décroissante.

Démonstration. Si $X \prec_{st} Y$, alors $P(X > x) \leq P(Y > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quand f est croissante, on peut écrire $P\{f(X) > f(x)\} \leq P\{f(Y) > f(x)\}$.

Enfin, en posant $u = f(x)$, cela revient à $P\{f(X) > u\} \leq P\{f(Y) > u\}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et donc $f(X) \prec_{st} f(Y)$. La démonstration pour f décroissante est similaire.

Proposition 4.5. *Soient les deux suites de variables aléatoires indépendantes $\{X_i\}_{i=1}^n$ et $\{Y_i\}_{i=1}^n$ telles que $X_i \prec_{st} Y_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors pour toute fonction croissante $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\psi(X_1, \dots, X_n) \prec_{st} \psi(Y_1, \dots, Y_n).$$

Un cas particulier de la proposition précédente lorsque $\psi(s_1, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^n s_i$ implique que

$$\sum_{i=1}^n X_i \prec_{st} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Proposition 4.6. *Soient les deux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $\{X_i\}_{i=1}^n$ et $\{Y_i\}_{i=1}^n$. Si $X_{(1)} \prec_{st} Y_{(1)}$, alors $X_{(k)} \prec_{st} Y_{(k)}$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$.*

Dans plusieurs situations la distribution de la variable aléatoire X est inconnue. Toutefois, il est possible d'obtenir des bornes sur la loi de X au sens de l'ordre usuel lorsqu'on connaît seulement son espérance et sa variance. Dans ce cas, il existe deux variables aléatoires, notées $X_{\min}(\mu, \sigma)$ et $X_{\max}(\mu, \sigma)$, telles que

$$X_{\min}(\mu, \sigma) \prec_{st} X \prec_{st} X_{\max}(\mu, \sigma)$$

si et seulement si

$$F_{\min, \mu, \sigma}(x) \leq F(x) \leq F_{\max, \mu, \sigma}(x), \quad (4.2)$$

où

$$F_{\min,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \mu; \\ \frac{x-\mu}{x} & \text{si } \mu < x \leq \frac{\sigma^2+\mu^2}{\mu} \\ \frac{(x-\mu)^2}{(x-\mu)^2+\sigma^2} & \text{si } x > \frac{\sigma^2+\mu^2}{\mu} \end{cases}$$

et

$$F_{\max,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{(x-\mu)^2+\sigma} & \text{si } 0 \leq x \leq \mu; \\ 1 & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

4.1.2 Application à la valeur-à-risque

Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , alors sa valeur-à-risque (VaR) de niveau α est définie par

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha),$$

où

$$F^{-1}(\alpha) = \inf \{s \in \mathbb{R} | F(s) \geq \alpha\}$$

est l'inverse généralisé de F . Par exemple, si la variable aléatoire X représente le montant des pertes d'une compagnie, alors la valeur à risque de niveau α est le montant de pertes qui a une probabilité α d'être excédée.

L'ordre usuel peut être caractérisé en fonction des valeurs à risque des variables aléatoires à comparer. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.7. *Soient X et Y , deux variables aléatoires. Alors $X \prec_{st} Y$ si et seulement si $\text{VaR}_\alpha(X) \leq \text{VaR}_\alpha(Y)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$.*

Lorsque l'on connaît seulement la moyenne et la variance d'une variable aléatoire X , on peut borner la valeur-à-risque de X via une application de l'équation (4.2). En effet, on montre que

$$F_{\min, \mu, \sigma}^{-1}(\alpha) \leq \text{VaR}_\alpha(X) \leq F_{\max, \mu, \sigma}^{-1}(\alpha). \quad (4.3)$$

Il est souvent utile d'évaluer les bornes de la valeur-à-risque associées à une somme finie $S = X_1 + \dots + X_n$ de variables aléatoires, notamment dans plusieurs applications financières. Lorsque $E(X_i) = \mu_i > 0$ et $\text{var}(X_i) = \sigma_i^2 > 0$ sont connues et si $\rho = (\rho_{ij})$ est la matrice de corrélation du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$, alors de (4.3), on déduit

$$F_{\min, \mu, \sigma(\rho)}^{-1}(\alpha) \leq \text{VaR}_\alpha(S) \leq F_{\max, \mu, \sigma(\rho)}^{-1}(\alpha),$$

où

$$\mu = E(S) = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{et} \quad \sigma^2(\rho) = \text{var}(S) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

Puisque généralement, la matrice des corrélations ρ est inconnue, on doit maximiser la borne inférieure et minimiser la borne supérieure, par rapport à ρ , afin d'obtenir des bornes qui n'en dépendent pas. On montre que les bornes résultantes sont

$$F_{\min, \mu, \sigma}^{-1}(\alpha) \leq \text{VaR}_\alpha(S) \leq F_{\max, \mu, \sigma}^{-1}(\alpha),$$

où $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$.

4.2 Les ordres convexe et concave

On commence avec les définitions formelles des ordres stochastiques convexe et concave.

Définition 4.3. Soient X et Y , deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre convexe si

$$E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}$$

pour toute fonction convexe $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances précédentes existent. On note alors $X \prec_{cx} Y$.

Définition 4.4. Soient X et Y , deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre concave si

$$E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}$$

pour toute fonction concave $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances précédentes existent. On note alors $X \prec_{cv} Y$.

4.2.1 Propriétés des ordres convexe et concave

Quelques propriétés des ordres stochastiques convexe et concave seront maintenant énoncées.

Proposition 4.8. Soient X et Y , deux variables aléatoires. Alors si $X \prec_{cx} Y$, on a (i) $Y \prec_{cv} X$, (ii) $E(X) = E(Y)$ et (iii) $\text{var}(X) \leq \text{var}(Y)$.

Démonstration. Le résultat (i) découle du fait que si ϕ est convexe, alors $-\phi$ est concave. L'égalité des espérances (ii) est satisfaite car les fonctions $\phi(x) = x$ et $\psi(x) = -x$ sont convexes. Enfin, (iii) vient immédiatement du fait que $\phi(x) = x^2$ est convexe.

Quelques caractérisations de ces ordres sont données dans la suite.

Proposition 4.9. *Soient X et Y , deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F et G . Alors $X \prec_{cx} Y$ si et seulement si $E(X) = E(Y)$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^\infty \{1 - F(x)\} dx \leq \int_a^\infty \{1 - G(x)\} dx.$$

Une version de la proposition précédente indique que $X \prec_{cx} Y$ si et seulement si $E(X) = E(Y)$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^a F(x) dx \leq \int_{-\infty}^a G(x) dx.$$

Le résultat suivant indique une condition suffisante pour l'ordre convexe basée sur l'espérance conditionnelle.

Théorème 4.2. *Soient X et Y , deux variables aléatoires telles que $E[Y|X] = X$. Alors $X \prec_{cx} Y$.*

Une conséquence du résultat précédent permet d'obtenir des comparaisons, au sens de l'ordre convexe, de moyennes d'échantillons aléatoires.

Corollaire 4.1. *Pour X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $\bar{X}_n \prec_{cx} \bar{X}_{n-1}$, où \bar{X}_n est la moyenne*

arithmétique de X_1, \dots, X_n . De plus,

$$\bar{X}_n \prec_{cx} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$$

pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\min(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

Corollaire 4.2. *Si X est une variable aléatoire telle que $E(X) < \infty$, alors $X + E(X) \prec_{cx} 2X$.*

Lemme 4.1. *Soient les deux suites de variables aléatoires indépendantes $\{X_i\}_{i=1}^n$ et $\{Y_i\}_{i=1}^n$ telles que $X_i \prec_{cx} Y_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors*

$$\sum_{i=1}^n X_i \prec_{cx} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Maintenant, d'autres conditions suffisantes de l'ordre convexe seront examinées sur la base des croisements des distributions des variables aléatoires à comparer. Soit donc $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle. On note $S^-(f)$ le nombre de changements de signe de f sur I .

Théorème 4.3. *Soient X et Y , deux variables aléatoires de densités respectives f et g et de fonctions de répartition respectives F et G . Alors si X et Y ont la même moyenne, alors le fait que $S^-(g - f) = 2$ implique que $S^-(G - F) = 1$, ce qui implique que $X \prec_{cx} Y$.*

4.3 Les ordres convexe et concave croissants

Définition 4.5. *Soient X et Y , deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre convexe croissant, que l'on note par*

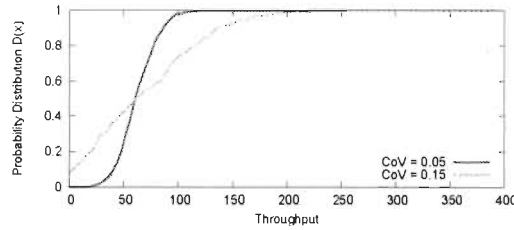


Figure 4.2: Exemple où $X \prec_{cx} Y$: fdr de X (en rouge) et fdr de Y (en vert)

$X \prec_{icx} Y$, si

$$E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}$$

pour toute fonction convexe et croissante $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances précédentes existent.

Il est à remarquer que si $X \prec_{icx} Y$, alors X est à la fois plus petite que Y au sens stochastique, et moins variable que Y .

Définition 4.6. Soient X et Y , deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre concave croissant, que l'on note par $X \prec_{icv} Y$, si

$$E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}$$

pour toute fonction concave et croissante $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances précédentes existent.

Il est facile de montrer que si $X \prec_{icx} Y$, alors $-Y \prec_{icv} -X$; il suffit de noter que si $\phi(x)$ est convexe et croissante, alors $-\phi(-x)$ est concave et croissante. Quelques autres propriétés sont décrites dans la suite.

Proposition 4.10. Si X et Y sont telles que $X \prec_{icx} Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Démonstration. Il s'agit de remarquer que la fonction $\phi(x) = x$ est convexe et croissante.

Notons que ces ordres peuvent se caractériser en fonction des fonctions de survie des variables aléatoires à comparer.

Proposition 4.11. *Soient X et Y , deux variables aléatoires de fonctions de survie respectives \bar{F} et \bar{G} . Alors $X \prec_{icx} Y$ si et seulement si*

$$\int_a^\infty \bar{F}(x) dx \leq \int_a^\infty \bar{G}(x) dx$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Ces ordres peuvent aussi se caractériser via les espérances conditionnelles.

Théorème 4.4. *Si X et Y sont telles $E(Y|X) \geq X$, alors $X \prec_{icx} Y$.*

Théorème 4.5. *Soient les deux suites de variables aléatoires indépendantes $\{X_i\}_{i=1}^n$ et $\{Y_i\}_{i=1}^n$ telles que $X_i \prec_{icx} Y_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors pour toute fonction convexe et croissante g , on a*

$$g(X_1, \dots, X_n) \prec_{icx} g(Y_1, \dots, Y_n).$$

Quelques cas particuliers de ce résultat sont intéressants en eux-mêmes.

Corollaire 4.3. *Soient les deux suites de variables aléatoires indépendantes $\{X_i\}_{i=1}^n$ et $\{Y_i\}_{i=1}^n$ telles que $X_i \prec_{icx} Y_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors*

$$\sum_{i=1}^n X_i \prec_{icx} \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{et} \quad \max(X_1, \dots, X_n) \prec_{icx} \max(Y_1, \dots, Y_n).$$

Démonstration. Il suffit de noter que les fonctions $g_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ et $g_2(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n)$ sont convexes et croissantes, et d'appliquer le Théorème 4.5.

Une condition suffisante pour obtenir l'ordre convexe croissant est maintenant donnée sur la base des croisements des fonctions de répartition.

Théorème 4.6. *Soient X et Y , deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F et G telles que $E(X) \leq E(Y)$. Alors $S^-(G-F) \leq 1$ implique que $X \prec_{icx} Y$.*

À noter que les ordres stochastiques \prec_{st} , \prec_{cx} , \prec_{cv} , \prec_{icx} et \prec_{icv} sont connectés entre eux par les relations suivantes:

- (i) $X \prec_{st} Y \Rightarrow X \prec_{icx} Y$ et $X \prec_{icv} Y$;
- (ii) $X \prec_{cx} Y \Rightarrow X \prec_{icx} Y$;
- (iii) $X \prec_{cv} Y \Rightarrow X \prec_{icv} Y$.

Toutefois, il n'existe aucune relation entre les ordres stochastiques \prec_{st} et \prec_{cx} .

4.4 Les ordres stochastiques s -concordants

Dans l'ensemble des copules, l'ordre de concordance \prec_c^1 entre deux copules C_1 et C_2 est défini comme suit: on a $C_1 \prec_c^1 C_2$ si et seulement si pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$,

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v).$$

La plupart des familles paramétriques de copules $\{C_\theta; \theta \in \Theta\}$ sont monotones au sens de l'ordre \prec_c^1 . Autrement dit, $\theta_1 \leq \theta_2$ implique $C_{\theta_1} \prec_c^1 C_{\theta_2}$. Cependant, l'ordre de concordance peut rarement être utilisé pour comparer deux modèles de copules paramétriques provenant de familles différentes. Ainsi, pour deux familles de copules $\{C_\theta; \theta \in \Theta\}$ et $\{D_\gamma; \gamma \in \mathcal{G}\}$, la différence $C_\theta(u, v) - D_\gamma(u, v)$ peut changer de signe selon $(u, v) \in [0, 1]^2$ pour certaines valeurs des $\theta \in \Theta$ et $\gamma \in \mathcal{G}$.

Certains graphes montrent que la courbe de niveau $u \rightarrow \ell(u)$ telle que

$$C_\theta \{u, \ell(u)\} - D_\gamma \{u, \ell(u)\} = 0$$

est unique et décroissante. C'est le cas notamment lorsque C_θ est la copule de Clayton de paramètre $\theta = 1$ et que D_γ est la copule de Frank de paramètre $\gamma = 2$. En effet, dans ce cas la surface définie par

$$(u, v) \rightarrow C_1(u, v) - D_2(u, v)$$

change de signe dans les domaine délimités par la courbe de niveau $u \rightarrow \ell(u)$ telle que $C_1\{u, \ell(u)\} - D_2\{u, \ell(u)\} = 0$. Une comparaison de C_1 et de D_2 selon l'ordre de concordance \prec_c^1 est donc impossible. Il faut alors envisager un ordre plus faible permettant la comparaison de la concordance entre deux copules. Ceci motive à considérer l'ordre \prec_c^2 . Ainsi, on dit que $C_1 \prec_c^2 C_2$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$\int_x^1 \int_y^1 \bar{C}_1(u, v) du dv \leq \int_x^1 \int_y^1 \bar{C}_2(u, v) du dv.$$

En considérant $(U_1, V_1) \sim C_1$ et $(U_2, V_2) \sim C_2$, ceci équivaut à

$$E \{(U_1 - x)_+ \times (V_1 - y)_+\} \leq E \{(U_2 - x)_+ \times (V_2 - y)_+\},$$

où $z_+ = \max(z, 0)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \int_y^1 \bar{C}_1(u, v) \, du \, dv &= \int_x^1 \int_y^1 \mathbb{E}(\mathbb{I}_{U_1 > u} \mathbb{I}_{V_1 > v}) \, du \, dv \\
&= \mathbb{E} \left\{ \int_x^{U_1} \int_y^{V_1} (\mathbb{I}_{U_1 > x} \mathbb{I}_{V_1 > y}) \, du \, dv \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ (\mathbb{I}_{U_1 > x} \mathbb{I}_{V_1 > y}) \int_x^{U_1} \int_y^{V_1} \, du \, dv \right\} \\
&= \mathbb{E} \{ (U_1 - x) \mathbb{I}_{U_1 > x} (V_1 - y) \mathbb{I}_{V_1 > y} \} \\
&= \mathbb{E} \{ (U_1 - x)_+ \times (V_1 - y)_+ \}.
\end{aligned}$$

De la même façon, on démontre que

$$\int_x^1 \int_y^1 \bar{C}_2(u, v) \, du \, dv = \mathbb{E} \{ (U_2 - x)_+ \times (V_2 - y)_+ \}.$$

Toutefois, il existe des situations où la courbe de niveau $u \rightarrow \ell(u)$ telle que $C_1\{u, \ell(u)\} - C_2\{u, \ell(u)\} = 0$ n'est pas unique. Dans ce cas, $C_1(u, v) - C_2(u, v)$ changera plusieurs fois de signe. Pour illustrer, considérons la copule de Fréchet $C_\alpha(u, v) = \alpha \max(u + v - 1, 0) + (1 - \alpha) \min(u, v)$ et la copule d'indépendance $\Pi(u, v) = uv$. Posons $D_\alpha(u, v) = C_\alpha(u, v) - \Pi(u, v)$. Prenons $\alpha > 1/2$ et définissons les ensembles $\mathcal{A} = \{(u, v) \in [0, 1]^2 : u + v - 1 \leq 0\}$,

$$\mathcal{S}_{1,\alpha} = [0, 1 - \alpha] \times [0, 1 - \alpha] \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{2,\alpha} = [\alpha, 1] \times [\alpha, 1]$$

Denuit et Mesfioui (2012) montrent que

$$D_\alpha(u, v) \begin{cases} \geq 0, & \text{pour tout } (u, v) \in \mathcal{S}_{1,\alpha} \cup \mathcal{S}_{2,\alpha}, \\ \leq 0, & \text{pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2 \setminus \mathcal{S}_{1,\alpha} \cup \mathcal{S}_{2,\alpha}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans ce cas, on constate qu'il existe deux courbes de niveaux, à savoir

$$L_{1,\alpha} = \{(u, 1 - \alpha), u \in [0, 1 - \alpha]\} \cup \{(1 - \alpha, v), v \in [0, 1 - \alpha]\}$$

et

$$L_{2,\alpha} = \{(u, \alpha), u \in [\alpha, 1]\} \cup \{(\alpha, v), v \in [\alpha, 1]\},$$

telles que $D_\alpha(u, v)$ est positive sous $L_{1,\alpha}$, négative entre $L_{1,\alpha}$ et $L_{2,\alpha}$ et positive au dessus de $L_{2,\alpha}$. Donc, une comparaison selon \prec_c^2 n'est plus possible. Il faut passer à un niveau supérieur afin d'assurer la comparaison entre C_α et Π . On définira alors l'ordre \prec_c^3 par $C_1 \prec_c^3 C_2$ si pour tout $t, s \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_x^1 \int_y^1 \mathbb{E} \{(U_1 - x)_+ \times (V_1 - y)_+\} du dv \\ \leq \int_x^1 \int_y^1 \mathbb{E} \{(U_2 - x)_+ \times (V_2 - y)_+\} du dv. \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\mathbb{E} \{(U_1 - x)_+^2 \times (V_1 - y)_+^2\} \leq \mathbb{E} \{(U_2 - x)_+^2 \times (V_2 - y)_+^2\}.$$

On voit clairement que l'on peut généraliser les ordres précédents en proposant une classe d'ordres de concordance \prec_c^s pour tout $s \in \mathbb{N}$. Ainsi, on définit l'ordre de s -concordance de telle sorte que $C_1 \prec_c^s C_2$ si et seulement si

$$\mathbb{E} \{(U_1 - x)_+^{s-1} (V_1 - y)_+^{s-1}\} \leq \mathbb{E} \{(U_2 - x)_+^{s-1} (V_2 - y)_+^{s-1}\}.$$

Cette suite d'ordres de concordance est hiérarchique au sens où $C_1 \prec_c^{s-1} C_2$ implique $C_1 \prec_c^s C_2$. Ceci découle du fait que

$$\int_x^1 \int_y^1 \mathbb{E} \{(U_1 - u)_+^{s-1} (V_1 - v)_+^{s-1}\} du dv = \frac{\mathbb{E} \{(U_2 - x)_+^s (V_2 - y)_+^s\}}{s^2}.$$

Notons enfin que pour $s = 1$, on retrouve l'ordre de concordance, alors que $s = 2$ correspond à l'ordre orthant convexe.

CHAPITRE 5

UNE PROPOSITION DE TEST POUR DES RELATIONS D'ORDRE DE CONCORDANCE

5.1 Objectif de ce chapitre

Soient deux populations bivariées \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 dont les lois associées ont pour copules C_1 et C_2 , respectivement. L'objectif principal de ce chapitre est de construire un test qui confronte, pour un certain $s \in \mathbb{N}$ fixé, les hypothèses

$$\mathcal{H}_0^s : C_1 \prec_c^s C_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1^s : C_1 \not\prec_c^s C_2.$$

Avant de procéder à la description formelle du test, quelques outils concernant l'estimation d'une copule et la façon de ré-échantillonner une copule empirique seront décrits.

5.2 Estimation d'une copule

5.2.1 La fonction de répartition empirique univariée

Soit un échantillon aléatoire X_1, \dots, X_n tiré d'une loi dont la fonction de répartition est F . Alors la fonction de répartition empirique est définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x),$$

où pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{I}(X_i \leq x) = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i \leq x; \\ 0, & \text{si } X_i > x. \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $F_n(x)$ correspond à la proportion des observations qui sont inférieures à x . À noter premièrement que

$$\mathbb{E}\{\mathbb{I}(X_i \leq x)\} = \mathbb{P}(X_i \leq x) = F(x).$$

De plus, de la formule bien connue $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \{\mathbb{E}(X)\}^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{var}\{\mathbb{I}(X_i \leq x)\} &= \mathbb{E}\{(\mathbb{I}(X_i \leq x))^2\} - \{\mathbb{E}\{\mathbb{I}(X_i \leq x)\}\}^2 \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{I}(X_i \leq x)\} - \{\mathbb{E}\{\mathbb{I}(X_i \leq x)\}\}^2 \\ &= F(x) - \{F(x)\}^2 \\ &= F(x)\{1 - F(x)\}. \end{aligned}$$

De là, on montre que

$$\mathbb{E}\{F_n(x)\} = F(x) \quad \text{et} \quad \text{var}\{F_n(x)\} = \frac{F(x)\{1 - F(x)\}}{n}.$$

On peut également obtenir que F_n est un estimateur uniformément convergent de F , c'est-à-dire que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

converge vers zéro en probabilité. Ce résultat s'appelle le Théorème de Glivenko–Cantelli (voir Shorack & Wellner, 1986).

Maintenant, en posant $\hat{p}_x = F_n(x)$ et $p_x = F(x)$, une application directe du Théorème central limite assure que

$$\mathbb{F}_n(x) = \sqrt{n}(\hat{p}_x - p_x) = \sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\}$$

converge en loi vers la distribution Normale de moyenne zéro et de variance $\sigma_x^2 = F(x)\{1 - F(x)\}$. Plus généralement, il existe un résultat important sur le comportement asymptotique de \mathbb{F}_n comme fonction aléatoire définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$. Avant de l'énoncer, on définit d'abord le *pont brownien* comme étant une fonction aléatoire \mathbb{B} définie sur $[0, 1]$ et telle que pour chaque $s \in [0, 1]$, la variable aléatoire $\mathbb{B}(s)$ est de loi Normale de moyenne nulle et de variance $s(1 - s)$. De plus, pour chaque $s, t \in [0, 1]$,

$$\text{cov}\{\mathbb{B}(s), \mathbb{B}(t)\} = \min(s, t) - st.$$

Pour plus de détails, se référer à Billingsley (1999). Le Théorème de Donsker stipule que la fonction aléatoire \mathbb{F}_n converge dans l'espace $D(\mathbb{R})$ des fonctions réelles qui sont continues à droite et qui possèdent une limite à gauche (càdlàg) vers une limite de la forme

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{B}\{F(x)\},$$

où \mathbb{B} est un pont brownien. Pour de plus amples détails, voir Shorack & Wellner (1986), van der Vaart & Wellner (1996) et Kosorok (2008). À partir des propriétés \mathbb{B} déjà énoncées, on déduit facilement que

$$E\{\mathbb{F}(x)\} = 0 \quad \text{et} \quad \text{cov}\{\mathbb{F}(x), \mathbb{F}(x')\} = F\{\min(x, x')\} - F(x)F(x').$$

Remarque 5.1. *Le Théorème de Donsker est une généralisation très forte du Théorème central limite. D'abord, on note que la moyenne d'une population μ et la moyenne empirique \bar{X}_n peuvent s'écrire*

$$\mu = \int_0^\infty \{1 - F(x) - F(-x)\} dx$$

et

$$\bar{X}_n = \int_0^\infty \{1 - F_n(x) - F_n(-x)\} dx.$$

De là, on a

$$\begin{aligned} Z_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) &= \sqrt{n} \left[\int_0^\infty \{1 - F_n(x) - F_n(-x)\} dx \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \{1 - F(x) - F(-x)\} dx \right] \\ &= - \int_0^\infty \{\mathbb{F}_n(x) + \mathbb{F}_n(-x)\} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}_n(x) dx. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{F}_n(x)$ converge vers $\mathbb{B}\{F(x)\}$, on peut déduire que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de la forme

$$Z = - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{B}\{F(x)\} dx.$$

Ensuite, à partir des propriétés de \mathbb{B} , on parvient à montrer que Z est de loi Normale de moyenne zéro et de variance

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \{F\{\min(x, x')\} - F(x)F(x')\} dx dx'.$$

On a ainsi retrouvé, à partir des propriétés asymptotiques de \mathbb{F}_n , l'important Théorème central limite.

5.2.2 La fonction de répartition empirique bidimensionnelle

Soit un échantillon aléatoire bivarié $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ tiré d'une loi dont la fonction de répartition conjointe est H . À l'instar du cas univarié, la fonction de répartition empirique bidimensionnelle est définie par

$$H_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x, Y_i \leq y).$$

Par des arguments similaires à ceux utilisés à la section précédente, on montre que pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé,

$$E\{H_n(x, y)\} = H(x, y) \quad \text{et} \quad \text{var}\{H_n(x, y)\} = \frac{H(x, y)\{1 - H(x, y)\}}{n}.$$

De plus on obtient, toujours pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que la variable aléatoire

$$\mathbb{H}_n(x, y) = \sqrt{n}\{H_n(x, y) - H(x, y)\}$$

converge vers la loi Normale de moyenne zéro et de variance $\sigma_{xy}^2 = H(x, y)\{1 - H(x, y)\}$. Plus généralement, le processus empirique \mathbb{H}_n converge en loi dans l'espace $D(\mathbb{R}^2)$ des fonctions bidimensionnelles qui sont continues à droite et possédant une limite à gauche (càdlàg) vers un processus \mathbb{H} tel que

$$\text{cov}\{\mathbb{H}(x, y), \mathbb{H}(x', y')\} = H\{\min(x, x'), \min(y, y')\} - H(x, y)H(x', y').$$

Le processus limite \mathbb{H} est Gaussien, c'est-à-dire que pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la loi de $\mathbb{H}(x, y)$ est Normale. De plus, $E\{\mathbb{H}(x, y)\} = 0$.

5.2.3 La copule empirique

Soit un échantillon $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ i.i.d. H . On a vu que la copule C d'une loi bidimensionnelle H s'obtient par

$$C(u, v) = H \{F^{-1}(u), G^{-1}(v)\},$$

où F et G sont les marges que l'on peut extraire de H . Cette écriture suggère l'estimation de C via la copule empirique, à savoir

$$C_n^*(u, v) = H_n \{F_n^{-1}(u), G_n^{-1}(v)\},$$

où

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x) \quad \text{et} \quad G_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Y_i \leq y).$$

De la définition de H_n , on a

$$C_n^*(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\}.$$

Généralement, toutefois, on travaille avec une version de C_n légèrement différente, c'est-à-dire

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \{F_n(X_i) \leq u, G_n(Y_i) \leq v\}.$$

Pour des tailles d'échantillons n assez grande, $C_n \approx C_n^*$. Une remarque intéressante est que l'estimateur C_n est basé uniquement sur les rangs des observations. En effet, puisque $R_i = n F_n(X_i)$ n'est rien d'autre que le rang de X_i parmi X_1, \dots, X_n , et similairement que $S_i = n G_n(Y_i)$ est le rang de Y_i parmi Y_1, \dots, Y_n , on voit que

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I \left(\frac{R_i}{n} \leq u, \frac{S_i}{n} \leq v \right).$$

Il existe un résultat important concernant le comportement asymptotique du processus de copule empirique

$$\mathbb{C}_n(u, v) = \sqrt{n} \{C_n(u, v) - C(u, v)\}$$

défini pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$. Pour l'énoncer, soit le processus Gaussien centré \mathbb{D}_C défini sur $[0, 1]^2$ tel que pour $(u, v), (u', v') \in [0, 1]^2$

$$\text{cov} \{\mathbb{D}_C(u, v), \mathbb{D}_C(u', v')\} = C \{ \min(u, u'), \min(v, v') \} - C(u, v) C(u', v').$$

Le résultat suivant est dû à Segers (2012).

Théorème 5.7. *Supposons que les dérivées partielles $C_{10}(u, v) = \partial C(u, v) / \partial u$ et $C_{01}(u, v) = \partial C(u, v) / \partial v$ existent et sont continues respectivement sur les ensembles $(0, 1) \times [0, 1]$ et $[0, 1] \times (0, 1)$. Alors le processus empirique \mathbb{C}_n converge dans l'espace $D([0, 1]^2)$ vers un processus Gaussien \mathbb{C} de représentation*

$$\mathbb{C}(u, v) = \mathbb{D}_C(u, v) - C_{10}(u, v) \mathbb{D}_C(u, 1) - C_{01}(u, v) \mathbb{D}_C(1, v).$$

5.3 Méthode de ré-échantillonnage du multiplicateur

5.3.1 Dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^d

Soient X_1, \dots, X_n , des variables aléatoires réelles qui sont i.i.d. et telles que $\mu = E(X_i)$ et $\sigma^2 = \text{var}(X_i) < \infty$. On sait du Théorème central limite que $Z_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi Normale de moyenne zéro et de variance σ^2 .

Supposons maintenant que l'on désire imiter le comportement asymptotique de Z_n . Une possibilité consiste à utiliser la méthode du multiplicateur apparemment introduite pour la première fois par Burke (2000). Plusieurs versions de la méthode ont été proposées depuis; voir Kosorok (2008) pour plus de détails. L'une de ces versions consiste à poser pour chaque $h \in \{1, \dots, M\}$,

$$Z_n^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) X_i,$$

où $(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}), \dots, (\xi_1^{(M)}, \dots, \xi_n^{(M)})$ sont des vecteurs indépendants composés de variables aléatoires indépendantes et positives telles que $E(\xi_i^{(h)}) = \text{var}(\xi_i^{(h)}) = 1$, et où $\bar{\xi}^{(h)}$ est la moyenne arithmétique de $\xi_1^{(h)}, \dots, \xi_n^{(h)}$.

Théorème 5.8. *Le vecteur $(Z_n, Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(M)})$ converge en loi vers le vecteur $(Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(M)})$, où $Z^{(1)}, \dots, Z^{(M)}$ sont indépendantes de $Z \sim N(0, \sigma^2)$.*

Pour décrire l'extension multidimensionnelle de la méthode du multiplicateur, soient des vecteurs aléatoires $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ dans \mathbb{R}^d tels que $\mu = E(\mathbf{X}_i) \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ et $\Sigma = \text{var}(\mathbf{X}_i) \in \mathbb{R}^{d \times d}$. On souhaite ici imiter le comportement asymptotique de $\mathbf{Z}_n = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \mu)$, où

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i.$$

D'abord, la version multidimensionnelle du Théorème central limite stipule que \mathbf{Z}_n converge en loi vers une variable aléatoire \mathbf{Z} de distribution Normale à d dimensions dont la moyenne est le vecteur nul dans $\mathbb{R}^{d \times 1}$ et dont la matrice de variance-covariance est Σ . Ensuite, on pose

$$\mathbf{Z}_n^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbf{X}_i.$$

On obtient un résultat similaire au cas univarié, à savoir que le vecteur $(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_n^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}_n^{(M)})$ converge en loi vers $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(M)})$, où $\mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(M)}$ sont des copies indépendantes de \mathbf{Z} .

5.3.2 Pour \mathbb{F}_n et \mathbb{H}_n

La méthode du multiplicateur trouve sa plus grande utilité dans le cas de processus empiriques. Soit donc un échantillon de données réelles X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi F . On a vu que $\mathbb{F}_n(x) = \sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\}$ converge vers $\mathbb{F}(x) = \mathbb{B}\{F(x)\}$, où \mathbb{B} est un pont Brownien. L'objectif visé ici est de définir des versions de \mathbb{F}_n qui se comportent asymptotiquement de la même manière que \mathbb{F} . Pour cela, on pose

$$\mathbb{F}_n^{(h)}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbb{I}(X_i \leq x).$$

Le résultat suivant montre que cette méthode est valide.

Théorème 5.9. *Le vecteur $(\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{F}_n^{(M)})$ converge en loi vers le vecteur de processus limites $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^{(1)}, \dots, \mathbb{F}^{(M)})$, où $\mathbb{F}^{(1)}, \dots, \mathbb{F}^{(M)}$ sont des copies indépendantes de $\mathbb{F} = \mathbb{B}\{F(x)\}$.*

L'extension au cas bidimensionnel est directe. Ainsi, pour un échantillon $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ i.i.d. H , on pose

$$\mathbb{H}_n^{(h)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) I(X_i \leq x, Y_i \leq y).$$

Alors le vecteur $(\mathbb{H}_n, \mathbb{H}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{H}_n^{(M)})$ converge vers $(\mathbb{H}, \mathbb{H}^{(1)}, \dots, \mathbb{H}^{(M)})$, où

$\mathbb{H}^{(1)}, \dots, \mathbb{H}^{(M)}$ sont des copies indépendantes de la limite \mathbb{H} de $\mathbb{H}_n(x, y) = \sqrt{n}\{H_n(x, y) - H(x, y)\}$.

5.3.3 Pour \mathbb{C}_n

On a vu que le processus de copule empirique $\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C)$ converge en loi vers une limite de la forme

$$\mathbb{C}(u, v) = \mathbb{D}_C(u, v) - C_{10}(u, v) \mathbb{D}_C(u, 1) - C_{01}(u, v) \mathbb{D}_C(1, v). \quad (5.1)$$

Ici, il est bon de noter que \mathbb{D}_C correspond à la limite du processus

$$\mathbb{D}_n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \{\mathbb{I}(F(X_i) \leq u, G(Y_i) \leq v) - C(u, v)\}.$$

Une version multiplicateur de \mathbb{D}_n serait ainsi

$$\tilde{\mathbb{D}}_n^{(h)}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbb{I}\{F(X_i) \leq u, G(Y_i) \leq v\}.$$

Cependant, cette version n'est pas calculable car les marges F et G sont inconnues. Il faut donc remplacer F et G par les marges empiriques F_n et G_n , ce qui donne la version calculable

$$\mathbb{D}_n^{(h)}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbb{I}\{F_n(X_i) \leq u, G_n(Y_i) \leq v\}.$$

En remplaçant \mathbb{D}_C par $\mathbb{D}_n^{(h)}$ dans l'équation (5.1), on obtiendrait la version multiplicateur

$$\tilde{\mathbb{C}}_n^{(h)}(u, v) = \mathbb{D}_n^{(h)}(u, v) - C_{10}(u, v) \mathbb{D}_n^{(h)}(u, 1) - C_{01}(u, v) \mathbb{D}_n^{(h)}(1, v).$$

Un autre niveau d'estimation est nécessaire puisque les dérivées partielles C_{10} et C_{01} sont inconnues. Il faut donc les estimer. Supposons donc que l'on dispose d'estimateurs uniformément convergents \widehat{C}_{10} et \widehat{C}_{01} au sens où

$$\sup_{(u,v) \in [0,1]^2} \left| \widehat{C}_{10}(u,v) - C_{10}(u,v) \right| \quad \text{et} \quad \sup_{(u,v) \in [0,1]^2} \left| \widehat{C}_{01}(u,v) - C_{01}(u,v) \right|$$

convergent en probabilité vers zéro. Les versions multiplicateurs de \mathbb{C}_n sont enfin données par

$$\mathbb{C}_n^{(h)}(u,v) = \mathbb{D}_n^{(h)}(u,v) - \widehat{C}_{10}(u,v) \mathbb{D}_n^{(h)}(u,1) - \widehat{C}_{01}(u,v) \mathbb{D}_n^{(h)}(1,v).$$

Théorème 5.10. *Sous les conditions du Théorème 5.7, le vecteur de processus empiriques $(\mathbb{C}_n, \mathbb{C}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{C}_n^{(M)})$ converge en loi vers $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{(1)}, \dots, \mathbb{C}^{(M)})$, où $\mathbb{C}^{(1)}, \dots, \mathbb{C}^{(M)}$ sont des copies indépendantes de \mathbb{C} .*

5.4 Tests pour les ordres s -concordants

5.4.1 Test pour l'ordre 1-concordant

Considérons un premier échantillon $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ i.i.d. d'une loi continue dont la copule est C_1 . Considérons également un deuxième échantillon $(W_1, Z_1), \dots, (W_m, Z_m)$, indépendant du premier, i.i.d. d'une loi continue dont la copule est C_2 . L'objectif ici est de confronter les hypothèses $\mathcal{H}_0^1 : C_1 \prec_1 C_2$ et $\mathcal{H}_1^1 : C_1 \not\prec_1 C_2$.

La méthode employée sera basée sur les copules empiriques C_n et C_m calculées à partir du premier et du deuxième échantillon, respectivement. Plus

spécifiquement, une procédure de test consistera à rejeter \mathcal{H}_0^1 lorsque

$$D_{n,m}(u, v) = \kappa_{n,m} \max \{C_n(u, v) - C_m(u, v), 0\}$$

prendra une valeur *trop élevée*, où $\kappa_{n,m} = \sqrt{nm/(n+m)}$. Pour cela, on introduit les statistiques de Cramér–von Mises et Kolmogorov–Smirnov par

$$S_{n,m}^1 = \int_{[0,1]^2} \{D_{n,m}(u, v)\}^2 dudv \quad \text{et} \quad T_{n,m}^1 = \sup_{(u,v) \in [0,1]^2} D_{n,m}(u, v).$$

Proposition 5.1. *Supposons que $C_1 = C_2$ et que les dérivées partielles de C_1 par rapport à u et à v existent et sont continues respectivement sur les ensembles $(0, 1) \times [0, 1]$ et $[0, 1] \times (0, 1)$. Si $\kappa_{n,m} \rightarrow \kappa \in (0, 1)$ quand $\min\{n, m\} \rightarrow \infty$, alors le processus empirique $D_{n,m}$ converge en loi vers*

$$\mathbb{D}(u, v) = \max \{ \kappa \mathbb{C}_1(u, v) - (1 - \kappa) \mathbb{C}_2(u, v), 0 \},$$

où \mathbb{C}_1 est la limite en loi de $\sqrt{n}(C_n - C_1)$ et \mathbb{C}_2 est la limite en loi de $\sqrt{m}(C_m - C_2)$.

Une conséquence directe du résultat précédent est que $S_{n,m}^1$ et $T_{n,m}^1$ convergent en loi respectivement, quand $C_1 = C_2$, vers

$$\mathbb{S}^1 = \int_{[0,1]^2} \{\mathbb{D}(u, v)\}^2 dudv \quad \text{et} \quad \mathbb{T}^1 = \sup_{(u,v) \in [0,1]^2} \mathbb{D}(u, v).$$

Pour déterminer la valeur critique pour les tests basés sur $S_{n,m}^1$ et $T_{n,m}^1$, il faudra employer une version appropriée de la méthode du multiplicateur.

5.4.2 Test pour l'ordre 2-concordant

On souhaite confronter les hypothèses $\mathcal{H}_0^2 : C_1 \prec_2 C_2$ et $\mathcal{H}_1^2 : C_1 \not\prec_2 C_2$. Pour ce faire, soit la copule de survie empirique d'ordre $s = 2$, à savoir

$$\bar{C}_n^2(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_{i,n} - u)_+ (V_{i,n} - v)_+,$$

où $a_+ = \max(a, 0)$ et $(U_{1,n}, V_{1,n}), \dots, (U_{n,n}, V_{n,n})$ sont les paires de rangs standardisés (divisés par n) basés sur $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$. De la même manière, on définit la fonction \bar{C}_m^2 basée sur $(W_1, Z_1), \dots, (W_m, Z_m)$. À l'instar du cas $s = 1$ décrit à la sous-section précédente, on considère d'abord

$$D_{n,m}^2(u, v) = \kappa_{n,m} \max \{ \bar{C}_n^2(u, v) - \bar{C}_m^2(u, v), 0 \}.$$

De là, on définit les statistiques de test

$$S_{n,m}^2 = \int_{[0,1]^2} \{ D_{n,m}^2(u, v) \}^2 dudv \quad \text{et} \quad T_{n,m}^2 = \sup_{(u,v) \in [0,1]^2} D_{n,m}^2(u, v).$$

Proposition 5.2. *Supposons que $C_1 = C_2$ et que les dérivées partielles de C_1 par rapport à u et à v existent et sont continues respectivement sur les ensembles $(0, 1) \times [0, 1]$ et $[0, 1] \times (0, 1)$. Si $\kappa_{n,m} \rightarrow \kappa \in (0, 1)$ quand $\min\{n, m\} \rightarrow \infty$, alors le processus empirique $D_{n,m}^2$ converge en loi vers*

$$\mathbb{D}(u, v) = \max \{ \kappa \mathbb{C}_1^2(u, v) - (1 - \kappa) \mathbb{C}_2^2(u, v), 0 \},$$

où

$$\mathbb{C}_1^2(u, v) = \int_u^1 \int_v^1 \mathbb{C}_1(s, t) dt ds \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_2^2(u, v) = \int_u^1 \int_v^1 \mathbb{C}_2(s, t) dt ds.$$

Ici, \mathbb{C}_1 est la limite en loi de $\sqrt{n}(C_n - C_1)$ et \mathbb{C}_2 est la limite en loi de $\sqrt{m}(C_m - C_2)$.

Le calcul des valeurs critiques se fait de la même façon que pour le cas $s = 1$.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Comme nous l'avons vu, les ordres stochastiques sont abondamment utilisés, dans plusieurs domaines qui font appel aux probabilités et aux statistiques, comme la finance et les sciences actuarielles. Il arrive souvent dans ces domaines que l'on doit comparer des couples de variables aléatoires afin d'analyser le mieux possible la situation et de prendre les meilleures décisions possibles en fonction du contexte. Lorsque l'on compare des couples de variables aléatoires à l'aide de copules, il arrive que les choses se compliquent lorsque l'on doit comparer des copules ayant des paramètres différents, d'où la nécessité d'introduire une nouvelle classe d'ordre stochastique, à savoir les ordres s -concordants. En effet, nous avons vu qu'il était parfois impossible d'utiliser l'ordre \prec_c^1 pour comparer deux copules archimédiennes. Cependant, dans cet ensemble de copules, l'ordre \prec_c^1 possède plusieurs caractérisations et conditions suffisantes en fonction des générateurs. Une étude complète de cet ordre en fonction des générateurs des familles des copules à comparer serait donc un bon sujet de recherche en complément à cet ouvrage. L'ordre \prec_c^1 étant parfois impossible à utiliser, il a fallu définir l'ordre \prec_c^2 plus faible et ainsi de suite. Dans ce travail, nous avons davantage étudié la méthodologie

statistique utilisée pour être en mesure de tester les ordres \prec_c^1 et \prec_c^2 , mais il reste encore beaucoup de travail à faire dans l'étude d'ordres supérieurs, notamment en ce qui à trait à la construction et à la généralisation de tests statistiques permettant de tester successivement les ordres \prec_c^s , $s \geq 1$.

Références

- BILLINGSLEY, P. (1999). *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons Inc., 2nd ed. A Wiley-Interscience Publication.
- BURKE, M. D. (2000). Multivariate tests-of-fit and uniform confidence bands using a weighted bootstrap. *Statist. Probab. Lett.* **46**, 13–20.
- CHERUBINI, U., LUCIANO, E. & VECCHIATO, W. (2004). *Copula methods in finance*. Chichester: Wiley.
- CLAYTON, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika* **65**, 141–151.
- FRANK, M. J. (1979). On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Math.* **19**, 194–226.
- GENEST, C. (1987). Frank's family of bivariate distributions. *Biometrika* **74**, 549–555.

- KOSOROK, M. (2008). *Introduction to empirical processes and semiparametric inference*. New York: Springer.
- NELSEN, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer Series in Statistics. New York: Springer, 2nd ed.
- SALVADORI, G., DE MICHELE, C., KOTTEGODA, N. T. & ROSSO, R. (2007). *Extremes in nature: An approach using copulas*. New York: Springer.
- SEGERS, J. (2012). Weak convergence of empirical copula processes under nonrestrictive smoothness assumptions. *Bernoulli* **18**, 764–782.
- SHORACK, G. R. & WELLNER, J. A. (1986). *Empirical processes with applications to statistics*. New York: Wiley.
- SKLAR, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8**, 229–231.
- VAN DER VAART, A. W. & WELLNER, J. A. (1996). *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlag. With applications to statistics.