

**UNIVERSITÉ DU QUÉBEC**

THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN GÉNIE ÉLECTRIQUE

PAR  
HASSENE BENKACI-ALI

OPTIMISATION DES PERFORMANCES D'UN ONDULEUR À MODULATION  
DE DENSITÉ D'IMPULSION MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET MÉTHODE  
GÉNÉTIQUE

2013

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

**UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES**

**DOCTORAT EN GÉNIE ÉLECTRIQUE (PH.D.)**

Programme offert par l'Université du Québec à Trois-Rivières

**OPTIMISATION DES PERFORMANCES D'UN ONDULEUR À MODULATION  
DE DENSITÉ D'IMPULSION MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET MÉTHODE  
GÉNÉTIQUE**

**PAR**

**HASSENE BENKACI-ALI**

---

Ahmed Chériti, directeur de recherche

Université du Québec à Trois-Rivières

---

M'Hamed Mesfioui, président du jury

Université du Québec à Trois-Rivières

---

Mohamed BenSlima, codirecteur de recherche

Université de Sfax, Sfax, Tunisie

---

Abdelhalim Sandali, évaluateur externe

ENSEM, Casablanca, Maroc

---

Jamel Ghouili, évaluateur externe

Université de Moncton

## Résumé

Le cadre général du projet de recherche est l'étude des convertisseurs statiques plus économiques, peu polluants et avec un haut rendement. On s'intéresse en particulier aux onduleurs à résonance série. L'objectif plus précis est l'utilisation de la Modulation de la Densité d'Impulsion (MDI), en tant que technique de commande des onduleurs à résonance série. Le but est d'améliorer la qualité des grandeurs en entrée et en sortie des convertisseurs cascade (ca/cc – cc/ca) et (cc/ca – ca/cc), la réduction des contraintes (pertes, etc.) sur les composants et l'épuration topologique (pas de CALC).

Nos contributions concernent l'optimisation des lois de commande de type MDI. Ces lois nous permettent d'améliorer le facteur de puissance (FP) tout en régulant la puissance transmise à la charge. On s'intéresse plus particulièrement aux aspects qui suivent.

- L'utilisation et l'amélioration des méthodes évolutionnaires et plus précisément la méthode génétique pour l'optimisation du facteur de puissance.
- La modification de la formulation des grandeurs électriques puissance et facteur de puissance (FP) pour obtenir une expression plus détaillée, mais de forme compacte pour réduire le temps de calcul et qui facilite l'interprétation.
- Prospection d'une des méthodes du gradient qui puisse se rapprocher de l'optimum global.
- Amorçage d'une étude sur la MDI-MLI ou la MDI courant.

## **Avant-propos**

Ce travail n'a été possible que par le concours de mes professeurs, mes amis et ma famille.

Tout d'abord, je suis infiniment reconnaissant au professeur Ahmed Chériti, mon directeur de recherche, pour m'avoir accepté au sein de son équipe de recherche et m'avoir fait bénéficier de son savoir et de son expérience. Ses conseils ont été significatifs et son aide incontestable.

Je remercie également mon codirecteur de recherche M. Mohamed Benslima pour la générosité qu'il m'a témoignée et l'intérêt constant porté à mon travail. Ses recommandations et ses conseils ont été très appréciés.

Je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de mon travail. Je dois une reconnaissance particulière à M. Abdelhalim Sandali de m'avoir bénéficié de ses connaissances en commande par MDI qui m'étaient indispensables durant ma thèse.

Je tiens également à exprimer le profond respect et ma sensibilité à la disponibilité et les conseils au président du jury le professeur M'Hamed Mesfioui ainsi qu'au membre du jury externe, le professeur Jamel Ghouili.

Je n'oublie pas la présence et les conseils de M. Sicard Professeur à l'Université de Trois-Rivières et du directeur des études de cycles supérieurs, le professeur Mamadou Lamine Doumbia.

De loin et comme se elle était proche, ma famille a été mon premier soutien.

Particulièrement, je dédie cette thèse à mon père qui n'a pas cessé de m'encourager et de me féliciter pour mes réalisations.

Je n'oublie pas les collègues chercheurs de l'Université du Québec à Trois-Rivières ainsi que tous les membres du personnel qui ont contribué à faciliter mon travail.

# Table des Matières

Résumé .....	iii
Avant-propos .....	iv
Table des Matières .....	vi
Liste des figures .....	xiv
Liste des symboles .....	xvii
<b>Chapitre 1 - Introduction .....</b>	<b>1</b>
1.1 Énoncé de la problématique .....	3
1.2 Objectifs de recherche et originalité du projet .....	4
<b>Chapitre 2 - État de l'art sur la MDI .....</b>	<b>6</b>
2.1 Introduction .....	6
2.2 Théorie présentée par l'équipe de l'Université d'Okayama.....	9
2.2.1 Développement des équations électriques [Aga96] : .....	10
2.3 Théorie développée par l'équipe du CENIDET .....	12
2.4 Travaux de l'équipe de l'Université de Tennessee [Ozp01] .....	14
2.5 Travaux des équipes des Universités Sophia du Japon et de Masan de la Corée [Fat05], [Mur04] .....	15

2.6 Développement et formulation de l'équipe de l'Université du Québec à Trois-Rivières [San02, San04, San05].....	17
2.6.1 Relation entre le facteur de puissance et le taux de distorsion harmonique .....	20
2.7 Résumés des considérations rencontrés dans la MDI.....	24
2.8 Composants et structures de l'électronique de puissance[Seg04]. .....	26
2.8.1 La diode .....	26
2.8.2 Le thyristor.....	26
2.8.3 Le thyristor GTO.....	27
2.8.4 Le transistor .....	28
2.8.5 Le MOSFET.....	28
2.8.6 L'IGBT .....	29
2.8.7 La commutation- quelques principes .....	29
2.8.8 L'onduleur.....	31
2.8.9 Les redresseurs.....	33
2.8.10 Les filtres .....	34
2.9 Conclusion.....	36
<b>Chapitre 3 - Méthodes d'optimisation et modélisation mathématique .....</b>	<b>37</b>
3.1 Introduction .....	37
3.2 Méthode de Quasi-Newton.....	38

3.3 Méthode du gradient conjugué .....	39
3.4 Les algorithmes génétiques .....	42
3.4.1 Méthodologie [Dup04].....	43
3.4.2 Choix de la fonction objective ajustée (fitness function).....	47
3.4.3 Théorie sur laquelle se basent les algorithmes génétiques.....	47
3.4.4 Optimisation multi-objective [Str95] .....	48
3.4.5 Frontière Pareto-optimale et description du NGSA-II.....	49
3.4.6 Description de quelques algorithmes efficaces.....	52
3.5 Amélioration de la performance de l'algorithme génétique : Les algorithmes hybrides [Gar92].....	53
3.6 Application de la méthode génétique à notre système .....	54
3.7 Autres méthodes d'optimisation.....	55
3.7.1 De l'interpolation .....	55
3.8 Conclusion.....	58
<b>Chapitre 4 - Contribution apportée et méthodologie suivie.....</b>	<b>59</b>
4.1 Introduction .....	59
4.2 Algorithme génétique .....	60
4.3 Simplification des expressions mathématiques .....	61
4.4 Modifications apportées au modèle génétique .....	63
4.4.1 Changement sur la population. ....	63

4.5 Résultats obtenus avec le modèle Sandali-Chériti en utilisant la méthode génétique et la méthode hybride, cas du modèle triphasé. ....	63
4.6 Discussion des résultats.....	64
4.7 Modèle hybride pour le changement de la mutation. ....	64
4.8 Conclusion.....	66
<b>Chapitre 5 - Calcul du facteur de puissance en mode monophasé .....</b>	<b>67</b>
5.1 Schémas de principe, notations de base et hypothèses de développement.....	67
5.1.1 Schéma de principe d'un onduleur .....	67
5.1.2 Définition de quelques paramètres.....	69
5.2 Éléments importants de développements .....	70
5.3 Développement en série de Fourier pour le calcul spectral.....	80
• <b>Calcul des coefficients harmoniques pour m différent de 1 .....</b>	<b>81</b>
5.4 Modèle final.....	87
5.5 Présentation des résultats obtenus .....	88
5.6 Conclusion.....	94
<b>Chapitre 6 - Calcul du facteur de puissance en mode triphasé.....</b>	<b>96</b>
6.1 Schéma de base et développements mathématiques .....	97
6.1.1 Schéma de montage et formes d'ondes.....	97
6.1.2 Développements mathématiques .....	97

6.2 Expression de la tension aux bornes de la capacité .....	99
6.2.1 Calcul de $\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} a^{2j} u(n-j)$ .....	102
6.2.2 Calcul de $\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j)$ .....	103
6.3 Calcul des courants.....	105
6.3.1 Expressions des grandeurs en fonction de la variable discrète n .....	106
6.3.2 Expressions des grandeurs électriques en fonction de la variable t.....	107
6.4 Développement en série de Fourier.....	111
6.4.1 Développement des séries de Fourier pour zéro trou. ....	113
6.4.2 Développement des séries de Fourier en présence de roues libres .....	114
6.4.3 Calcul de $S_a + S_b$ et formulation générale pour q trous et pour m différent de 1.....	118
6.5 Modèle mathématique final .....	125
6.6 Résultats obtenus, représentation graphique. ....	127
6.7 Conclusion et améliorations proposées. ....	131
<b>Chapitre 7 - Étude du dual MLI/MDI-MLI .....</b>	<b>132</b>
7.1 Introduction .....	132
7.2 Le dual MDI-MLI.....	133

7.2.1 Développement théorique de la technique MLI.....	134
7.3 Quelques résultats obtenus avec l'algorithme génétique.....	137
7.3.1 Analyse des premiers résultats.....	140
7.3.2 Autre méthode : application d'une erreur au zéro .....	141
7.3.3 Analyse et autres résultats.....	143
7.4 Formulation de la MDI-MLI .....	144
7.5 La MDI courant.....	144
7.6 Conclusion.....	145
<b>Chapitre 8 - Résultats de simulation – comparaison avec le modèle</b>	
<b>mathématique.....</b>	<b>146</b>
8.1 Introduction .....	146
8.2 Configuration du modèle <i>Simulink</i> .....	147
8.2.1 Convertisseur monophasé .....	147
8.2.2 Convertisseur triphasé.....	149
8.3 Résultats de simulation : graphiques .....	149
8.3.1 Modèle monophasé .....	150
8.3.2 Modèle triphasé.....	154
8.4 Analyse des résultats .....	157
8.5 Conclusion.....	158
<b>Chapitre 9 - Conclusion générale et suite des travaux .....</b>	<b>159</b>

<b>Bibliographies.....</b>	<b>161</b>
<b>Annexe A – Formulation détaillée du facteur de puissance pour le cas de la MDI dans le convertisseur monophasé. Nombre de trous quelconque.....</b>	<b>168</b>
<b>Annexe B – Formulation détaillée du facteur de puissance. Application au système triphasé. ....</b>	<b>215</b>

## **Liste des tableaux**

Tableau 2.1	Nombre de positions possible pour le calcul de la MDI .....	24
Tableau 3-1	Représentation de quelques méthodes du gradient conjugué .....	41
Tableau 7-1	Résultats de la MLI pour quatre angles.....	137
Tableau 7-2	Résultats de la MLI pour cinq angles.....	137
Tableau 7-3	Résultats de la MLI pour six angles .....	138
Tableau 7-4	Résultats de la MLI pour six angles, stratégie ligne par ligne.....	138
Tableau 7-5	Résultats de la MLI pour huit angles.....	139
Tableau 7-6	Résultats de la MLI pour dix angles.....	140
Tableau 7-7	Résultats de la MLI pour dix angles, stratégie par ligne .....	140
Tableau 7-8	Résultats de la MLI pour vingt angles, erreur au zéro .....	142
Tableau 7-9	Résultats de la MLI pour deux angles, topologie SLL .....	143
Tableau 7-10	Résultats de la MLI pour trois angles, topologie SLL.....	143
Tableau 7-11	Résultats de la MLI pour quatre angles, topologie SLL.....	144

## Liste des figures

Figure 2.1	Schéma simplifié d'un onduleur.....	7
Figure 2.2	Circuit logique de commande.....	7
Figure 2.3	Signaux de commande de l'onduleur .....	8
Figure 2.4	Convertisseur d'alimentation.....	9
Figure 2.5	Représentation du courant d'entrée (ondulation) .....	12
Figure 2.6	Efficacité de la technique <i>dual</i> MDI-MLI pour les faibles paliers de puissance versus MLI seule.....	16
Figure 2.7	Convertisseur CA/CA avec étage intermédiaire sans filtre de lissage .....	17
Figure 2.8	Schéma simplifié d'une diode. ....	26
Figure 2.9	Schéma simplifié d'un thyristor .....	27
Figure 2.10	Schéma simplifié d'un GTO.....	27
Figure 2.11	Schéma simplifié d'un MOSFET. ....	29
Figure 2.12	Schéma simplifié d'un IGBT.....	29
Figure 2.13	D'une tension continue à une tension alternative.....	31
Figure 2.14	Dispositif qui élabore l'alternance.....	32
Figure 2.15	Transistor à jonction NPN .....	32
Figure 2.16	Formes d'onde en sortie de l'onduleur.....	33
Figure 2.17	Disposition des charges sur un réseau de distribution.....	35
Figure 3.1	Triage par calcul de la distance d'encombrement .....	50
Figure 3.2	Distance d'encombrement.....	51

Figure 4.1	Améliorations des performances de l'AG par la modification de la population Distance d'encombrement .....	63
Figure 4.2	Résultats de l'AG avec population répartie et non répartie.....	63
Figure 4.3	Résultats de l'AG avec variation de paramètre $n_c$ .....	64
Figure 4.4	Résultats de l'AG et de l'AG hybride .....	65
Figure 4.5	Résultats obtenus par a) la méthode génétique pour $n = 3, 5$ et $7$ , par b) modèle hybride.....	65
Figure 4.6	Résultats de l'AG et de l'AG hybride pour a) un trou et pour b) sept trous .....	66
Figure 5. 1	Schéma de principe d'un onduleur .....	67
Figure 5.2	Modes de fonctionnement d'un onduleur.....	68
Figure 5.3	Représentation des courants et des tensions de la charge.....	76
Figure 5.4	Diagramme des phases .....	77
Figure 5.5	Nouveau modèle, résultats pour 3 trous.....	89
Figure 5.6	Nouveau modèle, résultats pour 5 trous .....	90
Figure 5.7	Nouveau modèle, résultats pour 7 trous .....	91
Figure 5.8	Nouveau modèle, résultats pour 11 trous .....	91
Figure 5.9	Nouveau modèle, résultats pour 13 trous .....	93
Figure 5.10	Nouveau modèle, récapitulatif résultats pour plusieurs trous .....	93
Figure 6.1	Schéma fonctionnel du convertisseur .....	97
Figure 6.2	Représentation du courant redressé et du courant d'entrée de l'onduleur .....	110
Figure 6.3	Nouveau modèle triphasé, résultats pour 3 trous.....	128
Figure 6.4	Nouveau modèle triphasé, résultats pour 5 trous.....	129
Figure 6.5	Nouveau modèle triphasé, résultats pour 7 trous.....	129
Figure 6.6	Nouveau modèle triphasé, résultats pour 11 trous.....	130
Figure 6.7	Nouveau modèle triphasé, récapitulatif.....	130

Figure 7.1	Schéma de principe de la commande MLI, cas unipolaire.....	135
Figure 8.1	Schéma Simulink de simulation de l'onduleur.....	147
Figure 8.2	Schéma de simulation du redresseur .....	148
Figure 8.3	Schéma de principe de la partie commande .....	148
Figure 8.4	Schéma Simulink du redresseur triphasé à diodes .....	149
Figure 8.5	Résultats de simulation théoriques versus simulés pour le modèle monophasé pour un trou .....	150
Figure 8.6	Résultats de simulation théoriques versus simulés pour le modèle monophasé pour trois trous .....	151
Figure 8.7	Résultats de simulation théoriques versus simulés pour le modèle monophasé pour cinq trous.....	152
Figure 8.8	Résultats de simulation théoriques versus simulés en monophasé pour sept trous .....	153
Figure 8.9	Résultats de simulation en triphasé théoriques versus simulés pour un trou .....	154
Figure 8.10	Résultats de simulation en triphasé théoriques versus simulés pour trois trous.....	155
Figure 8.11	Résultats de simulation en triphasé pour cinq trous théoriques versus simulés.....	156
Figure 8.12	Résultats de simulation en triphasé pour sept trous théoriques versus simulés.....	157

## Liste des symboles

$a_i, b_i$  : Coefficients de Fourier du courant d'entrée du convertisseur

C : Capacité de la charge

N : Intervalle des roues libres

T : Période de la tension d'alimentation.

$n_i$  : Borne inférieure du trou.

$n_s$  : Borne supérieure du trou

$T_{res}$  : Période de la tension de la charge

$F_{res}$  : Fréquence de la tension de la charge (de résonance)

q : Nombre de trous

R : Résistance de la charge

L : Inductance de la charge

u : Tension aux bornes de la charge.

$\xi$  : Coefficient d'amortissement

$\omega$  : Pulsation de la tension d'alimentation

$I_{ch}$  : Courant de la charge

$I_{red,s}$  : Courant du redresseur

$\nabla f$  : Gradient de f

$v_c$  : Tension aux bornes de la capacité

$i_{ond,e}$  : Courant à l'entrée de l'onduleur

P : Puissance demandée

FP : Facteur de puissance en entrée du convertisseur

# **Chapitre 1 - Introduction**

Ce travail constitue d'abord une contribution dans le domaine des onduleurs à MDI et une synthèse des recherches qui se font dans le domaine de la Modulation de densité d'impulsion (MDI) appliquée aux onduleurs autonomes. Il apporte aussi une nouvelle modélisation du calcul optimal du facteur de puissance en mode monophasé et en mode triphasé. Nous allons dans ce présent chapitre donner un état de l'art concernant la MDI, les développements mathématiques concernant la commande MDI et les réalisations ainsi que les problèmes reliés à ce domaine.

Nous présenterons les éléments du modèle des onduleurs à MDI, les travaux et les avancements de certains chercheurs et les problèmes posés qui sont encore d'actualité concernant la MDI. Nous énoncerons aussi la problématique posée dans le domaine précis de notre recherche. Par la suite, la méthodologie de travail comportant toutes les parties réalisées sera donnée. Les résultats obtenus seront présentés aussi avec les annexes correspondantes.

De façon générale, notre projet vise le développement des convertisseurs statiques plus compacts, économiques, de haut rendement et peu polluants. Il faut tenir compte aussi de la réglementation et de la déréglementation (nouvelles sources d'énergie propre, sociétés privées, etc.) qui s'imposent sur les réseaux qui font que les exigences en termes de pollutions imposent de nouvelles contraintes.

Nous nous intéressons aux convertisseurs en cascade (CA/CC- CC/CA) et CA/CC- CC/CA-CA/CC. La partie ca/cc est composée d'un redresseur qui n'est pas l'objet de notre travail. La partie cc/ca est un onduleur à résonance série sur lequel porte notre sujet.

Avec la multiplication des appareils électroniques possédant des éléments non linéaires, l'alimentation proche des appareils domestiques devient perturbée et possède en plus de la fréquence industrielle normale du réseau, des fréquences généralement plus élevées qui rendent le signal électrique dévié de sa nature parfaitement sinusoïdale.

Les répercussions de ces harmoniques sont multiples :

- Augmentation des pertes et d'échauffement dans le réseau;
- Diminution de la capacité des lignes de distribution;
- Surutilisation du câble du neutre dû aux déséquilibres;
- Diminution de l'efficacité des batteries de condensateurs;
- Apparition de l'effet résonnance sur les batteries de condensateurs
- Mauvais fonctionnement des appareils électroniques
- Etc.

La MDI est une technique utilisée dans la commande des onduleurs pour :

- Améliorer la qualité des grandeurs en entrée et en sortie de convertisseurs.
- Épurer les topologies des circuits d'aide à la commutation(CALC), cela intervient dans le concept de la commutation douce.
- Réduire les contraintes (les pertes de commutation, etc.) sur les composants.

Ces trois objectifs permettent de réguler la puissance et améliorer le facteur de puissance.  
Elles se concrétisent par les étapes suivantes :

- Calculer les séries de Fourier des courants au niveau des convertisseurs pour déterminer l'ampleur des harmoniques;
- Définir des stratégies de commande (filtrage actif) des harmoniques;
- Modifier les expressions pour obtenir des formules mathématiques de la puissance et du facteur de puissance (FP) plus simplifiées.
- Rechercher des topologies inhérentes et des lois de commandes optimales.

Les recherches faites dans le domaine montrent des besoins d'avancer dans les axes suivants :

- Axe I - Simplification des expressions des équations de manière rigoureuse pour obtenir des expressions proches de la réalité. Remplacer les séries par leurs termes de convergence.
- Axe II - Utilisation d'algorithmes de calcul optimal qui convergent vers l'optimum global.
- Axe III - Études des différentes topologies (multiconvertisseurs et simplification des expressions de ces convertisseurs, etc.), MDI courant, MDI\_MLI.

### 1.1 Énoncé de la problématique

L'emploi des convertisseurs dans l'industrie devrait respecter des contraintes économiques et environnementales importantes. Malgré tous les développements de l'électronique de puissance aussi bien dans le mode topologique que dans le mode fabrication des composants, les problèmes de réductions des pertes, de réduction des contraintes sur les composants et de minimisation de la pollution sont d'actualité. La MDI est une technique qui applique le principe de la commutation douce ce qui implique une épuration topologique et une réduction des pertes, une autre philosophie en comparaison à celle de filtrage passif. Elle implique aussi une variation de puissance plus large avec de meilleurs facteurs de puissance.

La formulation mathématique par contre entraîne souvent de multiples approximations [Fuj96] et [Cal99a, Cal99b, Cal00a, Cal00b]. Des développements plus rigoureux et plus profonds passent aussi par des simplifications et hypothèses simplificatrices qui démontrent la difficulté de formuler les grandeurs électriques de manière simple et proche de la réalité.

Même en considérant ces hypothèses et les formulations obtenues dans [San 04, San05] qui sont les plus promptes pour des résultats détaillés, il est difficile de trouver une solution précise dans des temps réalistes.

Les méthodes d'optimisation permettent souvent de trouver une solution satisfaisante dans des temps plus courts. Elles se basent, en général, sur la connaissance du pas et de la direction de recherche de l'optimum. Pour les cas complexes, ces méthodes présentent des problèmes de convergence. De nouvelles méthodes basées sur les approches évolutionnaires sont venues pour résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Certaines de ces méthodes font encore l'objet de recherche dans le domaine de l'électronique et de l'électricité.

## 1.2 Objectifs de recherche et originalité du projet

Pour répondre aux exigences de précision et de rapidité de calcul dans un problème de type MDI, nous aurons recours à des méthodes de calcul optimal adéquatement choisies. Vu les expressions obtenues jusque-là, nous jugeons que les méthodes évolutionnaires (génétiques et autres) sont les mieux placées pour répondre aux exigences complexes.

Cependant, dégrossir les expressions mathématiques faites jusque-là en révisant la manière de procéder dès les premières étapes est important. Plus la formulation du FP est simple, plus on peut avoir recours à des méthodes directes de calcul ou à des interpolations. En conséquence, nous nous intéressons aux axes I) et II) de recherches mentionnées plus haut. Plus précisément, nous cherchons à reformuler le facteur de puissance en utilisant certains outils mathématiques. Ainsi, la méthode génétique peut jouer son rôle dans l'optimisation des lois de commande pour améliorer le Facteur de Puissance.

Cette thèse est organisée suivant la présentation suivante :

Le chapitre 2 présente l'état de l'art concernant la recherche sur les convertisseurs dotés d'onduleur à MDI. Le chapitre 3 donne l'essentiel sur les méthodes d'optimisation et plus de détails sur l'algorithme génétique en plus d'un aperçu de la modélisation. Le chapitre 4 définit les contours et les contributions de notre recherche. Aux chapitres 5 et 6, le noyau de notre travail et de notre recherche est présenté. Il s'agit des nouveaux modèles mathématiques du facteur de puissance en modes monophasé et triphasé. Nous finirons par le chapitre 7 qui donne une synthèse de notre travail, propose des améliorations futures et donne un premier travail fait dans le sens d'améliorer nos recherches. Finalement, les annexes donnent tous les détails des chapitres 5 et 6.

# Chapitre 2 - État de l'art sur la MDI

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, il est question de présenter les travaux de certains groupes de recherche qui ont permis de développer le concept de la MDI dans les convertisseurs et de l'appliquer en pratique.

La MDI est une technique appliquée pour la commande des onduleurs dans le but de varier les puissances en maintenant les pertes de commutation presque nulles, de réduire les surtensions et les bruits dus à la commutation.

Nous trouvons plusieurs applications liées à la technique MDI comme les Ozoniseurs [Wan98], [Kou02], les surchauffeurs, le chauffage à induction [Elb96], [Ahm11], etc.

L'onduleur est l'un des montages les plus répandus de l'électronique de puissance [Wan99a, Wan99b]. Il intervient comme partie de nombreux convertisseurs, nous citons :

- Les dispositifs fonctionnant à une fréquence fixe :
  - Les générateurs d'ultrasons ou d'électricité utilisés dans le domaine médical.
  - L'alimentation des lampes fluorescentes basse consommation.
  - Les alimentations de secours et les alimentations sans interruption dans les petits réseaux électriques.
- Les variateurs de vitesse des machines à courant alternatif : après redressement, un onduleur génère une tension dont la fréquence et la forme sont réglables.
- Les convertisseurs de tension continu-continu à découpage: la tension continue est d'abord ondulée en hautes fréquences puis appliquée à un transformateur en ferrite puis enfin redressée.
- Les filtres actifs : pour éliminer des bruits (électriques ou sonores).

- Dans le domaine de la soudure à l'arc, les onduleurs génèrent un courant alternatif monophasé à moyenne fréquence, ce qui a pour effet de pouvoir utiliser des transformateurs élévateurs plus petits et légers que ceux employés traditionnellement à la fréquence du réseau. Ces machines se caractérisent par un rapport poids / puissance plus faible.

Le schéma de base d'un onduleur est donné par la figure 2.1. Dans le cas de la MDI, la fréquence est supposée constante et égale à la fréquence de résonance. Afin de faire varier la puissance, nous introduisons des trous dans le train d'impulsion des gâchettes des MOSFET par exemple. Les signaux de commande sont construits à partir d'une logique générée de la manière décrite par la figure 2.2. Les signaux de commande sont donnés par la figure 2.3. Dans cette figure, on suppose qu'il y a q trous. Nous ne dessinons que deux pour des raisons pratiques. La largeur de chaque trou n'est pas connue à l'avance.

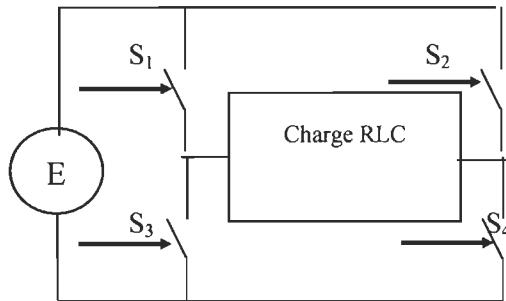


Figure 2.1 Schéma simplifié d'un onduleur

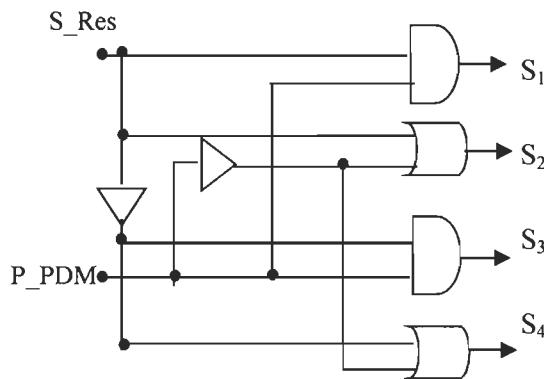
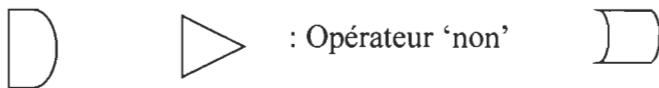


Figure 2.2 Circuit logique de commande

Avec :

: Opérateur logique ‘et’ ;

: Opérateur logique ‘ou’



Ainsi, on alterne entre le chemin  $S_1-S_4$ , le chemin  $S_3-S_2$  et le court-circuit de la charge.

Les modes de fonctionnement d’un onduleur à MDI sont donnés dans le chapitre 4.

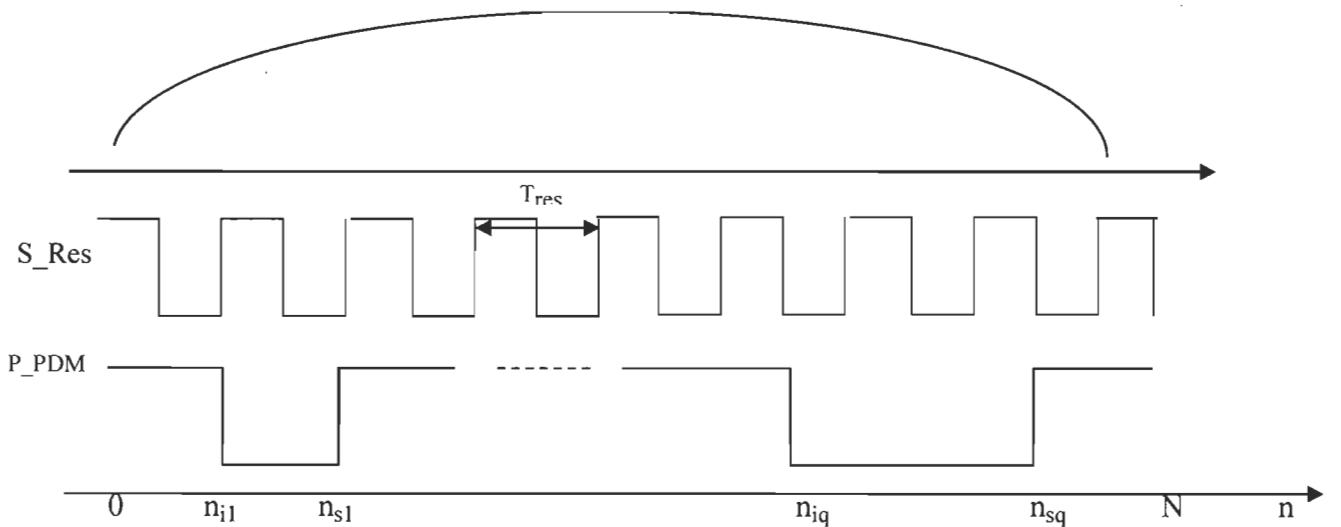


Figure 2.3      Signaux de commande de l’onduleur

Lorsque  $S_1$  et  $S_2$  sont fermés, la charge est soumise à une tension nulle [Mor00] et la puissance est nulle à cet instant. Lorsque nous répétons plusieurs fois des trous, la charge est soumise à la tension nulle cela a pour effet de réduire la puissance moyenne à la valeur désirée (demandée par la charge) [Wan01].

#### Génération du patron de la MDI [San02, San04]

Les signaux de commande des interrupteurs créent  $q$  trous. Chaque trou est repéré par sa borne inférieure  $n_{ik}$  et supérieure  $n_{sk}$  avec  $k = 1, 2, \dots, q$ . Les différentes bornes vérifient les inégalités suivantes :

$$1 \leq n_{i1} \leq n_{s1} \leq n_{i2} \leq n_{s2} \leq \dots \leq n_{iq} \leq n_{sq} \leq N \quad (2.1)$$

Si nous voulons réaliser un nombre exact de trous, nous pourrions remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

Nous définissons l'intervalle dans lequel se situent les trous, il est déduit du rapport de la fréquence de résonance sur la période de la tension d'entrée :  $N = F_{res} / (2F)$  (2.2)

Il faut noter ici que les variables sont entières.

Voici, en ce qui suit, la présentation de quelques théories et quelques théories argumentées de réalisations pratiques qui se sont faites.

## 2.2 Théorie présentée par l'équipe de l'Université d'Okayama

Pour toute application : four à induction, ozonateurs, etc., le circuit à alimenter est modélisé par une charge R-L-C série [Fuj 96, 97, 99], la fréquence est supposée constante. Le système est représenté par la figure 2.4. Une description brève du fonctionnement est donnée par les points suivants.

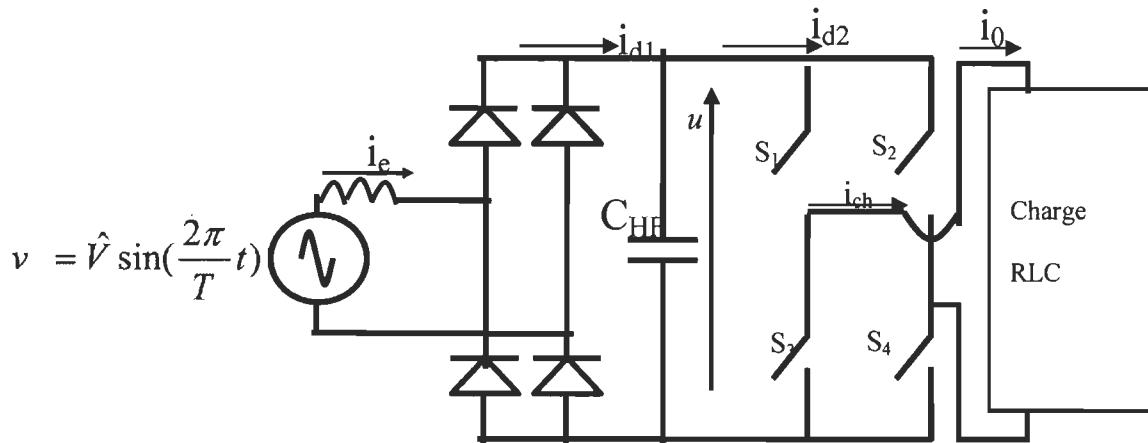


Figure 2.4 Convertisseur d'alimentation

Le système de puissance se compose d'un redresseur [Seg04] monophasé à diodes, d'un filtre capacitif et d'un onduleur monophasé.

- $i_0 = i_{ch}$  est en sortie de l'onduleur et  $i_{d2} = |i_0|$
- $i_{d1} =$ partie basse fréquence après filtrage de  $I_{d2}$ .

- $i_{d1}$  a une allure proche de celle l'allure de Vs.
- L'ensemble onduleur et le circuit résonant série sont équivalents à une résistance, vu de la source (à la sortie du redresseur).

Cette représentation est très physique et manque de détails de première vue.

### 2.2.1 Développement des équations électriques [Aga96] :

Cette équipe a présenté les prémisses de la recherche dans le domaine. Il n'y a donc peu de développements.

L'équation de la charge, en supposant que la tension est confondue à la première harmonique, est :

$$\frac{di_{ch}}{dt} + \frac{1}{LC} \int i_{ch} dt + \frac{R}{L} i_{ch} = \frac{4u}{\pi L} \sin(\omega_r t) \quad (2.3)$$

$u$  est la tension aux bornes de l'onduleur. Avec  $\omega_r = \omega = 1/\sqrt{LC}$

La charge a un coefficient d'amortissement  $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  considéré très faible, on fournit

alors la solution :

$$i_{ch} = \frac{4u}{\pi R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{2L}t} \right) \sin(\omega_r t) \quad (2.4)$$

Quand on applique la commande MDI, avec un facteur de qualité supérieure à 1, le courant de charge présente une onde de forme sinusoïdale et enveloppée d'une onde de forme exponentielle.

$$i_{ch}(t) = i_E(t) \sin(\omega_r t) \quad (2.5)$$

$i_E(t)$  est une enveloppe exponentielle définie par :

$$0 \leq t \leq T_1 \quad i_E(t) = \hat{I} \left( 1 - \exp \left( \frac{-t}{\tau} \right) \right) + I_{min} \exp \left( \frac{-t}{\tau} \right) \quad (2.6)$$

$$T_1 \leq t \leq T_2 \quad i_E(t) = i_E(T_1) \exp\left(-\frac{t-T_1}{\tau}\right) \quad (2.7)$$

$T_1$  est la durée de fonctionnement normal,  $T_2 - T_1$  est la durée de fonctionnement en roue libre et  $\hat{I} = \frac{4u}{\pi R}$  amplitude du courant en régime permanent.

Calcul de la puissance ( $T=T_2$ ) :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v_0 i_o dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{4}{\pi} V_d \sin(\omega_r t) i_E(t) \sin(\omega_r t - \phi) dt \quad (2.8)$$

En général,  $\tau >> \omega_r$  ce qui fait que le courant  $I_E$  est considéré pratiquement constant et donc :

$$P = \frac{2}{\pi T} V_d \cos(\phi) \int_0^T i_E(t) dt \quad (2.9)$$

Avec  $\tau = \frac{2L}{R}$ , ce qui donne :

$$P = P_{\max} \left\{ \frac{T_1}{T_2} + \frac{\tau}{T_2} \left( \frac{1 - e^{-\frac{T_1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T_2}{\tau}}} \right) \left( e^{-\frac{T_1}{\tau}} - e^{-\frac{T_2}{\tau}} \right) \right\} \quad (2.10)$$

$P_{\max} = \left( \frac{2}{\pi} \right) V I_{\max} \cos(\varphi)$  est égale à la puissance transmise à la charge lorsque

$T_1/T = 1$ . Si  $T$  est très inférieure à  $\tau$  alors :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P = P_{\max} \left( \frac{T_{on}}{T} \right)^2 \quad (2.11)$$

Note :  $T_{on} = T_1$  (écritures différentes selon les articles)

Si  $T$  est très supérieure à  $\tau$  alors :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} P = P_{\max} \frac{T_{on}}{T} \quad (2.12)$$

### Remarque sur la théorie :

Les équations très simplifiées ci-haut représentent la base qui a permis à tous les autres chercheurs de développer des expressions de la puissance et du facteur de puissance.

### 2.3 Théorie développée par l'équipe du CENIDET

La démarche pour obtenir la puissance transmise à la charge, se fait de la même manière que dans les équations données par les travaux de Fujita [Fuj96]. Mais ils considèrent que le courant est ondulé en amplitude (figure. 2.5) [Cal98, 99a, 99b, 00a, 00b].

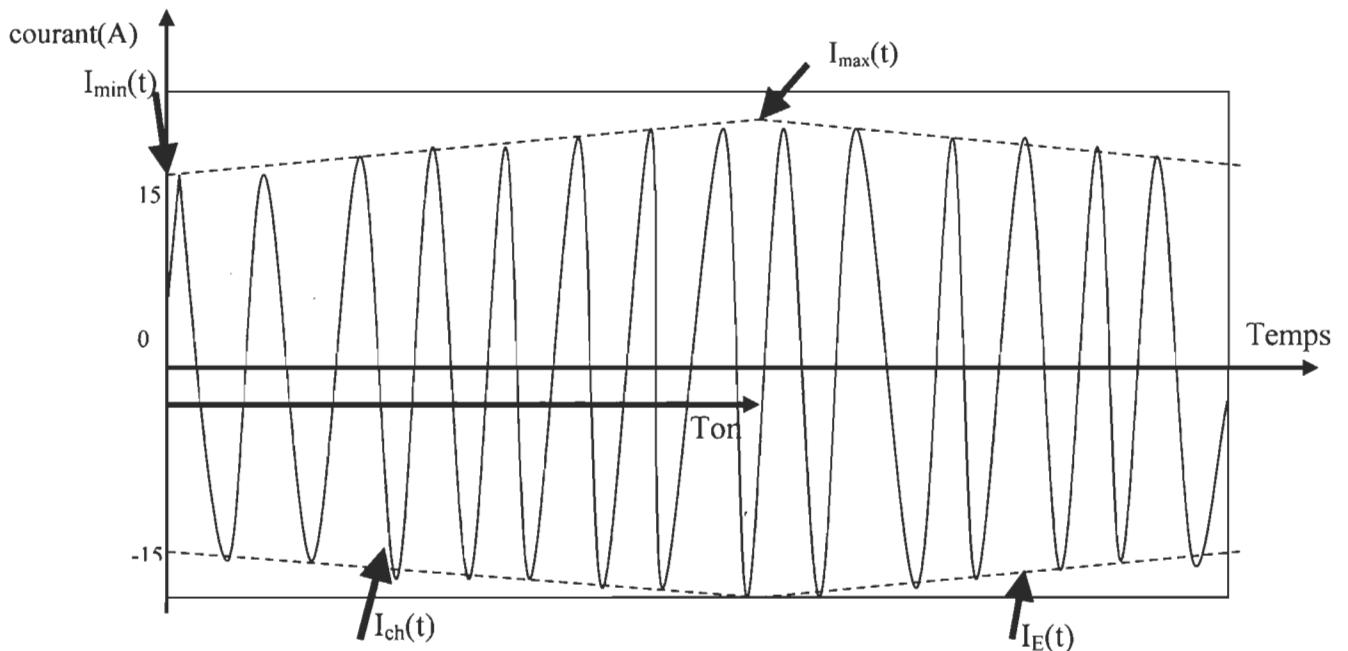


Figure 2.5 Représentation du courant d'entrée (ondulation)

La même remarque est faite ici concernant les expressions simples à analyser, loin d'être détaillées. Par contre, on observe sur oscilloscope les mêmes courbes données par ces auteurs.

Les développements faits par l'équipe se résument à ce qui suit.

L'indice de modulation est défini par :

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (2.13)$$

En modulation d'amplitude, le rapport de la puissance de la porteuse sur la puissance totale est donné par :

$$\frac{P_p}{P_T} = \frac{2}{2+m^2} \quad (2.14)$$

On veut que ce rapport dépasse 98 % pour que 98 % de la puissance totale soit associée à la porteuse sinusoïdale. Pour cela il faut que  $0.98(2+m^2) < 2$  ce qui équivaut à  $m$  supérieur à 0.2. Il suffit donc d'assurer :

$$I_{\max} \leq 1.5I_{\min} \quad (2.15)$$

Or, on a :

$$I_{\min} = \hat{I} \frac{1 - e^{\frac{T_{ON}}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad (2.16)$$

$$I_{\max} = \hat{I} \frac{1 - e^{-\frac{T_{ON}}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad (2.17)$$

$$D = T_{ON}/T \quad (2.18)$$

$T$  étant la durée de la séquence MDI

(2.15), (2.16), (2.17) combinées nous donnent :

$$I_{\max} = I_{\min} e^{\frac{T(1-D)}{\tau}} \quad (2.19)$$

En combinant (2.15) et (2.18), l'inéquation suivante est obtenue :

$$e^{-\frac{T(1-D)}{\tau}} \leq 1.5 \quad (2.20)$$

Sachant que  $T_{\text{res}}$  est la période de résonnance et que :

$$T = kT_{\text{res}} = k \cdot 2\pi \sqrt{LC} \quad (2.21)$$

Le facteur de qualité est défini par :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{L/C} \quad (2.22)$$

En tenant compte de (2.20) à (2.22), on obtient :

$$Q \frac{T_2}{\tau} = k\pi \Rightarrow \frac{T_2}{\tau} = \frac{k\pi}{Q} \quad (2.23)$$

Les équations (2.22) et (2.23) donnent alors :  $Q \geq k\pi(1-D)x2.466$

Lorsque la variation du rapport cyclique D est entre 0.5 et 1, la longueur de la séquence (k) et le facteur de qualité Q doivent satisfaire la relation  $Q \geq k\pi 1.233$ . Les auteurs ont démontré que pour garantir que le rapport cyclique soit supérieur à 0.5, il faut interdire la succession de deux cycles de roue libre. Cependant, cela implique que la largeur des trous de la MDI doit être fixe; cela ne nous arrange pas, parce que nous voulons faire varier la largeur pour ajuster la puissance et le facteur de puissance aux valeurs nominales et optimales respectivement.

## 2.4 Travaux de l'équipe de l'Université de Tennessee [Ozp01]

Les auteurs de cette équipe utilisent un système composé d'un onduleur fonctionnant à haute fréquence et d'un convertisseur CA/CA, pour alimenter un moteur à courant alternatif à fréquence plus basse. Le premier système permet d'obtenir une tension de forme carrée à partir d'une tension d'alimentation constante à travers un onduleur MLI. Ce système

permet de varier la tension. Le 2<sup>e</sup> système est un convertisseur à MDI qui permet d'obtenir des tensions triphasées avec une fréquence plus basse.

Le but recherché de ces travaux est l'obtention des tensions triphasées ayant une forme la plus proche d'une sinusoïde, à partir de la polarité de chaque phase et de la forme de la tension fournie par l'onduleur d'entrée (tension alternative de forme carrée). La stratégie d'optimisation repose sur la minimisation de la surface A donnée par :

$$A = \int v_{a0}^* dt - \int v_{a0} dt, \quad (2.24)$$

avec

$$v_{a0}^* = V \sin(\omega t) \quad (2.25)$$

$$\text{et } \int v_{a0}^* dt = \frac{V}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \quad (2.26)$$

La qualité des harmoniques dépend de combien cette intégrale (commande ou référence) est proche de l'intégrale de la tension actuelle. Les auteurs utilisent l'algorithme génétique pour minimiser l'écart entre la commande et la tension de référence.

$$\text{La fonction objective est donnée par : } \min FV = \frac{1}{\sum_{i=phasea}^c \left( \int v_{a0}^* dt - \int v_{a0} dt \right)^2}$$

## 2.5 Travaux des équipes des Universités Sophia du Japon et de Masan de la Corée [Fat05], [Mur04]

Ces équipes ont travaillé sur la MLI et sur la MDI [Ahm11] en considérant les avantages de la commutation douce par courant nul ou par tension nulle (ZCS et ZVS)

Les plus grands apports de leurs recherches focalisent sur ce qu'il appelle le dual MLI/MDI-MLI. Ce dual permet d'obtenir des facteurs de puissances élevés même en considérant des faibles paliers de puissance [Fat07].

La technique consiste à utiliser la technique ZCS avec la composition de la MDI-MLI pour de faibles puissances et la MLI pour de plus grandes puissances.

Le graphique (2.6) montre grossièrement les améliorations du facteur de puissance grâce à cet assemblage [Ahm06, 08, 09].

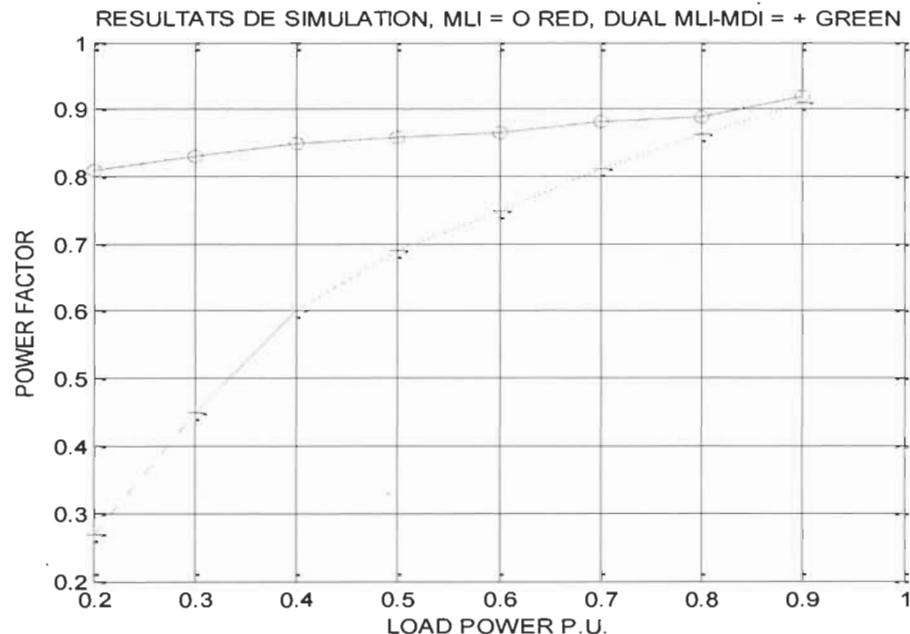


Figure 2.6 Efficacité de la technique *dual* MDI-MLI pour les faibles paliers de puissance versus MLI seule.

On voit bien d'après la figure que le facteur de puissance reste élevé, c'est-à-dire plus que 0,8 même aux valeurs basses de la puissance.

Les travaux de ces équipes nous ont inspirés à travailler dans cet axe pour remédier à la forme trop descendante de la courbe du facteur puissance pour des valeurs de la puissance inférieur à 0,7 p.u.

Mais encore une fois, tous ces travaux très prometteurs et qui nous motivent à pousser nos recherches et à les appuyer par des résultats de la simulation ou par des résultats pratiques,

mais ne comportent pas des développements mathématiques modélisant les résultats pour des calculs au préalable.

L'équipe qui va suivre a développé les trois aspects : simulation, pratique et modélisation mathématique.

## 2.6 Développement et formulation de l'équipe de l'Université du Québec à Trois-Rivières [San02, San04, San05]

L'équipe de recherche de l'Université du Québec à Trois-Rivières est celle qui a fait le plus d'avancées concernant les développements mathématiques du facteur de puissance et de l'expression de la puissance transmise.

Dans [San04] une amélioration du facteur de puissance a été démontrée en utilisant un convertisseur contenant plusieurs onduleurs en cascade [Lai96]. Le FP a été calculé en faisant quelques hypothèses simplificatrices.

Les développements mathématiques que nous avons élaborés se sont basés sur les travaux faits dans [San05], en considérant le redresseur triphasé suivant :

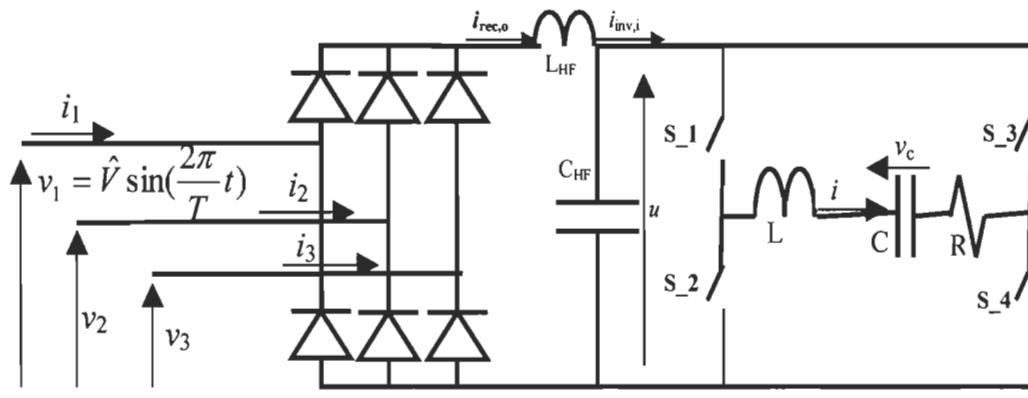


Figure 2.7 Convertisseur CA/CA avec étage intermédiaire sans filtre de lissage

Dans notre travail, nous présentons seulement les équations essentielles.

$$u(t) = u(n) = \hat{U} \sin\left(\pi \frac{n}{3N}\right) \quad (\text{la première harmonique de tension est considérée})$$

$\hat{U}$  est la tension crête entre phases et  $(n-1)T_r \leq t \leq nT_r$ .

Afin d'introduire les trous dans le calcul des tensions, nous remplaçons  $u$  par la tension  $u'$  pour exprimer les tensions dans la charge. Voici les étapes :

$$u'(t) = u(n) - \sum_{k=1}^q u(n) \cdot P_k \quad \text{si } (n-1)T_r \leq t < (n-0.5)T_r \quad (2.27)$$

$$u'(t) = -u(n) + \sum_{k=1}^q u(n) \cdot P_k \quad \text{si } (n-0.5)T_r \leq t < nT_r \quad (2.28)$$

La tension aux bornes du condensateur de résonnance C peut être donnée, après plusieurs calculs différentiels par :

$$v_C(n) = a^2 v_C(n-1) - (1-a)^2 u'(n) \quad (2.29)$$

(2.16), (2.17) et (2.18) aboutissent à :

$$v_C(n) = a^{2n+N} v_C(-N/2) - (1-a)^2 \sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} a^{2j} u'(n-j) \quad (2.30)$$

De façon générale et vue de la source, les convertisseurs statiques sont considérés comme des charges non linéaires. Les courants absorbés par les convertisseurs sont non sinusoïdaux et présentent des déphasages par rapport à la tension. La combinaison de la distorsion et du déphasage affecte le facteur de puissance, aussi bien à la source qu'à la charge.

Le courant  $i(t)$  étant non sinusoïdal, nous le développons en série de Fourier pour qu'à la fin nous puissions extraire le facteur de puissance.

$$v_s(t) = V \sin(\omega t) = \sqrt{2} V_{eff} \sin(\omega t) \quad (2.31)$$

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2} I_{\text{Eff},n} \cos(\omega t + \varphi_n) \quad (2.32)$$

$I_{\text{Eff},n}$  est la valeur efficace du courant de l'harmonique de l'ordre n

$$\sqrt{2} I_{\text{Eff},n} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \text{Artg} \left( \frac{-B_n}{A_n} \right) \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \cos(n\omega t) dt \\ B_n = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases} \quad (2.34)$$

Le calcul du facteur de puissance, dans un système électrique, est généralement donné par :

$$FP = \frac{P}{S} , \text{ avec } S = \sqrt{P^2 + Q^2 + P_d^2} \quad (2.35)$$

Le facteur de puissance dans ces études simples se construit en sachant que la puissance apparente se scinde en trois parties :

- La puissance de distorsion, nommée  $P_d$
- La puissance active nommée P qui est la puissance utile
- La puissance réactive nommée Q qui est la puissance en quadratique de retard.

Nous avons les définitions mathématiques suivantes:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{1eff}} \cos(\varphi_1) \quad (2.36.1)$$

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{1eff}} \sin(\varphi_1) \quad (2.36.2)$$

$$P_d = V_{\text{eff}} \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_{n\text{eff}}^2} \quad (2.36.3)$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_{\text{eff},n}^2} = \sqrt{I_{\text{eff},1}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} I_{\text{eff},n}^2} \quad (2.37.1)$$

$V_{\text{eff}}$  est la valeur efficace de la tension.

$I_{\text{1eff}}$  est la valeur efficace du fondamental du courant.

$\varphi_1$  est le déphasage entre le courant fondamental et la tension.

L'équation (2.39) provient de la définition du calcul du courant efficace ou de toute autre grandeur efficace par l'expression suivante :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\left[ \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \right]} \quad (2.37.2)$$

Si nous combinons les équations précédentes, le facteur de puissance peut s'écrire comme le produit de deux facteurs  $FD_p$  et  $FD_i$  :

$$F_P = \frac{V_{\text{eff}} I_{\text{1eff}} \cos(\varphi_1)}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{I_{\text{1eff}} \cos(\varphi_1)}{I_{\text{eff}}} = \frac{I_{\text{1eff}}}{I_{\text{eff}}} \times \cos(\varphi_1) \quad (2.38.1)$$

$$F_P = FD_p \cdot FD_i, \text{ avec : } FD_p = \cos(\varphi_1)$$

$$FD_i = \frac{I_{\text{1eff}}}{I_{\text{eff}}} \quad (2.38.2)$$

$FD_p$  s'appelle le facteur de déplacement. Il exprime le déphasage entre le courant fondamental et la tension sinusoïdale, tandis que  $FD_i$  est le facteur de distorsion. Les deux facteurs cités avant peuvent nous renseigner sur la symétrie des positions des trous que nous allons analyser par la suite.

### 2.6.1 Relation entre le facteur de puissance et le taux de distorsion harmonique

Le taux de distorsion est la part du courant de distorsion dans le courant.

Il est exprimé mathématiquement par la relation :

$$\%THD = 100 \times \frac{I_{\text{dist}}}{I_1} \quad (2.39)$$

En remplaçant le courant efficace par son expression dans  $F_p = \frac{I_{1,eff}}{I_{eff}} \times \cos(\varphi_1)$ , on

obtient  $F_p = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{\frac{I_{1,eff}^2 + \sum_{n=2}^{\infty} I_{n,eff}^2}{I_{1,eff}^2}}}$  qui aussi peut s'écrire :

$$F_p = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{1 + \frac{\sum_{n=2}^{\infty} I_{n,eff}^2}{I_{1,eff}^2}}} = \frac{\cos(\varphi_1)}{\sqrt{1 + THD^2}} \quad (2.40)$$

Lorsque le courant moyen n'est pas nul, il faut rajouter dans cette expression la composante moyenne du courant.

Dans un cadre plus détaillé, nous établissons ce qu'on appelle le spectre harmonique en allant chercher les signaux périodiques et sinusoïdaux qui se sont rajoutés sur le signal fondamental.

Dans ce cas nous utilisons ce qui est couramment appelé la décomposition en série de Fourier.

En génie électrique la décomposition en série de Fourier implique qu'il y a distorsion ou parfois déplacement du signal fondamental.

En fait, on mesure le poids des harmoniques qui sont les signaux non fondamentaux sur le signal fondamental.

En génie électrique et surtout dans les réseaux électriques, les grandeurs électriques sont représentées par une grandeur qu'on appelle valeur per unit qui est bornée par 1.

Le travail de l'équipe de l'Université du Québec à Trois-Rivières dirigée par M. Chériti a été fait en respectant les définitions de base présentées ci-haut et les développements très pointus dont nous ne donnons ici qu'un aperçu.

C'est pour cela que nous avons choisi de travailler dans le cadre de ce qui a déjà été fait par cette équipe.

Lorsque nous considérons le facteur de puissance réduit par rapport à celui lorsqu'il n'y a pas de trous dans la commande, le facteur de puissance revient indirectement à calculer les harmoniques de courant.

$$\frac{i_u(t)}{A_0} = \sum_{m \text{ impair}} a_m \sin(2m\pi/T) + b_m \cos(2m\pi/T) \quad (2.41)$$

Les expressions obtenues données dans [San04] sont :

$$a_{_1} = 1 - \sum_{k=1}^q \frac{(n_{sk} - n_{ik})}{N} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^q \left[ \sin\left(\frac{2\pi(n_{sk})}{N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi(n_{ik})}{N}\right) \right] \right\} \quad (2.42)$$

$$b_{_1} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^q \left[ \cos\left(\frac{2\pi(n_{sk})}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n_{ik})}{N}\right) \right] \right\} \quad (2.43)$$

$$a_{mtk} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^q \left[ \sin\left((m+1)\frac{\pi(n_{sk})}{N}\right) - \sin\left((m+1)\frac{\pi(n_{ik})}{N}\right) \right] \right\} \\ - \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^q \left[ \sin\left((m-1)\frac{\pi(n_{sk})}{N}\right) - \sin\left((m-1)\frac{\pi(n_{ik})}{N}\right) \right] \quad (2.44)$$

$$b_{mtk} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^q \left[ \cos\left((m+1)\frac{\pi(n_{sk})}{N}\right) - \cos\left((m+1)\frac{\pi(n_{ik})}{N}\right) \right] \right\} \\ - \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^q \left[ \cos\left((m-1)\frac{\pi(n_{sk})}{N}\right) - \cos\left((m-1)\frac{\pi(n_{ik})}{N}\right) \right] \quad (2.45)$$

Lorsque les trous sont considérés de même largeur  $\Delta n$  et chaque trou est centré sur  $n_k = kN/(q+1)$ .

Le facteur de puissance est donné alors par l'expression :

$$PF \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{1-a_1}{a_1}\right)^2 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(h\pi(1-a_1))}{h\pi(1-a_1)}\right)^2}} \quad (2.46)$$

Dans (2.19) en remplaçant mathématiquement la sommation par une intégrale, on obtient l'expression de la tension aux bornes de la capacité puis les expressions des courants qui permettent d'établir celles du facteur de puissance. Ce dernier est calculé en détail dans [San05] et est donné par :

$$PF(n_{I1}, \dots, n_{Sq}) = \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{6h\pm 1}^2 + b_{6h\pm 1}^2}{a_1^2}} \right]^{-1} \quad (2.47)$$

Sachant que :

$$a_1(n_{I1}, \dots, n_{Sq}) = a_{1,d} \quad \text{avec} \quad 0 \leq a_{1,d} \leq 1 \quad (2.48)$$

Les équations pour un convertisseur monophasé sont similaires à celles du convertisseur triphasé. La table 2.1 montre combien un calcul minutieux peut conduire à un nombre considérable de cas lorsque la fréquence est élevée.

Exemple :

$N = 210$  et  $q = 1$ , on aura deux positions pour le trou, la borne inférieure possède près de 211 possibilités alors que la borne supérieure proche de  $210/2$ , ce qui donne approximativement  $211*210/2 = 22155$  (on peut résonner aussi par suite arithmétique).

$F_r$	75.6 kHz ( $N=210$ *)	150 kHz ( $N=420$ *)
$q$		
1	22 155	88 410
2	80 260 180	1 290 358 685

3	114 081 819 852	7 461 370 060 144
4	$> 85 194 673 325 190$	$> 22 891 749 822 023 900$

Tableau 2.1 Nombre de positions possible pour le calcul de la MDI

Le nombre de possibilités pour des nombres élevés de trous est extrêmement grand, on va revenir à ce cardinal lorsque nous utilisons la méthode génétique pour un nombre élevé de variables.

## 2.7 Résumés des considérations rencontrés dans la MDI

- Les auteurs considèrent que la tension d'alimentation est constante dans une durée qui varie d'un auteur à un autre.
- Ils font quelques hypothèses simplificatrices pour certaines parties que nous pouvons retravailler et éviter de les faire en début de développements.
- Malgré l'avancement considérable des auteurs de l'université de Trois-Rivières, les expressions du facteur de puissance et de la puissance transmise à la charge comportent des parties qui peuvent subir des améliorations. On note quelques approximations :

1<sup>ère</sup> approximation :

$$(1+a)^2 \sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} a^{2j} \cdot u(n-j) \cong u(n) + \frac{1}{T_{res}} \int_0^{(n+(N/2)-1)T_{res}} a^{\frac{2t'}{T_{res}}} u(nT_{res} - t') dt' \quad (2.49)$$

2<sup>e</sup> approximation :

$$\frac{1}{T_{res}} \int_0^{(n-1)T_{res}} a^{\frac{2t'}{T_{res}}} u(nT_{res} - t') dt' = \frac{\hat{V}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \left\{ \sin\left(\pi \frac{n}{N} - \arctg \frac{\omega}{\alpha}\right) - a^{2(n-1)} \sin\left(\frac{\pi}{N} - \arctg \frac{\omega}{\alpha}\right) \right\} \quad (2.50)$$

Ces deux approximations stipulent que la série tronquée peut être remplacée par une intégrale. Cela est vrai lorsque la série est infinie, lorsque la série est finie, il faut s'assurer que les n premiers termes sont dominants.

### 3<sup>e</sup> approximation :

La fréquence de commutation est très grande devant la fréquence de Vs on obtient :

$$\frac{1}{T_{res}} \int_0^{(n-1)T_{res}} a^{\frac{i}{T_{res}}} u(nT_{res} - t') dt' = \frac{\hat{V}}{\alpha} \sin\left(\pi \frac{n}{N}\right) \quad (2.51)$$

Une approximation faite en début de développement mathématique peut être diluée par le reste des équations.

Dans notre travail, nous minimisons, autant que possible, ces approximations.

Le calcul optimal du facteur de puissance (FP) nous interpelle à plusieurs égards :

- Une méthode d'optimisation efficace doit être utilisée en temps réel. Cette méthode doit reposer sur un algorithme efficace et simple à programmer. Ce point est d'extrême importance dès qu'on parle d'optimisation des performances. Les méthodes existantes penchent rarement vers des objectifs en temps réel.
- Il s'agit d'une optimisation d'une fonction volumineuse avec des variables entières et des contraintes égalité et inégalité.
- Une réécriture du facteur de puissance pourrait être faite de manière à diminuer les séries, mais en faisant moins d'hypothèses simplificatrices.
- Le facteur de puissance est faible pour des puissances basses. Il faut imaginer un système qui l'améliore. Les recherches faites jusqu'à maintenant montre la piste du dual MLI/MLI-MDI. Nous allons tenter de l'explorer.
- Lorsqu'il est possible et après avoir épousé toutes les ressources mathématiques, nous pourrons user des méthodes numériques.

Avant d'aller dans le fond du sujet, dans la section qui suit, nous présentons des notions de base sur les composants et les structures de quelques convertisseurs et leur fonctionnement.

## 2.8 Composants et structures de l'électronique de puissance[Seg04].

Les applications industrielles en électronique de puissance sont très variées et les composants s'améliorent chaque année. Pour chaque application, on doit choisir les bons composants et la bonne structure. Dans la suite, nous allons passer en revue assez rapidement les éléments nécessaires pour la confection des structures.

### 2.8.1 La diode

La diode est un semiconducteur comportant deux électrodes, l'anode A et la cathode K, ne comportant pas d'électrode de commande. Le circuit lui impose son fonctionnement. Si le circuit tend à faire passer un courant direct (de A vers K), la diode est passante.

Si la tension à ses bornes est négative, la diode devient bloquée. La diode est représentée par la figure 2.8. En général une résistance en parallèle est à considérer.

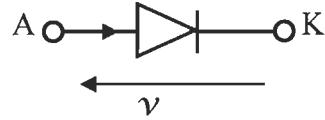


Figure 2.8 Schéma simplifié d'une diode.

Il y a deux états : l'état passant ( $v = 0$  et  $i > 0$ ) et l'état bloqué ( $v < 0$  et  $i = 0$ ).

Il faut considérer la tension inverse (négative) maximale que peut supporter la diode.

### 2.8.2 Le thyristor

C'est un composant semi-conducteur commandé à la fermeture. En plus de l'anode A et la cathode K, il possède une électrode de commande nommée gâchette G.

La figure 2.9 montre le schéma simplifié d'un thyristor.

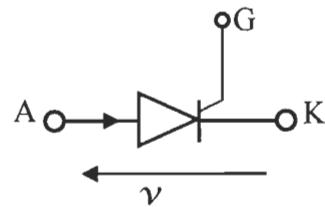


Figure 2.9 Schéma simplifié d'un thyristor

Si une tension négative est aux bornes du thyristor, alors il est bloqué.

Si la tension à ses bornes est positive, il ne devient passant que si on fait passer une impulsion positive de courant dans la gâchette.

Lorsque le courant passant par le thyristor devient plus faible que le courant de maintien (faible courant de seuil) le thyristor devient bloqué passivement.

Ainsi, le thyristor a trois modes : bloqué en polarisation directe; Passant ou Bloqué

Le thyristor ne peut pas bloquer n'importe quelle valeur de tension directe à courant de gâchette nul.

De plus, le thyristor peut s'amorcer de façon non contrôlée si un temps d'attente (temps de recouvrement) n'est pas observé avant de lui appliquer une tension positive. Ce temps de blocage noté  $t_q$  est plus lent pour des courants plus élevés.

Cette faiblesse du thyristor limite son application aux basses fréquences.

Les thyristors asymétriques sont montés avec une diode parallèle inverse.

### 2.8.3 Le thyristor GTO

Contrairement au thyristor, le GTO est commandable à l'ouverture et à la fermeture.

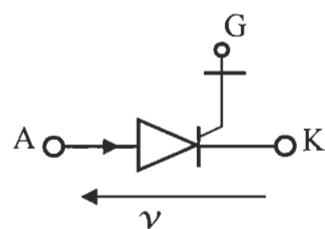


Figure 2.10 Schéma simplifié d'un GTO.

Représenté par le symbole de la figure 2.10, le courant de sa gâchette peut être positif ou négatif. La majorité des GTO sont asymétriques et montés avec une diode inverse.

Lorsque la tension  $v$  est positive, une impulsion positive au niveau de la gâchette va fermer le GTO. Il va s'ouvrir automatiquement sous l'influence d'un courant négatif, mais une forte impulsion négative au niveau de la gâchette permet de commander son ouverture.

Le courant positif s'annulant très lentement provoque des pertes à chaque ouverture. De plus, un temps minimal s'impose pour passer d'un état à un autre ce qui rend le GTO préconisé pour les puissances fortes et pas pour les hautes fréquences.

#### 2.8.4 *Le transistor*

Les transistors, contrairement aux thyristors, permettent de placer le point de fonctionnement en l'état passant ou passant vers bloqué dans n'importe sur tout le premier quadrant. Le transistor de puissance a deux caractéristiques, statique et dynamique.

#### 2.8.5 *Le MOSFET*

Le MOSFET est le composant le plus rapide et viable aux hautes fréquences. C'est un transistor à effet de champ. La figure 2.11 son symbole. Il comporte trois bornes. Le drain D, la source S et la grille G (électrode de commande) est isolé par une couche d'oxyde.

Le MOSFET est commandé par la tension  $v_{GS}$ . Vu entre les bornes G et S, il se comporte comme une capacité qui se charge lorsque  $v_{GS}$  est positive. Le MOSFET est un semiconducteur unipolaire (seuls les électrons se déplacent, et pas les ‘trous’).

Cette particularité permet des temps de fermeture et d'ouverture qui sont très brefs. On peut alors l'utiliser en hautes et très hautes fréquences. À l'état fermé, la chute de tension est plus importante comparativement aux autres semiconducteurs.

On ne peut donc avoir un fort courant et une forte tension limitant ainsi sa puissance relative.

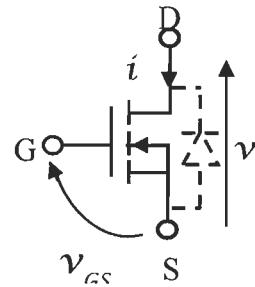


Figure 2.11 Schéma simplifié d'un MOSFET.

### 2.8.6 L'IGBT

C'est un transistor bipolaire à commande à effet de champ. Il comporte trois bornes : G (grille), E (émetteur) et C (collecteur). C'est un semiconducteur équivalent à un MOS côté commande vu des bornes G et E. Côté commandé, il est équivalent à un transistor bipolaire à jonction.

L'IGBT(Insulated Gate Bipolar Transistor) a donc des chutes de tension faibles à l'état passant. Il possède aussi l'avantage du MOS (vitesse de commutation élevée et commande en tension).

Il prend de plus en plus de place dans les applications de moyennes et fortes puissances.

Il est représenté par son schéma simplifié de la figure 2.12.

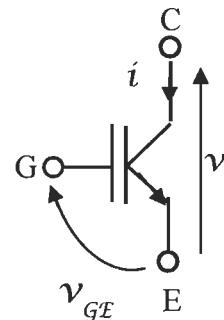


Figure 2.12 Schéma simplifié d'un IGBT.

### 2.8.7 La commutation- quelques principes

Sauf si le courant ou la tension sont nuls au moment de la commutation, cette dernière va forcer à une discontinuité des grandeurs électriques et des bornes du semiconducteur.

Ainsi, au moment de la commutation (de fermé à ouvert) le courant serait forcé à devenir nul quasi instantanément.

Pour éviter des surintensités et des surtensions, il faut vérifier que :

- La tension aux bornes d'un condensateur ne subit pas de discontinuité à cause du facteur  $\frac{du}{dt}$  impliquant un condensateur.
- Le courant aux bornes d'une inductance ne subit pas de discontinuité à cause du facteur  $\frac{di}{dt}$  impliquant une inductance (self).

Ainsi, on doit vérifier qu'un générateur ou un récepteur de tension ne subit aucune discontinuité de la tension en ses bornes. On doit vérifier qu'un générateur ou un récepteur de courant ne subit aucune discontinuité du courant qui le traverse.

Les conventions de signe imposent que la valeur moyenne du produit tension-courant soit positive pour un générateur débitant de la puissance ou un récepteur qui en reçoit.

Une inductance élevée de la source de courant permet d'avoir de faibles variations de courant, car le produit de L par  $\frac{di}{dt}$  étant déterminé impliquera une valeur faible de  $\frac{di}{dt}$ .

Lors des commutations, si  $\frac{di}{dt}$  est élevée et si l'inductance interne de la source de tension n'est pas négligeable, on obtiendra des variations élevées de la tension  $u$ . Un condensateur aux bornes de la source peut dans ce cas atténuer l'effet de ces brusques variations.

On peut convertir une source de courant continu en source de tension continue en dérivant un condensateur de capacité élevée en ses bornes.

On peut convertir une source de tension continue en source de courant continu en mettant une inductance élevée en série avec la source de courant.

Il faut donc éviter de mettre une source de tension en court-circuit et de mettre en circuit ouvert une source de courant.

Suivant le type de fermeture et d'ouverture du semiconducteur dans le circuit, Il s'impose parfois le semiconducteur à choisir (doit-il être commandable à l'ouverture ou à la fermeture, doit-il se comporter en diode en fermeture ou à l'ouverture, etc.).

### De la commutation dure à la commutation douce

Lorsque l'interrupteur se ferme par commande avant que la tension ne s'annule ou lorsqu'il s'ouvre avant que le courant qui le traverse tende à s'annuler, on parle de commutation dure.

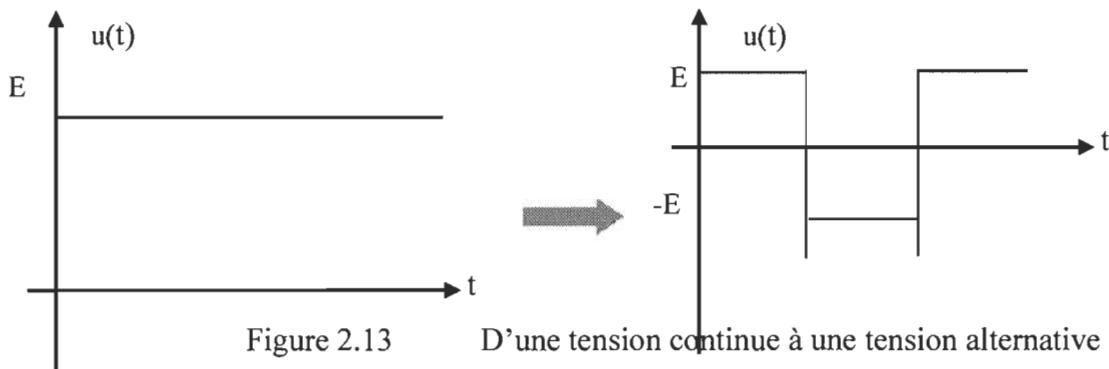
Lorsque la fréquence est élevée et que la commutation est dure, les pertes deviennent grandes et l'utilisation ne hautes fréquences n'est pas justifié.

Il existe des circuits qui aident à dissiper l'énergie de la commutation en permettant au courant par exemple de s'annuler progressivement. Ces circuits se nomment *les circuits d'aide à la commutation* (CALC). La commutation passe de *dure à douce*.

Il y a des circuits dits résonants qui permettent aussi d'adoucir la commutation.

#### 2.8.8 L'onduleur

C'est un convertisseur qui, à partir d'une tension continue, crée une tension périodique et alternative. La figure 2.13 illustre le principe de fonctionnement de l'onduleur.



La tension alternative n'est pas encore sinusoïdale, sa fréquence dépend de la fréquence de commutation. Le dispositif de la figure 2.14 dans lequel on représente les semi-conducteurs par des interrupteurs permet de réaliser la transformation continu-alternatif.

Les interrupteurs  $S_1$  et  $S_4$  sont fermés lorsque  $S_2$  et  $S_3$  sont ouverts et vice-versa.

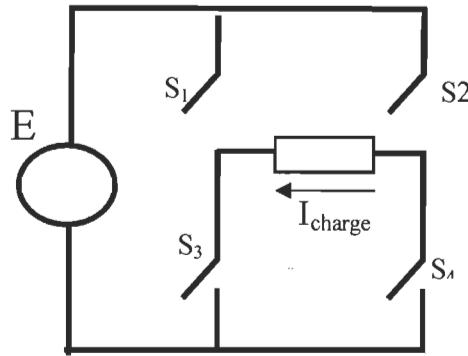


Figure 2.14 Dispositif qui élabore l’alternance

Lorsque  $S_2$  et  $S_3$  sont fermés, alors on obtient une tension de  $+E$  aux bornes de la charge et lorsque  $S_1$  et  $S_4$  sont fermés, on obtient une tension de  $-E$ , ce qui donne le graphique de la figure 2.13

Comment fonctionnent les semi-conducteurs (interrupteurs)?

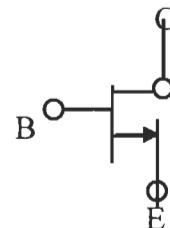


Figure 2.15 Transistor à jonction NPN

Lorsque l’intensité du courant est positive, elle circule à travers le transistor, sinon, elle traverse la diode en inverse. Lorsque la charge comporte une inductance, le courant ne va pas suivre l’allure de la tension, sa forme d’onde tendrait à ressembler à une sinusoïde.

On peut modifier la forme de la tension en y insérant des phases de ‘non-tension’ pour lesquelles la charge sera à soumise à une tension nulle. Pour cela, il faut introduire dans le gâchette du transistor un signal comportant des *trous* (périodes où la tension imposée à la charge est nulle).

Pour ces trous, les interrupteurs 1 et 3 seront conducteurs et les deux autres ouverts, puis vice versa. On obtient alors des tensions et des courants approximativement de la forme suivante.

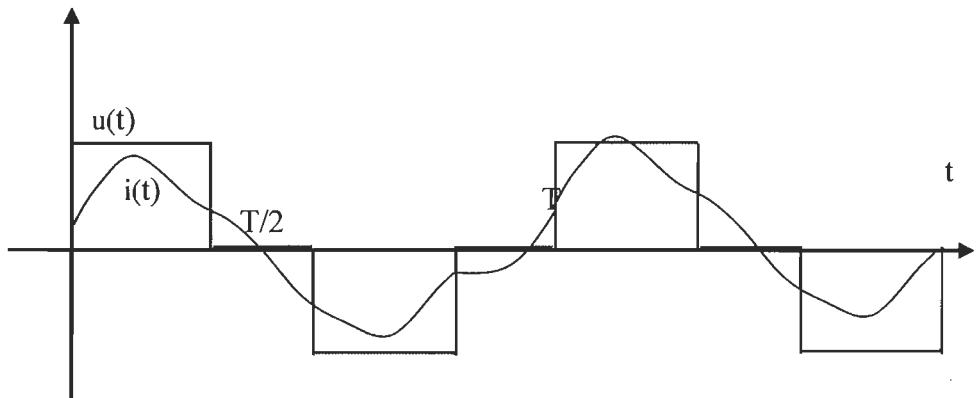


Figure 2.16 Formes d'onde en sortie de l'onduleur.

C'est globalement le principe de la MDI. Lorsqu'on a une charge R-L-C et que la fréquence de commutation est la même que la fréquence de résonance alors, le courant et la tension vont s'annuler presque en même temps.

Il faut noter aussi que la tension d'alimentation continue  $E$  n'est souvent pas une tension naturelle. Il faut un système de conversion qui va la produire.

Pour obtenir la tension continue à partir de la tension alternative, on utilise un redresseur.

### 2.8.9 *Les redresseurs*

Un onduleur permet d'avoir une tension alternative à partir d'une tension continue avec des fréquences voulues. Le redresseur lui permet d'obtenir une tension continue ou quasi continue à partir d'une alimentation alternative sinusoïdale.

Grâce aux diodes et à d'autres semiconducteurs, il est possible d'avoir un dispositif créant cette transformation de l'alternatif vers le continu.

### 2.8.10 *Les filtres*

Pour une tension d'alimentation de 60 Hz, seul un courant de même fréquence contribue à la puissance active. À cause des différents appareillages et des différents consommateurs, le courant est composé de la fréquence 60 Hz (fondamentale) et d'autres fréquences parasites. Les courants aux fréquences parasites ne contribuent pas à la puissance active (utile) mais il contribue à augmenter la valeur efficace du courant et la valeur de la puissance apparente  $S$ . Les courants qui déforment le fondamental en y rajoutant d'autres fréquences sont appelés les harmoniques.

La distorsion provoquée par ces courants harmoniques influe sur le dimensionnement de l'alimentation des appareils. Les charges non linéaires vont injecter à la source toutes les harmoniques qu'il faut filtrer.

Les harmoniques ont un impact sur la qualité de l'énergie électrique et sur l'économie.

- Surcharge du réseau de distribution par l'augmentation du courant efficace.
- Surcharge du courant du neutre à cause des harmoniques d'ordre 3.
- Vieillissement et vibration des condensateurs de compensation et des alternateurs.
- Surdimensionnement du matériel électrique et son remplacement précoce.
- Coupures plus fréquentes à cause des surintensités
- Etc.

Ces harmoniques néfastes doivent être réduites au plus que possible.

Les harmoniques qu'on étudie le plus et qui doivent être 'éliminées' sont celles d'ordre 3, 5, 7, 11 et 13.

Pour réduire ces harmoniques, il faut installer des dispositifs généralement constitués d'inductances et de capacités en série ou en parallèle.

Parfois, on peut installer seulement un condensateur pour équilibrer la production de la puissance réactive, ou au contraire seulement des inductances.

Il existe des normes concernant les taux d'harmoniques et les harmoniques d'ordre 3.

Ces normes sont données sous forme de pourcentage que ne doit pas dépasser le taux d'harmoniques (15%, 20%, etc.).

Les solutions pour les harmoniques sont des filtres actifs ou passifs.

- 1) Si on veut simplement réduire ou produire de la puissance réactive, il suffit de mettre en shunt une self ou une capacité. On parle alors de compensation.

Plus les charges réactives sont proches, plus la compensation devient aisée. En effet, une puissance réactive consommée en fin de compte va circuler sur toute la ligne d'alimentation dans le réseau moyen tension. Il ne faut pas oublier que sur chaque section de la ligne, il s'ajoute un autre client qui peut consommer du réactif ou en produire, comme le montre le schéma de la figure 2.17. À cause de la gestion du parc de compensation et de la sécurisation, il faut choisir un lieu adéquat.

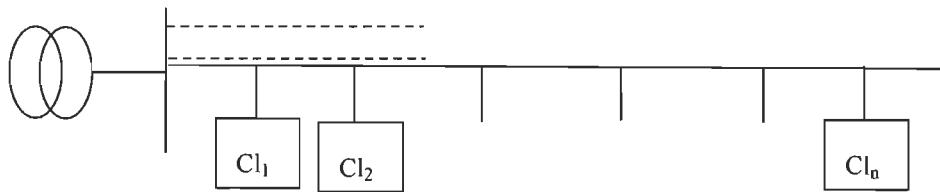


Figure 2.17 Disposition des charges sur un réseau de distribution

- 2) Si on veut s'attaquer à une harmonique bien déterminée comme l'harmonique d'ordre 3, alors une procédure de calcul doit être faite.

Dans la première solution, il est question surtout d'augmenter le cos (ou en d'autres termes de diminuer le déphasage entre le courant et la tension. Même si on obtient un  $\cos\phi = 1$ , le facteur de puissance FP n'augmente que de très peu en général, car c'est surtout la distorsion (déformation) qui influe le plus.

Dans le deuxième cas, il est question de diminuer les distorsions provoquées par l'ajout de l'harmonique 3 au courant total.

Exemple de base d'un filtre passif pour éliminer l'harmonique d'ordre 3.

L'harmonique d'ordre 3 est de fréquence 3 fois celle de l'alimentation soit 180 Hz.

Nous allons créer un système dans lequel l'impédance à cette fréquence est nulle (résultante de l'inductance et de la capacité) mais avec une résistance non négligeable pour attirer le courant vers ce type de filtre au lieu de le laisser passer dans le reste du réseau.

On considère un filtre LC parallèle.

On a alors :  $L_3 C_3 \omega_3^2 = 1$ , donc :  $L_3 C_3 = \frac{1}{\omega_3^2} \cong 7,82 \times 10^{-7}$ .

On choisit d'abord la valeur de la bobine ayant une inductance et une résistance faible pour avoir une impédance équivalente faible. On calcule la valeur de la capacité par la suite.

On trouve des valeurs de quelques microfarads pour la capacité et de plusieurs dizaines de millihenrys pour l'inductance.

## 2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les travaux qui se font dans plusieurs laboratoires dans le domaine de la MDI et de l'amélioration des performances des convertisseurs.

Nous avons montré que les travaux les plus approfondis sont faits à l'université de Trois-Rivières.

Nous avons aussi désigné quelques problèmes liés à la complexité du modèle et des approximations.

Nous avons aussi présenté les éléments les plus essentiels en électronique de puissance qui s'appliquent aux problèmes rencontrés dans notre travail.

Étant donné que nous traitons de l'optimisation du facteur de puissance, dans le chapitre qui suit, nous présentons les méthodes que nous retrouvons le plus en application et nous prospectons aussi quelques autres méthodes qui s'adaptent à notre objectif.

Nous avons testé plusieurs de ces méthodes et techniques d'optimisation. Étant donné que certaines n'ont pas abouti à des résultats probants, nous les exposant que brièvement.

# **Chapitre 3 - Méthodes d'optimisation et modélisation mathématique**

## **3.1 Introduction**

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les différents travaux qui ont été menés par les laboratoires de recherche dans le domaine des onduleurs à MDI.

Cette technique vise à trouver entre autres, un facteur de puissance le plus élevé que possible.

Pour trouver un facteur de puissance maximal, on sera amené à utiliser des méthodes et des techniques d'optimisation. Les méthodes simples opérant en temps réel sont les plus attrayantes pour nous.

C'est dans ce chapitre que nous allons nous pencher sur ces méthodes.

Dans une première partie, nous allons présenter parfois de manière brève et parfois de façon détaillée les algorithmes des méthodes d'optimisation les plus connues ainsi que la méthode génétique, objet de notre recherche. Dans la deuxième partie, nous donnerons des éléments importants pour le développement mathématique pour une nouvelle formulation du facteur de puissance pour le convertisseur monophasé et le convertisseur triphasé.

Les méthodes appliquées les plus efficaces pour des problèmes non complexes sont la méthode la méthode de quasi-Newton et de la méthode du gradient conjugué.

### 3.2 Méthode de Quasi-Newton

Cette méthode trouve une information de la courbure de la fonction à chaque itération, pour formuler le problème d'optimisation sous forme quadratique :

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + c^T x + b \quad (3.1)$$

Un nombre élevé de calculs itératifs de  $H$  a été proposé dans la littérature. Cependant la formulation de Broyden [Bro70], Fletcher [Fle70, Fle63], Goldfarb [Gol70], et Shanno [Sha70] (BFGS) est considérée la plus efficace et la plus utilisée pour une utilisation générale et pour une convergence globale.

Le principe de cette méthode est de générer une séquence de matrices symétriques  $H^k$  positives qui approximent la matrice Hessienne et une séquence de matrices  $B^k$  qui approximent la dérivée de la matrice Hessienne. On cherche une formulation de la méthode de telle manière que les Matrices  $H$  et  $B$  convergent vers la matrice Hessienne et son inverse.

La formulation donnée par BFGS est :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (3.2)$$

À chaque itération  $k$ , un vecteur direction de recherche est calculé et est donné par :

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, \quad d_0 = -g_0 \quad (3.3)$$

Sachant que :

$$g_k = \nabla f(x_k) \quad (3.4)$$

$g^k$  désigne le gradient au point courant à l'itération  $k$ .

$\alpha_k$  est le pas de progression calculé pour chaque itération.

$$\begin{aligned}\Delta x_k &= -\alpha_k B^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \\ y_k &= \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)\end{aligned}\tag{3.5}$$

et

$$B_{k+1}^{-1} = (I - \frac{y_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k})^T H_k (I - \frac{y_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k}) + \frac{\Delta x_k \Delta x_k^T}{y_k^T \Delta x_k}\tag{3.6.1}$$

$$B_{k+1} = \frac{y_k y_k^T}{y_k^T \Delta x_k} - \frac{B_k \Delta x_k (B_k \Delta x_k)^T}{\Delta x_k^T B_k \Delta x_k}\tag{3.6.2}$$

En posant :  $H_{k+1} = B_{k+1}^{-1}$ , on contourne l'inversion de matrices.

L'une des formulations les plus efficaces, on trouve la procédure de DFP faite par Davidon [Dav59], Fletcher et Powell [Fle 63]. Ils utilisent une formulation similaire à celle de la méthode de BFGS (Eq.3.2).

Il existe plusieurs variantes de la méthode de Quasi-Newton, le tableau suivant nous donne quelques-unes des plus populaires. Nous ne présentons pas dans cette thèse la manière dont chaque variante a été démontrée. Mais, il n'est pas très compliqué de développer sa propre variante dépendamment du but recherché (convergence globale, temps de calcul réduit, etc.).

### 3.3 Méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient se base sur l'annulation de la dérivée (gradient). Elle ajuste certains coefficients (poids) pour faire la recherche dans le sens contraire du gradient dans la pente la plus raide. C'est la direction dans laquelle la fonction décroît le plus rapidement. Cependant, les chercheurs ont remarqué que, malgré cette propriété, la convergence rapide n'est pas assurée dans tous les cas. Dans le cas des algorithmes du gradient conjugué, la recherche de l'optimal se fait par plusieurs directions en même temps, ce qui augmente la

rapidité de convergence. L'algorithme du gradient conjugué de Fletcher-Reeves est des plus connus. Il commence par chercher la pente la plus basse. Un vecteur direction (line-search) est calculé par la suite pour trouver une distance optimale. La prochaine direction de recherche est déterminée de façon à combiner la direction de descente optimale avec la direction de recherche précédente [Mat04].

Certains auteurs comme [Sha04], choisissent la méthode du gradient conjugué, car :

- Elle a un faible stockage de mémoire.
- Elle a une bonne information sur la dérivée.
- Elle estime la matrice Hessian et son inverse.

L'algorithme simplifié de la méthode du gradient conjugué est donné par :

$$1) \quad x_{n+1} = x_n + \lambda_{opt,n} S_n \quad (3.7)$$

$$2) \quad \lambda_{opt,n} = \min_{\lambda} J(x_n + \lambda S_n) \quad (3.8)$$

$$3) \quad S_n = \pm \nabla J_n + \alpha S_{n-1} \quad (3.9)$$

$\alpha$  est un coefficient qui change de façon dynamique d'itération à l'autre, l'une des meilleures formulations est donnée par Fletcher et Reeves. Un organigramme explicatif de la démarche est donné dans [Sha04].

Voici un tableau qui résume quelques-unes de ces méthodes les plus utilisées et celles qui font l'objet de recherche.

Méthode	année	Auteurs	Remarque
$B_k^{HS} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{d_k^T y_k}$	1952	Hesteness et Stiefel	Originale
$B_k^{FR} = \frac{\ g_{k+1}\ ^2}{\ g_k\ ^2}$	1964	Fletcher Reeves	
$B_k^D = \frac{g_{k+1}^T \nabla^2 f(y_k) y_k}{d_k^T \nabla^2 f(y_k) d_k}$	1967	Daniel	
$B_k^{PRP} = \frac{g_{k+1}^T y_k}{\ g_k\ ^2}$	1969	Polak, Ribiere, Polyak	Composée des deux premières
$B_k^{CD} = \frac{\ g_{k+1}\ ^2}{-d_k^T g_k}$	1987	Fletcher	L'une des meilleures variantes
$B_k^L = \frac{g_{k+1}^T y_k}{-d_k^T g_k}$	1991	Liu Storey	
$B_k^{PRP} = \frac{\ g_{k+1}\ ^2}{d_k^T y_k}$	1999	Dai, Yun	
$B_k^{CD} = (y_k - 2d_k \frac{\ y_{k+1}\ ^2}{d_k^T y_k})^T \frac{g_{k+1}}{d_k^T y_k}$	2005	Zhang	Supposée donner l'optimum global

Tableau 3-1 Représentation de quelques méthodes du gradient conjugué

*Quelques Problèmes posés par ces méthodes :*

Ces méthodes et d'autres méthodes utilisant les dérivées comportent le principal inconvénient de converger vers la solution optimale locale.

Notre fonction objective (Facteur de Puissance) est très complexe, de plus les variables sont discontinues. Si nous laissons la méthode du gradient faire son travail sans contrôle, nous

allons obtenir une solution réelle. Arrondir la solution réelle nous donne rarement la bonne solution.

Nous développons nous-mêmes, actuellement, une variante des méthodes du gradient qui puisse être applicable pour un problème discontinu.

Dans la suite de ce chapitre, on va détailler une méthode qui n'utilise pas les gradients et qui est très souple. Elle porte parfois le nom *d'algorithme génétique* ou *algorithme évolutionnaire*.

### 3.4 Les algorithmes génétiques

Les algorithmes les plus formels ont été d'abord le fruit des travaux de *Holland* en 1975[Hol75]. D'autres études ont suivi et ont enrichi le potentiel de cette technique de *De Jong* et *Goldberg* [Jon80] et *Goldberg* [Gol89]. Les méthodes génétiques ont été largement utilisées en génie électrique, surtout dans la commande, lorsque les modèles mathématiques deviennent moins faciles à manipuler [Tol01].

La méthode génétique est appliquée pour résoudre des problèmes complexes. Elle est classée avec les méthodes dites évolutionnaires. Certains aspects ne peuvent pas être couverts efficacement par les méthodes classiques :

- Beaucoup de problèmes d'optimisation se heurtent à la non-convexité des domaines.
- Des problèmes de continuité se posent pour certaines fonctions [Gen06].
- Problèmes de valeurs entières.
- Problèmes multimodaux.

La théorie des algorithmes génétiques se base sur la compétition entre individus de chaque population pour leur survie. Les survivants qui donneront naissance à la prochaine

génération devront avoir des caractéristiques meilleures qui seront transmises aux générations suivantes. Les caractéristiques qui font que la méthode génétique est performante pour le minimum global sont :

- La méthode suit des règles probabilistiques pour que la solution initiale ne détermine pas la solution finale.
- Elle opère sur une population de solution et non pas sur une solution.
- Elle est efficace même pour les solutions discontinues ou comportant des bruits.
- Elle utilise un codage binaire ou réel. Le codage réel est plus efficace (espace mémoire).

### 3.4.1 Méthodologie [Dup04]

Les étapes de base sont :

- a) Générer la population initiale : N populations comprises dans le domaine décisionnel.
- b) Critère d'arrêt : Performance ou nombre Max de générations (itérations).
- c) Reproduction : Il s'agit de reproduire les meilleures solutions avec diversité, par sélection.
  - c.1) Sélection par roulette. Le choix des individus se fait en fonction de leur performance (valeur de la fonction objective)  $P_r(X_i) = \frac{f(X_i)}{\sum f(X_i)}$
  - c.2) Sélection par tournoi. Comparer de façon aléatoire en fonction de la performance de chaque individu.
- d) Le croisement. Il exploite l'espace objectif. Il combine deux parents pour produire deux enfants. Une mauvaise solution qui est produite lors du croisement aura une courte durée de vie et sera donc éliminée après quelques itérations.
- d.1) Croisement linéaire [Wri91]

Dans ce cas, nous créons trois enfants et nous choisissons les deux meilleurs.

Enf<sub>1</sub>= 0.5 ( par<sub>1</sub> + par<sub>2</sub>) au milieu de la droite des parents.

Enf<sub>2</sub>= 1.5 par<sub>1</sub> - 0.5 par<sub>2</sub> à gauche de la droite des parents.

Enf<sub>3</sub>= -0.5 par<sub>1</sub> + 1.5par<sub>2</sub> à droite de la droite des parents.

#### d.2) Croisement binaire simulé (SBX)

Il a été proposé par Deb et Agrawal [Deb 95]

Soit :

$$\nu_i \in [0,1]$$

$$\beta_{qi} = \begin{cases} 2\nu^{\frac{1}{\eta_c+1}} & \text{si } \nu_i \leq 0.5 \\ \frac{1}{2(1-\nu_i)^{\frac{1}{\eta_c+1}}} & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{Enfant}_1 = 0.5((1+ \beta_{qi})\text{Parent}_1 + (1- \beta_{qi}) \text{ Parent}_2) \quad (3.11)$$

$$\text{Enfant}_2 = 0.5((1- \beta_{qi})\text{Parent}_1 + (1+ \beta_{qi}) \text{ Parent}_2) \quad (3.12)$$

Note : Enfant<sub>1</sub> – Enfant<sub>2</sub>=  $\beta_{qi}$ (Parent<sub>1</sub>-Parent<sub>2</sub>). Ainsi, les enfants sont distants d'une manière proportionnelle à celle des parents.

Nous obtenons donc une population de cardinal 2N et nous éliminons les plus mauvaises solutions. Cependant dans les algorithmes génétiques pratiques, le croisement n'est fait que pour un certain pourcentage de la population.

#### *Autres types de croisements*

#### d.3) Croisement de Blend (variante BLX- $\alpha$ )

$$\text{Enfant}_1(i) = ((1- \lambda_i)\text{Parent}_1 + \lambda_i \text{ Parent}_2)$$

$$\text{Enfant}_2(i) = ((1- \lambda_i)\text{Parent}_2 + (1+ \lambda_i) \text{ Parent}_1)$$

$\lambda_i = (1+2\alpha) \mu_i - \alpha$  ( $\alpha=0.5$ ) est la meilleure solution d'après les chercheurs

$\mu_i$  variable aléatoire.

#### d.4) Croisement naïf

Si  $Par1=(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_n^1)$  et  $Par2=(x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_n^2)$

Alors :  $Enf1=(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^2, \dots, x_n^2)$  et  $Enf2=(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^1, \dots, x_n^1)$

La moitié du parent 1 est tronquée, on lui adjoint la deuxième moitié du parent 2 et vice versa. Cela nous donne deux enfants ayant la moitié de la composante génétique de chaque parent.

#### d.5) Croisement simplexe

Plusieurs parents constituent une courbe fermée, le centrôide est calculé et la courbe constituée sera élargie pour construire la génération suivante.

#### d.6) Croisement non équilibré

La création des enfants proches d'un seul parent est favorisée. Nous pouvons dire que cette approche est dirigée. Elle est efficace lorsqu'on connaît les forces de chaque individu et on veut faire pencher l'enfant vers certaines caractéristiques de certains parents.

#### e) La mutation [Lis04] :

Elle permet d'agrandir l'espace objectif et imite la mutation des gènes dans les chromosomes des êtres vivants. Cet opérateur agit sur un seul individu. Il exploite l'espace objectif en y apportant de nouvelles solutions. On rencontre essentiellement

deux types de mutations dans la littérature : la mutation non uniforme et la mutation polynomiale.

#### e.1) La mutation non uniforme

Elle a été proposée par Michalewzic [Mic82]

$$\text{Enfant} = \text{Parent} + \tau(\text{Parent}_{\max} - \text{Parent}_{\min}) \left( 1 - r^{\left(1 - \frac{\text{gen}}{\text{gen}_{\max}}\right)^{\varphi}} \right) \quad (3.13)$$

$\tau$  est une variable booléenne de valeur 1 ou -1 et de probabilité 50%,  $r$  un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et  $\varphi$  un paramètre de mutation voisinant 0.3 en général.

Au début de l'optimisation, l'enfant a une valeur uniformément répartie dans l'intervalle décisionnel. Dans les dernières itérations de l'optimisation, l'enfant aura une valeur proche du père.

#### e.2) La mutation polynomiale

Elle a été proposée par *Deb et Goal* [Deb96]. L'enfant produit est décrit par la fonction suivante :

$$\text{Enfant} = \text{Parent} + \bar{\delta} (\text{Parent}_{\max} - \text{Parent}_{\min}) \quad (3.14)$$

$$\text{avec : } \bar{\delta} = \begin{cases} 2r^{\frac{1}{\eta_m+1}} & \text{si } r < 0.5 \\ 1 - [2(1-r)]^{\frac{1}{\eta_m+1}} & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.15)$$

$r$  est un nombre aléatoire entre 0 et 1.

#### e.3) La mutation aléatoire

L'enfant est donné par l'équation :

$$\text{Enf} = \text{Par} + r_i (\text{Par}_{\max} - \text{Par}_{\min}) \quad (3.16)$$

$r_i$  paramètre aléatoire.

#### e.4) La mutation à distribution normale

Elle utilise la probabilité de distribution gaussienne, avec la moyenne = 0.

$$\text{Enf} = \text{Par} + N(0, \sigma_i) \text{Etc.}$$

- f) L'élitisme. Il garantit que la meilleure solution est transmise à la prochaine génération. Les études ont montré que l'élitisme est une étape importante qui permet de converger vers la solution optimale globale.

### 3.4.2 *Choix de la fonction objective ajustée (fitness function)*

On peut trouver dans la littérature plusieurs manières de faire [deb01].

- La valeur de la fonction objective normalisée [0 1] pour les solutions.
- La valeur de la fonction objective elle-même.
- Certaines transformations de la fonction objective à travers le changement de variables
- Partage de la fonction objective en sous fonction dans le domaine décisionnel pour toucher tous les minimums (plus complexe, mais meilleure façon d'obtenir le minimum global et de comparer avec autres minimums, solution que je préconise avec simplification).

### 3.4.3 *Théorie sur laquelle se basent les algorithmes génétiques*

Il existe des théories appliquées pour les algorithmes génétiques parmi elles, le théorème des schémas (schemas) est très efficace pour déterminer quelles sont les configurations qui sont préférables à reproduire.

Un schéma est une configuration typique qui fait ressembler les individus ayant cette configuration (exemple 101101010) est un schéma binaire). La relation de reproduction est :

$$m(H, t+1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{f_{avg}} \left[ 1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1} - p_m o(H) \right] \quad (3.17)$$

$o(H)$  est l'ordre du schéma = nombre d'éléments identifiés (connus).

$\delta(H)$  est la longueur du schéma (dernière position – première position connue)

si  $H = *10**0***$ , alors  $o(H) = 3$  et  $\delta(H) = 6 - 2 = 4$

$m(H)$  est le nombre de copies que l'on devrait faire à la prochaine génération.

Il existe une multitude d'autres théories utilisées pour les algorithmes génétiques, des travaux dans le domaine de l'informatique et des mathématiques abondent, nous donnons à titre informatif un site et un livre comportant des éléments de la théorie : [gen06] et [Wri05]. On trouve aussi une démonstration de la convergence globale de la méthode génétique.

#### 3.4.4 Optimisation multi-objective [Str95]

Dans les problèmes réels de l'industrie, à cause de la complexité des problèmes, il est rare de trouver une optimisation à un seul objectif. Il y a au moins deux objectifs. Dans la résolution classique, les problèmes à plusieurs objectifs sont ramenés à un problème à un seul objectif, en sommant les objectifs multipliés par des poids. Pour faciliter les études, nous ramenons tous les problèmes à un problème de minimisation (une fonction à maximiser sera remplacée par son opposé à minimiser).

En fait, en multi-objectif la solution est rarement unique. Il y a un ensemble de solutions dominantes (ensemble de solutions de compromis). Des études ont montré que si

l'ensemble des solutions Pareto-optimale est concave, il y a des solutions qui risquent de ne pas être trouvées par cette méthode [Deb01].

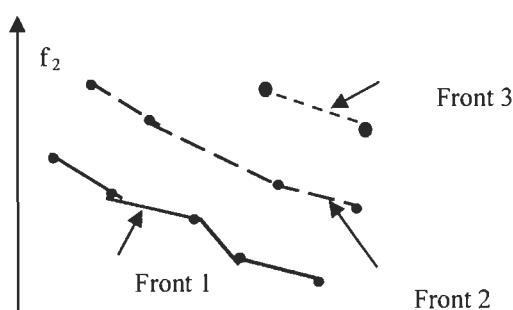
Deb [Deb01] a proposé une méthode qui sauvegarde plusieurs solutions qui répondent à la minimisation d'un groupe de fonctions en même temps. Le résultat sera donc un ensemble de points possibles. Pour que la solution choisie soit satisfaisante, il faut que l'ensemble des solutions soit le plus diversifié : il faut que la distance euclidienne entre les membres de l'ensemble soit grande.

### 3.4.5 Frontière Pareto-optimale et description du NGS-II

Soit le cas de deux fonctions objectives (à optimiser)  $f_1$  et  $f_2$ . On considère que lorsque  $f_1$  augmente  $f_2$  a tendance à diminuer. Il existe un sous-ensemble  $G$  composé de points  $p_1, \dots, p_n$  qui vérifient  $f_1(p_j) < f_1(p_i)$  et  $f_2(p_j) > f_2(p_i)$ , avec  $i \neq j$ . aucun de ces points ne peut être meilleur que l'autre. On dit qu'aucun de ces deux points ne domine l'autre. La courbe formée par l'ensemble  $G$  est nommée la frontière Pareto-optimale.  $G$  est composé donc des solutions non dominées, c.-à-d. qu'il n'existe aucun point qui est dominé par les deux fonctions objectives en même temps.

On peut donc résumer le classement des individus comme suit.

- La première frontière composée d'individus qui ne sont dépassés par aucun autre en considérant toutes les fonctions objectives.
- Puis créer une deuxième frontière qui est sous frontière du reste des éléments, etc.
- Il faut commencer par choisir les éléments de la première frontière puis la deuxième, etc.



### Figure 3.1 Triage par calcul de la distance d'encombrement

L'algorithme NGSA-II constitue l'un des plus puissants de son genre. Il permet d'optimiser une fonction multi-objective par l'algorithme génétique. Les étapes importantes sont données de la manière suivante :

#### 1) Triage non dominé rapide

Il trie la population en ensembles non dominés pour chaque objectif. L'algorithme compare tous les individus et leur assigne un rang. Ainsi, on détermine les individus non dominés qui vont former la frontière non dominée et les autres individus dominés.

#### 2) Calcul de la distance d'encombrement

##### **Étape 1 :**

Combiner les parents  $P_t$  et les enfants  $Q_t$  et créer une population de rang  $2N$ .

$R_t = P_t \cup Q_t$ . Puis créer les  $m$  frontières pour chaque objective  $I=1,\dots,m$

##### **Étape 2 :**

Poser  $P_{t+1} = \emptyset$ . Poser  $i=1$

Tant que  $\text{Card}(P_{t+1}) + \text{card}(F_i) < N$  faire :  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$ . Puis poser  $i = i+1$

##### **Étape 3 :**

À chaque sous-étape, on rajoute tous les éléments de  $F_i$  ou une partie de ces éléments, le choix de ces éléments dépend du Nombre  $N - \text{Card}(P_{t+1})$ . Nous choisissons les meilleurs éléments déduits par la plus grande distance d'encombrement.

#### Étape 4 :

Vérifier si  $i=m$ , dans ce cas on arrête le processus.

### 3) Préservation de l'élitisme

#### *Procédure d'assignation de la distance d'encombrement*

- Poser  $d_i = 0$  pour tous les individus (initialiser les distances d'encombrement).
- Pour chaque objective, classer les individus par ordre décroissant.
- Pour chaque objectif  $i=1,..,m$ , calculer la distance d'encombrement. Pour les éléments des bornes, assigner une distance égale à l'infini. Pour tous les autres la distance est donnée par :

$$d_{ij} = d_{ij} + \frac{f_m^{(I_{j+1}^n)} - f_m^{(I_j^n)}}{f_m^{\max} - f_m^{\min}} \quad (3.18)$$

La distance d'encombrement permet par voie de calcul de la norme de savoir si un individu quelconque présente un grand espace dans lequel il est seul. En effet, un élément comportant des individus proches de lui est susceptible de se trouver un remplaçant s'il est en présence d'un minimum global. Par contre, un individu présentant des voisins éloignés doit être gardé pour ne pas manquer un minimum global.

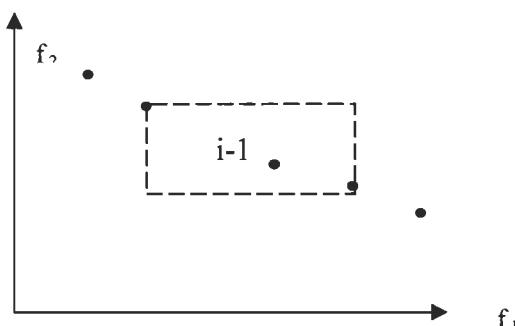


Figure 3.2 Distance d'encombrement

Le calcul de la distance d'encombrement permet pratiquement de placer des genres de « pions » dans l'espace décisionnel. Ces pions donnent l'information sur la fonction objective localement. En plus, ces pions, grâce à la formulation de l'algorithme génétique,

peuvent muter et se croiser, ce qui rend la méthode génétique très dynamique et peut toucher un maximum d'optimums locaux.

### 3.4.6 *Description de quelques algorithmes efficaces*

#### a) L'algorithme NSGA-II

L'algorithme génétique à triage non dominé qui a été proposé initialement par Srinivas et Deb présente les inconvénients suivants :

- La complexité de calcul.
- L'absence d'élitisme.
- Le besoin de spécifier un paramètre de partage [Agr02]

La méthode NSGA-II a été proposée pour remédier aux inconvénients de la méthode précédente et améliorer la rapidité de l'ancienne version. Le partage en deux sous-ensembles dominé et non dominé est remplacé par le calcul de la distance d'encombrement.

#### b) L'algorithme SPEA

Cet algorithme utilise l'archivage au lieu de l'élitisme. L'archivage se fait pendant tout le processus pour garder les meilleurs éléments. Cet algorithme est moins populaire que l'algorithme NSGA-II.

#### 3.4.6.1 **Problèmes posés par l'algorithme génétique en multi-objectif**

Si tous les éléments sont dans la même frontière, la question du comment choisir les éléments pour la nouvelle génération reste posée. Une piste de solution : travailler par domaine et la contraction des domaines [Bar03].

### 3.5 Amélioration de la performance de l'algorithme génétique : Les algorithmes hybrides [Gar92]

Les algorithmes hybrides [Fra97] permettent d'unir les avantages de la méthode génétique particulièrement sa fiabilité et l'une des méthodes différentielles qui ont besoin d'un point de démarrage proche du minimum global et sont très précises [Ren96].

Plusieurs auteurs ont associé les avantages de l'algorithme génétique avec les avantages d'une autre méthode numérique d'optimisation. Généralement, le but est d'augmenter l'efficacité de l'algorithme génétique dans le sens de la précision [Tsa04].

Une variété de méthodes qui sont associées à l'algorithme génétique est les méthodes directes [Hoc04]. Leur avantage réside dans le fait de la souplesse de la programmation et leur force est dans leur formulation ne comportant pas de différentiation.

[Pan00] exploite les avantages de la méthode génétique et la méthode du gradient pour les combiner et donner une méthode hybride qui est très bonne pour trouver l'optimal global et en plus un optimal précis (recherche locale qui manque à l'algorithme génétique).

Un algorithme détaillé de l'optimisation hybride est donné dans ce travail. Dans [Kim04] et dans le but d'une conception optimale d'un moteur à courant continu, l'auteur développe un nouvel algorithme qui combinant la méthode génétique et la méthode de recherche directe. La méthode de recherche directe se base sur les processus suivants :

- Un choix du point initial qui est très important.
- Processus itératif de combinaisons des points jusqu'à ce que le principe d'optimalité soit atteint.

Les auteurs qui travaillent dans ce domaine notent que la convergence est plus rapide et que la précision est meilleure.

### 3.6 Application de la méthode génétique à notre système

Le but est de trouver des vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de la forme :

$v_1 = \alpha_1(1, 0, \dots, 0)$ ,  $v_2 = \alpha_2(0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $v_n = \alpha_n(0, 0, \dots, 1)$ , qui forment une base et construit l'ensemble des points.

Comme nous ne pouvons pas reproduire tous les vecteurs, nous utiliserons une progression probabiliste comme suit :

$$\alpha_1 = 20 * rand(1), \alpha_2 = \alpha_1 + 10 * rand(1), \dots, \alpha_n = \alpha_{n-1} + 10 * rand(1)$$

Nous voulons que les vecteurs de base explorent tout l'espace décisionnel. Alors, nous devons nous assurer que les valeurs attribuées à  $\alpha$ , ne créent pas des vecteurs proches.

Pour cela, nous devons vérifier que les formules donnant les vecteurs lors de l'opération croisement sont incompatibles avec celles de l'opération population initiale de l'AG.

Pour que deux vecteurs  $v_1, v_2$  restent éloignés dans un processus itératif, il faut que le déterminant de la matrice formée par les vecteurs soit suffisamment grand.

Un exemple d'un déterminant grand est la matrice identité.

#### Important :

Les variables  $n_l$  et  $N_s$  doivent suivre une contrainte inégalité multiple, dans laquelle  $N_{l1}$  est supérieur à 1.

$$1 \leq n_{l1} \leq n_{s1} < n_{l2} < n_{s2} \dots n_{lq} < n_{sq} \leq N,$$

alors que pour le triphasé nous avons :

$$-\frac{N}{2} \leq n_{l1} \leq n_{s1} < n_{l2} < n_{s2} \dots n_{lq} < n_{sq} \leq \frac{N}{2}$$

Cette partie nous permet d'exprimer le facteur de puissance par son expression la plus exacte possible (avec le minimum d'hypothèses simplificatrices). Nous utilisons certaines propriétés mathématiques pour arriver à cette fin.

Nous n'oublions pas nos deux objectifs : effectuer le calcul en temps réel et maximiser, pour une topologie donnée, le facteur de puissance.

### 3.7 Autres méthodes d'optimisation

Dans cette partie nous énoncerons sans détails d'autres méthodes qui peuvent être utiles pour résoudre notre problème. Ces méthodes utilisent généralement le concept de domaine et de voisinage qui sont deux notions primordiales pour ces méthodes. Elles sont appliquées pour des problèmes complexes. En voici quelques-unes.

- Méthode des réseaux de neurones;
- Méthodes probabilistiques;
- Méthode Tabou;
- Méthode minmax [Pet98];
- Méthodes de solution métaheuristiques : méthodes stochastiques (méthode de Monte-Carlo, recuit simulé, tabou) [Wik06], métaphores biologiques (colonies de fourmis, particle swarm) [Wik06].
- Méthode de recuit simulée

La méthode simule le recuit en mécanique.

Pour un voisinage  $N(x)$  de  $x$ , trouver  $x'$ , si  $f(x') < f(x)$ , alors remplacer  $x$  par  $x'$ . Sinon prendre  $r$  nombre aléatoire si  $r < e^{-\Delta f/T}$ , alors  $x' = x$ .

Sinon poser  $T = \alpha T$  et réitérer jusqu'à ce que  $T$  soit au-dessous d'un certain seuil (recuit max).

#### 3.7.1 De l'interpolation

Plusieurs modèles nécessitent non seulement une méthode d'optimisation, mais aussi des méthodes d'interpolation.

Les méthodes d'interpolation servent à restructurer le modèle qu'on possède pour le représenter généralement par des polynômes. Les polynômes sont plus faciles à optimiser. Nous décrivons quelques-uns de ces polynômes brièvement et d'autres, avec des détails.

### 1. La méthode linéaire

Elle consiste à remplacer la fonction en étude par une fonction affine (équation de droite).

### 2. l'interpolation cubique

Comme son nom le dit, elle consiste à remplacer la fonction en étude (ou le nuage de points) par une fonction cubique qui passe au milieu des points en épousant la forme du nuage.

### 3. L'interpolation par des polynômes de degré élevé.

Généralement de degré 5, ces polynômes interpolent mieux les fonctions à plusieurs courbures.

#### 4. Interpolation de Newton

C'est l'une des méthodes les plus classiques et les plus simples. Elle repose sur le développement limité de Taylor.

L'approximation du polynôme utilise les premières dérivées de la fonction à interpoler.

La fonction peut être discrète et le calcul de la dérivée se fait généralement par différentiations.

#### 5. Interpolation d'Aitken

Cet algorithme construit une suite de polynômes sur un nombre de plus en plus élevé de points. Le calcul peut être présenté sous la forme d'un tableau triangulaire.

#### 6. Interpolation de Lagrange

Le polynôme d'interpolation de Lagrange permet d'interpoler une fonction connaissant  $n + 1$  points pour obtenir un polynôme de degré  $n$ . Ce polynôme utilise les principes de différences divisées.

#### 7. Polynôme de Tchebychev

La meilleure représentation polynomiale (celle pour laquelle l'erreur est minimale) est obtenue pour un jeu de points de collocation bien connu. Sur l'intervalle  $[-1;1]$ , le polynôme d'interpolation optimal (de degré  $N$  donné) est celui construit sur les  $N + 1$  points de collocation  $x_i$  qui sont les racines du polynôme de Tchebychev de degré  $N+1$ . Il s'agit des points de Gauss dont les abscisses (relatives à l'intervalle  $[-1;1]$ ) sont :

$$x_i = -\cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2(N+1)}\right) \quad i = 0, \dots, N \quad (3.18)$$

Ces points de collocation sont irrégulièrement répartis sur l'intervalle. Ils sont en particulier plus resserrés vers les frontières de l'intervalle.

Les bornes de l'intervalle, -1 et +1, ne font pas partie des points de collocation. Il existe d'autres jeux de points (dits de Gauss-Radau et Gauss-Lobatto) qui incluent l'une ou/et l'autre des extrémités du domaine.

On peut transposer ces résultats à un intervalle  $[A \ B]$  puisqu'un simple changement de variable permet de ramener ce dernier à  $[-1 \ 1]$ .

Pourquoi nous voulons utiliser l'interpolation polynomiale dans notre cas? Parce qu'obtenir une expression simplifiée du facteur de puissance n'est pas chose aisée. On aura fort probablement recours à une interpolation pour obtenir une expression plus simple traitable en temps réel. Un autre facteur qui nous a poussés à nous diriger vers l'interpolation est le manque de précision de la méthode génétique. En effet, après un certain nombre d'itérations, la méthode génétique n'avance plus, la précision devient consommatrice de temps de calcul.

### 3.8 Conclusion

Les méthodes d'optimisation sont chaque année améliorées. Elles sont améliorées parce qu'un problème d'optimisation complexe est rarement résolu de manière directe et simple.

Il est fréquent qu'on utilise plusieurs méthodes de recherche de l'optimum pour un même problème.

Les méthodes du gradient conjuguées et de Quasi-Newton sont très prometteuses, car elles évoluent chaque année. Mais notre problème est à variables discrètes.

L'algorithme génétique peut pallier aux déficits de ces méthodes. Cependant, tel qu'il est présenté classiquement et tel qu'il est programmé dans Matlab, il ne permet pas de répondre à nos exigences de temps de calcul, de minimum global et parfois de précision.

Dans le chapitre qui suit, nous présentons les modifications faites sur l'algorithme génétique ainsi que les nouvelles formulations du facteur de puissance.

# **Chapitre 4 - Contribution apportée et méthodologie suivie**

## **4.1 Introduction**

Ce chapitre présente les nouveautés apportées par rapport aux modèles existants et à l'algorithme génétique.

D'autres changements concernant les formulations mathématiques sont donnés dans les chapitres 5 et 6, qui vont donner tous les détails des modèles mathématiques en mode monophasé et en mode triphasé.

Le modèle génétique repose sur une algorithmique métaeuristique et probabiliste.

Un ensemble de points nommés individus vont être positionnés dans l'espace de décision puis vont être mutés et croisés pour mouvoir itération après itération vers le minimum global.

Pratiquement, lorsqu'on fait la programmation, nous nous rendons compte qu'il faut pousser plus loin la recherche de la manière de disperser les individus pour que ceux-ci ne se retrouvent pas dans un puits de minimums locaux. La répartition de la population initiale est la première chose que nous avons étudiée.

Par la suite, nous avons remarqué que pendant le processus de croisement et de mutation les individus ne changent pas de position de manière judicieuse. Nous avons étudié la théorie sur laquelle repose l'algorithme génétique et nous avons remarqué que la diversité de la population dépend aussi bien des individus initiaux (parents) que de leurs progénitures.

Cela nous a amenés à repenser l'algorithme génétique dans tous ces opérateurs.

## 4.2 Algorithme génétique

L'utilisation de l'algorithme génétique dans le domaine des convertisseurs d'électronique de puissance a été introduite de façon timide, comme application à certains problèmes qui nécessitent soit une expression implicite de la fonction à optimiser, soit sur une expression très complexe et discontinue. Cependant, peu d'articles ont poussé les travaux de recherche dans la formulation de l'algorithme génétique afin de le rendre plus précis (c'est la faiblesse de 'algorithme génétique) et surtout utilisable en temps réel.

Les parties sur lesquelles nous avons apporté des améliorations sont :

- 1) La diversité de la population initiale.
- 2) La formulation de la mutation dans l'algorithme (surtout en fin d'itérations).
- 3) La formulation du croisement.

Les premiers résultats que nous avons obtenus montrent que, lorsqu'on introduit une fonction adéquate dans le choix de la population initiale, on aboutit à :

- Une exécution plus rapide (si on ne recherche pas la précision et pour un nombre de trous inférieur à 7).
- La diminution du nombre d'itérations.
- Le rapprochement vers l'optimum global (amélioration de la précision).

De même, nous avons remarqué que lorsque la perturbation de la solution à une certaine itération causée par la mutation est grande, alors la population de solution devient plus riche et donc plus susceptible de comporter le maximum global. Nous continuerons nos recherches sur ces domaines ainsi que sur le croisement.

L'hybridation vue par plusieurs chercheurs consiste à remplacer la mutation par des méthodes d'optimisation locales.

Afin d'améliorer l'algorithme génétique en convergence locale, on s'est proposé deux modèles différents :

1) Les méthodes du gradient

Nous avons testé cette méthode et elle nous a permis de trouver parfois des meilleures solutions, cependant, elle diverge souvent et elle n'est pas toujours adéquate pour l'optimisation pour des variables entières.

2) Les méthodes utilisant les domaines et les voisinages (méthode de recuit simulé ou méthode Tabou, méthode des mailles, etc.).

Nous n'avons pas utilisé la deuxième méthode parce qu'elle se présente sous forme proche de la méthode génétique hybride avec une utilisation surtout en off-line.

### 4.3 Simplification des expressions mathématiques

Les résultats obtenus jusque-là montrent que le côté développement mathématique est très important. Les travaux faits dans [San04, San05, San09] de l'Université du Québec à Trois-Rivières indiquent bien que les expressions mathématiques peuvent être reformulées de manière à atteindre le double objectif de précision et de simples expressions. Or ces deux objectifs se contredisent mutuellement.

Les résultats du développement de l'expression du FP sont donnés dans l'annexe I pour le mode monophasé et en annexe II pour le mode triphasé. Nous remarquons bien que les expressions détaillées sont très complexes. Comme suite à la synthèse des recherches faites dans ce domaine de recherche et les domaines connexes, nous avons adopté comme mentionné dans l'examen doctoral la méthodologie suivante :

**1<sup>ere</sup> idée**: Dans le cas de la MDI, il s'agissait de développer les équations du facteur de puissance de manière plus simple et aussi précise que possible. Nous

montrerons une représentation du facteur de puissance dont laquelle nous diminuons les sommes et les séries entières (garder une seule sommation en fin de calcul). Pour cela, nous avons regroupé des termes et les avons remplacées par un terme unique. En annexe nous avons donné un développement complet qui nous a permis d'obtenir une expression du FP la plus précise possible.

**2<sup>e</sup> idée :** Lorsque nous obtenons des expressions détaillées, nous avons regroupé certains termes pour constituer une expression la plus algébrique possible. Une expression algébrique comportant peu d'éléments approximés (un seul pratiquement en fin de compte). Une interpolation polynomiale pour l'instant n'a été que mineure contrairement à ce qu'on pensait qu'elle allait être importante dans l'examen doctoral.

**3<sup>e</sup> idée :** Pour éviter des approximations et des hypothèses simplificatrices qui diminuent la précision, nous avons utilisé un algorithme d'optimisation globale. Vu que l'expression du facteur de puissance comporte des termes non linéaires et complexes, plusieurs minimums locaux seraient présents. La méthode choisie est la méthode génétique et sa forme hybride. Nous avons amélioré ces performances pour augmenter sa précision. Trois points sont étudiés

- La diversité de la population et le partage du domaine décisionnel en sous-intervalles
- La formulation du croisement en étudiant en détail la manière de fonctionner de cet opérateur pour visionner comment les minimums locaux peuvent être rapprochés dans un voisinage acceptable.
- La reformulation de la mutation (algorithme hybride).

## 4.4 Modifications apportées au modèle génétique

### 4.4.1 Changement sur la population.

Les deux figures suivantes montrent comment le modèle génétique peut être bien plus performant si l'on distribue la population initiale équitablement sur l'espace de recherche pour capturer l'optimum global.

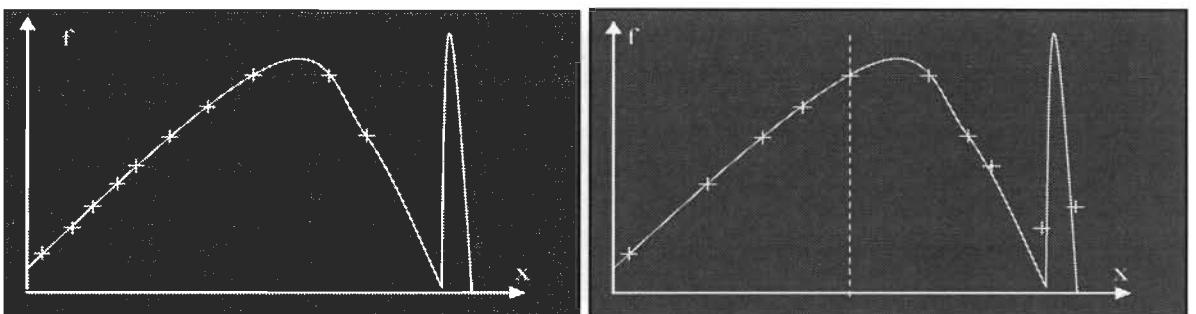


Figure 4.1 Améliorations des performances de l'AG par la modification de la population Distance d'encombrement

## 4.5 Résultats obtenus avec le modèle Sandali-Chériti en utilisant la méthode génétique et la méthode hybride, cas du modèle triphasé.

a) Résultats pour  $n = 3$  trous, avec ou sans répartition équitable et en changeant  $nc$ .

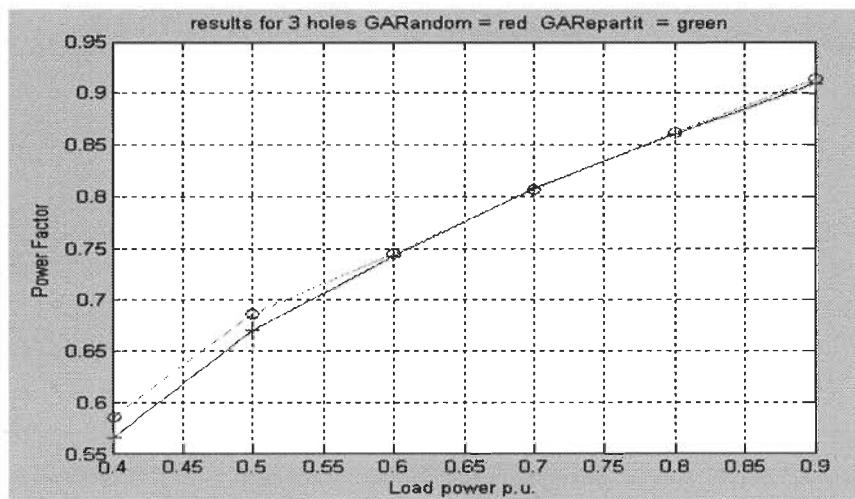


Figure 4.2 Résultats de l'AG avec population répartie et non répartie

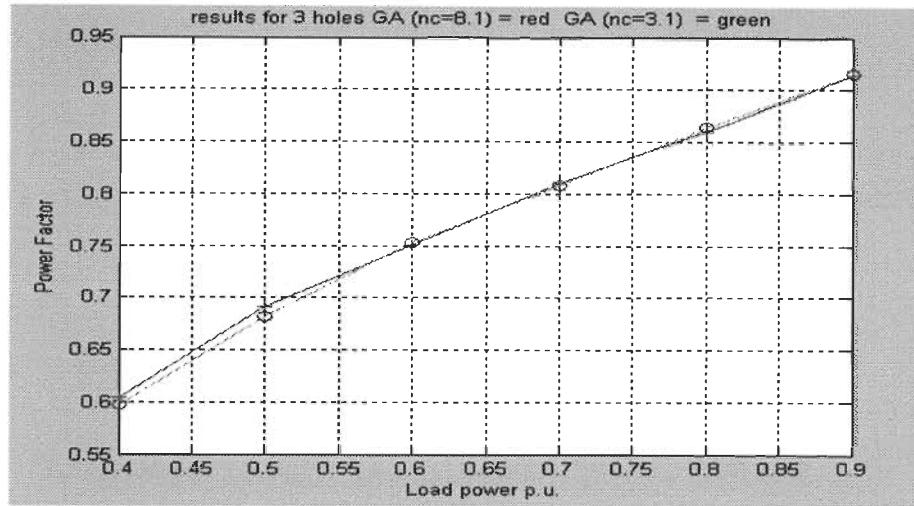


Figure 4.3 Résultats de l'AG avec variation de paramètre  $n_c$

#### 4.6 Discussion des résultats

Le paramètre  $n_c$  influe peu. Parfois, nous obtenons des résultats meilleurs pour la valeur de  $n_c = 3.1$  de façon globale. C'est une valeur préconisée dans la littérature.

Cependant, à notre sens, la valeur de  $n_c$  va dépendre de la fonction à optimiser.

La répartition de la population de manière équitable dans le domaine décisionnel est le moyen le plus efficace d'améliorer l'algorithme génétique.

#### 4.7 Modèle hybride pour le changement de la mutation.

Afin d'obtenir des résultats raffinés et vu que la méthode génétique est stable, mais imprécise, nous avons transformé l'opérateur *mutation* en opérateur de recherche locale plus pointu. Ici nous parlons de la méthode du filet ou mesh. Cette méthode consiste à provoquer un changement de la solution trouvée en employant une dispersion de certains membres de la population proche de la solution pour capturer la solution globale.

Voici quelques résultats obtenus qui démontrent que cette hybridation permet d'avoir une meilleure solution avec parfois 15 % d'augmentation.

Il faut retenir aussi que parfois cette méthode peut augmenter le temps de calcul.

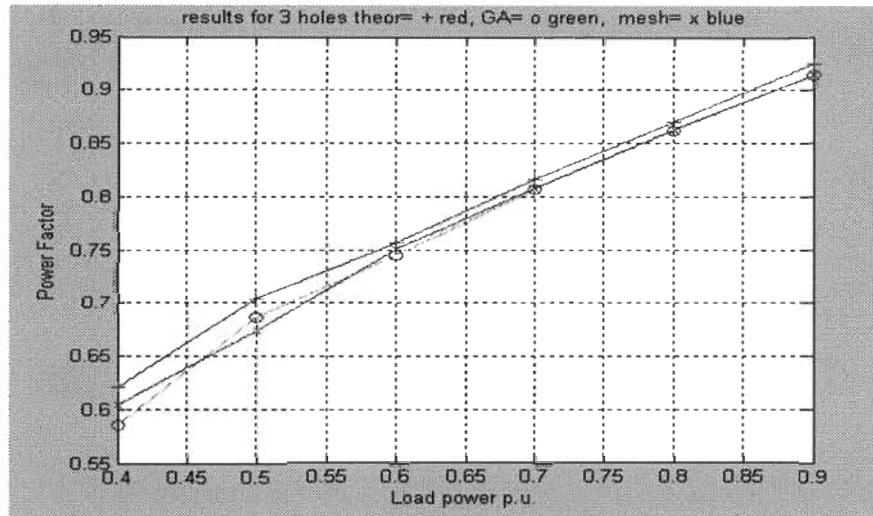


Figure 4.4 Résultats de l'AG et de l'AG hybride

b) Résultats pour un nombre de roues libres de 3, 5 et 7.

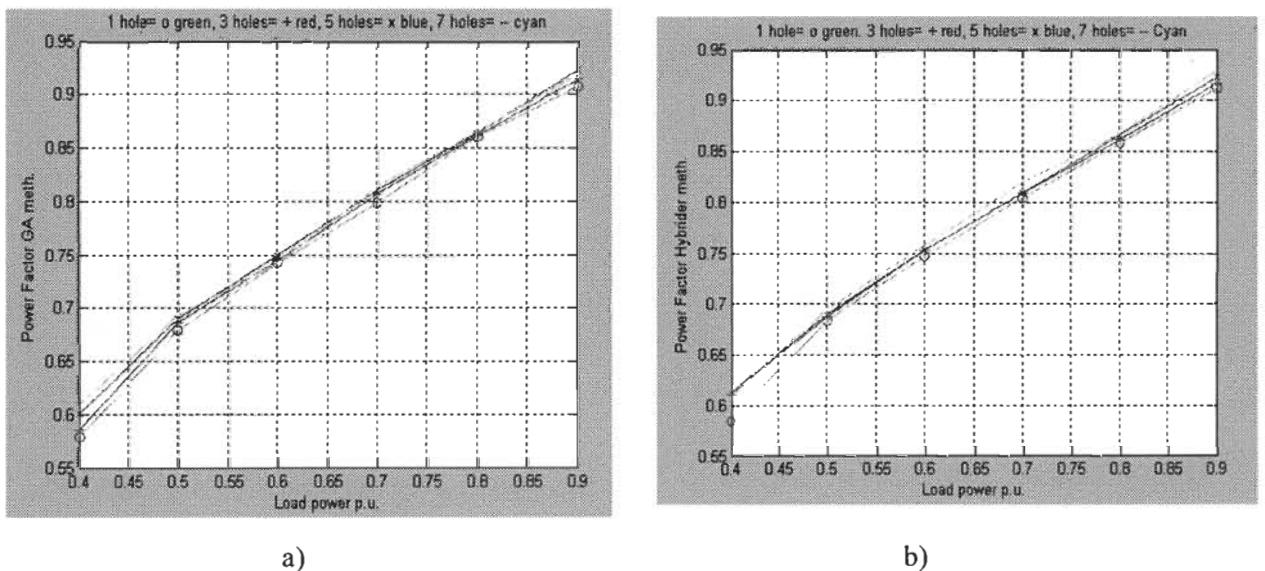


Figure 4.5 Résultats obtenus par a) la méthode génétique pour  $n = 3, 5$  et  $7$ , par b) modèle hybride

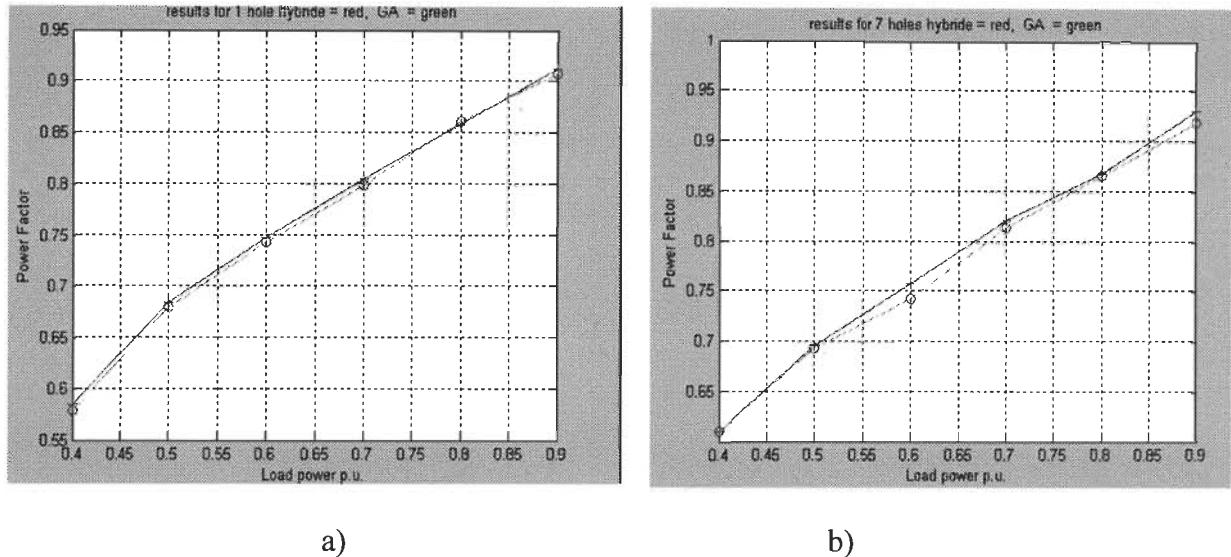


Figure 4.6 Résultats de l'AG et de l'AG hybride pour a) un trou et pour b) sept trous

#### 4.8 Conclusion

L'algorithme génétique tel que nous pouvons le trouver dans les modèles didactiques n'est pas des plus performants. En effet, aussi bien la population initiale que les opérateurs de croisement et de mutation sont faits de manière simpliste.

Dans ce chapitre, nous avons montré que la distribution de la population initiale dans l'espace décisionnel est primordiale. Une fois que la population est distribuée de manière à englober le maximum d'espace tout réduisant le risque de trouver des individus trop proches qu'on peut fructifier le croisement et la mutation qui doivent aussi respecter la règle de la distance d'encombrement. Cette règle empêche le regroupement des individus et empêche donc qu'il y ait tassemement vers le minimum local.

Nous avons appliqué l'algorithme génétique ainsi modifié aux modèles mathématiques représentant le facteur de puissance. Les chapitres suivants décrivent les détails de ces nouveaux modèles.

# Chapitre 5 - Calcul du facteur de puissance en mode monophasé

Ce chapitre et le chapitre 6 représentent le fond du travail et la plus grande contribution.

Nous utilisons les développements aussi rigoureux que possible permettant d'aboutir à une expression du facteur de puissance proche d'un polynôme. C'est une fois que ce travail fait que l'algorithme génétique ou tout autre algorithme peut jouer amplement son rôle.

## 5.1 Schémas de principe, notations de base et hypothèses de développement

### 5.1.1 Schéma de principe d'un onduleur

On considère une tension d'alimentation continue, ou alternative mais redressée par un pont à diodes.

On considère la fréquence des interrupteurs égale à la fréquence de résonnance de la charge (R-L-C). La charge est alimentée par un onduleur qui est constitué d'un dispositif formé de quatre interrupteurs (Transistors de hautes fréquences).

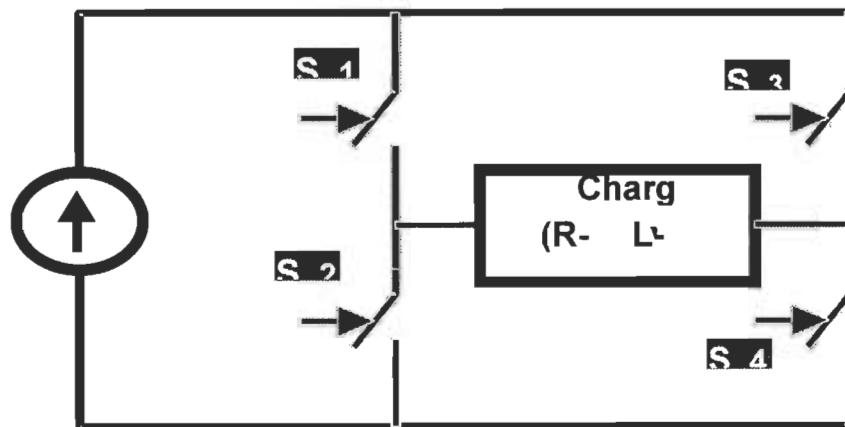


Figure 5. 1 Schéma de principe d'un onduleur

Il y a trois modes de fonctionnement d'un onduleur. La figure suivante montre les trois types de fonctionnement.

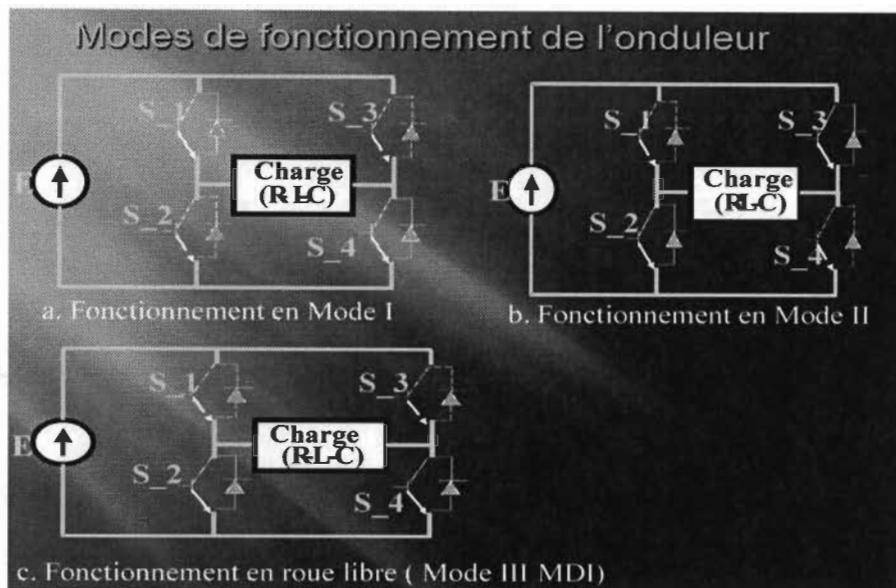


Figure 5.2 Modes de fonctionnement d'un onduleur

Lorsque S<sub>1</sub> et S<sub>4</sub> sont fermés (ligne pleine) et les deux autres sont ouverts (ligne coupée) alors la charge est soumise à la tension d'alimentation E. On obtient le mode I.

Lorsque S<sub>2</sub> et S<sub>3</sub> sont fermés (ligne pleine) et les deux autres sont ouverts (ligne coupée) alors la charge est soumise à l'opposé de la tension d'alimentation. On obtient le mode II.

Lorsque S<sub>1</sub> et S<sub>3</sub> sont fermés (ligne pleine) et les deux autres sont ouverts (ligne coupée) alors la charge est soumise à la tension nulle. On obtient le mode III qu'on appelle fonctionnement en roue libre.

De même lorsque S<sub>2</sub> et S<sub>4</sub> sont fermés (ligne pleine) et les deux autres sont ouverts (ligne coupée) alors la charge est soumise à la tension nulle. On obtient le mode III.

### 5.1.2 Définition de quelques paramètres

$T$ ,  $f$ , et  $\omega$  sont respectivement la période, la fréquence et la pulsation de la tension d'alimentation  $v$ .

$T_{\text{res}}$  et  $F_{\text{res}}$  sont respectivement la période et la fréquence de résonance. Dans le cas d'un onduleur à résonance, elles sont respectivement égales à la période et à la fréquence de commutation de l'onduleur.

Une période  $T/2$  de la tension  $u = |v|$  est échantillonnée avec un pas égal à  $T_{\text{res}}$ . On définit alors la variable discrète  $nT_{\text{res}}$  avec  $n$  un entier variable entre 1 et  $N=T/(2T_{\text{res}})$ .

Des cycles de roue libre se succèdent entre  $n_l T_{\text{res}}$  et  $N_s T_{\text{res}}$  formant ce qu'on peut appeler des trous de bornes  $N_{li}$  et  $N_{si}$ .

Les variables sont entières, nous sommes dans un cas d'optimisation discrète.

Nous ne représentons dans ce chapitre que l'essentiel des développements. Les détails avec de développement d'école pour quelques cas particuliers sont tous donnés en annexe II.

Les lois mathématiques et les théorèmes qui ont permis de faire les développements et les aboutissements sont eux donnés à la fin de l'annexe II.

Nous devions traiter avec des fonctions complexes forme de représentation des fonctions sinusoïdales.

L'idée de base est de remplacer toute série infinie qui découle du développement des séries de Fourier par la fonction de convergence pour rendre les expressions du facteur de puissance plus simples et plus faciles à manipuler.

## 5.2 Éléments importants de développements

- Calcul du terme :  $\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \sin(n \frac{\pi}{N} - j \frac{\pi}{N}) = S_1$

$$\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \sin(n \frac{\pi}{N} - j \frac{\pi}{N}) = \frac{-1}{2i} \left\{ \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{N} - \frac{n\pi}{N})} \right) - \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{N} - \frac{n\pi}{N})} \right) \right\} \quad (5.1)$$

$$S_1 = \frac{-1}{2i} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{-i \frac{n\pi}{N}} \right) + \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{i \frac{n\pi}{N}} \right) \quad (5.2)$$

Après développement de la série grâce à la formule d'Euler et de la formule de Moivre, on obtient :

$$S_1 = \left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^{4+2n-2n_l} \sin(-\frac{\pi n_l}{N}) - a^{2+2n-2n_l} \sin(-\frac{\pi n_l}{N} + \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (5.3)$$

- Calcul du terme :  $a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} a^{2j} u(n_s - j) = S_2$

$$a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} a^{2j} u(n_s - j) = a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} a^{2j} \sin(\frac{n_s \pi}{N} - j \frac{\pi}{N}) \quad (5.4)$$

$$S_2 = a^{2(n-n_s)} \left[ \frac{-1}{2i} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{-i \frac{n_s \pi}{N}} \right) + \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n_s-n_l-1} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{i \frac{n_s \pi}{N}} \right) \right] \quad (5.5)$$

Après développement, on obtient :

$$S_2 = a^{2(n-n_s)} \left\{ \frac{-\sin(n_s \frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_s-2n_l} \sin(\frac{n_l \pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_s \pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_s-2n_l} \sin(n_l \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (5.6)$$

- **Expression de la tension aux bornes de la capacité et du courant de charge sans roue libre**

$$v_c = -(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = -(1+a^2) \left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \cong -(1+a^2) \left\{ \frac{\sin(n \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right\} \quad (5.7)$$

$$i_{ch}(n-0.25) = -\sqrt{\frac{C}{L}} (u(n) + v_c(n)) \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} i_{red,s}(n) &= \frac{2}{\pi} i_{ch}(n-0.25) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[ -1 + \left( \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \right) \right] \sin(n \frac{\pi}{N}) \\ &= A_0 \sin(n \frac{\pi}{N}), \quad A_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[ \frac{2a^2}{(1-a^2)} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

- **Expression de la tension aux bornes de la capacité en présence de roue libre**

La tension aux bornes de la capacité est donnée par l'expression :

$$v_c = -(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = -(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} (u - u_k)(n-j) \quad (5.10)$$

1) Calcul de  $-(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j)$

$$-(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = -(1+a^2) \left[ \frac{-1}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{-i \frac{n\pi}{N}} \right) + \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{i \frac{n\pi}{N}} \right) \right] \quad (5.11)$$

$$= -(1+a^2) \frac{1}{2i} \left\{ - \frac{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{N}} \right)^n}{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{N}} \right)} e^{-i \frac{n\pi}{N}} + \frac{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{N}} \right)^n}{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{N}} \right)} e^{i \frac{n\pi}{N}} \right\} \quad (5.12)$$

$$-(1+\alpha^2) \left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + \alpha^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - \alpha^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - \alpha^4 \right)} \right\} \quad (5.13)$$

2) Calcul de  $(1+\alpha^2) \sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_k''(n-j)$

Le terme  $u_k''(n-j)$  n'est non nul qu'à l'intérieur d'un trou quelconque il faut voir la variation de n-j en fonction de la gamme de variation de n.

$$u_k'' = u P_{n_{IK}-n_{SK}} \text{ Avec : } \begin{cases} P_{n_{IK}-n_{SK}}(t) = 1 & \text{si } n_{IK} T_{res} \leq t \leq n_{SK} T_{res} \\ & = 0 \text{ si non} \end{cases}$$

**1<sup>er</sup> cas**  $1 \leq n < n_{I1}$

Quand j varie dans l'intervalle  $[0, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n]$ .  $(n-j)$  demeure alors inférieure à  $n_{I1}$ .

D'où :

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_1''(n-j) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_2''(n-j) + \dots + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_q''(n-j) = 0 \quad (5.14)$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{I1} \leq n < n_{s1}$

L'intervalle de j,  $[0, n-1]$  est partagé en trois intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{I1}] \cup [n-n_{I1}+1, n_{s1}] \cup [n_{s1}+1, n-1].$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_2''(n-j) = \dots = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_q''(n-j) = 0 \text{ quelque soit l'intervalle, car } n-j \text{ est inférieur à la position de la borne du trou.}$$

Donc :

$$\sum_{l=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_l''(n-j) \quad (5.15)$$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{II}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{II}, n]$ . D'où  $u_l''(n-j) = u(n-j)$ .

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{II}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{II}-1]$ . D'où  $u_l''(n-j) = 0$  et  $u_k''(n-j) = 0$  ailleurs.

Ainsi :

$$\sum_{l=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_l''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{II}} a^{2j} u(n-j), \quad (5.16)$$

D'après l'expression (I.5) (voir annexe I),

$$\sum_{j=0}^{n-n_{II}} a^{2j} u(n-j) = \left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^{4+2n-2n_{II}} \sin(-\frac{\pi n_{II}}{N}) - a^{2+2n-2n_{II}} \sin(-\frac{\pi n_{II}}{N} + \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (5.17)$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1} < n < n_{s2}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_2''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0 \quad (5.18)$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en trois intervalles (attention  $n-n_{s1}$  est plus petit que  $n-n_{II}$ ) :  $[0, n-1] = [0, n-n_{s1}-1] \cup [n-n_{s1}, n-n_{II}] \cup [n-n_{II}+1, n-1]$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{s1}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}+1, n]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}, n_{s1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{l1}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) \quad (5.19)$$

Si on fait le changement de variable  $l = j-n+n_{s1}$ .

$$\sum_{j=n-n_s}^{n-n_l} a^{2j} u(n-j) = \sum_{l=0}^{n_s-n_l} a^{2(j+n-n_{s1})} u(n_s-l) = a^{2(n-n_{s1})} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} a^{2j} u(n_s-j) \quad (5.20)$$

(Après changement de la variable muette  $l$  par  $j$ ). Et d'après l'expression (IV.12),

$$a^{2(n-n_{s1})} \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) = a^{2(n-n_{s1})} \left\{ \frac{-\sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - a^2 \sin(\frac{n_{l1}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s1}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (5.21)$$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}+1, 1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Et ainsi de suite.

**Les expressions de  $v_c$  (au facteur multiplicateur  $\hat{V}$ ) près deviennent :**

**1<sup>e</sup> cas**  $1 \leq n < n_{l1}$

$$v_c(n) = -(1 + a^2) \left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (5.22)$$

à un terme près (qu'on peut négliger) égal à :

$$v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \begin{cases} \sin(n \frac{\pi}{N}) \\ \frac{\sin(n \frac{\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} \end{cases} \quad (5.23)$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{I1} \leq n < n_{s1}$

$$V_c = -(1 + \alpha^2) \begin{cases} -\alpha^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N}) + \alpha^{4+2n-2n_{I1}} \sin(-\frac{\pi n_{I1}}{N}) - \alpha^{2+2n-2n_{I1}} \sin(-\frac{\pi n_{I1}}{N} + \frac{\pi}{N}) \\ \left( -1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - \alpha^4 \right) \end{cases} \quad (5.24)$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1} < n < n_{I2}$

$$v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \begin{cases} \sin(n \frac{\pi}{N}) \\ \frac{\sin(n \frac{\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} + \\ \left[ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - \alpha^{2(n-n_{I1}+1)} \sin(\frac{n_{I1}\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} \right] \end{cases} \quad (5.25)$$

**4<sup>e</sup> cas**  $n_{I2} < n < n_{s2}$

$v_c$  est sensiblement égal

$$\text{à } v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \begin{cases} \sin(n \frac{\pi}{N}) \\ \frac{\sin(n \frac{\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} + \\ \left[ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - \alpha^{2(n-n_{I1}+1)} \sin(\frac{n_{I1}\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} \right] \end{cases} \quad (5.26)$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{s2} < n < n_{I3}$

$$v_c(n) = -(1 + a^2) \left[ + a^{2(n-n_s)} \left[ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{-\sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s1}-n_{j1}} \sin(\frac{n_{j1}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s1}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s1}-n_{j1}} \sin(n_{j1} \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right] \right]$$

$$\left. + a^{2(n-n_s)} \left[ \frac{-\sin(n_{s2} \frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s2}-n_{j2}} \sin(\frac{n_{j2}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s2}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s2}-n_{j2}} \sin(n_{j2} \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right] \right]. \quad (5.27),$$

et ainsi de suite.

### • Calcul des courants

La charge RLC est supposée très amortie, le courant  $i_{ch}$  varie comme un sinus durant les demi-périodes Tres (Figure 5.3). Ses valeurs crêtes sont déduites du plan de phase (figure 5.4).

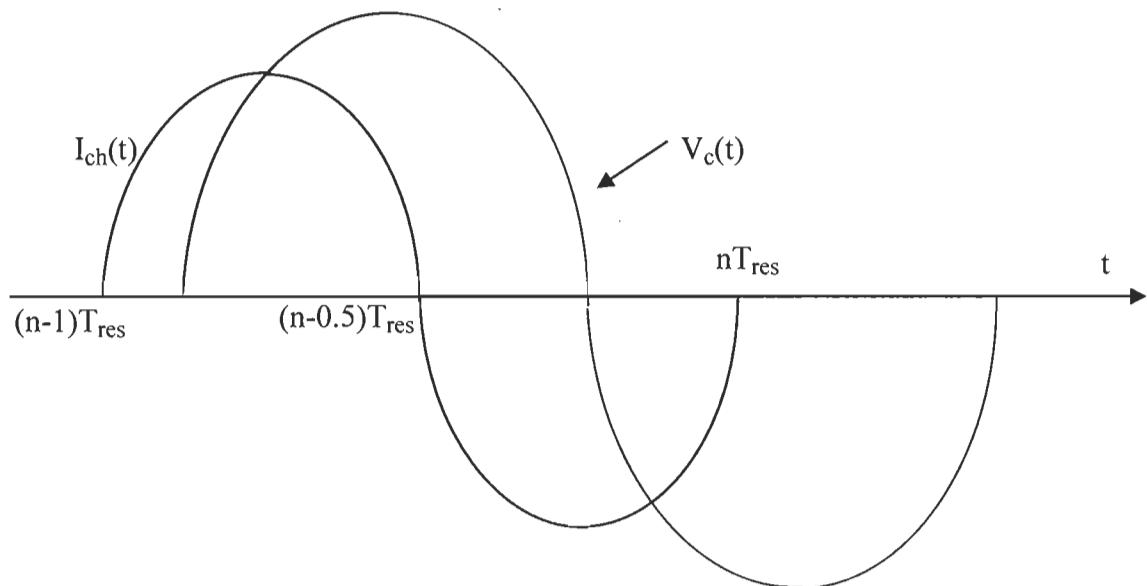


Figure 5.3 Représentation des courants et des tensions de la charge

Le diagramme des phases et le tracé des courbes courant et la tension aux bornes de la capacité sont donnés par les figures 2.

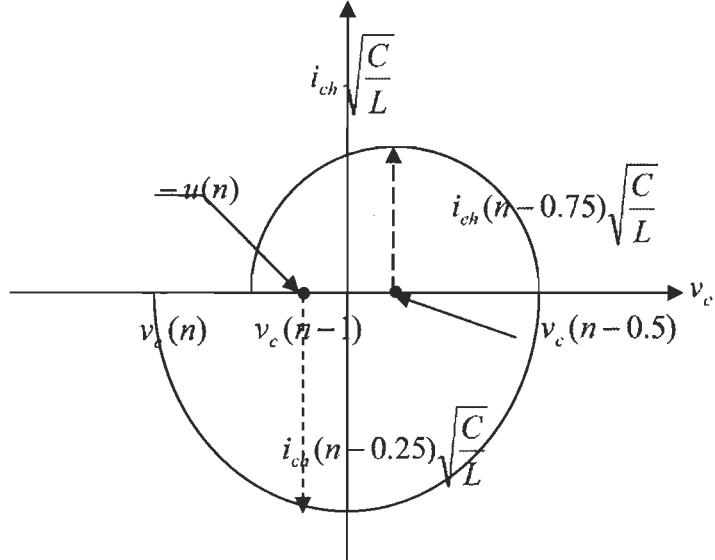


Figure 5.4 Diagramme des phases

À partir de cette figure, on peut déterminer :

$$i_{ch}(n-0.75) = \sqrt{\frac{C}{L}}(u(n) - v_c(n)) \quad (5.28)$$

$$i_{ch}(n-0.25) = -\sqrt{\frac{C}{L}}(u(n) + v_c(n)) \quad (5.29)$$

Le courant est décomposé en deux parties ( $i_{ond,e}$ )<sub>BF</sub> et ( $i_{ond,e}$ )<sub>HF</sub>.

Lorsqu'on n'a pas de trous, la composante basse fréquence (ond,e) BF est définie par :

Pour  $(n-1)T_{res} \leq t \leq (n-0.5)T_{res}$  :

$$(i_{ond,e})_{BF} = \frac{2}{T_{res}} \int_0^{T_{res}/2} i_{ch}(n-0.75) \sin(2\pi t/T_{res}) dt = \frac{2}{\pi} i_{ch}(n-0.75) \quad (5.30)$$

Pour  $(n-0.5)T_{res} \leq t \leq nT_{res}$  :

$$(i_{ond,e})_{BF} = -\frac{2}{T_{res}} \int_{T_{res}/2}^{T_{res}} i_{ch}(n-0.25) \sin(2\pi t/T_{Res}) dt = \frac{2}{\pi} i_{ch}(n-0.25) \quad (5.31)$$

Le courant à l'entrée de l'onduleur est une forme redressée du courant de charge.

D'où :

À l'extérieur du trou :

$$i_{ond,e}(t) = |i_{ch}(t)|. \quad (5.32)$$

Il est nul à l'intérieur du trou.

Le courant de l'entrée de l'onduleur est sensiblement égal à la composante basse fréquence du courant de l'entrée de l'onduleur et est donné par l'expression :

En dehors du trou,

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} i_{ch}(n-0.25), \text{ 0 si non.} \quad (5.33)$$

- **Calcul du courant en sortie du redresseur en fonction de la variable discrète n**

Pour un nombre de trous q, nous obtenons d'après les détails de l'annexe I :

$$n_{lq} \leq n < n_{sq}$$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (5.34)$$

...

$$n_{sq} \leq n < N$$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{n\pi}{N})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^q \left\{ \frac{a^{2(n-n_{ik})} \cos(\frac{n_{ik}\pi}{N}) - a^{2(n-n_{ik}+1)} \sin(\frac{n_{ik}\pi}{N})}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (5.35)$$

- Expressions des courants en fonction de la variable temps t

**1er cas**  $0 \leq t < n_{l1} T_{res}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) - (1+a^2) \left\{ \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{(1-a^2)} \right\} \right] = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) \left[ \frac{-2a^2}{(1-a^2)} \right] \quad (5.36)$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{l1} T_{res} \leq t < n_{s1} T_{res}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (5.37)$$

Ainsi de suite, pour un nombre de trous q, nous obtenons :

$$n_{lq} \leq n < n_{sq}$$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (5.38)$$

$$n_{sq} \leq n < N$$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^q \left\{ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{sk})} \sin\left(\frac{n_{sk}\pi}{N}\right) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{lk}+1)} \sin\left(\frac{n_{lk}\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (5.39)$$

Le coefficient  $\frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \sum_{k=1}^q a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{sk})} \sin\left(\frac{n_{sk}\pi}{N}\right) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{lk}+1)} \sin\left(\frac{n_{lk}\pi}{N}\right)$  se confond à :

$\frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} a^{2(n_{l(k+1)}-n_{sk})} \sin\left(\frac{n_{sq}\pi}{N}\right)$  qui est très négligeable. Nous le réintroduirons plus tard pour

plus de précision.

### 5.3 Développement en série de Fourier pour le calcul spectral

Cette partie nous permet de développer les équations des séries de Fourier en fonction des termes de convergence (fonction de convergence), ainsi les termes  $\sum_{m \text{ impair}} a_m^2$  et  $\sum_{m \text{ impair}} b_m^2$  seront écrits en fonction d'un seul terme (fonction de convergence). Cela va permettre de rendre compact le facteur de puissance, et ce, pour un trou. Pour 2 ou 3 trous, nous allons l'étudier en détail. Une fois le développement fait pour 1, 3 ou 5 trous la généralisation suivra.

Tous les détails et les autres développements sont donnés en annexe I.

Nous donnons quelques développements seulement dans cette partie.

Vu la division par  $m-1$ , nous donnons d'abord la partie harmonique une ( $m=1$ ), puis la partie restante.

$H_i$  sont les composantes harmoniques de rang  $i$ ,  $S_a$  et  $S_b$  sont les carrés des sommes des coefficients  $a_i$  et  $b_i$  respectivement.

- **Calcul de  $H_1$  (1 trou)**

$$\begin{aligned} H_{1,m} &= E_1 \int_0^{n_{11}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) dt = E_1 \int_0^{n_{11}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t) - \cos((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &= E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{11}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{11}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Pour  $m=1$ ,

$$H_{1,1} = E_1 \int_0^{n_s T_{res}} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_0^{n_s T_{res}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{n_s T_{res}} \quad (5.41)$$

$$\text{on a donc } H_{1,1} = E_1 \left( \frac{n_{11}T_{res}}{2} - \frac{\sin(2\omega n_{11}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (5.42)$$

On sait d'après les formes des ondes que :

$$H_{i,2} = H_{i,4} = H_{i,6} = \dots = 0 \quad (5.43)$$

- Calcul de  $H_3$  (3 trous)**

$$H_3 = H_{3,1} + H_{3,2} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} H_{3,m} &= E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t) - \cos((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{l2}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s1}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{l2}T_{res})}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Pour  $m=1$  :

$$H_{3,1} = E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \quad (5.46)$$

$$\text{Pour } m = 1, \quad H_{3,1} = E_1 \left( -\frac{n_{s1}T_{res}}{2} + \frac{n_{l2}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{s1}T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{l2}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (5.47)$$

Cela nous donne le coefficient de Fourier suivant :

$$a_{1,3} = -E_1 \left( \frac{n_{s1}T_{res}}{2} - \frac{n_{l2}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{l2}T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{s1}T_{res})}{4\omega} - \frac{n_{l1}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{l1}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (5.48)$$

- Calcul des coefficients harmoniques pour  $m$  différent de 1**

Pour  $n=3$ , nous obtenons alors la somme harmonique suivante.

Nous donnons l'expression finale du facteur de puissance pour  $n=3$ , puis une généralisation à un nombre de trous quelconque.

Après développements successifs et réduction du facteur harmonique, nous obtenons (voir Annexe I).

$$\sqrt{S_a} = \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left( E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{l1}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{l1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) + E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{l2}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s1}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{l2}T_{res})}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) + E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{l3}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s2}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{l3}T_{res})}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s2}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) + E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/2)}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s3}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)T/2)}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s3}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \right) \quad (5.49)$$

D'autre part, et de même manière que pour le calcul de  $S_a$ , nous avons :

$$\sqrt{S_b} = \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left( -E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l1}T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) - E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l2}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s1}T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l2}T_{res})}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) - E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l3}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s2}T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l3}T_{res})}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s2}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) - E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)T/2)}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s3}T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)T/2)}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s3}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \right) \quad (5.50)$$

### • Calcul de H pour q quelconque

Pour  $m=1$ , et pour un nombre de trous q quelconque, nous obtenons :

$$H_{(2q+1),1} = E_1 \int_{n_{Sq}T_{res}}^{T/2} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{Sq}T_{res}}^{T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{Sq}T_{res}}^{T/2} \quad (5.51)$$

En faisant tous les développements et en sommant toutes les parties, nous obtenons :

$$a_{1,q} = -E_1 \left( \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(-n_{lk} + n_{Sk})T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{lk}T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (5.52)$$

En admettant l'écriture  $n_{I(q+1)}T_{res} = \frac{T}{2}$  et  $n_{S(q+1)}T_{res} = 0$ . (5.53)

Sachant que  $n_{I(q+1)}T_{res} = \frac{T}{2}$ , (5.54)

les coefficients  $b_{l,q}$  sont donnés généralement, par :

$$b_{l,q} = E_l \sum_{k=1}^q \left( \frac{\cos(2\omega n_{sk} T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{I(k+1)} T_{res})}{4\omega} \right) (5.55)$$

La démonstration peut se faire par récurrence.

### • Calculs pour m différent de 1

En remplaçant les séries par leur terme de convergence et en généralisant pour un nombre de trous quelconque et avec les nouvelles variables  $n_{I,i}\omega T_{res} = \theta_{I,i}$ ,  $n_{S,i}\omega T_{res} = \theta_{S,i}$ , nous obtenons les expressions suivantes :

$$\frac{S_T}{E_l^2} = 2 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left( \begin{array}{l} \sum_{\substack{i \neq j \\ q(q+1) \\ 2}} \text{facteurs} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_{Ii} - \theta_{Ij}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Ii} - \theta_{Ij}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{Ii} + \theta_{Ij}))\cos((\theta_{Ii} - \theta_{Ij}))}{4\omega^2(m^2 - 1)} + \frac{\cos 2m\theta_{Ii}}{4\omega^2(m^2 - 1)} \right) \\ \sum_{i \neq j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2 - 1)} + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2 - 1)} \right) \\ - \sum_{\substack{i,j \\ q \\ 2}} \text{facteurs} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_{Ii} - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_{Ii} + \theta_{Sj})\cos(\theta_{Ii} - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2 - 1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Ii} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) \end{array} \right) (5.56)$$

En posant  $\theta_q = \omega T / 2$  est équivalent à  $\theta_{I(q+1)}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) \\
&+ 2 \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \begin{array}{l} \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_y))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_y))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_y))\cos((\theta_h - \theta_y))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \end{array} \right) \\
&- \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

*Étape 1 de conversion :*

$$\begin{aligned}
\frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(2k)^2} + \frac{2q+1}{(2k+2)^2} \right) \right) + DPT \\
&+ 2 \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \begin{array}{l} \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k+2)(\theta_h - \theta_y))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_y))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_y))\cos((\theta_h - \theta_y))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(2k)^2} \right) \\ + 2 \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(2k)^2} \end{array} \right) \\
&- \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} \right)
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Avec :

$$DPT = 2 \left( \begin{array}{l} \left( \sum_{i \neq j} \frac{-2\cos((\theta_h + \theta_y))\cos((\theta_h - \theta_y))}{4\omega^2} - \frac{\cos 2\theta_h}{4\omega^2} \right) \\ - \left( \sum_{i \neq j} \frac{-2\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2} - \frac{\cos 2\theta_{Si}}{4\omega^2} \right) \\ + \sum_{i,j} \left( \frac{2\cos(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2} \right) \end{array} \right) \tag{5.59}$$

....

*Étape 6 de conversion :*

En remettant le coefficient  $4\omega^2$  aux facteurs correspondants, nous obtenons le facteur harmonique suivant.

$$\begin{aligned}
& 4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
& + 2 \left[ \sum_{i \neq j}^q \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_j))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_j))}{(2k)^2} + \frac{\cos((2k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} \right. \\
& + 2 \sum_{i \neq j}^q \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2 \cos((2k+1)(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h - \theta_j))}{(2k+1)^2} + \frac{2 \cos((2k+1)(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{Si}}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{(2k+1)^2} \\
& \left. - \sum_{i,j}^q \sum_{K=1}^{\infty} \left( \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2k)^2} + \frac{2 \cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Sj}) \cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{(2k+1)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} \right) \right] \\
& - \frac{2}{4} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_h - \theta_j)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\text{Étape 7 de conversion, sachant que } \sum_1^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2), \tag{5.61}$$

Dans le cas général, remplacer x par  $\text{mod}(x, 2\pi)$ .

Nous obtenons le résultat suivant.

$$\begin{aligned}
& \sum_1^{\infty} \frac{\cos(k(2(\theta_1 + \theta_2)))}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3(\theta_1 + \theta_2 - \pi)^2 - \pi^2) = \frac{1}{4}((\theta_1 + \theta_2 - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3}), \quad x = \text{mod}(2x, 2\pi)
\end{aligned} \tag{5.62}$$

nous aurons :

$$\begin{aligned}
& 4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
& + 2 \left[ \frac{2}{16} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_j - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{2}{16} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), \quad x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right] \\
& + 2 \sum_{i \neq j}^q \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2 \cos((2k+1)(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h - \theta_j))}{(2k+1)^2} + \frac{2 \cos((2k+1)(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{Si}}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{(2k+1)^2} \\
& - \sum_{i,j}^q \sum_{K=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Sj}) \cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{(2k+1)^2} \right) \\
& - \frac{2}{4} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_h - \theta_j)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Étape 8 en sachant que :

$$(\pi - 2|x|) \frac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (5.64)$$

Il ne faut pas oublier qu' étant si  $x$  déborde de  $\pi$  ou de  $2\pi$ , il faudra le remplacer par le résultat du modulo  $\pi$  car la fonction est périodique.

$$\begin{aligned} 4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\ &+ \left[ \begin{aligned} &\frac{2}{16} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{2}{16} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ &+ 2 \left( \sum_{i \neq j}^q 2(\pi - 2|\theta_h + \theta_y|) \frac{\pi}{8} \cos(\theta_h - \theta_y) + 2(\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{8} \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right. \\ &\quad \left. + (\pi - 2\theta_{Si}) \frac{\pi}{8} + (\pi - 2\theta_h) \frac{\pi}{8}, x = \text{mod}(2x, \pi) \right) \\ &- \sum_{i,j}^q 2(\pi - 2|\theta_h + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{8} \cos(\theta_h - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \end{aligned} \right] \\ &- \frac{2}{4} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \end{aligned} \quad (5.65)$$

*Étape 9 de conversion :*

$$\begin{aligned} 4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\ &+ \left[ \begin{aligned} &\frac{1}{4} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{1}{4} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ &+ \left( \sum_{i \neq j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_y|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_y) + (\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right. \\ &\quad \left. + (2\pi - 2\theta_{Si} - 2\theta_h) \frac{\pi}{4}, x = \text{mod}(2x, \pi) \right) \\ &- \sum_{i,j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \end{aligned} \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Sachant qu'il faut multiplier par  $\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$  nous aurons donc :

$$\begin{aligned}
4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{A_0^2} &\cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{(2q+1)}{4} \left(-1 + \frac{\pi^2}{3}\right) + DPT \\
&+ \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{1}{4} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ + \left(\frac{2}{\pi}\right) \sum_{i \neq j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_y|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_y) + (\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \\ + (2\pi - 2\theta_{Si} - 2\theta_h) \frac{\pi}{4}, x = \text{mod}(2x, \pi) \\ - \sum_{i,j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \end{array} \right] \\
&- \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{i,j,z} \cos(2(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
4\omega^2(S_{a1} + S_{b1}) &= \frac{b_{1,q}^2 + \alpha_{1,q}^2}{I_0^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q \left( \cos(2\pi n_{sk}/N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/N) \right)^2 \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{Sk}}{N}) - \sin(\frac{2\pi n_{Ik}}{N})}{2\pi} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Les autres étapes de conversions sont données en annexe I.

#### 5.4 Modèle final

Le facteur de puissance en monophasé est donné par l'expression suivante. Les détails et la démonstration sont donnés en annexe I.

$$\begin{aligned}
FP = \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \geq & \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi m_{sk}/N) - \cos(2\pi m_{l(k+1)}/N)) \right]^2 + \left[ \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{N} + \frac{\sin(\frac{2\pi m_{Sk}}{N}) - \sin(\frac{2\pi m_{Ik}}{N})}{2\pi} \right) \right]^2 \\
& + \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 (2q+1) \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
& + \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left. \begin{aligned} & \left( \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right. \\ & \left. + \sum_{i \neq j}^q 2\pi(\pi - 2|\theta_h + \theta_y|) \cos(\theta_h - \theta_y) + 2\pi(\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) + \pi(2\pi - 2\theta_{Si} - 2\theta_h), x = \text{mod}(2x, \pi) \right. \\ & \left. - 2\pi \sum_{i,j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_{Sj}|) \cos(\theta_h - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right) \end{aligned} \right] \\
& - \frac{2}{4\pi^2} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Voici les remarques concernant cette formulation.

- L'expression tend à ressembler à une forme polynomiale à deux termes de cosinus près.
- L'expression est susceptible d'être interpolée
- La fonction valeur absolue et le facteur modulo sont les facteurs dérangeants, surtout le facteur valeur absolue.
- Il sera dorénavant possible avec un recalcul vers une certaine étape d'obtenir une forme plus simple avec des fonctions élémentaires simples.

## 5.5 Présentation des résultats obtenus

Nous présentons dans cette section les résultats graphiquement en augmentant à chaque fois le nombre de trous.

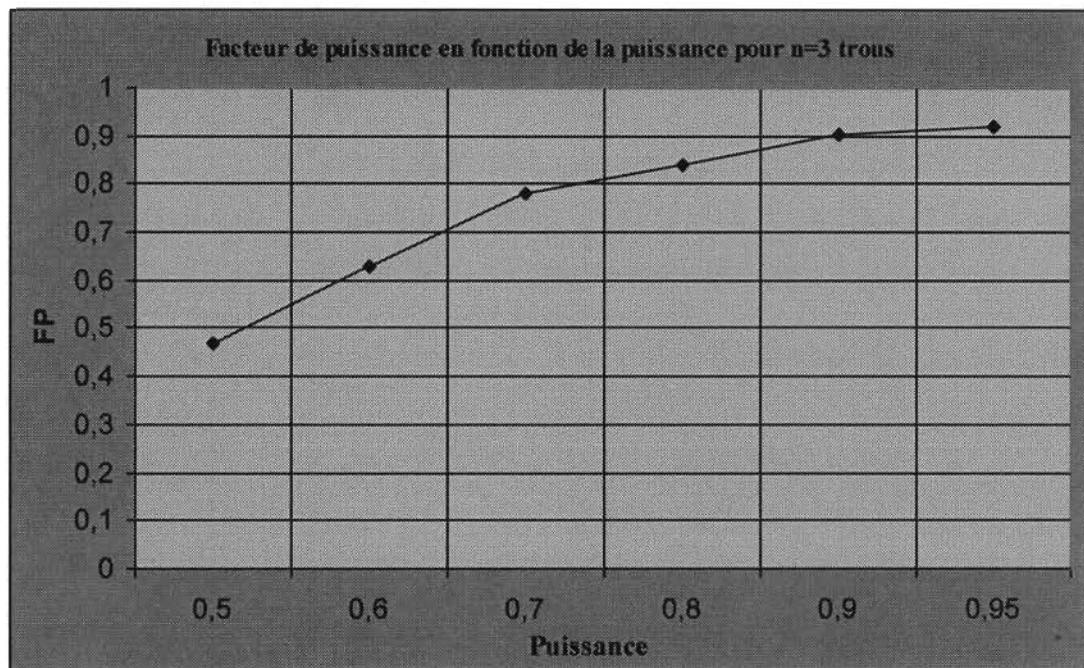
**a)** Résultats pour 3 trous (la puissance est en pu)

Figure 5.5 Nouveau modèle, résultats pour 3 trous.

D'après le tableau des valeurs et d'après le graphique, pour  $n=3$ , le temps de calcul est court et les résultats montrent un facteur de puissance faible lorsque les puissances sont basses.

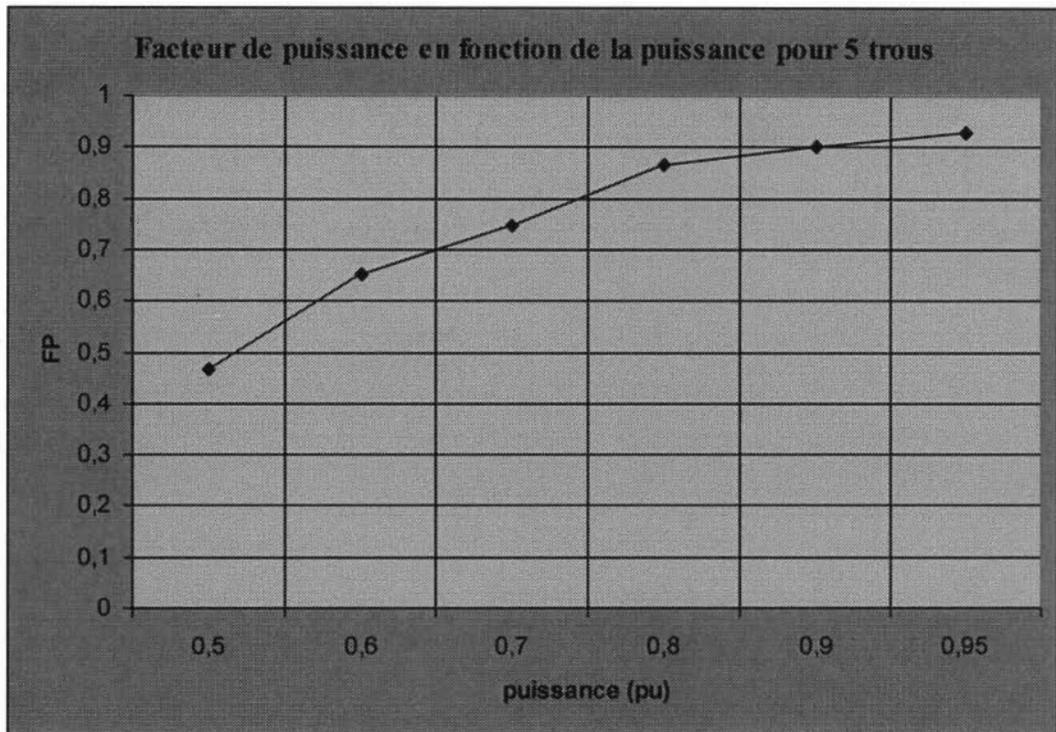
**b)** Résultats pour 5 trous

Figure 5.6 Nouveau modèle, résultats pour 5 trous

Les résultats sont proches de ceux pour trois trous avec une certaine hausse du facteur de puissance en général. Il serait judicieux d'utiliser un tel nombre de trous de façon systématique. Le temps de calcul est plus élevé que celui pour trois trous vu que nous avons plus d'inconnues.

c) Résultats pour 7 trous

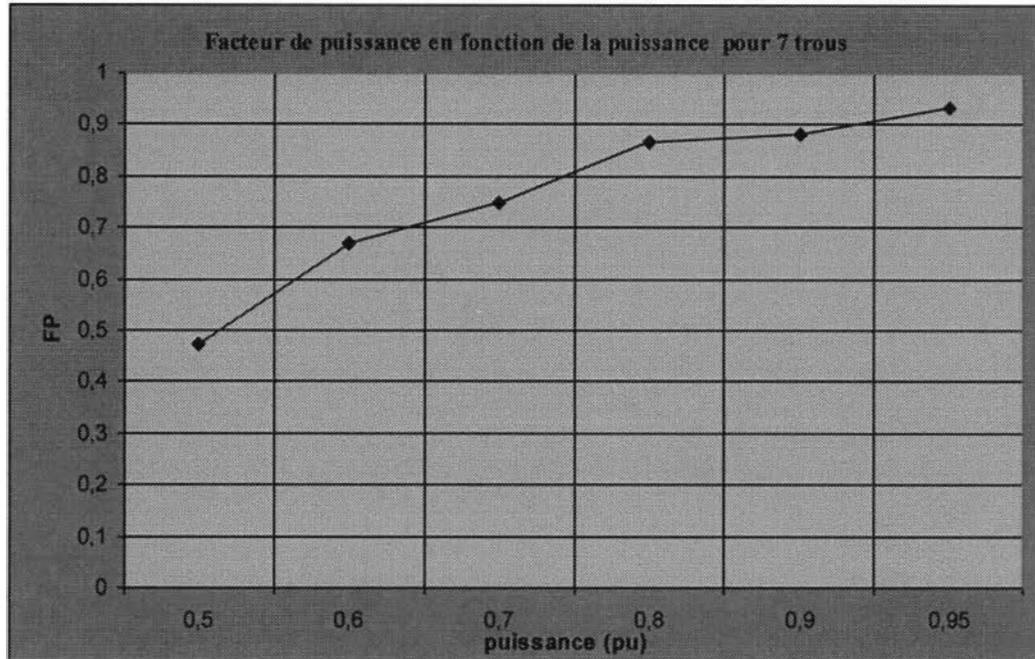


Figure 5.7 Nouveau modèle, résultats pour 7 trous

Les résultats ne diffèrent pas trop de ceux pour n=5.

d) Résultats pour 11 trous

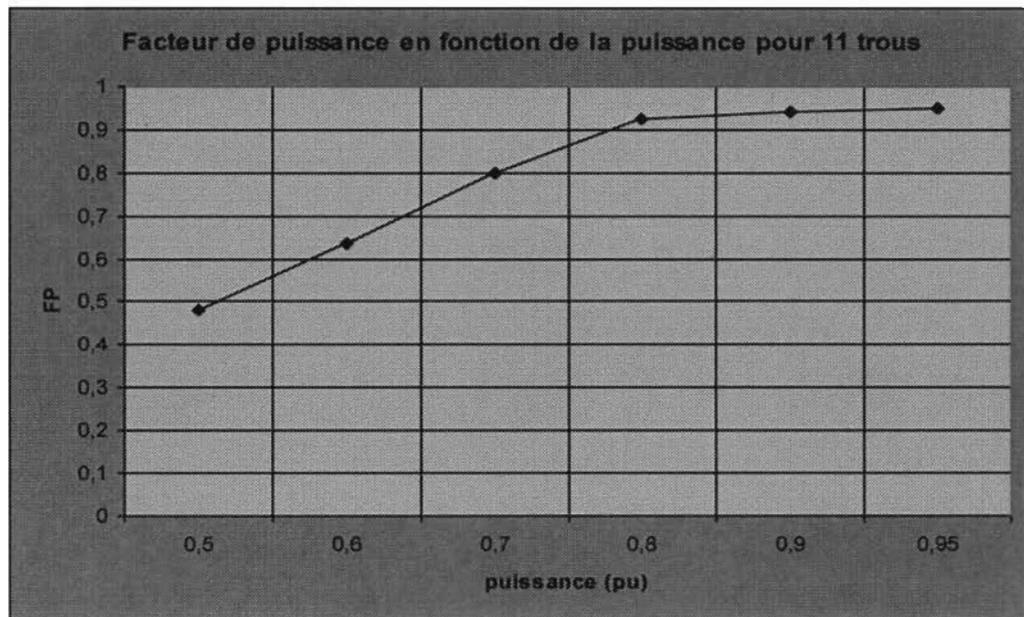


Figure 5.8 Nouveau modèle, résultats pour 11 trous

À partir de  $n=11$ , le temps de calcul et la recherche de l'optimum deviennent longs: Tant qu'on ne formule pas le facteur de puissance avec une expression quadratique pure et en utilisant une méthode d'optimisation directe, on aura de la difficulté à rencontrer le temps réel.

En effet, avec un nombre de trous égal à 11, nous avons 22 variables qui décrivent les positions possibles. Il y a donc 22 dimensions. Chaque variable peut être comprise entre 0 et 400 par exemple. C'est comme si nous avons un hypercube de 400 unités de côté ayant 22 dimensions. Il y a donc une multitude de régions où peut être niché l'optimum global. Il ne faut pas oublier une chose importante : il y a des contraintes inégalité. Le premier trou doit avoir ces deux positions plus petites que le deuxième trou et ainsi de suite. De plus, il faut rencontrer la contrainte égalité concernant la puissance. Cela augmente le temps de recherche.

Il est bien entendu que le temps de calcul dépend du processeur de la machine utilisée pour faire le traitement.

Dans ce qui suit un essai, nous ne présentons que les résultats pour 13 trous. Nous avons également effectué des essais pour  $n=17, 23$ , etc. Vu le temps de calcul élevé et le rapprochement des bornes des variables, les résultats ne sont pas exposés.

e) Résultats pour 13 trous

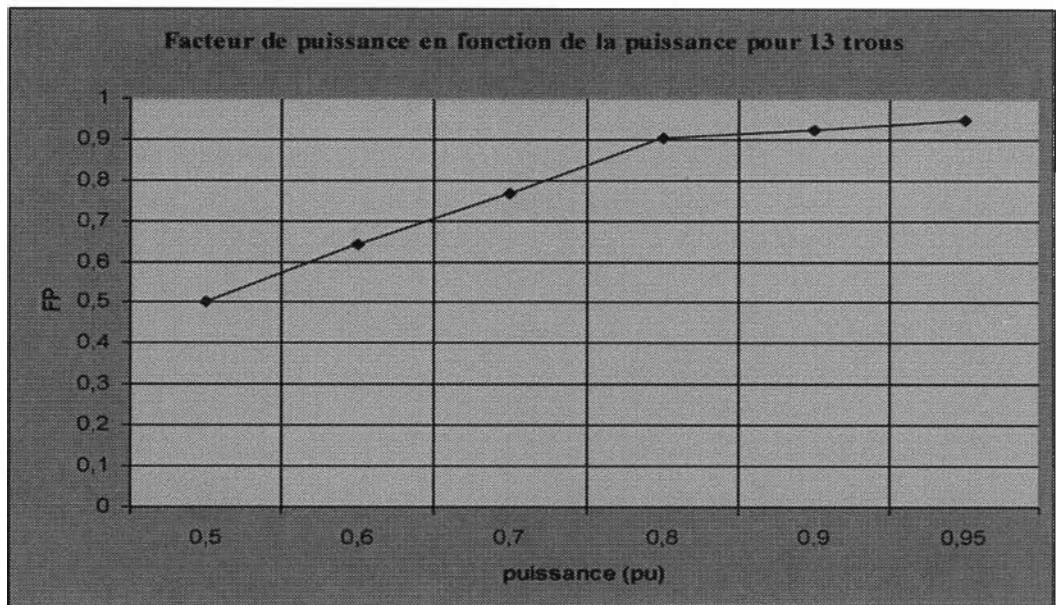


Figure 5.9 Nouveau modèle, résultats pour 13 trous

f) Récapitulatif monophasé

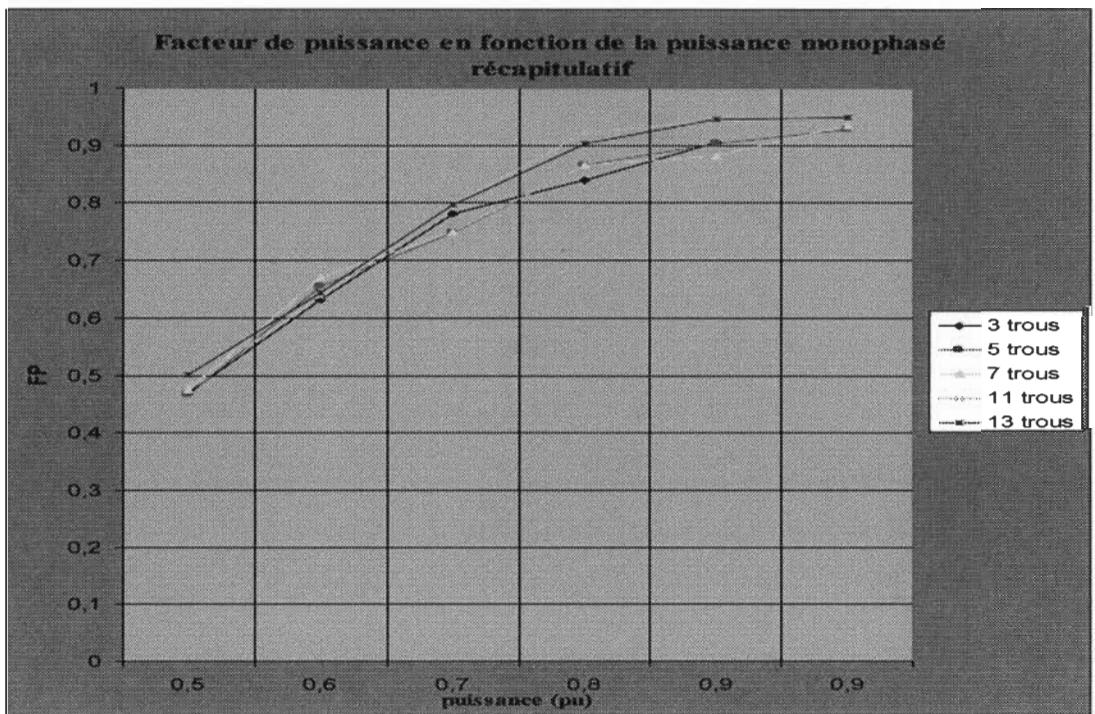


Figure 5.10 Nouveau modèle, récapitulatif résultats pour plusieurs trous

Nous remarquons que les résultats donnés par le modèle Chériti-Sendali sont légèrement meilleurs.

Les raisons sont, d'une part l'optimisation a été faite sur un temps plus long, ce qui permet d'avoir l'optimum global, d'autre part, le modèle dit classique est formulé autrement.

Les temps de calcul peuvent passer du simple au dixième du modèle classique au modèle réduit.

Par contre, pour des basses puissances, la différence peut atteindre parfois 15%.

Il ne faut pas oublier que la méthode génétique est stable, mais pas assez précise. Si nous voulons avoir de la précision, il faudra utiliser une méthode complémentaire pour affiner les résultats. Cependant, le temps de calcul en sera affecté.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une nouvelle formulation du facteur de puissance en mode monophasé. Nous avons utilisé des développements mathématiques rigoureux dans le but de diminuer les sommes et d'obtenir une expression du facteur de puissance plus simple.

L'expression du facteur de puissance conserve une sommation sur les positions des trous. Cette sommation est inévitable si nous considérons des positions inconnues au préalable.

Nous avons obtenu une expression du facteur de puissance comportant généralement des composantes quadratiques et un petit facteur en cosinus.

Il y a aussi la présence de la valeur absolue, qui pourrait facilement réduite à une fonction carrée.

L'algorithme d'optimisation est la méthode génétique modifiée pour qu'elle embrasse le maximum de minimums locaux.

Nous donnons les conclusions de ce travail par les points qui suivent.

- Les résultats démontrent que plus le nombre de trous est faible, plus le calcul optimal est facile.
- Un nombre de trous plus élevé permet d'obtenir de meilleurs résultats en général, car il y a distribution des cycles de roue libre sur la période.
- Les résultats obtenus avec le nouveau modèle sont proches de ceux obtenus par Sicard-Chériti-Sandali
- La méthode génétique a de la difficulté à trouver de très bons résultats pour un nombre de trous élevé. Cela est normal, plus on augmente le nombre de variables et plus les individus risquent d'être trop éparpillés ce qui diminue les chances de trouver l'optimum global. Les individus de la population de l'algorithme tombent souvent dans les puits locaux. Pour pallier cela, nous avons tenté plusieurs fois d'augmenter le nombre d'individus et d'agrandir l'espace entre les individus, mais la conséquence est l'augmentation du temps de calcul.
- Le modèle du mode monophasé peut être amélioré à partir de maintenant en optant pour une méthode d'interpolation pour des résultats plus rapides.  
En effet, l'expression finale du facteur de puissance comporte plusieurs facteurs représentés par des fonctions polynomiales du second degré. Il y a aussi la présence de facteurs en cosinus. Ces facteurs peuvent être assimilés à une fonction polynomiale de second degré ou du quatrième degré grâce aux développements limités. Il est bien évident qu'une fonction polynomiale de second degré est bien plus prompte pour un calcul optimal quasi direct.

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser davantage de mathématiques et nous verrons que le modèle est encore meilleur.

## **Chapitre 6 - Calcul du facteur de puissance en mode triphasé**

Il s'agit dans ce chapitre du développement du facteur de puissance et de l'expression de la puissance dans le cas d'un convertisseur contenant un redresseur triphasé. Un tel redresseur nous permet d'éliminer les harmoniques d'ordre 3.

Nous allons d'abord donner les éléments mathématiques qui nous ont aidés à bâtir notre modèle du convertisseur MDI avec ce redresseur triphasé. Par la suite, nous donnerons des explications pour l'élaboration du facteur de puissance et des développements harmoniques qui s'y rattachent.

Les hypothèses de base sont les mêmes que pour le développement du facteur de puissance en mode monophasé. Cependant, le travail mathématique dans ce cas du triphasé est beaucoup plus pointu et laborieux. Il a exigé des connaissances mathématiques plus larges et plus profondes.

Que ce soit dans ce chapitre ou dans l'annexe II correspondante, il y a parfois certains passages ou certaines transformations mathématiques que nous ne présentons pas pour diminuer le volume des équations.

## 6.1 Schéma de base et développements mathématiques

### 6.1.1 Schéma de montage et formes d'ondes

La figure 6.1 montre le schéma fonctionnel d'un convertisseur ca-cc-ca. Nous allons présenter quelques détails du schéma dans la partie simulation dans *Simulink*. L'inductance de lissage peut être utilisée ou pas.

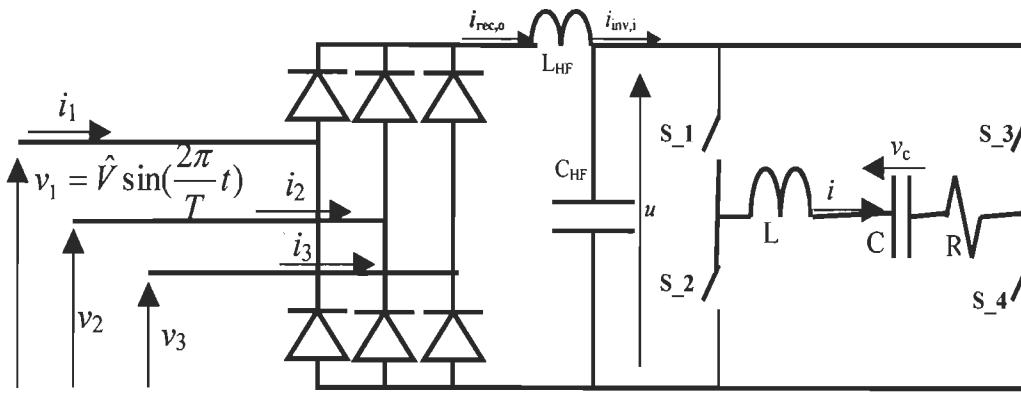


Figure 6.1 Schéma fonctionnel du convertisseur

### 6.1.2 Développements mathématiques

Avant de formuler le facteur de puissance par son expression simplifiée, il faut commencer par faire certains développements mathématiques.

Nous allons utiliser la formulation complexe du cosinus et du sinus puis utiliser la formule d'Euler et l'expression exponentielle qui va nous faire aboutir à des séries de fonctions convergentes. Il y a plusieurs termes qui interviennent dans l'expression développée et détaillée du facteur de puissance. Nous présentons dans cette section le maximum de détails possibles. D'autres détails sont donnés en annexe.

La formule d'Euler est donnée par :  $\cos x + \sin x = e^{ix}$ , ainsi, si nous cherchons la fonction cosinus, il suffit de prendre la partie réelle de  $e^{ix}$ . La partie imaginaire correspond au sinus.

- Calcul du terme :  $\sum_{j=0}^{n+N/2-1} a^{2j} u(n-j)$

$$\sum_{j=0}^{n+\frac{N}{2}-1} a^{2j} \cos\left(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n+\frac{N}{2}-1} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) - \sum_{j=0}^{n_s-n_l} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) \right\} \quad (6.1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+\frac{N}{2}-1} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i \frac{n\pi}{3N}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i \frac{n\pi}{3N}} \right) \quad (6.2)$$

$$\left\{ \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{3N}\right) - a^{2n+N} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - a^2 \cos\left(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}\right) + a^{2n+N+2} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3N}\right)}{\left(1 - 2a^2 \cos\left(\frac{\pi}{3N}\right) + a^4\right)} \right\} \quad (6.3)$$

Expression facile à simplifier vu que le terme  $\frac{\pi}{3N}$  est négligeable et le  $\cos\left(\frac{\pi}{3N}\right)$  tend vers un, pour N très élevé.

- Calcul du terme :  $\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \cos\left(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}\right)$

$$\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \cos\left(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) - \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) \right\} \quad (6.4)$$

$$\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \cos\left(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i \frac{n\pi}{3N}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i \frac{n\pi}{3N}} \right) \quad (6.5)$$

$$\cong \left\{ (1-a^2) \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2+2n-2n_I} \cos(\frac{n_I\pi}{3N})}{(1-a^2)^2} \right\} = \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2+2n-2n_I} \cos(\frac{n_I\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \quad (6.6)$$

- Calcul du terme :  $a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} a^{2j} u(n_s - j)$

$$a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} a^{2j} \cos(n_s \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}) = \frac{a^{2(n-n_s)}}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n_s\pi}{3N})} \right) - \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n_s\pi}{3N})} \right) \right\} \quad (6.7)$$

$$= a^{2(n-n_s)} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i \frac{n_s\pi}{3N}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i \frac{n_s\pi}{3N}} \right) \quad (6.8)$$

$$\cong a^{2(n-n_s)} \left\{ (1-a^2) \frac{\cos(\frac{n_s\pi}{3N}) - a^{2+2n_s-n_I} \cos(\frac{n_I\pi}{3N})}{(1-a^2)^2} \right\} = a^{2(n-n_s)} \left\{ \frac{\cos(\frac{n_s\pi}{3N}) - a^{2+2n_s-n_I} \cos(\frac{n_I\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right\}$$

(6.9)

## 6.2 Expression de la tension aux bornes de la capacité

La tension d'alimentation est donnée par  $u(t) = \hat{U} \cos(\frac{2\pi}{T}t)$ .

Remarquons qu'ici on obtient une tension en cosinus et non pas en sinus (comme dans le cas du monophasé).

$\hat{U}$  est la valeur crête de la tension construite par la différenciation des tensions simples.

La tension U est de période  $\frac{\pi}{6}$ , n est compris entre  $-N/2$  et  $N/2$  pour une période temporelle de  $[-T/12, T/12]$ ,  $N=T/(6T_{res})$ .

Entre  $n_I T_{res}$  et  $n_s T_{res}$ , on a un cycle de roue libre (la tension est nulle par définition).

Le principe de la commande à MDI impose que la période de commutation soit égale à la fréquence de résonance de la charge RLC (commutation à courant et tension nuls ou faibles).

Pendant l'intervalle de temps  $[(n-1)T_{\text{res}}, nT_{\text{res}}]$  qui correspond à une période de commutation, on a deux temps. La première moitié de la période, la charge est soumise à la tension  $u(n)$ , pendant la deuxième période à  $-u(n)$ .

- **Cas de fonctionnement sans cycles de roue libre**

Considérant un intervalle de temps  $[(n-1)T_{\text{res}}, nT_{\text{res}}]$  qui correspond à une période de commutation.

Durant la 1<sup>ère</sup> moitié de cette période, la charge est soumise à une tension  $v_{ch} = u(n) = \hat{U} \cos(\frac{\pi n}{3N})$  avec comme condition initiale  $v_c(n-1)$ . À la fin de cette 1<sup>ère</sup> moitié de période, elle devient :

$$v_c(n-0.5) = (1+\alpha)u(n) - \alpha v_c(n-1). \quad (6.10)$$

Durant la 2<sup>e</sup> moitié de la période, la charge est soumise à une tension  $v_{ch} = -u(n) = -\hat{U} \cos(\frac{\pi n}{3N})$  avec comme condition initiale  $v_c(n-0.5)$ . À la fin de cette 2<sup>e</sup> moitié de période, elle devient :

$$v_c(n) = -(1+\alpha)u(n) - \alpha v_c(n-0.5) \quad (6.11)$$

En combinant les deux équations ci-dessus, nous obtenons :

$$v_c(n) = \alpha^2 u(n) - \alpha v_c(n-0.5) \quad (6.12)$$

Toutes les équations doivent être multipliées par  $\hat{U}$  que nous omettons et remettons à la fin des calculs.

En fonction de la tension à l'origine  $v_c(-N/2)$ , nous aurons :

$$v_c(n) = \alpha^{2n+N} v_c(-N/2) - (1+\alpha)^2 \sum_{j=0}^{n+N/2-1} \alpha^{2j} u(n-j) \quad (6.13)$$

$$v_c(n) = a^{2n+N} v_c(-N/2) - (1+a^2) \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{3N} + \frac{\pi}{6}) - a^{2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{6})}{\left(1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4\right)} \right\} \quad (6.14)$$

$$v_c(n) \cong a^{2n+N} v_c(-N/2) - (1+a^2) \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{6})}{(1-a^2)} \right\} \quad (6.15)$$

Comme  $v_c$  est de période T/6 (onduleur triphasé), elle prend les mêmes valeurs pour  $-T/12$  et  $T/12$  ce qui nous donne :

$$v_c\left(\frac{-N}{2}\right) = v_c\left(\frac{N}{2}\right) \quad (6.16)$$

En posant  $n = N/2$  et si nous tenons en compte que  $N$  est très grand et que le coefficient  $a$  est inférieur à 1, l'équation précédente se réduit à :

$$v_c(-N/2) = v_c(N/2) = -(1+a^2) \left[ \frac{\cos(\frac{\pi}{6})}{(1-a^2)} \right] \quad (6.17)$$

Donc :

$$v_c(n) = -a^{2n+N} (1+a^2) \left[ \frac{\cos(\frac{\pi}{6})}{(1-a^2)} \right] - (1+a^2) \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \cong -(1+a^2) \left[ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \quad (6.18)$$

- **Expression de la tension aux bornes de la capacité pour un trou et q trous**

Comme nous avons pris l'origine de la tension  $v_c(-N/2)$

$$v_c(n) = a^2 v_c(-N/2) - (1+a)^2 \sum_{j=0}^{n+N/2-1} a^{2j} u'(n-j) = a^2 v_c(-N/2) - (1+a)^2 \sum_{j=0}^{n+N/2-1} a^{2j} (u - u')(n-j) \quad (6.19)$$

Avec :

$$u(n) = \hat{U} \cos\left(\frac{n\pi}{3N}\right) \quad (6.20)$$

Et

$$u'' = u.P_{n_l - n_s}, \quad P_{n_l - n_s} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_l \leq t \leq n_s T_{res} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (6.21)$$

6.2.1 Calcul de  $\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} a^{2j} u(n-j)$

$$\sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} a^{2j} u(n-j) = \left[ \sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} \left( a^{2j} e^{ij\frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i\frac{n\pi}{3N}} \right) + \sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} \left( a^{2j} e^{-ij\frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i\frac{n\pi}{3N}} \right) \right] \quad (6.22)$$

$$= \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{3N} + \frac{\pi}{6}) - a^{2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{6})}{\left( 1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4 \right)} \right\}. \quad (6.23)$$

À est un nombre inférieur à 1, une autre forme encore plus simplifiée nous donne :

$$\sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} a^{2j} u(n-j) = \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \quad (6.24)$$

### 6.2.2 Calcul de $\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j)$

Le terme  $u''(n-j)$  n'est non nul qu'à l'intérieur du trou (il est la négation de la tension qui existe hors de trou). Il faut voir la variation de  $n-j$  en fonction de la gamme de variation de  $n$ .

$$\text{1er cas } 1 - \frac{N}{2} \leq n < n_{l1}$$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n]$ .  $(n-j)$  demeure alors inférieur à  $n_{l1}$ , d'où

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j) = 0. \quad (6.25)$$

$$\text{2e cas } n_{l1} \leq n < n_{s1}$$

L'intervalle de  $j$ ,  $[0, n-1]$  est partagé en trois intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{l1}] \cup [n-n_{l1}+1, n_{s1}] \cup [n_{s1}+1, n-1].$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_2(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_q(n-j) = 0, \text{ quelque soit l'intervalle car } n-j \text{ est inférieur à toute borne inférieure du trou.}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_k(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_1(n-j) \quad (6.26)$$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}, n]$ . D'où  $u''_1(n-j) = u(n-j)$ .

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{l1}-1]$ . D'où  $u''_1(n-j) = 0$

$$u_k''(n-j) = 0, \text{ ailleurs que pour } k = 1.$$

Ainsi :

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_1''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j). \quad (6.27)$$

D'après les premières équations du développement, nous aurons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) &= \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) + a^{4+2n-2n_{l1}} \cos(-\frac{\pi n_{l1}}{3N}) - a^{2+2n-2n_{l1}} \cos(-\frac{\pi n_{l1}}{3N} + \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \right\} \\ (6.28) \end{aligned}$$

$$\cong \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2+2n-2n_{l1}} \cos(\frac{\pi n_{l1}}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \quad (6.29)$$

Ainsi de suite de proche en proche, on peut démontrer par récurrence que :

Si  $n_{Im} < n < n_{sm}$

$$\sum_1^m \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n-n_{sk}}^{n-n_{lk}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=0}^{n-n_{lq}} a^{2j} u(n-j) \quad (6.30)$$

Si  $n_{sm} < n < n_{I(m+1)}$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=n-n_{sk}}^{n-n_{lk}} a^{2j} u(n-j) \quad (6.31)$$

Les expressions de  $v_c$  (au facteur multiplicateur  $\hat{V}$ ) prêt deviennent :

- $n_{s(q-1)} < n < n_{lq}$

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k(n-j) = \sum_{j=n-n_{s3}}^{n-n_{l3}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s2}}^{n-n_{l2}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) \quad (6.32)$$

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n} \cos(\frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} + \\ + \sum_{k=1}^q a^{2(n-n_{sk})} \left[ \frac{\cos(n_{sk} \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_{sk}-n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_{sk}-n_{lk}} \cos(n_{lk} \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \right] \end{array} \right\} \quad (6.33)$$

$$\bullet \quad n_{sq} < n < \frac{N}{2}$$

$$v_c(n) = a^2 v_c(-N/2) - \sum_{k=1}^q (1+a^2) a^{2(n-n_{sk})} \left\{ \frac{\cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - a^{2+2n_{sk}-n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N}) + a^2 \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) + a^{4+2n_{sk}-n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N})}{\left( 1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4 \right)} \right\} \quad (6.34.1)$$

$$v_c(n) \equiv -(1+a^2) \left\{ \frac{\sum_{k=1}^q \left\{ a^{2(n-n_{sq})} \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - a^{2+2n-2n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N}) \right\}}{(1-a^2)} \right\} \quad (6.34.2)$$

### 6.3 Calcul des courants

Comme pour le cas monophasé, la charge RLC est supposée très amortie, le courant  $i_{ch}$  varie comme un sinus durant les demi-périodes  $T_{res}$ , nous pouvons déduire une représentation identique à la figure 6.1. Ses valeurs crêtes seront déduites du plan de phase comme dans le cas de la figure 6.2.

Nous pouvons déterminer à l'aide des figures 6.1 et 6.2 :

$$i_{ch}(n-0.75) = \sqrt{\frac{C}{L}} (u(n) - v_c(n)) \quad (6.35.1)$$

$$i_{ch}(n-0.25) = -\sqrt{\frac{C}{L}}(u(n) + v_c(n)) \quad (6.35.2)$$

Le courant à l'entrée de l'onduleur est calculé par l'expression :

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} i_{ch}(n-0.25) \quad (6.36)$$

### 6.3.1 Expressions des grandeurs en fonction de la variable discrète $n$

Nous allons omettre par la suite le facteur courant :  $C_i = \hat{U}\sqrt{\frac{C}{L}}$  et le remettre à la fin dans l'expression finale.

**1<sup>e</sup> cas**  $1 - \frac{N}{2} \leq n < n_{I1}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\alpha^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-\alpha^2)} \right] \quad (6.37)$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{I1} \leq n < n_{s1}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (6.38)$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1} < n < n_{I2}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2\alpha^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{1-\alpha^2} + (1+\alpha^2) \left\{ \left[ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - \alpha^{2(n-n_{I1}+1)} \cos(\frac{n_{I1}\pi}{3N})}{1-\alpha^2} \right] \right\} \right] \quad (6.39)$$

**4<sup>e</sup> cas**  $n_{I2} < n < n_{s2}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (6.40)$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{s2} < n < n_{I3}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \frac{2a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left[ \left[ \frac{a^{2(n-n_{l1})} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{2(n-n_{l2})} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right] \quad (6.41)$$

**6<sup>e</sup> cas**  $n_{l3} < n < n_{s3}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (6.42)$$

**7<sup>e</sup> cas**  $n_{s3} < n < n_{l4}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \frac{2a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left[ \left[ \frac{a^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{2(n-n_{s2})} \cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{a^{2(n-n_{s3})} \cos(n_{s3} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l3}+1)} \sin(n_{l3} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right] \quad (6.43)$$

Ainsi de suite, nous avons par récurrence :

**Avant dernier cas**  $n_{lq} < n < n_{sq}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (6.44)$$

$$\text{dernier cas } n_{sq} < n < n_{lq+1} = \frac{N}{2}$$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \frac{2a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^q \left[ \frac{a^{2(n-n_{sk})} \cos(n_{sk} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{lk}+1)} \sin(n_{lk} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \quad (6.45)$$

### 6.3.2 Expressions des grandeurs électriques en fonction de la variable t

Rappel :  $t = nT_{res}$  et  $N = T/(6T_{res})$ , donc  $n = t/(T/6N) = 6N t/T$

### 6.3.2.1 Expressions des courants du redresseur

**1er cas**  $\frac{T}{12} \leq t < n_{I1} \frac{T}{6N}$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{(1-a^2)} \right] \quad (6.46)$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{I1} \frac{T}{6N} \leq t < n_{s1} \frac{T}{6N}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (6.47)$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1} \frac{T}{6N} < t < n_{I2} \frac{T}{6N}$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{1-a^2} + (1+a^2) \left\{ \frac{a^{2(\frac{t}{Tres}-n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{Tres}-n_{I1}+1)} \cos(\frac{n_{I1}\pi}{3N})}{1-a^2} \right\} \right] \quad (6.48)$$

Ainsi de suite,

- $n_{Iq} \frac{T}{6N} < t < n_{sq} \frac{T}{6N}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (6.49)$$

- $n_{sq} \frac{T}{6N} < t < T/12$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^q \left\{ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{sk})} \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{jk}+1)} \sin(\frac{n_{jk}\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (6.50)$$

### 6.3.2.2 Courant à l'entrée du redresseur sans trou

Étant donné le cas de redressement triphasé, nous avons les équations et la figure 6.2 qui suivent.

$$0 \leq t < T/12 \quad i_1(t) = 0 \quad (6.51.1)$$

$$T/12 \leq t < 3T/12 \quad i_1(t) = i_{red,s}(t-T/6) = A_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (6.51.2)$$

$$3T/12 < t \leq 5T/12 \quad i_1(t) = i_1(t-T/6) \quad (6.52.1)$$

$$5T/12 < t \leq T/12 \quad i_1(t) = 0 \quad (6.52.2)$$

$$T/2 < t \leq T \quad i_1(t) = -i_1(t-T/2) \quad (6.52.3)$$

Sachant aussi que :

$$0 \leq t \leq T \quad i_2(t) = i_1(t-T/3) \quad (6.53.1)$$

$$0 \leq t \leq T \quad i_3(t) = i_1(t-2T/3) \quad (6.53.2)$$

Et ainsi de suite.

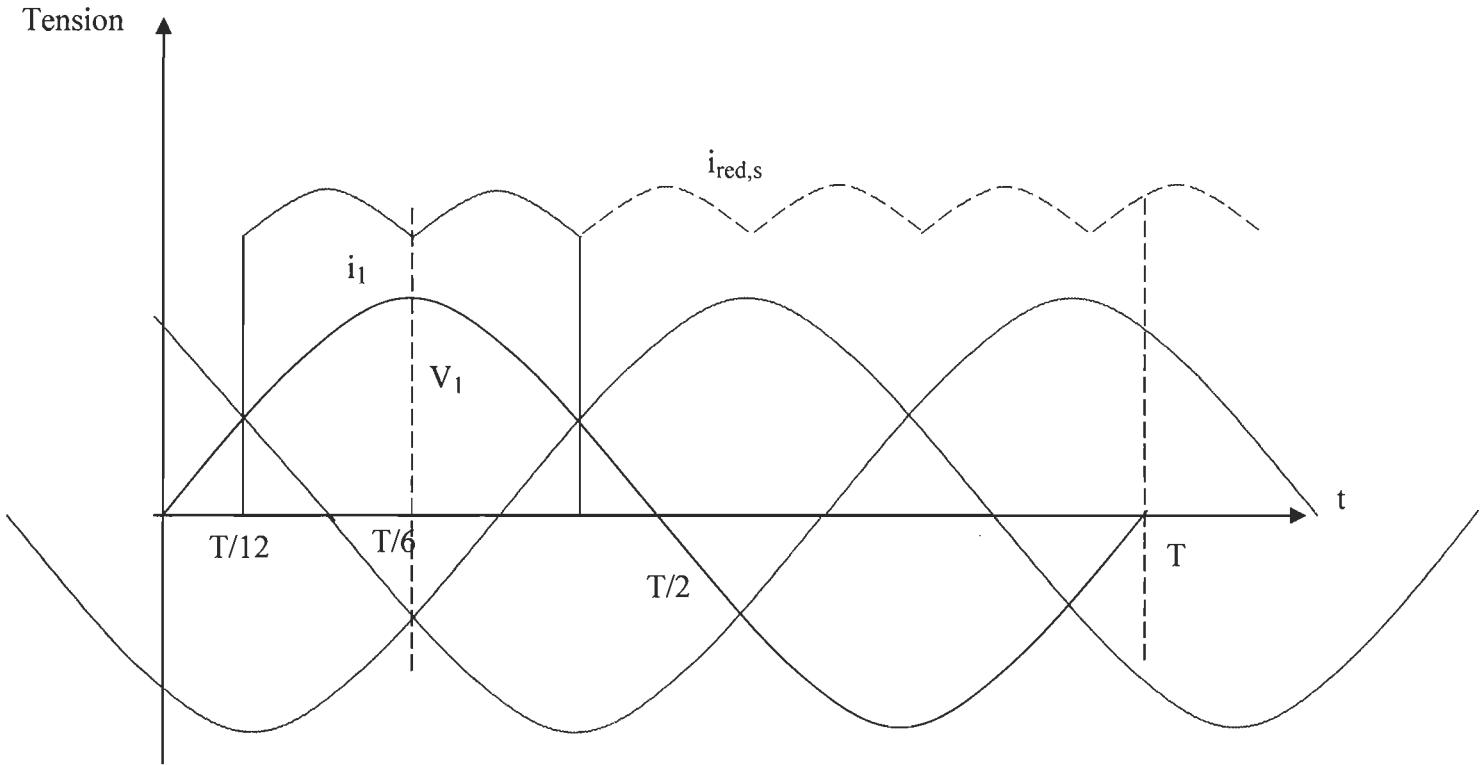


Figure 6.2 Représentation du courant redressé et du courant d'entrée de l'onduleur

### 6.3.2.3 Courants à l'entrée du redresseur pour quelques trous :

- $0 \leq t < \frac{T}{12}$ ,  $i_1 = 0$ . (6.54)

- $\frac{T}{12} \leq t < \left(1 + \frac{n_{l1}}{N}\right) \frac{T}{6}$

$$i_1(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a^2 \cos(\frac{2\pi t}{3T} - \frac{\pi}{3})}{(1 - a^2)} \right] \quad (6.55)$$

Ainsi de suite,

- $\left(1 + \frac{n_{lq}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \left(1 + \frac{n_{sq}}{N}\right) \frac{T}{6}$

$$i_1(t) = 0 \quad (6.56)$$

•  $\left(1 + \frac{n_{sq}}{N}\right)\frac{T}{6} < t < \frac{3T}{12},$

$$i_1(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2nt}{T} - \frac{\pi}{3})}{(1-a^2)} + (1+a^2)a^{\frac{2t}{T_{res}}} \left\{ \sum_{k=1}^q \left[ \frac{a^{-2n_{sk}} \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - a^2 a^{-2n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \quad (6.57)$$

$$\frac{3T}{12} \leq t \leq \frac{5T}{12} \quad i_1(t) = i_1(t - \frac{T}{6}) \quad (6.58)$$

$$\frac{5T}{12} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad i_1(t) = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{T}{2} \leq t \leq T \quad i_1(t) = -i_1(t - \frac{T}{2}) \quad (6.60)$$

Etc.

Nous remarquons qu'il y a une double symétrie pour le courant  $i_1$ , une centrale et l'autre axiale. Cela permet de simplifier le calcul des coefficients de Fourier par la suite.

À partir de maintenant, nous allons étudier directement le cas général avec q trous.

Nous ne calculons les développements de Fourier pour l'analyse spectrale que pour le courant  $i_1$ .

#### 6.4 Développement en série de Fourier

**Pourquoi le développement de Fourier :**

Le développement de Fourier est indispensable pour l'étude des fonctions périodiques. C'est lui qui a permis l'analyse harmonique et d'établir les harmoniques de rang n.

Lorsqu'un signal est parfaitement périodique, nous ne retrouvons que le fondamental c'est-à-dire l'harmonique d'ordre 1. Par contre, si le signal a subi des distorsions, il va comporter en plus de l'harmonique d'ordre 1 une série d'harmoniques d'ordres supérieurs en un nombre généralement infini.

Lorsque la fonction à analyser est impaire, nous ne retrouvons que des harmoniques de la fonction sinus, si la fonction est paire, nous ne retrouvons que les composantes cosinus. Mais si la fonction est quelconque, alors on va retrouver aussi bien les coefficients de la composante sinus que de la composante cosinus.

Parfois, seulement avec le graphique de la fonction à analyser, on peut éliminer des composantes.

Dans le cas des convertisseurs à MDI, vu les séquences de roue libre, le courant de sortie et donc celui d'entrée vont apparaître sous une forme imparfaite. Ces imperfections se traduisent par des distorsions qui elles créent des harmoniques de rang supérieurs à 1.

Nous serons donc amenés à calculer les coefficients notés par les scientifiques par  $a_i$  et  $b_i$ .

De la même manière que pour le redresseur monophasé, les termes  $\sum_{m \text{ impair}} a_m^2$  et  $\sum_{m \text{ impair}} b_m^2$  seront écrits en fonction d'un seul terme (fonction de convergence).

On procède maintenant au calcul des coefficients de Fourier pour l'analyse spectrale et harmonique des courants d'entrée. Les alternances positives ( $0 \leq t \leq T/2$ ) et négatives ( $T/2 \leq t \leq T$ ), du courant  $I_{red,e}$  sont identiques au signe prêt. En conséquence le spectre de  $I_{red,e}$  ne comporte que des harmoniques de rang impair.

$$i_{l(t)} = \sum_{m \text{ impair}} A_m \sin(m\omega t) + B_m \cos(m\omega t) \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i_l \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt = \frac{4}{T} \int_{T/12}^{3T/12} i_l \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt + \frac{4}{T} \int_{3T/12}^{5T/12} i_l(t - T/6) \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt \\ &= \frac{8}{T} \cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) \int_{T/12}^{3T/12} i_l \frac{\sin(m\omega t + m\frac{\pi}{6})}{A_0} dt = \frac{8}{T} \cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} i_{red,s}(t) \frac{\sin(m\omega t + m\frac{\pi}{2})}{A_0} dt \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

De même :

$$B_m = \frac{8}{T} \cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} i_{red,s}(t) \frac{\cos(m\omega t + m\frac{\pi}{2})}{A_0} dt \quad (6.61)$$

#### 6.4.1 Développement des séries de Fourier pour zéro trou.

- Amplitude du fondamental

Lorsque nous avons 0 trou, vu la symétrie par rapport à  $\frac{\pi}{2}$  et vu que les alternances positives et négatives sont égales en valeurs positives, les coefficients  $B_m$  sont nuls.

$$A_1 = \frac{8}{T} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} A_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt \quad (6.62.1)$$

$$A_1 = \frac{8}{T} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} A_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t) dt \quad (6.62.2)$$

$$A_1 = \frac{8}{T} A_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} \frac{\cos(4\pi \frac{t}{T}) + 1}{2} dt = \frac{8}{T} A_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \left[ \frac{\sin(4\pi \frac{t}{T})}{4\pi} + \frac{t}{2} \right]_{-T/12}^{T/12} \quad (6.62.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{T} A_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{2\sin(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{8}{T} A_0 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{2}{\pi} A_0 \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} A_0 \left[ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} + 1 \right] = A_0 C_d \end{aligned} \quad (6.62.4)$$

$$\text{Avec : } C_d = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} + 1 \right].$$

- Amplitude des harmoniques de rang quelconque

$$A_{m, m \neq 1} = \frac{8}{T} \cos(m \frac{\pi}{6}) \int_{-T/12}^{T/12} A_0 \cos(\omega t) \sin(m\omega t + \frac{m\pi}{2}) dt \quad (6.63.1)$$

$$A_{m, m \neq 1} = \cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \int_{-T/12}^{T/12} \frac{\sin((m-1)\omega t + m \frac{\pi}{2}) + \sin((m+1)\omega t + m \frac{\pi}{2})}{2} dt \quad (6.63.2)$$

$$A_{m, m \neq 1} = \cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)T/12 + m \frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(-\omega(m-1)T/12 + m \frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)T/12 + m \frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(-\omega(m+1)T/12 + m \frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \right) \quad (6.63.3)$$

$$A_{m, m \neq 1} = 2 \sin(m \frac{\pi}{2}) \cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right) \quad (6.63.4)$$

Mais, nous savons que  $m = 6k \pm 1$ , donc :

$$\begin{aligned} A_{m, m \neq 1} &= 2 \sin(3k\pi \pm 1 \frac{\pi}{2}) \cos((6k \pm 1) \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right) \\ A_{m, m \neq 1} &= 2(-1)^k \cos((6k \pm 1) \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right) \\ A_{m, m \neq 1} &= 2(-1)^k (-1)^k \cos(\frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right) \\ A_k &= 2 \cos(\frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\pi k)}{12k\omega} + \frac{\sin(\pi/3)}{4(3k+1)\omega} - \frac{\sin(\pi/3)}{4(3k-1)\omega} + \frac{\sin(\pi(6k)1/6)}{2(6k)\omega} \right) = \frac{-3E_1}{4\omega(3k+1)(3k-1)} \end{aligned} \quad (6.63.5)$$

#### 6.4.2 Développement des séries de Fourier en présence de roues libres

Nous posons :

$$\alpha = m \frac{2\pi}{T} \quad (6.64)$$

$$\beta = \frac{2 \log a}{T_{res}} \quad (6.65)$$

Nous avons alors :

$$a_m = \frac{A_m}{A_0} \quad (6.66)$$

$$a_m = \frac{8}{T} \int_0^{T/6} i_{red,e} \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt = \frac{8}{T} \int_0^{T/6} i_{red,s} \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt \quad (6.67)$$

Nous posons :

$$E_1 = a^2 \frac{8}{T} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(1-a^2)} \quad (6.68)$$

Pour q trous, nous trouvons :

$$H_{(2q+1),1} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \int_{n_{S_q} T_{res}}^{T/6} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \int_{n_{S_q} T_{res}}^{T/6} \frac{\cos(2\omega t) + t}{2} dt = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \left[ \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{t}{2} \right]_{n_{S_q} T_{res}}^{T/6} \quad (6.69)$$

$$\frac{\alpha_{1,2q+1}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1} = \left( \sum_{k=1}^{q+1} \frac{\sin(2\omega n_{I_k} T_{res}) - \sin(2\omega n_{S_k} T_{res})}{4\omega} + T_{res} \frac{n_{I_k} - n_{S_k}}{2} \right) \quad (6.70)$$

$$\text{En admettant l'écriture } n_{I_{(q+1)}} T_{res} = \frac{T}{6} \text{ et } n_{S_{(q+1)}} T_{res} = 0 \quad (6.71)$$

La démonstration peut se faire par récurrence.

Les détails de développement de l'expression suivante sont donnés en annexe II.

La somme des harmoniques produits par les coefficients  $a_i$  noté  $S_a$  pour  $m$  différent de 1 est donnée par la relation suivante.

De manière générale et pour un nombre  $q$  de trous, nous avons :

$$\sqrt{S_a} = E_1 \sum_{m=6k \pm 1}^{\infty} \cos\left(m \frac{\pi}{6}\right) \sum_{k=0}^{k=q} \left( \begin{array}{c} \cos(\omega(m-1)n_{I(k+1)}T_{res} + m \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m-1)n_{sk}T_{res} + m \frac{\pi}{2}) \\ \hline 2(m-1)\omega & 2(m-1)\omega \\ + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{I(k+1)}T_{res} + m \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m+1)n_{sk}T_{res} + m \frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \end{array} \right) \quad (6.72)$$

De la même, nous obtenons :

$$b_m = \frac{B_m}{A_0} \quad (6.73)$$

$$\text{Plus généralement, et sachant que } n_{I(q+1)}T_{res} = \frac{T}{6} \quad (6.74)$$

$$\frac{b_{1,2q+1}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)E_1} = E_1 \sum_{k=0}^q \left( \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{sk}T_{res}}^{n_{Ik}T_{res}} \right) \quad (6.75)$$

$$\frac{b_{1,2q+1}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)E_1} = \sum_{k=0}^q \left( \frac{\cos(2\omega n_{I(k+1)}T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{sk}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (6.76.1)$$

$$\frac{8\pi b_{1,2q+1}}{TE_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/3N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/3N)) \quad (6.76.2)$$

Lorsque ce terme est divisé par  $-E_1 \left( \frac{T}{8} \right)$  supposé être le coefficient de multiplication de Fourier multiplié par le facteur constant, alors

$$b_{1,q} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/3N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/3N))$$

qui est le même que celui trouvé

par Sandali-Chériti même si les facteurs sont différends dans leur écriture, cela est dû au fait que Sandali-Chériti ont fait l'hypothèse que la série est confondue à une intégrale.

$$a_{1,q} = -E_1 \sum_{k=1}^{q+1} \left( \frac{(-n_{Ik} + n_{Sk})T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{Ik} T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk} T_{res})}{4\omega} \right) \quad (6.76.1)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{a_{1,q}}{-TE_1 \cos(\frac{\pi}{6})} = \sum_{k=1}^{q+1} \left( \frac{(-n_{Ik} + n_{Sk})T_{res}}{\frac{T}{2}} + \frac{\sin(2\omega n_{Ik} T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk} T_{res})}{2\pi} \right) = \sqrt{3} \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{3N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{Sk}}{3N}) - \sin(\frac{2\pi n_{Ik}}{3N})}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (6.76.2)$$

Au signe que nous avons mis en facteur au début.

En l'absence de trou, nous avons :

$$a_{1,q} = -E_1 \left( \frac{(-n_{I(q+1)} T_{res})}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{I(q+1)} T_{res})}{4\omega} \right) = -E_1 \left( \frac{T}{4} \right) \quad (6.76.3)$$

Ce dernier coefficient devrait être le même que celui pour  $P_{max}$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \left( 1 + \alpha^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{2 \log \alpha} \right) - 1 \right) m_{lr}^2 V_{ca}, \quad \text{mais pour notre cas,}$$

$$A_0 = \alpha^2 \frac{16}{T\pi} \frac{1}{(1-\alpha^2)4} \sqrt{\frac{C}{L}} V_{ca} = \frac{4}{\pi} \frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)} \sqrt{\frac{C}{L}} V_{ca} \quad (6.78)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{b_{1,q}^2 + a_{1,q}^2}{I_0^2} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/3N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/3N)) \right]^2 \\ &+ \left[ \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{3N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{Sk}}{3N}) - \sin(\frac{2\pi n_{Ik}}{3N})}{2\pi} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (6.79)$$

#### 6.4.3 Calcul de $S_a + S_b$ et formulation générale pour $q$ trous et pour $m$ différent de 1.

Afin de bien nous démontrer la véracité de la fonction objective à optimiser, nous faisons d'abord un calcul détaillé pour quelques trous, puis généraliser tout juste après pour un nombre de trous quelconque.

Les détails du calcul de la somme des harmoniques  $S_a + S_b$  sont donnés en annexe II.

- **Calcul exact du déphasage et du facteur multiplicatif**

Dans le cas du triphasé, il faut éliminer les facteurs pairs et multiples de 3 dans la sommation par rapport à  $m$ .

Donc :

$$m \in [6k] \cup [6k+1] \cup [6k+2] \cup [6k+3] \cup [6k+4] \cup [6k+5] - [6k] - [6k+2] - [6k+4] - [6k+3],$$

ce qui donne :

$$m \in [6k+1] \cup [6k+5] = [6k+1] \cup [6k-1]. \quad (6.80)$$

$$\text{Ainsi, } \cos((6k \pm 1)\frac{\pi}{6}) = (-1)^k \cos \frac{\pi}{6}, \quad (6.81)$$

De même,

$$\begin{aligned} \cos((x + (6k \pm 1)\frac{\pi}{2})) &= \cos x \cos((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) - \sin x \sin((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos x \cos(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) - \sin x \sin(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin x \sin(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) = -(-1)^k \sin x \end{aligned} \quad (6.82)$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \sin((x + (6k \pm 1)\frac{\pi}{2})) &= \sin x \cos((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) + \cos x \sin((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos x \sin(3k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ou } + \frac{5\pi}{2}) \\ &= \cos x \cos(3k\pi) = (-1)^k \cos x \end{aligned} \quad (6.83)$$

Aussi dans l'expression de  $S_b$ ,

$$\frac{m \sin(m \frac{\pi}{2})}{2\omega(m^2 - 1)} = \frac{(6k \pm 1) \sin((6k \pm 1) \frac{\pi}{2})}{2\omega((6k \pm 1)^2 - 1)} = \frac{(6k \pm 1)(-1)^{k \pm 1}}{2\omega((6k \pm 1)^2 - 1)} = \frac{(6k \pm 1)(-1)^{k \pm 1}}{2\omega 6k(6k \pm 2)} \quad (6.84)$$

En rajoutant les deux premiers termes, nous obtenons l'expression :  $\frac{(-1)^{k \pm 1}}{2\omega 6k}$ , en sachant le

facteur  $(-1)^k \cos \frac{\pi}{6}$ , l'expression devient :  $\frac{-1 \cos \frac{\pi}{6}}{12k\omega}$  dont le carré est le terme d'une série convergente.

Lorsqu'on multiplie toutes les expressions obtenues ci-haut par le facteur  $(-1)^k \cos \frac{\pi}{6}$ , nous obtenons les expressions simples :  $-\sin x$  et  $\cos x$  respectivement.

En généralisant les résultats donnés en annexe II pour un nombre de roues libres q, nous obtenons :

$$\frac{S_T}{E_l^2} = 2 \sum_{\substack{m=6k \pm 1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i \neq j \\ \frac{q(q+1)}{2} \text{ facteurs}} \atop i,j}} \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{hj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{hj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_{hj}))\cos((\theta_h + \theta_{hj}))}{4\omega^2(m^2 - 1)} \right. \\ \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2 - 1)} \right. \\ \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2 - 1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2 - 1)} \right) \\ + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2 - 1)} \quad (6.85)$$

En posant  $\theta_q = \omega T / 2$  est équivalent à  $\theta_{I(q+1)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) \\
& + 2 \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \left( \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_i - \theta_j))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_i - \theta_j))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_i + \theta_j))\cos((\theta_i + \theta_j))}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_i - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_i + \theta_{Sj})\cos(\theta_i - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_i - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_i}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i,j} \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \end{array} \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Ici, il y a deux termes distincts. Le premier concerne le cas  $6k+1$ , facile à introduire pour l'expression  $m-1$  et le cas  $6k-1$ , facile à introduire pour l'expression  $m+1$ .

Nous obtenons, autrement, des expressions de la forme  $6k+2 = 2(3k+1)$  et  $6k-2 = 2(3k-1)$ . Dans ces deux dernières expressions, le coefficient 2 sortira de la somme et fera partie de la nouvelle variable  $2X$ . Il restera donc des sommations sur tous les  $3k+1$  et  $3k-1$ , qui donnent tous les nombres moins les  $3k$ . Cela aboutit aux nombres multiples de 3. Ainsi, nous obtenons la somme de tout nombre en la variable  $2X$  moins le tiers de somme de tout nombre en la variable  $3X$ . Cela termine la simplification de la sommation en termes connus et faciles à calculer.

Une fois les premières séries transformées en leur équivalent, nous obtenons les étapes de réduction de la série :

*Étape 1*

$$\begin{aligned}
& \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \equiv S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) + \sum_{\substack{m=6k-1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) \\
& + 2 \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{ij}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{ij}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_{ij}))\cos((\theta_h + \theta_{ij}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i,j} \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \right) \\
& + 2 \sum_{\substack{m=6k-1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{ij}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{ij}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_{ij}))\cos((\theta_h + \theta_{ij}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i,j} \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.86.1}$$

Puis *Étape 3 (étape 2 omise)*,

$$\begin{aligned}
& \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \equiv S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{36k^2} + \frac{2q+1}{4(3k+1)^2} \right) \right) + \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{4(3k-1)^2} + \frac{2q+1}{36k^2} \right) \right) \\
& + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2 4(3k+1)^2} + \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2 (6k)^2} - \frac{2 \cos(6k(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) \\ + \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 4(3k+1)^2} + \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6k)^2} - \frac{2 \cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) \\ + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k+2)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2 4(3k+1)^2} + \frac{2 \cos 6k(\theta_h + \theta_{Sj}) \cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) - \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6k)^2} \right) + \frac{\cos 12k\theta_h}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) \end{array} \right) \right. \\
& \left. \left( \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2 (6k)^2} + \frac{\cos(2(3k-1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2 4(3k-1)^2} - \frac{2 \cos(6k(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) \\ + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6k)^2} + \frac{\cos(2(3k-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 4(3k-1)^2} - \frac{2 \cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) \\ + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2 (6k)^2} + \frac{2 \cos 6k(\theta_h + \theta_{Sj}) \cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2 ((6k)^2} (+2ier termes) - \frac{\cos((6k-2)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 4(3k-1)^2} \right) + \frac{\cos 12k\theta_h}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) \end{array} \right) \right. \\
& \left. \left. \left. + \sum_{i,j} \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{4\omega^2 (6k)^2} (+2ier termes) \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.86.2}$$

Les deux premiers termes notés DPT :

$$\begin{aligned}
DPT &= \sum_{i=1,n} \left( \frac{\cos 10\theta_h}{4\omega^2 24} + \frac{\cos 14\theta_h}{4\omega^2 48} \right) + \left( \frac{\cos 10\theta_{Si}}{4\omega^2 24} + \frac{\cos 14\theta_{Si}}{4\omega^2 48} \right) \\
&- \frac{\cos 24\theta_h}{4\omega^2 (12)^2} - \frac{\cos 12\theta_h}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos 24\theta_{Si}}{4\omega^2 (12)^2} - \frac{\cos 12\theta_{Si}}{4\omega^2 (6)^2} \\
&\quad \frac{\cos(5(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2 24} + \frac{\cos(7(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2 48} \\
&- 2 \sum_{i \neq j} \left( -\frac{\cos(6(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos(12(\theta_h + \theta_j)) \cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2 (12)^2} \right. \\
&\quad \left. \frac{\cos(5(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 24} + \frac{\cos(7(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 48} \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{i \neq j} \left( -\frac{\cos(6(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos(12(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (12)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. : \quad \frac{\cos 5(\theta_{hi} + \theta_{Sj}) \cos(\theta_{hi} - \theta_{Sj})}{4\omega^2 24} + \frac{\cos 7(\theta_{hi} + \theta_{Sj}) \cos(\theta_{hi} - \theta_{Sj})}{4\omega^2 48} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos(6(\theta_{hi} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{hi} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos(12(\theta_{hi} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{hi} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (12)^2} \right. \right. \right) \right) \right) \tag{6.88}
\end{aligned}$$

### Étape 6

$$\begin{aligned}
& \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \geq 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{2(2q+1)}{36} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{8(2q+1)}{36} \sum_{k=1,\infty,1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
& + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_j))}{4k^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{(6k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4k^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2} \right) \right. \\
& \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Si}))}{4k^2} + \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Si}))\cos(\theta_h - \theta_{Si})}{(6k)^2} \right) + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_h}{(6k)^2} + \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2} \right) \\
& + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_j))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{(6k)^2} + \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2} \right) \right. \\
& \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_{Si}))}{(6k)^2} + \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Si}))\cos(\theta_h - \theta_{Si})}{((6k)^2)} \right) + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_h}{(6k)^2} + \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2} \right)
\end{aligned} \tag{6.89}$$

Sachant par exemple que  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(k(\theta_1 + \theta_2))}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3(\theta_1 + \theta_2)^2 - 6\pi|\theta_1 + \theta_2| + 2\pi^2)$  vraie pour des valeurs de la variable  $|x| \leq 2\pi$

Mais  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(2k(\theta_1 + \theta_2))}{(2k)^2} = \frac{1}{12}(3(\theta_1 + \theta_2)^2 - 3\pi|\theta_1 + \theta_2| + \frac{\pi^2}{2})$ , vraie pour des valeurs de la variable  $|x| \leq \pi$ ,

Mais  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos 3(2k(\theta_1 + \theta_2))}{9(2k)^2} = \frac{1}{9x12}(9x3(\theta_1 + \theta_2)^2 - 9\pi|\theta_1 + \theta_2| + \frac{\pi^2}{2})$  n'est pas toujours valide.

En fait, l'expression  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3|x|^2 - 6\pi|x| + 2\pi^2)$ , est vraie pour  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ .

Pour  $|x| \geq 2\pi$ , il faut remplacer x par  $\text{mod}(x, 2\pi)$ , étant donné que le modulo est toujours positif, la valeur absolue peut être soustraite et nous obtenons :

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2),$$

avec :  $x = \text{mod}(x, 2\pi)$ .

*Étape 7 :*

$$\begin{aligned}
 \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} &\equiv 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
 &+ 2 \sum_{i \neq j} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{48} (3(\theta_{ii} - \theta_{ij})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{ij}) + 2\pi^2) + \frac{1}{48} (3(\theta_{si} - \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{si} - \theta_{sj}) + 2\pi^2), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ \frac{1}{12x36} (3(\theta_{ii} - \theta_{ij})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{ij}) + 2\pi^2) + \frac{1}{12x36} (3(\theta_{si} - \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{si} - \theta_{sj}) + 2\pi^2), x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \frac{4}{12x36} \left[ - (3(\theta_{ii} + \theta_{ij})^2 - 6\pi(\theta_{ii} + \theta_{ij}) + 2\pi^2) \cos(\theta_{ii} + \theta_{ij}) - (3(\theta_{si} + \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{si} + \theta_{sj}) + 2\pi^2) \cos(\theta_{si} + \theta_{sj}) \right] *, x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \frac{(3(\theta_{ii} - \theta_{si})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{si}) + 2\pi^2)}{4}, x = \text{mod}(2x, 2\pi) \end{array} \right] \\
 &- \frac{2}{12} \sum_{i,j} \frac{((3(\theta_{ii} - \theta_{si})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{si}) + 2\pi^2) - 4(3(\theta_{ii} + \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{ii} + \theta_{sj}) + 2\pi^2)(\theta_{ii} + \theta_{sj}))_*}{36}, x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\
 &+ \frac{4}{12x36} \sum_{i=1}^q (3\theta_{ii}^2 - 6\pi\theta_{ii} + 2\pi^2) + (3\theta_{si}^2 - 6\pi\theta_{si} + 2\pi^2) *, x = \text{mod}(12x, 2\pi)
 \end{aligned} \tag{6.90}$$

\* (+2 premiers termes)

Puis *Étape 8*

$$\begin{aligned}
 \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} &\equiv 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
 &+ 2 \sum_{i \neq j} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{48} \left( 3 \left[ (\theta_{ii} - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) + \frac{1}{48} \left( 3 \left[ (\theta_{si} - \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ \frac{1}{12x36} \left( 3 \left[ (\theta_{ii} - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) + \frac{1}{12x36} \left( 3 \left[ (\theta_{si} - \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right), x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \frac{4}{12x36} \left[ \begin{array}{l} - \left( 3 \left[ (\theta_{ii} + \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) \cos(\theta_{ii} + \theta_{ij}) \\ - \left( 3 \left[ (\theta_{si} + \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) \cos(\theta_{si} + \theta_{sj}) \end{array} \right] *, x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \frac{\left( 3 \left[ (\theta_{ii} - \theta_{si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right)}{4}, x = \text{mod}(2x, 2\pi) \end{array} \right] \\
 &- \frac{2}{12} \sum_{i,j} \frac{\left( \left( 3 \left[ (\theta_{ii} - \theta_{si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) - 4 \left( 3 \left[ (\theta_{ii} + \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) (\theta_{ii} + \theta_{sj}) \right)_*}{36}, x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\
 &+ \frac{4}{12x36} \sum_{i=1}^q \left( 3 \left[ (\theta_{ii} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) + \left( 3 \left[ (\theta_{si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) *, x = \text{mod}(12x, 2\pi)
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

(\* + 2 premiers termes)

Puis encore :

$$\begin{aligned}
 & \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
 & + 2 \sum_{i \neq j} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{16} \left[ \left( (\theta_h - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \right], x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ \frac{1}{16x9} \left[ \left( (\theta_h - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \right], x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \frac{-4}{16x9} \left[ \left( (\theta_h + \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \cos(\theta_h + \theta_{ij}) + \left( (\theta_{Si} + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \cos(\theta_{Si} + \theta_{Sj}) \right] * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \end{array} \right\} \\
 & - \frac{2}{4} \sum_{i,j} \frac{\left[ \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \right]}{36} x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\
 & + \frac{1}{36} \sum_{i=1}^q \left[ \left( (\theta_h - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] * x = \text{mod}(12x, 2\pi)
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

Les autres étapes de conversions sont données en annexe II.

## 6.5 Modèle mathématique final

La formulation détaillée est donnée en annexe II. Nous remarquons ce qui suit :

- La forme mathématique est proche de la forme quadratique dans laquelle nous avons une fonction du second degré avec des parties en cosinus. En effet, nous avons des puissances de 2 des positions des trous et une partie fixe en cosinus qui peut être interpolée par une fonction quadratique
- Il sera donc facile de transformer cette expression pour qu'elle prenne la forme de somme de carrés parfaits. Cela va réduire le temps de calcul considérablement. Nous avons déjà commencé à faire ce travail.

En effet, soit l'expression générale suivante :  $Ex = (x + a)^2 + bx + c$ , elle peut s'écrire :

$$Ex = x^2 + 2ax + bx + c + a^2 = (x + a + \frac{b}{2})^2 + c + a^2 - (\frac{b}{2})^2.$$

Donc  $Ex = (x + a + \frac{b}{2})^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2ab$

Le terme  $c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2ab$  ne contient pas de variable  $x$  n'intervient donc pas dans l'optimisation.

Pour minimiser une expression de type  $Ex = (x + a + \frac{b}{2})^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2ab$ , il suffit

d'annuler le terme  $(x + a + \frac{b}{2})^2$ , ce qui donne  $x + a + \frac{b}{2} = 0$  et ce qui donnera  $x = -a - \frac{b}{2}$ .

C'est un calcul direct. Mais, il y a des développements limités à faire avant.

- Cependant, pour répondre à notre objectif premier, nous allons garder cette formulation et utiliser l'algorithme génétique pour trouver l'optimum global, en suite, nous allons analyser les performances de l'algorithme
- Nous voyons, en plus, que la formulation en mode triphasé est bien meilleure pour une interpolation directe par des polynômes du second degré, polynômes plus faciles à optimiser algébriquement.

Au facteur  $A$  prêt, nous avons :

$$\begin{aligned}
\bar{F}\bar{H} = \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong 4\omega^2 \left\{ \frac{1}{4\pi^2 A^2} \left[ \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi m_{sk}/3N) - \cos(2\pi m_{l(k+1)}/3N))^2 \right] \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{NA} + \frac{\sin(\frac{2\pi m_{Sk}}{3N}) - \sin(\frac{2\pi m_{Ik}}{3N})}{2\pi A} \right)^2 \right\} \\
&+ \frac{5(2q+1)}{18} \frac{\pi^2}{6} + DPT \\
&+ \frac{1}{8} \sum_{i \neq j} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left[ (\theta_h - \theta_j - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ \left[ \left[ (\theta_h - \theta_j - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \left[ \frac{-4}{9} \left[ \left[ (\theta_h + \theta_j - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_h + \theta_j) + \left[ (\theta_{Si} + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_{Si} + \theta_{Sj}) \right] * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \end{array} \right\} \\
&- \frac{1}{8} \sum_{i,j} \frac{\left( \left[ \left[ (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right] - 4 \left[ \left[ (\theta_h + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right] (\theta_h + \theta_{Sj}) \right) * x = \text{mod}(6x, 2\pi)}{9} \\
&+ \frac{1}{36} \sum_{i=1}^q \left( \left[ (\theta_h - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) *, x = \text{mod}(12x, 2\pi)
\end{aligned} \tag{6.93}$$

## 6.6 Résultats obtenus, représentation graphique.

Nous présentons dans cette partie, les résultats sous forme graphique et nous parlerons aussi du temps de calcul de façon globale.

Premièrement, le temps de calcul pour le nombre de trous inférieur à 13 a été plus cours par la formulation nouvelle que par la formulation classique.

Dans le cas de nombre de roues libres est égal à 13, nous remarquons que le temps de calcul est très grand. En effet, lorsque la dimension est élevée la population de l'algorithme de recherche sera distribuée sur une trop grande région, ce qui réduit le nombre d'individus par région potentielle.

Cela a pour effet de rendre pénible la recherche de l'optimal. La meilleure façon de contourner le problème est de faire une approximation polynomiale du facteur de puissance et de faire des calculs par des méthodes directes ou des méthodes pas à pas.

En réalité, n'importe quelle méthode aura des difficultés à trouver l'optimum global dans des temps courts lorsque l'espace décisionnelle est de rang élevé et lorsque le nombre de variables est élevé avec des contraintes égalité et inégalité. Mais l'avantage que nous devons rajouter à l'algorithme génétique est la précision. Nous présentons dans ce qui suit les résultats globaux pour le nombre de trous allant de 3 à 11, dans le but de valider le modèle en comparaison à l'ancien modèle fait à Trois-Rivières.

### a) Trois trous (la puissance est en pu)

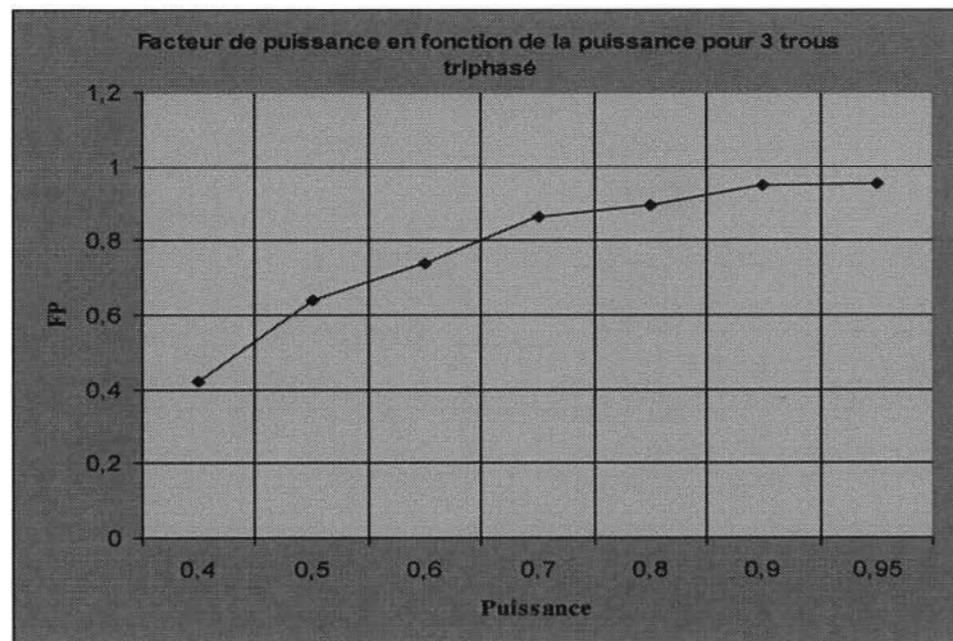


Figure 6.3 Nouveau modèle triphasé, résultats pour 3 trous

### b) Cinq trous (la puissance est en pu)

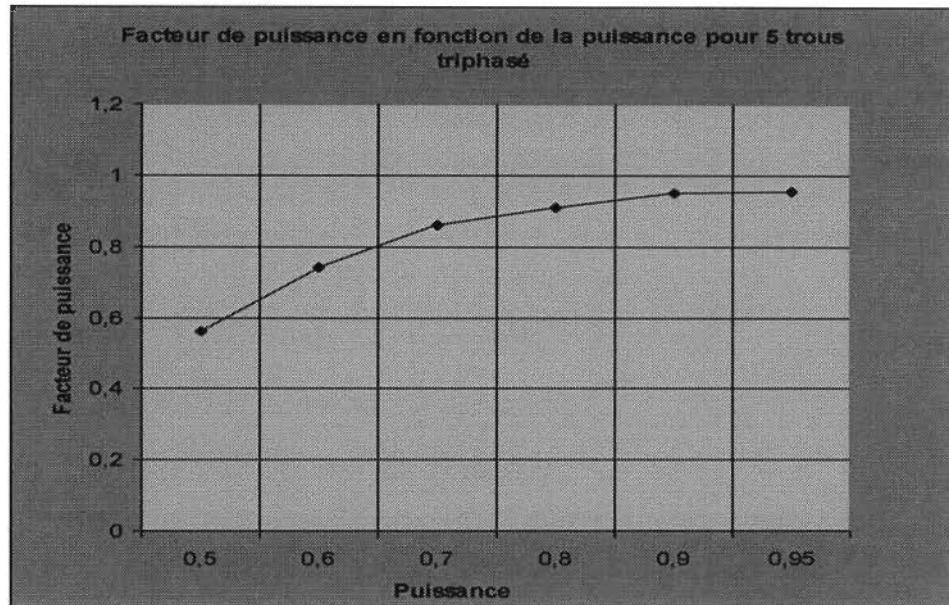


Figure 6.4 Nouveau modèle triphasé, résultats pour 5 trous

**c) Sept trous (la puissance est en pu)**

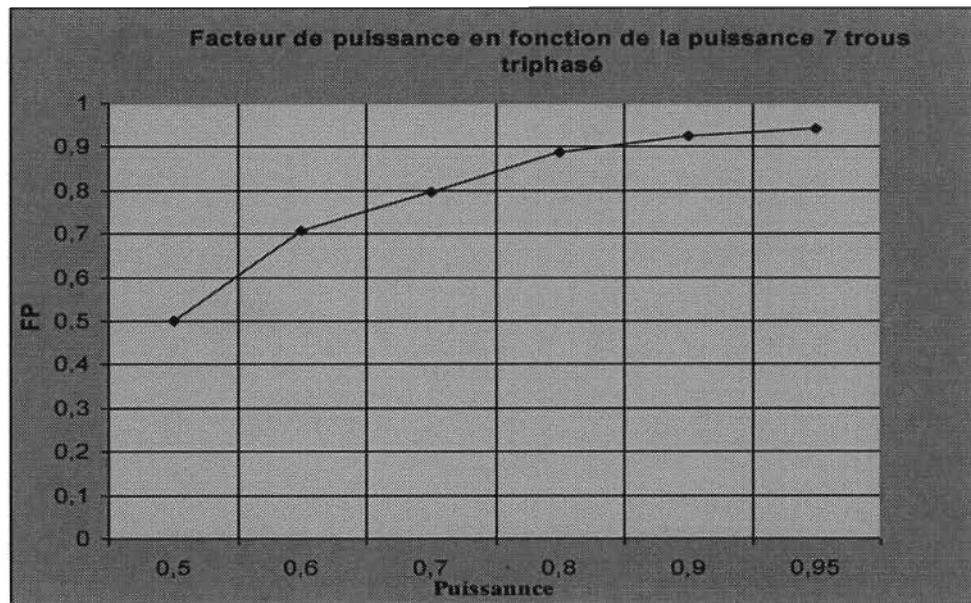


Figure 6.5 Nouveau modèle triphasé, résultats pour 7 trous

**d) onze trous (la puissance est en pu)**

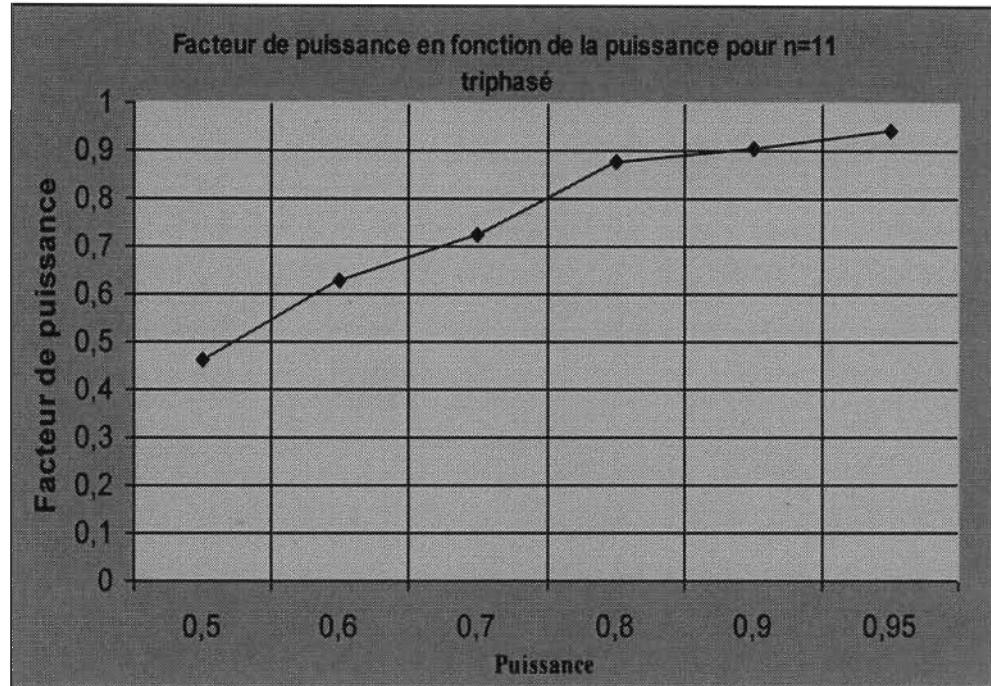


Figure 6.6 Nouveau modèle triphasé, résultats pour 11 trous

e) Figure récapitulative triphasée (la puissance est en pu)

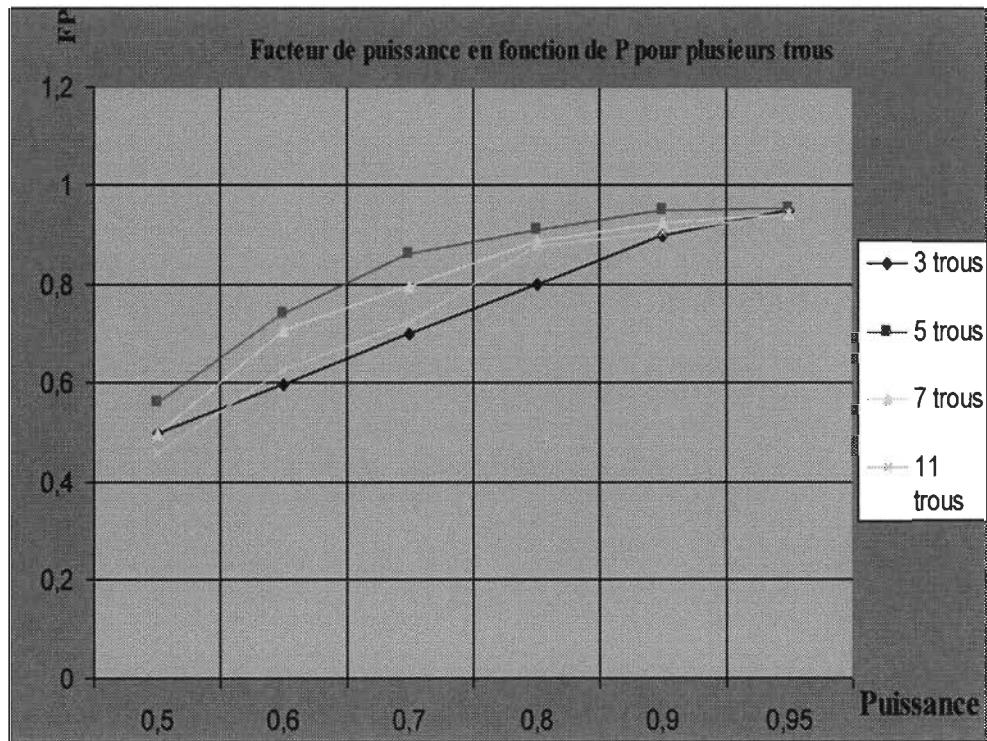


Figure 6.7 Nouveau modèle triphasé, récapitulatif

## 6.7 Conclusion et améliorations proposées.

- Les résultats en mode triphasé sont légèrement meilleurs, car les harmoniques multiples de trois disparaissent.
- Plus le nombre de trous est élevé, plus le calcul devient fastidieux et la convergence vers le minimum global est pénible, voire impossible
- Le nombre de variables lorsque grand affecte négativement les performances de la méthode génétique et le calcul en temps réel est utopique.
- Plus la puissance est grande plus le facteur de puissance est grand. En effet, lorsque la puissance est faible, on introduit plus de cycles de roue libre et donc on cause une distorsion du signal ce qui le rend loin d'une sinusoïde. Ainsi, le facteur de puissance est plus faible
- Il est important de travailler maintenant en MDI courant et la MLI-MDI pour améliorer le facteur de puissance pour tout niveau de puissance.

Nous allons, dans le chapitre 7 donner d'autres travaux en cours et d'autres réalisations qui nous donnent un autre jugement sur l'algorithme génétique et sur le travail qui nous attend si on approfondit la MDI-MLI. La MDI-MLI et la MDI courant n'étaient pas l'un des objectifs majeurs de notre recherche, mais deviennent de plus en plus importantes pour rehausser le facteur de puissance pour des faibles puissances. Nous espérons obtenir d'autres résultats sur la MDI-MLI et sur la MDI courant, ne procédant de la même manière qu'avec la MDI tension; des développements mathématiques rigoureux aboutissant à une fonction simplifiée.

# Chapitre 7 - Étude du dual MLI/MDI-MLI

## 7.1 Introduction

La MDI porte plusieurs avantages pour améliorer les performances des convertisseurs statiques à résonance. Notre objectif est d'optimiser les lois de commande pour assurer le contrôle de puissance à la sortie et de la distorsion harmonique à l'entrée. Les résultats obtenus par la méthode génétique pour maximiser le facteur de puissance montrent que cette méthode est très efficace notamment lorsqu'on améliore ses opérateurs.

Afin de parer au problème de la lourdeur causée par les contraintes inégalité, nous avons introduit dans certains modèles une formulation qui suit.

Lorsque nous avons une contrainte multiple du genre :  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_n$ , nous la remplaçons par des contraintes égalités suivantes :

$$\begin{aligned}x_2 &= |\theta_1| + x_1 \\x_3 &= |\theta_2| + x_2, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Ainsi, les variables en études sont :  $x_1, |\theta_1|, |\theta_2|, \dots, x_n$ . Cela a pour effet de diminuer les tests d'inégalité. Cependant, nous sommes contraints d'en faire pour la première variable et la dernière pour qu'elles ne touchent pas les frontières.

La non-précision de l'AG n'est pas un problème en soi pour la MDI, mais ce qui est un plus problématique c'est le partage de l'espace décisionnel en portions équitables, un partage qui n'est pas facile à réaliser en dimension élevée.

Les résultats obtenus pour quelques cas par les méthodes du gradient conjugué montrent une amélioration certaine. Cependant, nous n'obtenons pas toujours une amélioration.

Nous allons en ce qui suit tenter d'améliorer le facteur de puissance en rassemblant deux techniques complémentaires. L'une donne de bonnes performances pour de grandes puissances, l'autre fonctionnant en dual permet d'avoir des facteurs de puissance meilleurs pour des puissances plus basses. Nous allons étudier donc le dual MDI-MLI.

## 7.2 Le dual MDI-MLI

Cette technique que nous étudions actuellement en profondeur va permettre de réduire les pertes en commutation tout en laissant la chance à la modulation de se produire de manière plus libre.

En effet, mathématiquement, nous aurons des variables plus réelles et nous serons dans un contexte d'optimisation continue. En continu, il nous sera possible d'avoir des résultats bien meilleurs qu'en variables discrètes.

Nous avons d'abord testé les forces de l'algorithme génétique sur les convertisseurs à commande à MLI. Nous présentons ci-après la formulation, les résultats et les analyses qui en découlent des deux techniques.

Nous développons actuellement la formulation de la MDI-MLI et nous espérons arriver à des résultats probants.

Nous donnons ci-après aussi un aperçu de la technique MLI et par la suite les résultats d'optimisation des harmoniques par l'algorithme génétique.

La MLI (modulation de largeur d'impulsion) de base compare le signal de la sinusoïde à la porteuse généralement triangulaire pour obtenir un signal ondulé en sortie. Elle est très utilisée pour la commande des moteurs.

Cependant, la technique de la MLI a beaucoup évolué. Plusieurs chercheurs optent pour une commande à MLI précalculée au lieu d'utiliser une porteuse triangulaire pour élaborer les longueurs d'impulsion.

Il y a encore des travaux de recherche qui utilisent plusieurs fonctions simples pour avoir des largeurs d'impulsion très variables comme le font les chercheurs dans l'article [Car07].

### 7.2.1 Développement théorique de la technique MLI

La tension de phase de la charge est donnée par l'expression suivante pour un cas général[Hua05].

$$\begin{aligned} V(t) = & M \frac{E}{2} \cos(\omega_m t + \phi) + \frac{4E}{\pi} J_0\left(\frac{n\pi M}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_m t) \\ & + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=\pm}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{n\pi M}{2}\right)}{n} \sin\left(\frac{(n+m)\pi}{2}\right) \cos(n\omega_m t + m\omega_c t + (m+n)\phi) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Avec :

$\omega_m$  : Fréquence angulaire de la modulation ou du signal sinusoïdal.

$\omega_c$  : Fréquence angulaire de la modulation ou du signal sinusoïdal.

$\omega_c$  : Fréquence angulaire de signal porteur

M : Index de modulation, rapport entre l'amplitude de la porteuse et de celle de la référence.

E : Tension d'alimentation

$\phi$  est l'angle de déplacement entre le signal de modulation et le signal de la porteuse.

$J_0$  et  $J_m$  : Fonctions de Bessel de la première espèce.

Remarquons que dans cette expression, plusieurs termes vont s'éliminer suivant que n ou m sont pairs ou impairs.

### 7.2.1.1 Cas de la technique MLI par Élimination sélective des Harmoniques (SHE)

Au lieu de comparer deux signaux, la technique (SHE) permet d'ajuster les angles de commutation pour produire des signaux réglés à notre guise. La figure (7.1) en fait un exemple simple.

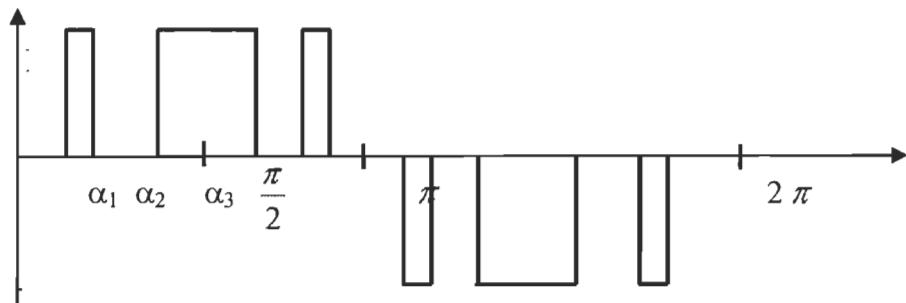


Figure 7.1

Schéma de principe de la commande MLI, cas unipolaire

La forme de l'onde de la grandeur en sortie du convertisseur MLI [Ras04] a la propriété :

$$f(2\pi f_0 t) = -f(2\pi f_0 t + \pi). \quad (7.2)$$

Le signal de la figure 7.1 peut-être exprimé en séries de Fourier par :

$$f(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\omega t) + b_n \cos(\omega t) \quad (7.3)$$

Tel que :

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(\omega t) d\omega t \quad \text{et} \quad b_n = \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(\omega t) d\omega t. \quad (7.4)$$

Tenant compte des équations précédentes, nous aurons :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2M} (-1)^{k+1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (7.5)$$

Avec :  $\alpha_0, \alpha_{2M+1} = 2\pi$  et  $\alpha_0 < \dots < \alpha_{2M+1}$  (7.6)

On obtient donc :

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[ \cos(n\alpha_0) - \cos(\pi\alpha_{2M+1}) + 2 \sum_{k=1}^{2M} (-1)^k \cos(n\alpha_k) \right] \quad (7.7)$$

Après rassemblement des termes semblables, les équations suivantes sont obtenues :

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[ 1 - (-1)^n + 2 \sum_{k=1}^{2M} (-1)^k \cos(n\alpha_k) \right] \quad (7.7.1)$$

$$b_n = \frac{-4}{n\pi} \left[ \sum_{k=1}^{2M} (-1)^k \sin(n\alpha_k) \right] \quad (7.7.2)$$

Vu la symétrie impaire, lorsque n est pair  $a_n = b_n = 0$ . (7.9)

Aussi, vu la symétrie de quart d'onde, nous avons :

$$\alpha_k = \pi - \alpha_{2M-k+1} \quad (7.10)$$

Ce qui donne :

$$b_n = -\frac{4}{n\pi} \sum_{k=1}^M [\sin(n\alpha_k) - \sin(n\alpha_{2m-k+1})] = 0 \quad (7.11)$$

Vu la symétrie, nous obtenons finalement :

$$a_n = \frac{4}{n\pi} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \cos(n\alpha_k) \quad (7.12)$$

Et les égalités suivantes

$$a_1 = \frac{\pi}{4E}, \quad a_n = 0 \text{ si non} \quad (7.13)$$

Ceci termine les équations de la MLI calculée en mode monophasée qui nous servira par la suite à développer les équations de la MLI-MDI. Dans ce qui suit, nous faisons le calcul de

la MLI seule afin de se familiariser avec ses équations et de voir les limites de l'algorithme génétique en présence de ce genre d'expressions.

### 7.3 Quelques résultats obtenus avec l'algorithme génétique.

Notation : On appelle  $f_{obj}$  la fonction objective, somme des erreurs à minimiser.

**1) n=4,  $f_{obj} = 0.0112$**

Angles d'extinction $\alpha$ pour n= 4	L'harmonique de sortie F( $\alpha$ )
29.6523	-0.0789
39.9311	0.0002
63.0332	0.0691
80.6001	0.0127

Tableau 7-1 Résultats de la MLI pour quatre angles

**2) n= 5**

Angles d'extinction $\alpha$ pour n= 5	L'harmonique de sortie F( $\alpha$ )
25.0886	$\leq 0.01$
33.7306	$\leq 0.01$
50.9814	$\leq 0.01$
67.4681	$\leq 0.01$
79.4876	$\leq 0.01$

Tableau 7-2 Résultats de la MLI pour cinq angles

3) n=6, fobj = 0.0443

Angles d'extinction $\alpha$ pour n= 6	L'harmonique de sortie F( $\alpha$ )
22.6099	-0.1741
27.3683	0.0227
47.0941	0.1027
54.3068	-0.0299
72.3336	-0.0401
82.0232	-0.0204

Tableau 7-3 Résultats de la MLI pour six angles

Nous remarquons qu'à partir de n= 6, il est difficile d'obtenir l'optimum global.

En cherchant la raison, nous trouvons que la première contrainte contredit les autres.

Nous avons opté donc pour stratégie d'optimisation de ligne par ligne et nous obtenons meilleurs résultats comme suit :

Angles d'extinction $\alpha$ Stratégie par ligne pour n= 6	L'harmonique de sortie F( $\alpha$ )
21.6450	-0.0147
27.9880	-0.0022
44.8718	0.0512
56.1885	0.0063
69.2095	-0.0000
84.4306	0.0029

Tableau 7-4 Résultats de la MLI pour six angles, stratégie ligne par ligne

La valeur absolue de la fonction objective est plus petite.

À partir de n=8, les contraintes deviennent plus difficiles à atteindre.

$$n=8, \quad f_{\text{obj}} = 0.1311$$

Angles d'extinction $\alpha$ pour n= 8	L'harmonique de sortie F( $\alpha$ )
40.1192	-0.3067
41.3042	-0.1825
55.2801	-0.0409
57.0254	0.0240
70.5108	0.0216
74.3755	0.0461
84.6963	0.0321
87.3827	0.0105

Tableau 7-5 Résultats de la MLI pour huit angles

Un autre résultat pour n=8 qui est parmi les meilleurs, grâce au fait d'annuler les harmoniques multiples de 3 et surtout à la stratégie par ligne, on élimine toutes les harmoniques, puis on change le poids de l'harmonique 1, puis le poids des autres qui débordent, la précision s'améliore ainsi d'étape en étape.

$$4) \quad n=10, \quad f_{\text{obj}} = 0.1449$$

Angles d'extinction $\alpha$ pour n= 10 Angles 1 à 5	L'harmonique de sortie f ( $\alpha$ )	Angles d'extinction $\alpha$ pour n= 10, Angles 6 à 10	L'harmonique de sortie f ( $\alpha$ )
37.8446	-0.3240	67.7740	-0.0036
39.4989	-0.1630	80.6098	-0.0168
51.5497	-0.0510	84.2201	-0.0138

<b>53.5769</b>	<b>0.0403</b>	<b>89.9972</b>	<b>0.0529</b>
<b>65.7033</b>	<b>0.0526</b>	<b>90.0000</b>	<b>,0.0554</b>

Tableau 7-6 Résultats de la MLI pour dix angles

Après utilisation de la méthode de minimisation par lignes, les résultats sont meilleurs :  $f_{obj} = 0.4878$

<b>Angles d'extinction <math>\alpha</math> Pour n= 10 Angles 1 à 5</b>	<b>L'harmonique de sortie f (<math>\alpha</math>)</b>	<b>Angles d'extinction <math>\alpha</math> pour n= 10, Angles 6 à 10</b>	<b>L'harmonique de sortie f (<math>\alpha</math>)</b>
<b>14.9726</b>	<b>-0.1243</b>	<b>51.1146</b>	<b>0.0877</b>
<b>16.8892</b>	<b>-0.0528</b>	<b>62.1787</b>	<b>0.0072</b>
<b>30.4425</b>	<b>0.0767</b>	<b>67.8101</b>	<b>0.0000</b>
<b>34.1568</b>	<b>-0.0043</b>	<b>77.8289</b>	<b>0.0409</b>
<b>46.2091</b>	<b>-0.0789</b>	<b>85.5700</b>	<b>0.0149</b>

Tableau 7-7 Résultats de la MLI pour dix angles, stratégie par ligne

### 7.3.1 Analyse des premiers résultats

Nous voyons que la minimisation de chaque fonction  $f_n = a_n - \frac{4}{n\pi} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \cos(n\alpha_k)$ ,

impose que la contrainte  $f_1$ . En mettant un poids plus grand pour cette contrainte-ci, on force à sa réalisation.

Les résultats pour n=6, 7, et 8 ont été améliorés grâce au nouveau poids introduit.

Dans le cas de n=8, lorsqu'on tente de mettre le même poids pour toutes les contraintes, la contrainte 1 n'est pas réalisée, et la distance nous séparant de la réalisation est lointaine. De

l'autre côté les autres contraintes égalité dont le second membre est nul sont facilement atteintes.

Dans beaucoup de cas, pour  $n$  élevé, les angles sont très proches, et les différences d'angles deviennent problématiques.

Les contraintes inégalités  $x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$  sont déterminées par les inéquations  $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  de plus en plus difficile à fixer sans que les variables soient égales.

Donc, pour  $n$  plus élevé, la méthode génétique a de la difficulté à rencontrer la contrainte 1 en même temps que les autres.

Une autre façon d'optimiser s'impose du fait même du type d'équations dont les réalisations se compromettent mutuellement.

D'ailleurs, un développement limité du second ordre des cosinus démontre que la solution n'existe pas pour des angles faibles.

La précision au 3<sup>e</sup> chiffre après la virgule étant importante. La gamme de variation des variables devient très élevée.

### 7.3.2 Autre méthode : application d'une erreur au zéro

À cause de l'exigence de la précision et surtout au fait que la formulation des équations provoque des résultats antagonistes (si l'harmonique 1 est optimisée, les autres le sont moins), les expressions des harmoniques plus que 1 ne sont pas tout à fait nulles.

Les équations  $f_n = a_n - \frac{4}{n\pi} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \cos(n\alpha_k)$ , avec  $a_n = \frac{E\pi}{2}$  si  $n=1$ ,  $a_i = 0$  si non

sont remplacées par :  $a_n = \frac{E\pi}{2}$  si  $n=1$   $a_i = \frac{\pi}{N}$ , si non,  $N$  étant un grand nombre.

Avec cette formulation, nous rendons le système plus *flexible*.

En diminuant l'harmonique d'ordre 1, nous améliorons le conditionnement du système.

*Exemple pour n = 20*

<b>Angles d'extinction <math>\alpha</math> Pour n= 10 Angles 1 à 10</b>	<b>L'harmonique de sortie f(<math>\alpha</math>)</b>	<b>Angles d'extinction <math>\alpha</math> Pour n= 10, Angles 11 à 20</b>	<b>L'harmonique de sortie f(<math>\alpha</math>)</b>
<b>0.2274</b>	<b>-0.0471</b>	<b>0.9551</b>	<b>-0.0227</b>
<b>0.4151</b>	<b>-0.0466</b>	<b>0.9595</b>	<b>-0.0181</b>
<b>0.7000</b>	<b>-0.0457</b>	<b>1.1391</b>	<b>-0.0130</b>
<b>0.7040</b>	<b>-0.0443</b>	<b>1.1434</b>	<b>-0.0077</b>
<b>0.7668</b>	<b>-0.0425</b>	<b>1.1678</b>	<b>-0.0020</b>
<b>0.7712</b>	<b>-0.0403</b>	<b>1.2234</b>	<b>0.0040</b>
<b>0.8039</b>	<b>-0.0376</b>	<b>1.7296</b>	<b>0.0102</b>
<b>0.8084</b>	<b>-0.0345</b>	<b>1.7336</b>	<b>0.0168</b>
<b>0.8676</b>	<b>-0.0310</b>	<b>2.1073</b>	<b>0.0235</b>
<b>0.8721</b>	<b>-0.0270</b>	<b>2.1220</b>	<b>0.0305</b>

Tableau 7-8 Résultats de la MLI pour vingt angles, erreur au zéro

Les résultats obtenus, en utilisant aussi la modification suivante dans l'algorithme génétique pour le rendre plus étendu aux larges solutions.

Dans l'élitisme, nous avons confondu le meilleur état à l'étape k à celui de l'étape k+1, sans dédoubler l'optimum.

Afin de rendre les résultats encore plus précis, nous avons adjoint à la méthode génétique en fin d'itération, la méthode 'Mesh', qui affine les résultats en rendant mobile variable par variable dans un petit domaine pour améliorer la précision et les résultats sont doublement meilleurs, car la méthode génétique est moins précise et la méthode 'PWM' [Mas05] demande de la précision à au moins au troisième chiffre après la virgule.

Toujours pour n= 20, nous avons obtenu des résultats meilleurs.

### 7.3.3 Analyse et autres résultats

Les résultats avec cette méthode sont meilleurs que la formulation dans le cas d'un double pont triphasé.

Ceci est principalement dû à un meilleur conditionnement des équations dans l'approche monophasée à un pont.

Nous remarquons cette fois-ci qu'une faible variation des angles n'affecte pas de manière majeure la réponse du système. Le système est donc moins sensible.

Pour la topologie SLL décrite amplement dans [Hua05], nous obtenons les résultats suivants.

Pour  $n=2$ , nous avons :  $f_{obj} = 6.5605e-004$

Angles d'extinction $\alpha$ pour $n=2$	L'harmonique de sortie $F(\alpha)$
44.2350	-0.6545 $\times 10^{-3}$
75.7650	-0.0016 $\times 10^{-3}$

Tableau 7-9 Résultats de la MLI pour deux angles, topologie SLL

Pour  $n=3$ ,  $f_{obj} = 0.0669$

Angles d'extinction $\alpha$ pour $n=3$	L'harmonique de sortie $F(\alpha)$
36.4857	-0.0661
52.5205	-0.0008
77.9001	0.0000

Tableau 7-10 Résultats de la MLI pour trois angles, topologie SLL

Pour  $n=4$ ,  $f_{obj} = 0.1367$

Angles d'extinction $\alpha$ pour $n=4$	L'harmonique de sortie $F(\alpha)$
31.2222	-0.1024
40.4784	-0.0340

<b>63.6148</b>	<b>-0.0000</b>
<b>80.2069</b>	<b>-0.0003</b>

Tableau 7-11 Résultats de la MLI pour quatre angles, topologie SLL

Il en est de même pour  $n = 5$ , en procédant étape par étape et en augmentant tantôt une contrainte tantôt une autre, l'algorithme arrive à des résultats moyennement satisfaisants.

On obtient  $f_{obj} = 0.2011$ .

Nous pouvons conclure partiellement que la formulation mathématique de la MLI précalculée n'est pas assez ouverte pour être réécrite de manière plus flexible. Cela nous pousse à commencer à simuler le dual MDI-MLI avant de produire une formulation nouvelle.

#### 7.4 Formulation de la MDI-MLI

Le but de cette partie est de conduire la stratégie de la MLI vers une approche qui pourrait s'appliquer avec pertes minimales lors des changements des commutations. On sait que la MDI permet d'avoir des pertes nulles lors des commutations, mais à un facteur de puissance faible. La MDI-MLI nous permettrait d'avoir les avantages de la MLI et celles de la MDI. La formulation combinée MLI-MDI est en construction.

#### 7.5 La MDI courant.

La technique s'avèrerait très efficace, car le courant d'alimentation est stable.

Elle a donc pour effet double de réduire les pertes pendant les commutations et de garder élevé le facteur de puissance.

Nous avons simulé une telle configuration de manière basique et nous avons obtenu des résultats du FP proche de 0.9 pour des puissances inférieures à 0.7 p.u.. Cependant, par prudence et dans le but de vérifier tous les paramètres de la simulation dans

l'environnement SIMULINK-MATLAB, nous préférons rester prudents et attendre d'autres résultats plus généraux en considérant toute une variété de paramètres.

## 7.6 Conclusion

Malgré plusieurs modèles de la MLI et malgré la souplesse de l'algorithme génétique, l'obtention des résultats avec précision est très difficile à atteindre.

Nous suggérons fortement un modèle de la MLI associé à la MDI simplifié en gardant l'option de la MLI comparé et la mise en pratique de la MLI-MDI dual au laboratoire.

Les premiers résultats que nous avons obtenus en utilisant un modèle très simplifié de la MDI-MLI simulée nous donnent effectivement des résultats plus élevés pour des puissances basses. Cependant, le modèle de simulation est très simplifié dans lequel nous considérons une alimentation par une source de courant idéale (ce qui permet d'augmenter considérablement le facteur de puissance). Nous concentrons nos efforts actuellement pour améliorer le modèle de simulation pour nous assurer du bon fondement de nos résultats.

Une fois que ces résultats de simulation auront montré toute l'efficacité, nous continuons nos travaux de recherche sur un modèle mathématique représentant le dual MDI/MDI-MLI.

# **Chapitre 8 - Résultats de simulation – comparaison avec le modèle mathématique**

## **8.1 Introduction**

Nous avons utilisé l'environnement *Simulink* du logiciel Matlab pour simuler les résultats de calcul pour vérifier la validité des modèles monophasés et triphasés et pour trouver l'erreur d'arrondi dans notre modèle.

Vu la souplesse et la rapidité des composants, nous utilisons le MOSFET et l'IGBT comme semiconducteurs. Le système d'alimentation est soit une tension alternative à fréquence industrielle, soit un assemblage d'une alimentation alternative et d'un transformateur abaisseur ou élévateur.

La fréquence de commutation est la même que celle de résonnance pour permettre une commutation douce et des moindres pertes.

Il y a deux parties qui fonctionnent conjointement. La partie programmation en langage Matlab qui prépare les données et fait les calculs et la partie SIMULINK qui simule un convertisseur alimenté en alternatif et qui délivre en sortie un système alternatif à fréquence exigée par le système.

La charge est un dispositif R-L-C dont on doit extraire la fréquence de résonnance pour l'accomplissement de la modulation par densité d'impulsion (MDI).

Un condensateur de découplage est placé à la sortie du redresseur.

Deux types de redresseurs sont testés : le redresseur monophasé à double alternance et le redresseur triphasé.

On extrait le courant à la sortie de l'alimentation pour calculer le facteur de puissance dans l'environnement Matlab.

Deux blocs de SIMULINK sont rajoutés pour permettre de faire nos calculs.

Le premier bloc permet le calcul du taux d'harmoniques et l'amplitude de certaines harmoniques et le deuxième bloc extrait les différentes composantes d'un courant.

Nous présentons d'abord les configurations en étude ainsi que les parties essentielles de traitement des signaux puis nous donnons les résultats de simulation sous forme graphique.

Par la suite, l'analyse des résultats sera présentée avant de conclure le chapitre.

## 8.2 Configuration du modèle Simulink

Nous avons représenté les différentes parties du système par des blocs connectés les uns aux autres.

### 8.2.1 Convertisseur monophasé

#### 8.2.1.1 Partie onduleur et charge

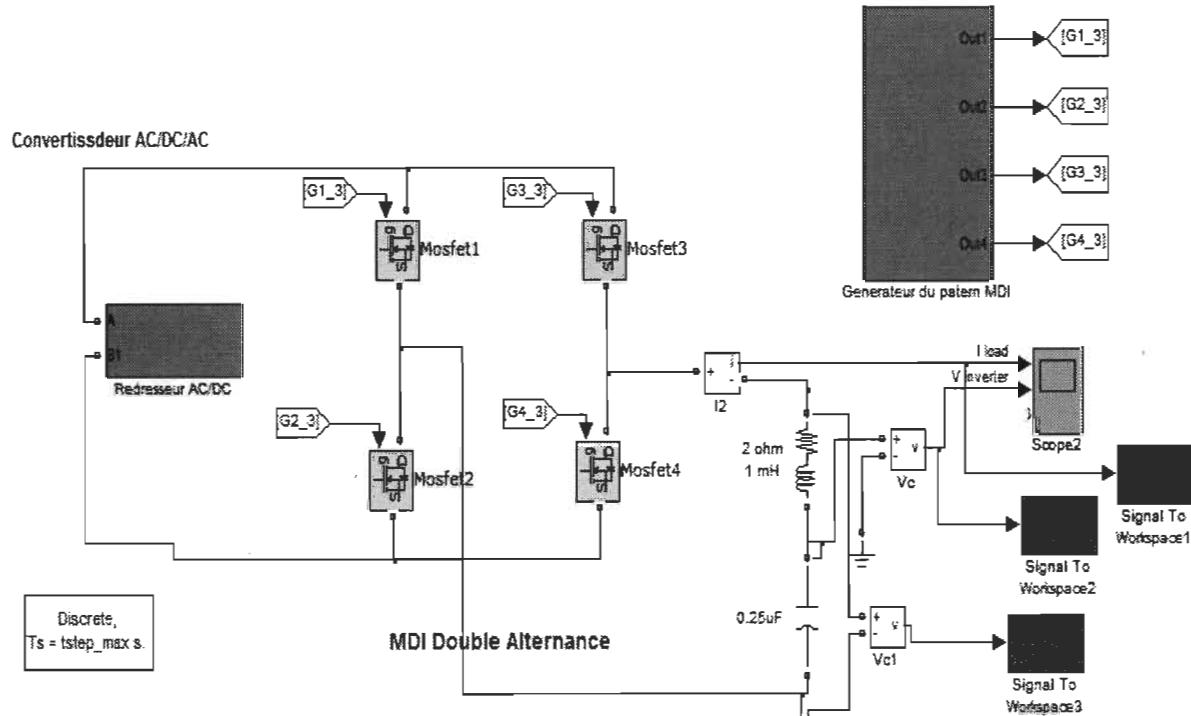


Figure 8.1 Schéma Simulink de simulation de l'onduleur

### 8.2.1.2 Partie redresseur

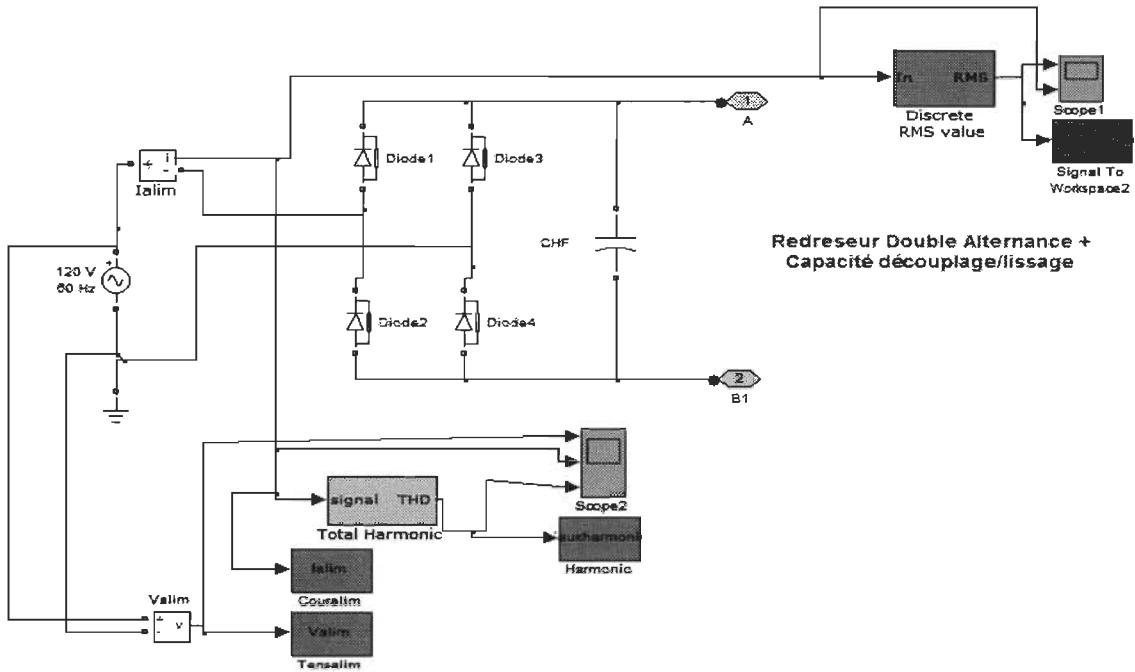


Figure 8.2 Schéma de simulation du redresseur

### 8.2.1.3 Partie commande

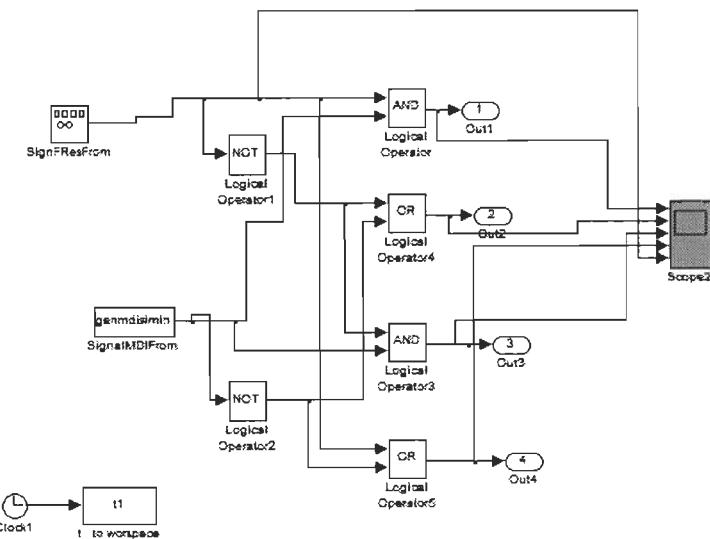


Figure 8.3 Schéma de principe de la partie commande

### 8.2.2 Convertisseur triphasé

Nous ne présentons ici que la partie concernant le redresseur.

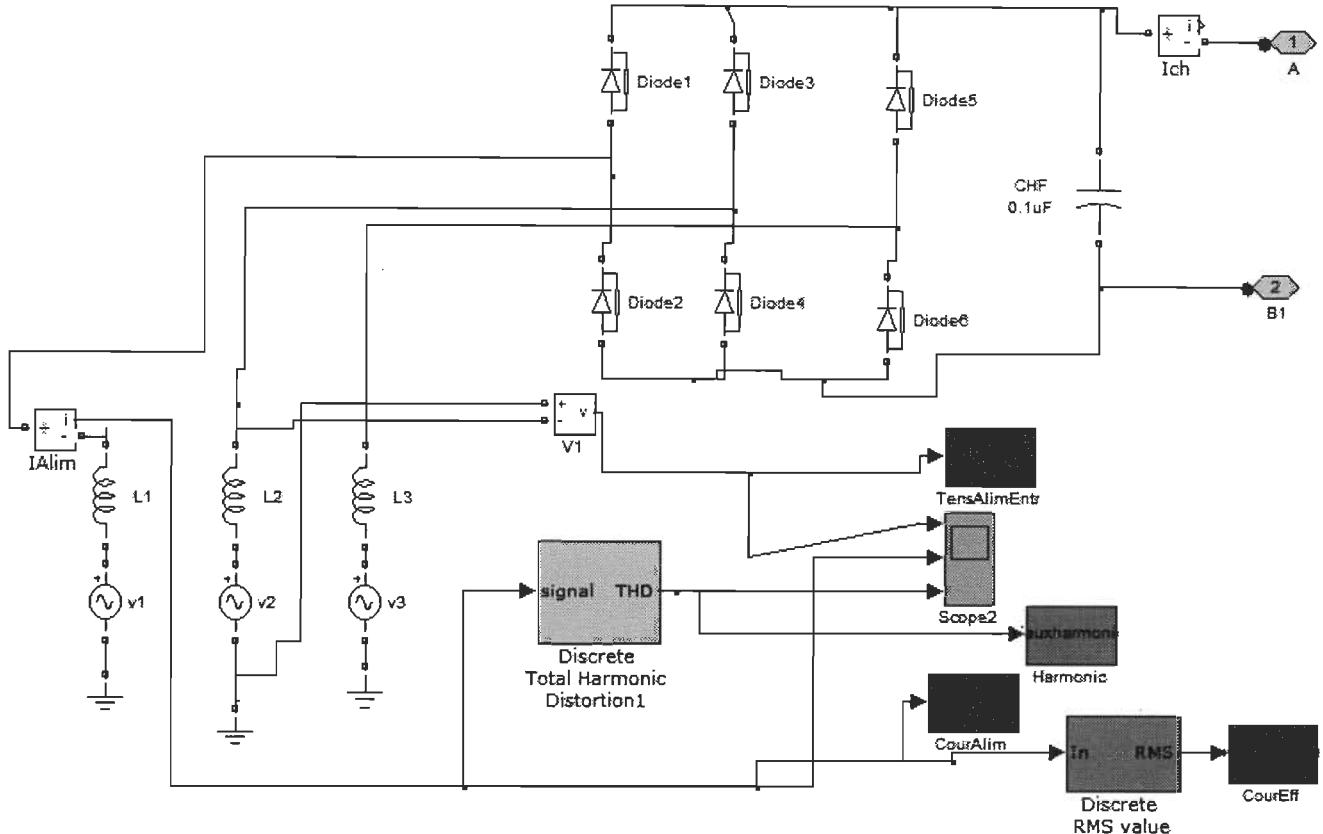


Figure 8.4 Schéma Simulink du redresseur triphasé à diodes

### 8.3 Résultats de simulation : graphiques

Nous présentons dans cette section quelques résultats de simulation à partir de l'environnement *SIMULINK*. Le modèle final réduit est comparé au modèle simulé.

Nous nous concentrons sur la validation des résultats par la simulation pour les cas de nombre de trous variant entre 1 et 7 trous.

### 8.3.1 Modèle monophasé

#### 8.3.1.1 Résultats de simulation dans le cas d'un trou

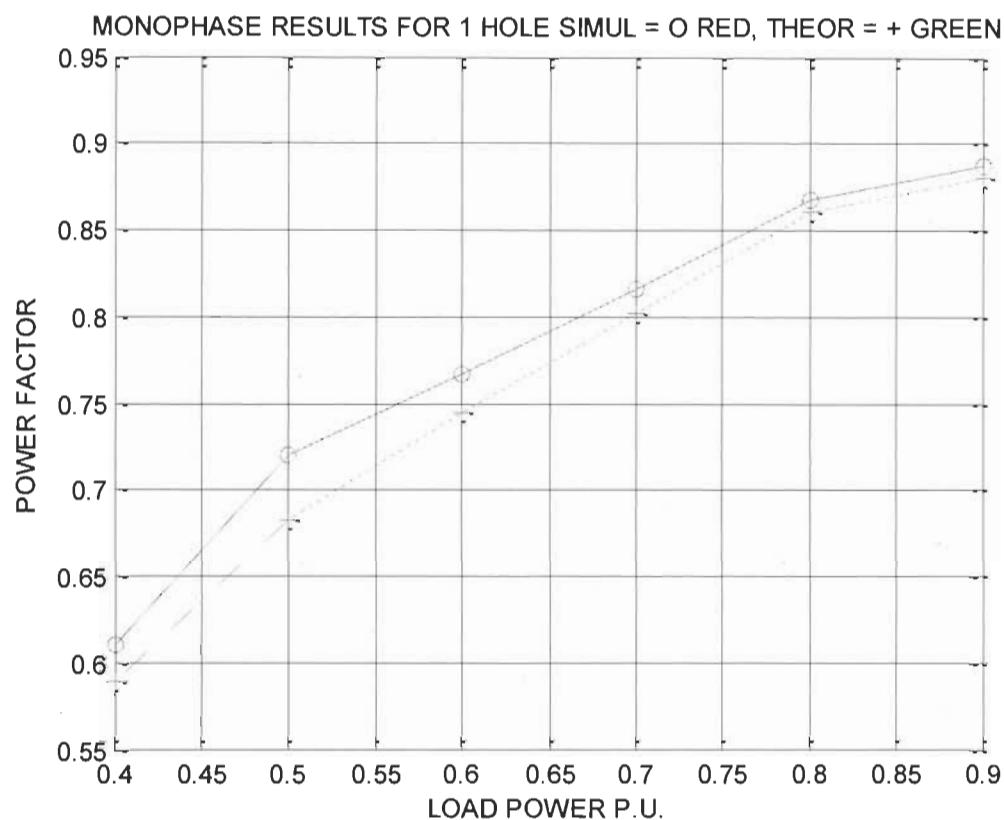


Figure 8.5 Résultats de simulation théoriques versus simulés pour le modèle monophasé pour un trou

Le facteur de puissance est déterminé dans l'environnement Simulink grâce à un bloc intégré dans cet environnement ‘taux harmonic’.

### 8.3.1.2 Résultats de simulation dans le cas de trois trous

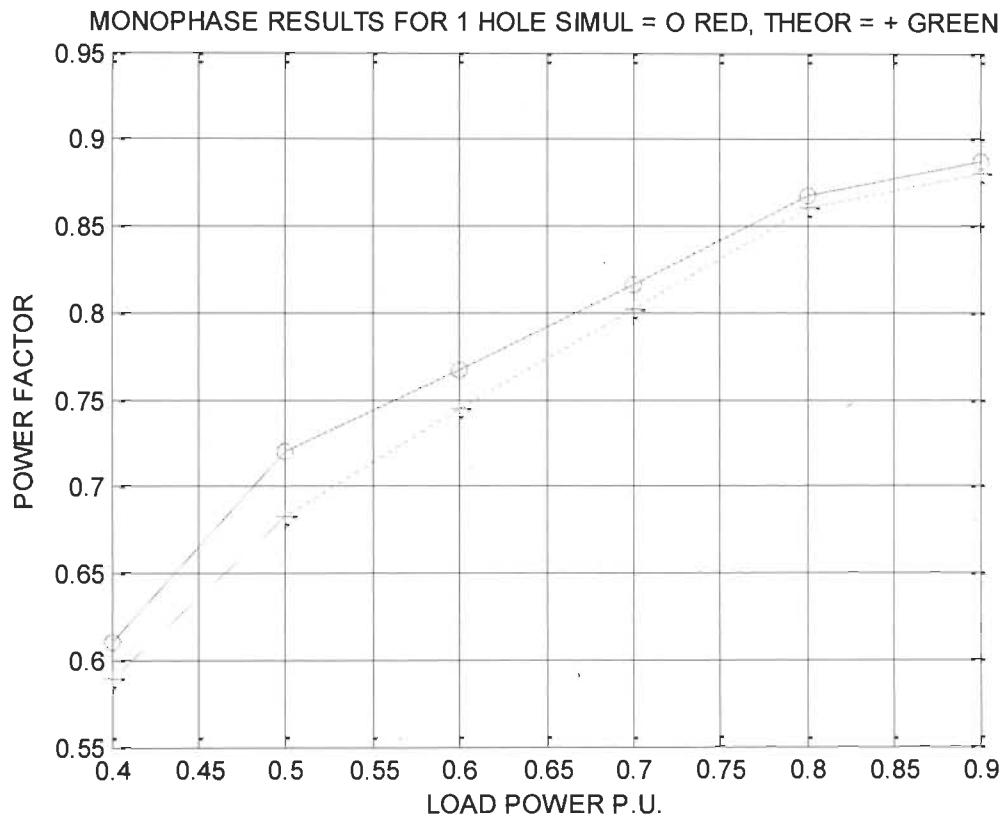


Figure 8.6 Résultats de simulation théoriques versus simulés pour le modèle monophasé pour trois trous

### 8.3.1.3 Résultats de simulation dans le cas de cinq trous

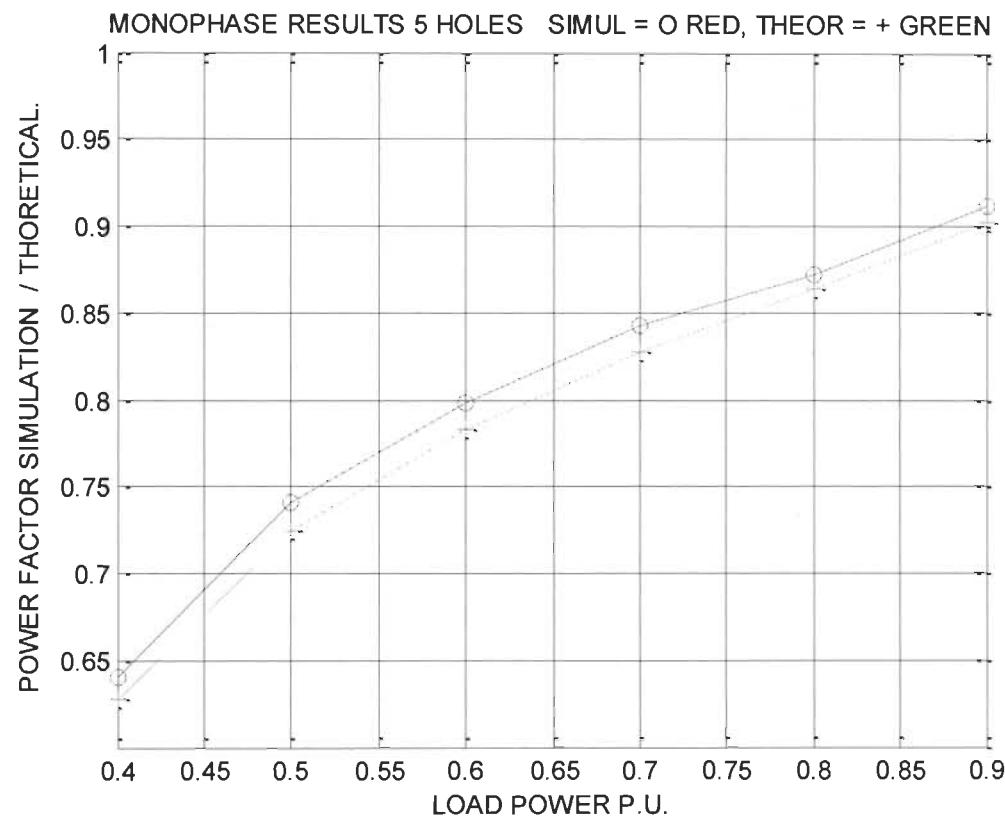


Figure 8.7 Résultats de simulation théoriques versus simulés pour le modèle monophasé pour cinq trous

### 8.3.1.4 Résultats de simulation dans le cas de sept trous

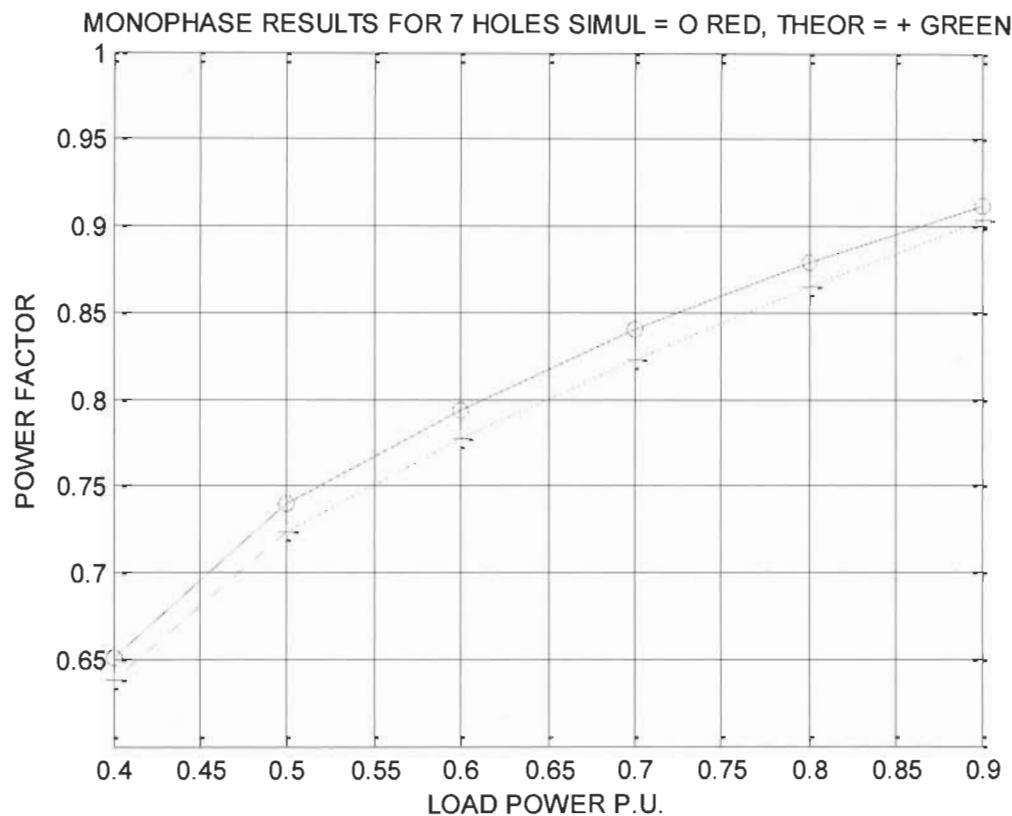


Figure 8.8 Résultats de simulation théoriques versus simulés en monophasé pour sept trous

Nous voyons clairement que les résultats théoriques et ceux de simulation sont assez proches. Les résultats de simulation sont un peu plus élevés. Nous devons continuer tout de même de travailler pour rapprocher les résultats davantage.

### 8.3.2 Modèle triphasé

#### 8.3.2.1 Résultats de simulation dans le cas d'un trou

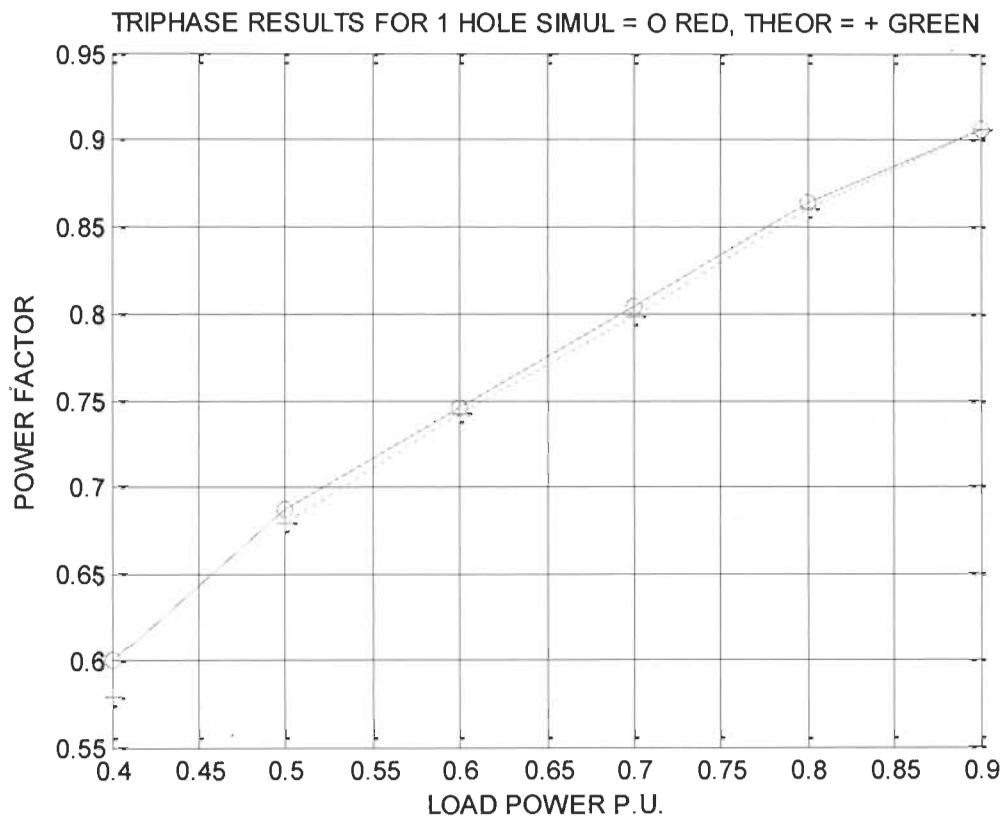


Figure 8.9 Résultats de simulation en triphasé théoriques versus simulés pour un trou

### 8.3.2.2 Résultats de simulation dans le cas de trois trous

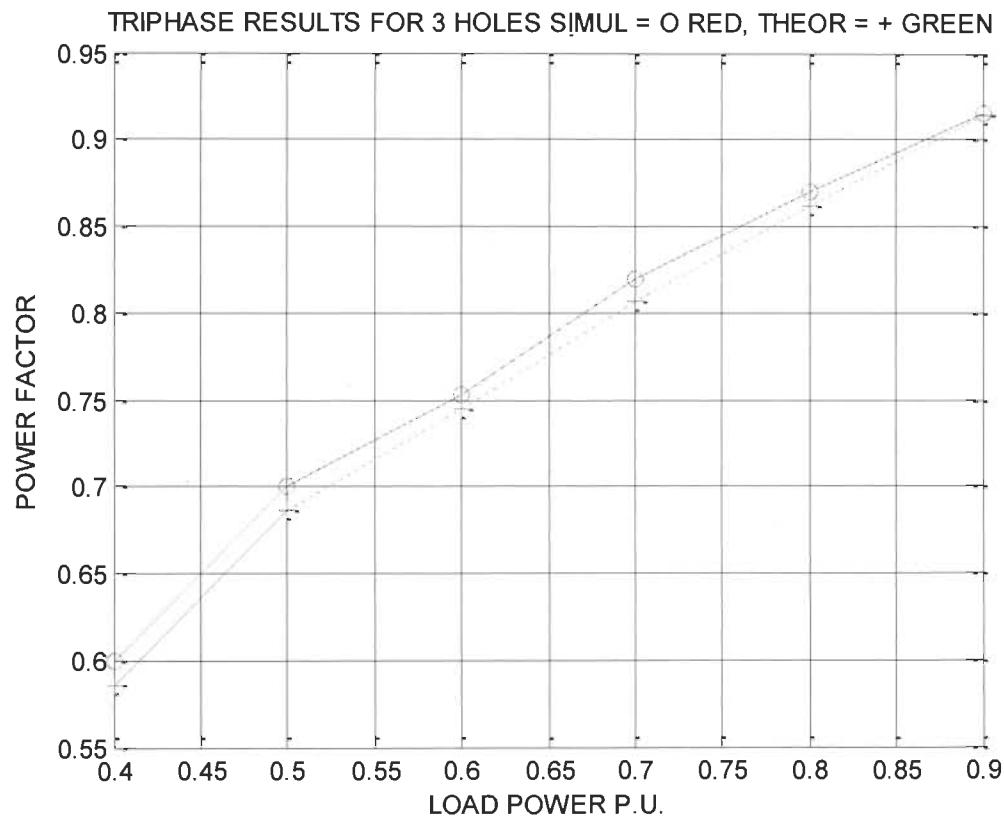


Figure 8.10 Résultats de simulation en triphasé théoriques versus simulés pour trois trous

### 8.3.2.3 Résultats de simulation dans le cas de cinq trous

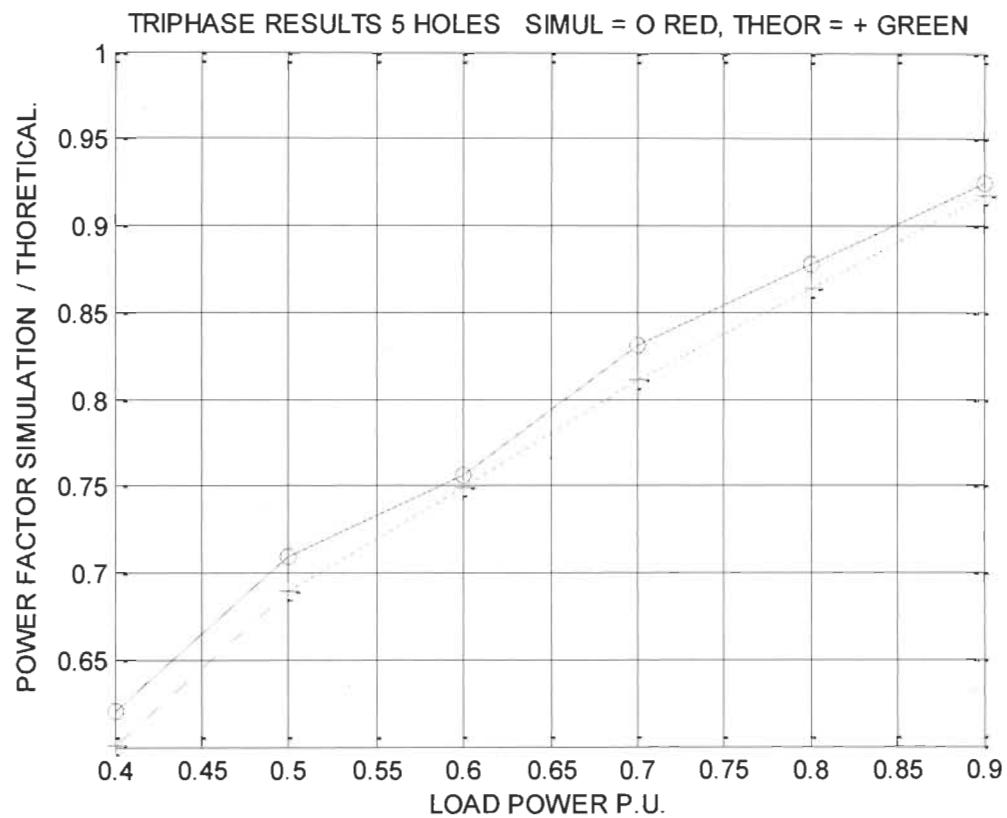


Figure 8.11 Résultats de simulation en triphasé pour cinq trous théoriques versus simulés

### 8.3.2.4 Résultats de simulation dans le cas de sept trous

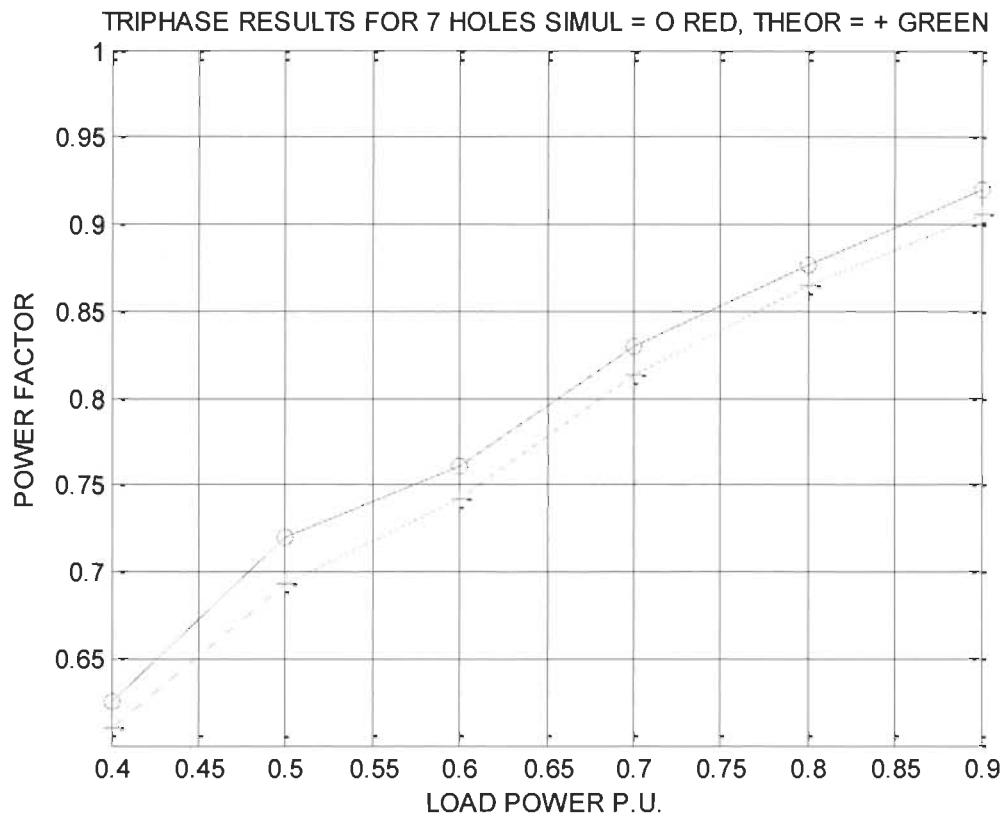


Figure 8.12 Résultats de simulation en triphasé pour sept trous théoriques versus simulés

## 8.4 Analyse des résultats

Les résultats de simulation montrent un léger écart pour toutes les puissances. Les résultats de simulation montrent aussi que ceux théoriques sont plus bas en les comparant aux simulés, surtout pour le modèle monophasé. C'est le contraire qui se produit concernant le triphasé.

Les paramètres suivants peuvent rapprocher davantage les deux courbes.

- 1) Certains paramètres du système qui ne sont représentés dans le modèle mathématique.
- 2) Dans le modèle mathématique, nous avons négligé certaines parties qui nous posaient des problèmes de programmation.
- 3) L'algorithme génétique a son poids dans l'écart. En effet, c'est un algorithme qui a une faiblesse en précision.

Les écarts représentent moins de 8%. En travaillant la précision de l'algorithme génétique et en simulant des éléments plus idéaux, nous pouvons encore améliorer les résultats.

## 8.5 Conclusion

Nous convergeons de plus en plus vers un algorithme génétique différent et modifié, nous allons modifier un ou deux opérateurs de cet algorithme en y introduisant '*une mémoire des résultats*'. Nous allons permettre la réutilisation des résultats confirmés par une autre méthode d'optimisation pour entraîner l'algorithme génétique dans son opérateur croisement et peut être son opérateur mutation.

Nous trouvons que parfois l'algorithme génétique manque de peu la meilleure solution (discrète). Or, un petit changement des valeurs entières trouvées peut créer un grand changement par la suite dans la recherche de la solution finale par l'AG à cause de l'opérateur élitisme qui va sauvegarder puis reproduire les meilleurs éléments.

D'un autre point de vue, nous considérons qu'il faut encore faire d'autres tests avec d'autres charges et d'autres fréquences de résonnance pour arriver à une conclusion finale.

Il est clair cependant que le facteur de puissance est faible pour des puissances basses.

D'après quelques recherches le dual MLI/MDI-MLI est la solution préconisée.

## **Chapitre 9 - Conclusion générale et suite des travaux**

La Méthode de commande à MDI est une technique qui nous a permis d'obtenir une commutation douce tout en réglant la puissance en sortie. Son procédé simple de premier abord cause cependant des distorsions sur les courants faisant diminuer le facteur de puissance.

Les formulations existant jusqu'à présent ont montré de très grosses équations que nous devions dégrossir. Il y avait aussi des expressions transcendantes avec des variables entières.

Que ce soit en mode monophasé ou en mode triphasé, l'obtention d'un meilleur facteur de puissance était tributaire de la formulation que nous allions produire en fin de parcours.

Nous avons décidé comme convenu de modifier les expressions pour arriver à une forme compacte et facile d'interprétation et d'interpolation.

Mise à part la reformulation qui était à faire de manière rigoureuse et très mathématisée au départ, on se devait d'explorer un certain nombre de techniques et d'algorithmes d'optimisation pour remonter le facteur de puissance en ajustant les positions de ce qu'on a appelé les trous dans la commande MDI.

La méthode génétique, par sa formulation souple, par sa façon de naviguer d'une région à une autre et sa population d'individus qui font une recherche tous azimuts, nous a permis de trouver dans la majorité des cas l'optimum global. D'autres méthodes vont être encore appliquées comme le cas du gradient conjugué avec ses variantes en développement.

Nous espérons avancer plus l'autre versant important qui se greffe à notre recherche qui est d'utiliser la technique MDI-MLI transformant les variables réelles et permettant une

recherche optimale bien meilleure, que ce soit avec la méthode génétique ou avec la méthode du gradient conjuguée.

Nous aimerais aussi aborder la recherche profonde dans les deux techniques MDI courant et MLI-MDI et les comparer.

Finalement, il serait très intéressant de changer les expressions du facteur de puissance dans le mode triphasé et de les transformer en équations quadratiques avec des sommes des carrées parfaits pour atteindre une optimisation mathématique en temps réel.

D'autre part et vu les résultats prometteurs du dual MDI-MLI, nous nous fixons l'objectif de se pencher sur cette technique et de développer un modèle mathématique qui la représente.

## Bibliographies

- [Aga96] H. Agaki, "The state of art of Power Electronics in Japan", IEEE Transaction, on Power Electronics, vol. 13, no 2, March 1998, vol. 32, no 2, March/April 1996.
- [Agr02] K. Deb, A. Prarapti, S. Agarwal and T. Meyarivan, "A fast and Multi-objective genetic algorithms NGSA-II", IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6, no 2, April 2002, pp. 182-197.
- [Ahm06] N. A. Ahmed, 'High-Frequency Soft-Switching AC Conversion Circuit With Dual-Mode PWM/PDM Control Strategy for High-Power IH Applications', IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS, VOL. 58, NO. 4, APRIL 2011
- [Ahm08] N. A. Ahmed, ' Three-Phase High Frequency AC Conversion Circuit with Dual Mode PWM/PDM Control Strategy for High Power IH Applications', World Academy of Science, Engineering and Technology 45, 2008
- [Ahm09] N. A. Ahmed, ' Three-Phase High Frequency AC Conversion Circuit with Dual Mode PWM/PDM Control Strategy for High Power IH Applications', International Journal of Electrical and Electronics Engineering , 2009
- [Ahm11] N. A. Ahmed, Toshiaki Iwai, Hideki Omori, Hyun Woo Lee and Mutsuo Nakaoka, 'A Novel Auxiliary Edge-Resonant Snubber-Assisted Soft Switching PWM High Frequency Inverter with Series Capacitor Compensated Resonant Load for Consumer Induction Heating', Journal of Power Electronics, Vol. 6, No. 2, April 2006
- [Bar03] V. Barichard, "Approches hybrides pour les problèmes multi-objectifs", Thèse de Doctorat, École doctorale d'Angers, November 2003.
- [Bro70] C.G. Broyden, "The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms", J. Inst. Maths. Applics, vol. 6, 1970, pp 76-90.

- [Cal98] H. Calleja and J. Pacheco, "Induction heating inverter with active power factor", IEEE Transaction, 1997.
- [Cal99a] H.Calleja and R. Ordóñez, "Inducting heating inverter with active power factor correction", International Journal of Electronics, vol. 86, no 9, 1999, pp.1113-1121.
- [Cal99b] H.Calleja and R. Ordóñez, "Improved Induction – heating Inverter with power Factor Correction", in Proceeding of IEEE- Pesc Conference, 1999, pp. 1132-1137.
- [Cal00a] H.Calleja and J. Pacheco, "Power Distribution In Pulse density Modulation Waveforms", in Proceeding of IEEE conference, 2000, pp. 1457-1462.
- [Cal00b] H.Calleja and J. Pacheco, "Induction heating inverter with active power factor Correction", IEEE Transaction, 2000.
- [Car07] A. Carlosena , W. Chu, B. Bakkaloglu and S. Kiaei, 'Randomized Carrier PWM With Exponential Frequency Mapping', IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, VOL. 22, NO. 3, MAY 2007
- [Dav59] W.C. Davidon, "Variable Metric Method for Minimization", A.E.C. Research and Development Report, ANL-5990, 1959.
- [Deb 95] K. Deb and R.B. Agarwal, "Simulated Binary Crossover for continuous Search Space", Complex Systems, vol. 9, no 2, 1995, pp.115-147.
- [Deb96] K. Deb and M Goal, "A combined Genetic adaptive search for engineering Design", Computer Science and informatics, vol. 26, no 1, 1996, pp. 30-45.
- [Deb01] K. Deb, "Multi-objective optimization using evolutionary algorithms", John Wiley & sons Ltd, 2001.
- [Dup04] A. Dupuis, "Algorithme génétique dans la conception de la commande des systèmes et identification des paramètres", Thèses en vue de préparation de maîtrise, Université de Moncton.

- [Elb96] M. E. Elbuluk, D. S. Zinger, and T. Lee, 'Performance of MCT's in a Current-Regulated AC/AC PDM Converter', IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, VOL. 11, NO. 1, JANUARY 1996.
- [Fat05] K. Fathy, Y. Miura, K. Yasui, I. Hirota, T. Iwai, H. Omori, H. Woo Lee, and M. Nakaoka, 'PWM/PDM Dual Mode Controlled Soft Switching Multi Resonant High-Frequency Inverter', IEEE 2005.
- [Fat07] K. Fathy, S.-K. Kwon, and M. Nakaoka, ' Advanced Induction Heating Equipment using Dual Mode PWM-PDM Controlled Series Load Resonant Tank High Frequency Inverters', Journal of Power Electronics, Vol. 7, No. 3, July 2007
- [Fra97] J. Franz, C. Ruppel, F. Seifert and R. Weigel, "Hybrid optimization technique for the design of saw-filters", IEEE Ultrasonics Symposium, 1997.
- [Fle63] R. Fletcher. and M.J.D. Powell, "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization", Computer Journal, vol. 6, 1963, pp 163-167.
- [Fle70] R. Fletcher, "A New Approach to Variable Metric Algorithms", Computer Journal, vol. 13, 1970, pp 317-322.
- [Fuj96] H. Fujita and H. Agaki, "Pulse-Density-Modulation Power Control of a 4 kw, 450 kHz Voltage-Source Inverter for Induction Melting Applications", IEEE Transaction on Industry Applications, vol. 32, no 2, March/April 1996.
- [Fuj97] H. Fujita, S. Ogasawara and H. Agaki, "An approach to a Broad Range Power Control in Voltage-Source Series Resonant Inverters for Corona Discharge Treatment Pulse Density Modulation", IEEE PESC Conference, 1997, pp1000-1006.
- [Fuj99] H. Fujita and H. Agaki, "Control and performance of a pulse-density- modulated series Resonant Inverters for Corona Discharge process", IEEE Transaction on Industry Applications, vol. 35, no.3, May/June 1999, pp. 621-627.

- [Gar92] I. Garai, Y.C. Ho and R.S. Sreenivcas, "Hybrid Optimization- An Experimental Study", Proceedings of the 31<sup>st</sup> conference on Decisional Control Tucson, Arizona, December 1992, pp 2068-2073.
- [Gen06] "<http://www.genetic-programming.org>", 17 conference proceedings books on genetic programming (GP), Annual 2005 Genetic and Evolutionary Computation (GECCO) conference. (Site de cours sur les algorithmes évolutionnaires)
- [Gol70] D. Goldfarb, "A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means", Mathematics of Computing, vol. 24, 1970, pp 23-26.
- [Gol 89] D.E. Goldberg, "Genetic Algorithm in search, Optimisation and machine Learning", Addison Wesley Longman, ISBN-0-201-15767-5, 1989.
- [Hoc04] A. Hoceini and M. Keskmiri, "Applicant of Direct methods in Optimal Path Planning of Redundant Cooperative Robots", Proceedings of the 2004 IEEE/RSJ Intelligent Robots and Systems, 2004, pp.3619-3624.
- [Hua05] H. Huang, "Optimization of PWM Inverter Output Patterns", Thèse de Doctorat polytechnique de New-York
- [Hol75] J. Holland, "Adaptive in Natural and artificial systems", University of Michigan Press, 1975
- [Jon80] D. Jong, "Adaptive systems design: A genetic approach", IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, vol. 10, no 9, 1980, pp. 566-574.
- [Kim04] Y. Oh, T. Chung and H. Jung, "Optimal Design of Electric Machine Using Genetic Algorithms Coupled with Direct method", IEEE Transactions on magnetics, vol. 35, no 3, May 2004, pp.1742-1745.
- [Kou02] Y.X. Wang, Y.L. feng, O. Koudriavisev, S. Moisseev and Y. Konishi, "A novel pulse-density-modulated Frequency Inverter for Silient-Discharge-Type Ozonizer", IEEE Transaction on Industry Applications, vol. 38, no 2, March/April 2002, pp. 369-377.

- [Lai96] J-S. Lai and F. Zheng Peng, "Multilevel Converter A new Breed of Power Converters", IEEE Transactions On Industry Applications, vol. 32, no 3, May/June 1996, pp509-517.
- [Lis04] J.M. Liserre, A. Dell'Aquila and F. Blaabjerg, "Genetic Algorithm-Based Design of the Active Damping for LCL-Filter Three-Phase Active Rectifier", IEEE Transaction On Power Electronics, vol. 19, no1, January 2004.
- [Mas05] A.I. Maswood and S. Wei, "Genetic Algorithm-based solution in PWM converter switching", IEEE proc.-Electr. Power Appl., vol. 152, no 3, May 2005, pp.473-477.
- [Mat04] Matlab version 13.0, optimization tool box, 2004.
- [Mic82] Z. Michalewzic, "Genetic algorithms + data structures = Evolution Programs, Springer-Verlag", 1982.
- [Mor00] T. Morimoto, S. Shirakawa, O. Koudriavisev and M. Nakaoka, "Zero-Voltage and Zero-Current Hybrid Soft-Switching Phase-Shifted PWM DC-DC Power Converter for High Power Applications", IEEE 2000.
- [Mur04] H. Muraoka, M. NakaOka and K. Sakamoto, 'Soft-switching PWM/PDM Controlled High-Frequency Link DC Power Converter Operating at Battery Input', The 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, November 2 - 6, 2004, Busan, Korea
- [Pan00] W. Pan, F. Zhun, F. Shan and Z. Yun, "Study on a Novel Hybrid Adaptive Genetic Algorithm Embedded Conjugate Gradient Algorithm", Proceedings of the 3<sup>rd</sup> word congress on Intelligent Control and Automation, June 28-July, 2000, pp. 630-633.
- [Pet98] A. Petrovic, A. Zejak, B. Zenic and I. Simie, "Minimax Algorithm Application in ECF Ecui Design", IEEE Transaction IT, 1997.
- [Ras04] M.H. Rashid, "Power Electronics", Prentice Hall, 2004.

- [Ren96] J.M. Renders and S.P. Flasse, "Hybrid Methods using Genetic Algorithm for global Optimisation", IEEE Transaction On Systems, Man and Cybernetics, Part-B Cybernetics, vol. 26, no 2, April 1996, pp. 243-257.
- [San02] A. Sandali, A. Cheriti and P. Sicard, "Simple PDM Pattern generation for an Ac/ac resonant converter", in proceedings of IEEE-IECON Conference, pp. 294-299, vol. 1, November 4-8 ,Spain, 2002.
- [San04] A. Sandali, A. Cheriti, P. Sicard and K. El-Haddad, "Application of PDM Control in a Multilevel AC/AC Converter with Self Power Factor Correction", 35<sup>th</sup> IEEE Power Electronics Specialists Conference, 2004.
- [San05] A. Sandali, A. Cheriti, P. Sicard and H. Benkaci Ali, "PDM Control Applied to an AC/AC Converter with three-phase diode rectifier". Accepté pour publication dans IECON2005.
- [San09] A. Sandali, 'Optimisation des performances et élaboration de nouvelles lois de commande des convertisseurs statiques à modulation d'impulsions', Thèse de doctorat, 2009.
- [Seg04] G.Seguier, "L'électronique de puissance, les fonctions de base et leurs applications", Dunod, 8<sup>e</sup> édition, 2004.
- [Sha70] D.F. Shanno, "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization", Mathematics of Computing, vol. 24, 1970, pp 647-656.
- [Sha04] N. Shahihi, H. Esmaeilzadeh, M. Abdollahi, E. Ebrahimi and C. Lucas, "Self-Adaptive Memetic Algorithm : An Adaptive Conjugate Gradient Approach", Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems Singapore, 1-3 December, 2004, pp. 6-11.
- [Str95] N. Strinivas and K. Deb, "Multi-objective function optimisation using non-dominated sorting genetic algorithms", Evolutionary Computing, vol. 2, no 3, Fall 1995, pp. 221-247.

- [Tol01] B. Ozbineci, A.O.P. Pinto and L.M Tolbert, "Pulse-width optimization in a pulse modulated High Frequency Ac-ac Converter Using Genetic Algorithms", IEEE, 2001.
- [Tsa04] J.T Tsai, T.K. Liu and J.H. Chou, "Hybrid Taguchi-Genetic Algorithm for global Numerical Optimisation", IEEE Transaction On Evolutionary Computation, vol. 8, no 4, August 2004, proc.-Electr. Power Appl., vol. 152, no 3, May 2005, pp. 473-477.
- [Wan98] S. Wang, M..Ishtobi, S. Shirakawa and M. Nakaoka, "Current Source Type Parallel Inductor-Compensated Load resonant Inverter with PDM Control Scheme for Efficient Ozonizer", IEEE CIEP 1998, pp. 103-110.
- [Wan99a] S. Wang, Y. Konishi, S. Shirakawa, Y. Kato, N. Takahashi and M. Nakaoka, "Discrete Pulse Modulated High-Frequency Soft-Switching Inverter and Its new Application", IEEE 1999 International Conference on Power electronics and Drive Systems, PEDS'99, July 1999, Hong-Kong.
- [Wan99b] S. Wang, O. Koudriavisev, "Advanced development of Voltage Source Soft-Source-Switching High-Frequency Inverter For Silent Discharge Tube Loads", IEEE 1999.
- [Wan01] Y.X. Wang, Y.L. Feng, O. Koudriavisev, S. Moisseev and Y. Konishi, "Pulse-density-modulated Soft Switching High Frequency Parallel Load Resonant Current-Source Inverter with A single Auxiliary Active Resonant Snubber", IEEE, PEDS 2001.
- [WIK06] [http://fr.wikipedia.org/wiki/Métaheuristique#\\_note-24](http://fr.wikipedia.org/wiki/Métaheuristique#_note-24), Site d'historique, de définitions et d'applications pour les algorithmes météheuristiques.
- [Wri91] A. Wright, "Genetic Algorithm for real optimisation, fundations of genetic algorithms", Morgan Kofman, 1991.
- [Wri05] A. Wright and K.A. De Jong, "Foundation of Genetic Algorithm", 8<sup>th</sup> Workshop FOGA 2005, AIZU Makamatsu City, Japan, January 5-9, 2005, revised selected papers, Springer 2005.

## **Annexe A – Formulation détaillée du facteur de puissance pour le cas de la MDI dans le convertisseur monophasé. Nombre de trous quelconque**

### **Notations :**

*L'origine du temps coïncide avec le passage par zéro de la tension de l'entrée de l'onduleur u.*

T, f, et  $\omega$  sont respectivement la période, la fréquence et la pulsation de la tension d'alimentation v.

$T_{\text{res}}$  et  $F_{\text{res}}$  sont respectivement la période et la fréquence de résonance. Dans le cas d'un onduleur à résonance, elles sont respectivement égales à la période et à la fréquence de commutation de l'onduleur.

Une alternance de la tension  $u = |v|$  est échantillonnée avec un pas égal à  $T_{\text{res}}$ . Nous définissons alors la variable discrète  $nT_{\text{res}}$  avec n un entier variable entre 1 et  $N=T/(2T_{\text{res}})$ .

Des cycles de roue libre se succèdent entre  $n_l T_{\text{res}}$  et  $N_s T_{\text{res}}$  formant ce que nous pouvons appeler des trous de bornes  $N_{l_i}$  et  $N_{s_i}$ .

Tous nos calculs sont basés sur les formules de Moivre et d'Euler ainsi que toute autre transformation mathématique.

Dans les transformations d'Euler, i est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

En annexe II, d'autres éléments sur les formules utilisées sont donnés.

## 1) Calcul de séries sans trou.

**1.1) Terme général :**  $\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \sin(n \frac{\pi}{N} - j \frac{\pi}{N})$

$$\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \sin(n \frac{\pi}{N} - j \frac{\pi}{N}) = \frac{-1}{2i} \left\{ \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{N} - \frac{n\pi}{N})} \right) - \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{N} - \frac{n\pi}{N})} \right) \right\} \quad (\text{I.1})$$

$$\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \sin(n \frac{\pi}{N} - j \frac{\pi}{N}) = \frac{-1}{2i} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{-i \frac{n\pi}{N}} \right) + \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{i \frac{n\pi}{N}} \right) \quad (\text{I.2})$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ -\frac{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{N}} \right)^{n-n_l+1}}{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{N}} \right)} e^{-i \frac{n\pi}{N}} + \frac{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{N}} \right)^{n-n_l+1}}{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{N}} \right)} e^{i \frac{n\pi}{N}} \right\} \quad (\text{I.3})$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\left( e^{-i \frac{n\pi}{N}} - a^2 e^{-i \frac{\pi(n+1)}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{N}} \right)^{n-n_l+1} \right) + \left( a^2 e^{i \frac{\pi(n+1)}{N}} - e^{i \frac{n\pi}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{N}} \right)^{n-n_l+1} \right)}{\left( a^2 e^{i \frac{\pi}{N}} - 1 \right) \left( 1 - a^2 e^{-i \frac{\pi}{N}} \right)} \right\} \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{1}{2i} \left\{ \frac{\left( e^{-i \frac{n\pi}{N}} - a^2 e^{-i \frac{\pi(n+1)}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{N}} \right)^{n-n_l+1} \right) + \left( a^2 e^{i \frac{\pi(n+1)}{N}} - e^{i \frac{n\pi}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{N}} \right)^{n-n_l+1} \right)}{-1 + a^2 \left( e^{-i \frac{\pi}{N}} + e^{i \frac{\pi}{N}} \right) - a^4} \right\} \quad (\text{I.5})$$

$$\left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^{4+2n-2n_l} \sin(-\frac{\pi n_l}{N}) - a^{2+2n-2n_l} \sin(-\frac{\pi n_l}{N} + \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N})}{-1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4} \right\} \quad (\text{I.6})$$

**1.2) Calcul du terme :**  $a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} a^{2j} u(n_s - j)$

Dans toutes les équations qui suivent, nous faisons les calculs **au terme  $\hat{V}$  près** :

$$a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} a^{2j} u(n_s - j) = a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} a^{2j} \sin(n_s \frac{\pi}{N} - j \frac{\pi}{N}) \quad (\text{I.7})$$

$$= a^{2(n-n_s)} \left[ \frac{-1}{2i} \sum_{j=0}^{n_s-n_l} \left( a^{2j} e^{ij\frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{-i\frac{n_s\pi}{N}} \right) + \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n_s-n_l-1} \left( a^{2j} e^{-ij\frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{i\frac{n_s\pi}{N}} \right) \right] \quad (\text{I.8})$$

$$= a^{2(n-n_s)} \frac{1}{2i} \left\{ -\frac{1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{N}} \right)^{n_s-n_l+1}}{1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{N}} \right)} e^{-i\frac{n_s\pi}{N}} + \frac{1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}} \right)^{n_s-n_l+1}}{1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}} \right)} e^{i\frac{n_s\pi}{N}} \right\} \quad (\text{I.9})$$

$$= a^{2(n-n_s)} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\left( e^{-i\frac{n_s\pi}{N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n_s+1)}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{N}} \right)^{n_s-n_l+1} \right) + \left( a^2 e^{i\frac{\pi(n_s+1)}{N}} - e^{i\frac{n_s\pi}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}} \right)^{n_s-n_l+1} \right)}{\left( a^2 e^{i\frac{\pi}{N}} - 1 \right) \left( 1 - a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}} \right)} \right\}$$

(I.10)

$$= a^{2(n-n_s)} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\left( e^{-i\frac{n_s\pi}{N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n_s+1)}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{N}} \right)^{n_s-n_l+1} \right) + \left( a^2 e^{i\frac{\pi(n_s+1)}{N}} - e^{i\frac{n_s\pi}{N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}} \right)^{n_s-n_l+1} \right)}{\left( -1 + a^2 \left( e^{-i\frac{\pi}{N}} + e^{i\frac{\pi}{N}} \right) - a^4 \right)} \right\} \quad (\text{I.11})$$

$$= a^{2(n-n_s)} \left\{ \frac{-\sin(n_s \frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_s-2n_l} \sin(\frac{n_l \pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_s \pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_s-2n_l} \sin(n_l \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (I.12)$$

**2) Expressions pour le calcul de la tension aux bornes de la capacité en roue libre ( q trous)**

**2.1) Expression de la tension aux bornes de la capacité**

$$v_c = -(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = -(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} (u - u''_k)(n-j) \quad (I.13)$$

Avec :

$$u(n-j) = \sin(n \frac{\pi}{N} - j \frac{\pi}{N}) \quad (I.14)$$

et

$$u''_k = u.P_{n_l-n_s}, \quad P_{n_l-n_s} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_l \leq t \leq n_s T_{res} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (I.15)$$

2.1.1) Calcul de  $-(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j)$

$$-(1+a^2) \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = -(1+a^2) \left[ \frac{-1}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{-i \frac{n\pi}{N}} \right) + \frac{1}{2i} \sum_{j=0}^{n-1} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{N}} \right) \left( e^{i \frac{n\pi}{N}} \right) \right]$$

(I.16)

$$= -(1+a^2) \frac{1}{2i} \left\{ -\frac{1-\left(a^2 e^{i\frac{\pi}{N}}\right)^n}{1-\left(a^2 e^{i\frac{\pi}{N}}\right)} e^{-i\frac{n\pi}{N}} + \frac{1-\left(a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}}\right)^n}{1-\left(a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}}\right)} e^{i\frac{n\pi}{N}} \right\} \quad (\text{I.17})$$

$$= -(1+a^2) \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\left(e^{-i\frac{n\pi}{N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n+1)}{N}}\right) \left(1-\left(a^2 e^{i\frac{\pi}{N}}\right)^n\right) + \left(a^2 e^{i\frac{\pi(n+1)}{N}} - e^{i\frac{n\pi}{N}}\right) \left(1-\left(a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}}\right)^n\right)}{\left(a^2 e^{i\frac{\pi}{N}} - 1\right) \left(1-a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}}\right)} \right\} \quad (\text{I.18})$$

$$-(1+a^2) \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\left(e^{-i\frac{n\pi}{N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n+1)}{N}}\right) \left(1-\left(a^2 e^{i\frac{\pi}{N}}\right)^n\right) + \left(a^2 e^{i\frac{\pi(n+1)}{N}} - e^{i\frac{n\pi}{N}}\right) \left(1-\left(a^2 e^{-i\frac{\pi}{N}}\right)^n\right)}{\left(-1+2a^2\left(e^{-i\frac{\pi}{N}} + e^{i\frac{\pi}{N}}\right) - a^4\right)} \right\} \quad (\text{I.19})$$

$$-(1+a^2) \left\{ \frac{-\sin(n\frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4\right)} \right\} \quad (\text{I.20})$$

2.1.2) Calcul de  $(1+a^2) \sum_{l=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j)$

Le terme  $u_k''(n-j)$  n'est non nul qu'à l'intérieur d'un trou quelconque il faut voir la variation de n-j en fonction de la gamme de variation de n.

$$u_k'' = u P_{n_{IK}-n_{SK}} \quad \text{Avec : } \begin{cases} P_{n_{IK}-n_{SK}}(t) = 1 & \text{si } n_{IK} T_{res} \leq t \leq n_{SK} T_{res} \\ & = 0 \text{ si non} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

**1<sup>er</sup> cas**  $1 \leq n < n_{II}$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n]$ .  $(n-j)$  demeure alors inférieure à  $n_{II}$ .

$$\text{D'où } \sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_1''(n-j) + \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_2''(n-j) + \dots + \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0$$

(I.22)

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{II} \leq n < n_{III}$

L'intervalle de  $j$ ,  $[0, n-1]$  est partagé en **trois** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{II}] \cup [n-n_{II}+1, n_{III}] \cup [n_{III}+1, n-1].$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_2''(n-j) = \dots = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0 \text{ quelque soit l'intervalle, car } n-j \text{ est inférieur à}$$

la position de la borne du trou.

Donc :

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_1''(n-j)$$

(I.23)

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{II}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{II}, n]$ . D'où  
 $u_1''(n-j) = u(n-j).$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{II}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{II}-1]$ . D'où  
 $u_1''(n-j) = 0$

$$u_k''(n-j) = 0 \text{ ailleurs}$$

Ainsi :

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_1''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{II}} a^{2j} u(n-j)$$

(I.24),

d'après l'expression (I.6) ,

$$\sum_{j=0}^{n-n_{II}} a^{2j} u(n-j) = \left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^{4+2n-2n_{II}} \sin(-\frac{\pi n_{II}}{N}) - a^{2+2n-2n_{II}} \sin(-\frac{\pi n_{II}}{N} + \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (I.25)$$

**3 cas :**  $n_{s1} < n < n_{I2}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_2(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_q(n-j) = 0 \quad (I.26)$$

L'intervalle de  $j$  [0, n-1] est partagé en **trois** intervalles (attention  $n-n_{s1}$  est plus petit que  $n-n_{II}$ ) :  $[0, n-1] = [0, n-n_{s1}-1] \cup [n-n_{s1}, n-n_{II}] \cup [n-n_{II}+1, n-1]$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{s1}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}+1, n]$ . D'où  $u''_k(n-j) = 0$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{II}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{II}, n_{s1}]$ . D'où  $u''_k(n-j) = u(n-j)$ .

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{II}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{II}-1]$ . D'où  $u''_k(n-j) = 0$ .

Donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{II}} a^{2j} u(n-j) \quad (I.27)$$

Si on fait le changement de variable  $l = j-n+n_{s1}$ .

$$\sum_{j=n-n_s}^{n-n_I} a^{2j} u(n-j) = \sum_{l=0}^{n_s-n_I} a^{2(j+n-n_{s1})} u(n_s-l) = a^{2(n-n_{s1})} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} a^{2j} u(n_s-j) \quad (I.28)$$

(Après changement de la variable muette  $l$  par  $j$ ). Et d'après l'expression (I.12),

$$a^{2(n-n_{l1})} \sum_{j=n-n_{l1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) = a^{2(n-n_{l1})} \left\{ \frac{-\sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - a^2 \sin(\frac{n_{l1}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s1}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right\}$$

(I.29)

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1+1}, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}+1, 1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

**Fin de calcul pour un trou, s'il ya un seul trou, remplacer  $n_{l2}$  par N**

**4<sup>e</sup> cas :  $n_{l2} < n < n_{s2}$**

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_3''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0$$

(I.30)

L'intervalle de  $j$ ,  $[0, n-1]$  est partagé en **quatre** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{l2}] \cup [n-n_{l2}+1, n-n_{s1}] \cup [n-n_{s1}+1, n-n_{l1}] \cup [n-n_{l1}+1, n-1]$$

□ Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{l2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l2}, n]$ . D'où

$$u_k''(n-j) = u(n-j), \quad \sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l2}} a^{2j} u_2''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l2}} a^{2j} u(n-j)$$

□ Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l2}+1, n-n_{s1}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}, n_{l2}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

□ Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}, n_{s1}]$ . D'où

$$u_k''(n-j) = u(n-j), \quad \sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u_1''(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j).$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{l1}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l2}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) \quad (I.31)$$

Expression qu'on pourrait encore développer

**5<sup>e</sup> cas :  $n_{s2} < n < n_{l3}$**

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_3''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0 \quad (I.32)$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en **cinq** intervalles :

$$\begin{aligned} [0, n-1] = & [0, n-n_{s2}-1] \cup [n-n_{s2}, n-n_{l2}] \cup [n-n_{l2}+1, n-n_{s1}-1] \cup [n-n_{s1}, n-n_{l1}] \\ & \cup [n-n_{l1}+1, n-1] \end{aligned}$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{s2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s2}+1, n]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s2}, n-n_{l2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l2}, n_{s2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l2}+1, n-n_{s1}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}+1, n_{l2}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}, n_{l1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{I1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$

Donc :

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{I1}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s2}}^{n-n_{I2}} a^{2j} u(n-j) \quad (I.33)$$

**Fin de calcul pour deux trous, s'il y a deux trous seulement, remplacer  $n_{I3}$  par N**

**6<sup>e</sup> cas :  $n_{I3} < n < n_{S3}$**

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_4''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0 \quad (I.34)$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en **cinq** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{I3}] \cup [n-n_{I3}, n-n_{S2}-1] \cup [n-n_{S2}, n-n_{I2}] \cup [n-n_{I2}+1, n-n_{S1}-1]$$

$$\cup [n-n_{S1}, n-n_{I1}] \cup [n-n_{I1}+1, n-1]$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{I3}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I3}, n]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I3}, n-n_{S2}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S2}+1, n_{I3}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S2}, n-n_{I2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I2}, n_{S2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I2}+1, n-n_{S1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S1}, n_{I2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}, n_{s1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{l1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$

Donc :

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l3}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s2}}^{n-n_2} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) \quad (I.35)$$

**7<sup>e</sup> cas**  $n_{s3} < n < n_{l4}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_4''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en **six** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{s3}+1] \cup [n-n_{s3}, n-n_{l3}] \cup [n-n_{l3}+1, n-n_{s2}-1] \cup [n-n_{s2}, n-n_{l2}]$$

$$\cup [n-n_{l2}+1, n-n_{s1}+1] \cup [n-n_{s1}, n-n_{l1}] \cup [n-n_{l1}+1, n-1]$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{s3}+1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s3}, n]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s3}, n-n_{l3}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l3}, n_{s2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l3}+1, n-n_{s2}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s2}+1, n_{l3}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s2}, n-n_{l2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l2}, n_{s2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l2}+1, n-n_{s1}+1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}-1, n_{l2}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}, n_{s1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{l1}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Ainsi de suite de proche en proche, nous pouvons démontrer par récurrence que :

**Si  $n_{lm} < n < n_{sm}$**

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n-n_{sk}}^{n-n_{lk}} \alpha^{2j} u(n-j) + \sum_{j=0}^{n-n_{lq}} \alpha^{2j} u(n-j) \quad (I.36)$$

**Si  $n_{sm} < n < n_{I(m+1)}$**

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=n-n_{sk}}^{n-n_{lk}} \alpha^{2j} u(n-j) \quad (I.37)$$

**Les expressions de  $v_c$  (au facteur multiplicateur  $\hat{V}$ ) près deviennent :**

**1er cas**  $1 \leq n < n_{l1}$

$$v_c(n) = -(1+\alpha^2) \left\{ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + \alpha^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - \alpha^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - \alpha^4 \right)} \right\} \quad (I.38.1)$$

à un terme infiniment petit près égal à :

$$v_c(n) = -(1+a^2) \begin{cases} \frac{\sin(n\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \end{cases} \quad (\text{I.38.2})$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{l1} \leq n < n_{s1}$

$$v_c(n) = -(1+a^2) \begin{cases} \frac{-\sin(n\frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4)} \\ - \frac{-\sin(n\frac{\pi}{N}) + a^{4+2n-2n_l} \sin(-\frac{\pi n_l}{N}) - a^{2+2n-2n_l} \sin(-\frac{\pi n_l}{N} + \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N})}{(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4)} \end{cases} \quad (\text{I.39.1})$$

$$= -(1+a^2) \begin{cases} -a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N}) + a^{4+2n-2n_{l1}} \sin(-\frac{\pi n_{l1}}{N}) - a^{2+2n-2n_{l1}} \sin(-\frac{\pi n_{l1}}{N} + \frac{\pi}{N}) \\ (-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4) \end{cases} \quad (\text{I.39.2})$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1} < n < n_{l2}$

$$v_c(n) = -(1+a^2) \begin{cases} \frac{-\sin(n\frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4)} + \\ a^{2(n-n_s)} \left[ \frac{-\sin(n_{s1}\frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(\frac{n_{l1}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_s\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_s-n_l} \sin(n_l \frac{\pi}{N})}{(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4)} \right] \end{cases} \quad (\text{I.40.1})$$

Sensiblement égal à :

$$v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(n \frac{\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} + \\ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - \alpha^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} \end{array} \right\} \quad (I.40.2)$$

**4<sup>e</sup> cas**  $n_{l2} < n < n_{s2}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l2}} \alpha^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} \alpha^{2j} u(n-j)$$

$$v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + \alpha^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - \alpha^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left(-1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - \alpha^4\right)} + \\ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + \alpha^{4+2n-2n_{l2}} \sin(-\frac{\pi n_{l2}}{N}) - \alpha^{2+2n-2n_{l2}} \sin(-\frac{\pi n_{l2}}{N} + \frac{\pi}{N}) + \alpha^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N})}{\left(-1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - \alpha^4\right)} \\ \alpha^{2(n-n_s)} \left[ \frac{-\sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) + \alpha^{2+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(\frac{n_{l1}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + \alpha^2 \sin(\frac{n_s\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - \alpha^{4+2n_s-n_l} \sin(n_l \frac{\pi}{N})}{\left(-1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - \alpha^4\right)} \right] \end{array} \right\} \quad (I.41.1)$$

Sensiblement égal

$$\text{à } v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(n \frac{\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} + \\ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - \alpha^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{(1 - \alpha^2)} \end{array} \right\} \quad (I.41.2)$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{s2} < n < n_{l1}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s2}}^{n-n_{l2}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{I.42})$$

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left[ + a^{2(n-n_{s1})} \left[ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} + \right. \right. \\ \left. \left. + a^{2(n-n_{l1})} \left[ \frac{-\sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(\frac{n_{l1}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s1}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + a^{2(n-n_{s2})} \left[ \frac{-\sin(n_{s2} \frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s2}-n_{l2}} \sin(\frac{n_{l2}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s2}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s2}-n_{l2}} \sin(n_{l2} \frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right] \right] \right] \quad (\text{I.43}),$$

Et ainsi de suite

### 3) Expressions des courants électriques en fonction de la variable discrète n

**Pour quelques trous et pour un nombre q quelconque de trous.**

Nous allons omettre par la suite le facteur courant  $C_{mi} = -\hat{V} \sqrt{\frac{C}{L}}$  et le remettre dans l'expression finale.

**1er cas**  $1 \leq n < n_{l1}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) - (1+a^2) \left[ \frac{-\sin(n \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4 \right)} \right] \right] \quad (\text{I.44.1})$$

Arrondi à :

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \left\{ \frac{-2a^2 \sin(n \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (I.44.2)$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{l1} \leq n < n_{s1}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (I.45)$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1} < n < n_{l2}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) - (1+a^2) \left\{ \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} + \frac{-a^{2(n-n_{s1})} \sin\left(n_{s1} \frac{\pi}{N}\right) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin\left(n_{l1} \frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (I.46.1)$$

Réduite à

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ -2a^2 \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) - (1+a^2) \left\{ \frac{-a^{2(n-n_{s1})} \sin\left(n_{s1} \frac{\pi}{N}\right) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin\left(n_{l1} \frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (I.46.2)$$

**4<sup>e</sup> cas**  $n_{l2} < n < n_{s2}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (I.47)$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{s2} < n < n_{l3}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) - (1+a^2) \cdot \left[ \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s1})} \sin\left(n_{s1}\frac{\pi}{N}\right) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin\left(n_{l1}\frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s2})} \sin\left(n_{s2}\frac{\pi}{N}\right) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \sin\left(n_{l2}\frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} \right] \right]$$

(I.48.1)

Réduite à

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ -2a^2 \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) - (1+a^2) \cdot \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s1})} \sin\left(n_{s1}\frac{\pi}{N}\right) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin\left(n_{l1}\frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s2})} \sin\left(n_{s2}\frac{\pi}{N}\right) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \sin\left(n_{l2}\frac{\pi}{N}\right)}{(1-a^2)} \right] \right]$$

(I.48.2)

**6<sup>e</sup> cas**  $n_{l3} < n < n_{s3}$ 

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (I.49)$$

**7<sup>e</sup> cas**  $n_{s3} < n < n_{l4}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) - (1+a^2) \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{-\sin(n\frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{2+2n} \sin(\frac{\pi}{N})}{\left(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4\right)} + \right. \\ \left. + a^{2(n-n_{s1})} \left[ \frac{-\sin(n_{s1}\frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(\frac{n_{l1}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s1}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s1}-n_{l1}} \sin(n_{l1}\frac{\pi}{N})}{\left(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4\right)} \right] \right. \\ \left. + a^{2(n-n_{s2})} \left[ \frac{-\sin(n_{s2}\frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s2}-n_{l2}} \sin(\frac{n_{l2}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s2}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s2}-n_{l2}} \sin(n_{l2}\frac{\pi}{N})}{\left(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4\right)} \right] \right. \\ \left. + a^{2(n-n_{s3})} \left[ \frac{-\sin(n_{s3}\frac{\pi}{N}) + a^{2+2n_{s3}-n_{l3}} \sin(\frac{n_{l3}\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) + a^2 \sin(\frac{n_{s3}\pi}{N} + \frac{\pi}{N}) - a^{4+2n_{s3}-n_{l3}} \sin(n_{l3}\frac{\pi}{N})}{\left(-1+2a^2 \cos(\frac{\pi}{N}) - a^4\right)} \right] \right] \end{array} \right] \quad (I.50.1)$$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) - (1+a^2) \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{\sin(n\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s1})} \sin(n_{s1}\frac{\pi}{N}) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s2})} \sin(n_{s2}\frac{\pi}{N}) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \sin(n_{l2}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s3})} \sin(n_{s3}\frac{\pi}{N}) - a^{2(n-n_{l3}+1)} \sin(n_{l3}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right] \right] \end{array} \right] \quad (I.50.2)$$

Réduite à

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{-2a^2 \sin(\frac{n\pi}{N})}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s1})} \sin(n_{s1}\frac{\pi}{N}) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right. \\ \left. + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s2})} \sin(n_{s2}\frac{\pi}{N}) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \sin(n_{l2}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} + \left[ \frac{-a^{2(n-n_{s3})} \sin(n_{s3}\frac{\pi}{N}) - a^{2(n-n_{l3}+1)} \sin(n_{l3}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right] \right] \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (I.50.3)$$

Jusque-là, il s'agissait de trois cycles de roues libres (trois trous).

Pour un nombre de trous q, nous obtenons :

$$\begin{aligned} n_{lq} &\leq n < n_{sq} \\ i_{red,s}(n) &= 0 \end{aligned} \quad (I.51)$$

$$\begin{aligned} n_{sq} &\leq n < N \\ i_{red,s}(n) &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{n\pi}{N})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^q \left\{ \frac{a^{2(n-n_{sk})} \cos(\frac{n_{sk}\pi}{N}) - a^{2(n-n_{lk}+1)} \sin(\frac{n_{lk}\pi}{N})}{(1-a^2)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (I.52)$$

### 3.1) Expressions des courants en fonction de la variable temps t.

**1er cas**  $0 \leq t < n_{l1}T_{res}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) - (1+a^2) \left\{ \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{(1-a^2)} \right\} \right] = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) \left[ \frac{-2a^2}{(1-a^2)} \right] \quad (I.53)$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{l1}T_{res} \leq t < n_{s1}T_{res}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (I.54)$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1}T_{res} < t < n_{l2}T_{res}$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-2a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left\{ \frac{-a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{s1})} \sin(n_{s1}\frac{\pi}{N}) - a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l1}+1)} \sin(\frac{n_{l1}\pi}{N})}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (I.55)$$

**4<sup>e</sup> cas**  $n_{l2}T_{res} \leq t < n_{s2}T_{res}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (\text{I.56})$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{s2}T_{res} < t < n_{l3}T_{res}$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-2a^2 \sin(\frac{2\pi}{T}t)}{(1-a^2)} - \right. \\ \left. (1+a^2) \left[ \frac{-a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{s1})} \sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] + \frac{-a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{s2})} \sin(n_{s2} \frac{\pi}{N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l2}+1)} \sin(n_{l2} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right] \quad (\text{I.57})$$

**6<sup>e</sup> cas**  $n_{l3}T_{res} \leq t < n_{s3}T_{res}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (\text{I.58})$$

Ainsi de suite,

Pour un nombre de trous q, nous obtenons :

$$n_{lq} \leq n < n_{sq}$$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (\text{I.59})$$

$$n_{sq} \leq n < N$$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^q \left\{ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{sk})} \sin(n_{sk} \frac{\pi}{N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{lk}+1)} \sin(n_{lk} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (\text{I.60})$$

Le coefficient  $\frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \sum_{k=1}^q a^{2(\frac{t}{T_{rs}} - n_{sk})} \sin\left(\frac{n_{sk}\pi}{N}\right) - a^{2(\frac{t}{T_{rs}} - n_{lk}+1)} \sin\left(\frac{n_{lk}\pi}{N}\right)$  se confond à :

$$\frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} a^{2(n_{l(k+1)} - n_{sk})} \sin\left(\frac{n_{sq}\pi}{N}\right).$$

#### 4) Développement en série de Fourier pour le calcul spectral :

##### 4.1. Préliminaires.

On donne les relations trigonométriques les développements suivants :

$$2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{I.61.1})$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{I.61.2})$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \quad (\text{I.61.3})$$

On a alors :

$$1) \frac{\sin((m+1)\theta_1) \sin((m-1)\theta_1)}{4\omega^2(m^2-1)} = \frac{-\cos 2\theta_1 + \cos 2m\theta_1}{4\omega^2(m^2-1)} \quad (\text{I.62})$$

$$2) \frac{\sin^2((m+1)\theta_1)}{4\omega^2(m+1)^2} = \frac{1 - \cos 2(m+1)\theta_1}{8\omega^2(m+1)^2} \quad (\text{I.63})$$

$$3) \frac{\sin((m+1)\theta_1) \sin((m+1)\theta_2)}{4\omega^2(m+1)^2} = \frac{-\cos((m+1)(\theta_1 - \theta_2)) + \cos((m+1)(\theta_1 + \theta_2))}{4\omega^2(m+1)^2} \quad (\text{I.64})$$

$$4) \frac{\sin((m+1)\theta_1) \sin((m-1)\theta_1)}{4\omega^2(m^2-1)} = \frac{-\cos 2\theta_1 + \cos 2m\theta_1}{4\omega^2(m^2-1)} = \frac{-\cos 2\theta_1(m-1)}{8\omega^2(m-1)} - \frac{\cos 2\theta_1(m+1) - 2\cos 2\theta_1}{8\omega^2(m+1)}$$

$$(I.65)$$

##### 4.2. Développement des séries de Fourier.

Nous procémons maintenant au calcul des coefficients de Fourier pour l'analyse spectrale et harmonique des courants d'entrée. Les alternances positives ( $0 \leq t \leq T/2$ ) et négatives ( $T/2 \leq t \leq T$ ), du courant  $I_{red,e}$  sont identiques, mais de signes opposés. Le spectre de  $I_{red,e}$  ne comporte que des harmoniques de rang impair.

Par la suite, nous confondant l'expression par sa valeur réduite (division par  $A_0$  que nous avons définis plus haut).

$$i_{red,e(t)} = \sum_{m \text{ impair}} A_m \sin(m\omega t) + B_m \cos(m\omega t) \quad (\text{I.66})$$

$$a_m = \frac{A_m}{A_0} \quad (\text{I.67})$$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i_{red,e} \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i_{red,s} \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt \\
&= \frac{4}{T} \int_0^{\pi T_m} \frac{-4a^2}{\pi(1-a^2)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt + \\
&\quad \frac{4}{T} \int_{\pi T_m}^{\pi T_m} \frac{2}{\pi} \left[ -2a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - (1+a^2) \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{11})}{\pi}} \sin(n_{11}\frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{11}+1)}{\pi}} \sin(n_{11}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right] \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\
&\quad \frac{4}{T} \int_{\pi T_m}^{\pi T_m} \frac{2}{\pi} \left[ -2a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - (1+a^2) \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{12})}{\pi}} \sin(n_{12}\frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{12}+1)}{\pi}} \sin(n_{12}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} + \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{12})}{\pi}} \sin(n_{12}\frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{12}+1)}{\pi}} \sin(n_{12}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right] \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\
&\quad \frac{4}{T} \int_{\pi T_m}^{\pi T_m} \frac{2}{\pi} \left[ -2a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - (1+a^2) \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{13})}{\pi}} \sin(n_{13}\frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{13}+1)}{\pi}} \sin(n_{13}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} + \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{13})}{\pi}} \sin(n_{13}\frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_m}-n_{13}+1)}{\pi}} \sin(n_{13}\frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right] \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt + \dots \\
&= H_1 + H_3 + H_5 + H_7 + \dots
\end{aligned} \tag{I.68}$$

Nous posons :

$$E_1 = -a^2 \frac{4}{T} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(1-a^2)} \tag{I.69}$$

En enlevant de ce facteur le facteur multiplicateur de Fourier  $\frac{4}{T}$  et sachant que

$A_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[ \frac{2a^2}{(1-a^2)} \right]$  et sachant que le facteur  $\sqrt{\frac{C}{L}}$  sera rajouté dans  $E_1$ , et que le signe -

sera rajouté dans l'expression des  $a_i$  et  $b_i$  par la suite, alors il y a un facteur de 1. Finalement,  $E_1$  a la même expression que  $A_0$  aux constantes électriques près.

$$E_{21} = a^{(2-2n_{I1})} \frac{4}{T} \frac{2}{\pi} \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \sin\left(\frac{\pi n_{I1}}{N}\right) \quad (\text{I.71.1})$$

$$E_{22} = a^{(2-2n_{I2})} \frac{4}{T} \frac{2}{\pi} \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \sin\left(\frac{\pi n_{I2}}{N}\right) \quad (\text{I. 71.2})$$

$$E_{22} = a^{(2-2n_{I3})} \frac{4}{T} \frac{2}{\pi} \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \sin\left(\frac{\pi n_{I3}}{N}\right) \quad (\text{I. 71.4})$$

$$E_{31} = \frac{8(1+a^2)}{T\pi(1-a^2)} \left[ a^{-2n_{s1}} \sin(n_{s1} \frac{\pi}{N}) - a^{2(-n_{I1}+1)} \sin\left(\frac{n_{I1}\pi}{N}\right) \right] \quad (\text{I. 71.3})$$

$$E_{32} = \frac{8(1+a^2)}{T\pi(1-a^2)} \left[ a^{-2n_{s2}} \sin(n_{s2} \frac{\pi}{N}) - a^{2(-n_{I2}+1)} \sin\left(\frac{n_{I2}\pi}{N}\right) \right] \quad (\text{I. 71.4})$$

$$E_{33} = \frac{8(1+a^2)}{T\pi(1-a^2)} \left[ a^{-2n_{s3}} \sin(n_{s3} \frac{\pi}{N}) - a^{2(-n_{I3}+1)} \sin\left(\frac{n_{I3}\pi}{N}\right) \right] \quad (\text{I. 71.5})$$

Etc.

$$\alpha = m \frac{2\pi}{T} \quad (\text{I. 72})$$

$$\beta = \frac{2 \log a}{T_{res}} \quad (\text{I.73})$$

D'après les calculs numériques par Matlab,  $\beta$  est très grand et est négatif, car le nombre  $a$  est inférieur à 1.

Cela fait que les facteurs  $a^{-2n_{sq}}$  sont très petits, nous pouvons dans un premier calcul les négliger.

De même, les facteurs  $a^{2(-n_{Iq}+1)} \sin\left(\frac{n_{Iq}\pi}{N}\right)$  sont très petits pour deux raisons. La première est que  $\frac{n_{Iq}\pi}{N}$  est un petit angle pour des bornes inférieures petites, pour des bornes inférieures  $n_{Iq}$  plus grandes, le facteur puissance  $a^{2(-n_{Iq}+1)}$  devient très petit. Donc les facteurs comportant des puissances de  $a$  sont négligeables.

De cette manière, les facteurs  $E_{ij}$  ne figureront plus dans les développements qui vont suivre.

On a alors :

$$\begin{aligned} H_1 &= E_1 \int_0^{n_{I1}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) dt = E_1 \int_0^{n_{I1}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t) - \cos((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &= E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I1}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

Pour  $m=1$ ,

$$H_1 = E_1 \int_0^{n_s T_{res}} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_0^{n_s T_{res}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{n_s T_{res}} \quad (\text{I.75})$$

$$H_1 = E_1 \left( \frac{n_{I1}T_{res}}{2} - \frac{\sin(2\omega n_{I1}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{I.76})$$

Avec :

$$H_2 = H_4 = H_6 = \dots = 0 \quad (\text{I.77})$$

$$H_3 = H_{3,1} + H_{3,2} \quad (\text{I.78})$$

$$\begin{aligned} H_{3,1} &= E_1 \int_{n_{S1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) dt = E_1 \int_{n_{S1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t) - \cos((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &= E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I2}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I2}T_{res})}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{S1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.79})$$

Pour  $m=1$  :

$$H_{3,1} = E_1 \int_{n_{S1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{S1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{S1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} \quad (\text{I.80})$$

$$\text{Pour } m = 1, \quad H_{3,1} = E_1 \left( -\frac{n_{s1}T_{res}}{2} + \frac{n_{I2}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{s1}T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{I2}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{I.81})$$

Si on calcul le coefficient de Fourier  $a_3$  cumulé au terme 3 et pour  $m=1$ ,

$$a_{1,3} = -E_1 \left( \frac{n_{s1}T_{res}}{2} - \frac{n_{I2}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{I2}T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{s1}T_{res})}{4\omega} - \frac{n_{I1}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{I1}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{I.82})$$

De même, nous obtenons :

$$H_5 = H_{5,1} + H_{5,2} \quad (\text{I.83})$$

$$\begin{aligned} H_{5,1} &= E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t) - \cos((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &= E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I3}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s2}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I3}T_{res})}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s2}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.84})$$

Pour  $m=1$  :

$$H_{5,1} = E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \quad (\text{I.85})$$

Le coefficient de Fourier  $a_5$  pour  $m=1$  s'écrit :

$$a_{1,5} = -E_1 \left( \frac{n_{s1}T_{res}}{2} - \frac{n_{I2}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{I2}T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{s1}T_{res})}{4\omega} - \frac{n_{I1}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{I1}T_{res})}{4\omega} - \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \right) \quad (\text{I.86})$$

Au rang 7, nous aurons :

$$H_7 = H_{7,1} + H_{7,2}$$

$$\begin{aligned} H_{7,1} &= E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \sin(\omega t) \sin(m\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \frac{\cos((m-1)\omega t) - \cos((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/2)}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s3}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)T/2)}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s3}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned} \quad (I.87)$$

Pour m=1 :

$$H_{7,1} = E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \quad (I.88)$$

Ces développements nous donnent le coefficient a<sub>7</sub>, pour m=1 suivant :

$$a_{1,7} = -E_1 \left( \begin{array}{l} \frac{n_{s1}T_{res}}{2} - \frac{n_{l2}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{l2}T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{s1}T_{res})}{4\omega} - \frac{n_{l1}T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{l1}T_{res})}{4\omega} \\ - \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} - \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \end{array} \right) \quad (I.89.1)$$

Qu'on peut développer sous forme suivante.

$$a_{1,7} = -E_1 \left( \begin{array}{l} \frac{(n_{s1} + n_{s2} + n_{s3})T_{res}}{2} - \frac{(n_{l1} + n_{l2} + n_{l3})T_{res} + T/2}{2} \\ + \frac{\sin(2\omega n_{l1}T_{res}) + \sin(2\omega n_{l2}T_{res}) + \sin(2\omega n_{l3}T_{res}) + \sin(2\omega T/2)}{4\omega} \\ - \frac{\sin(2\omega n_{s1}T_{res}) + \sin(2\omega n_{s2}T_{res}) + \sin(2\omega n_{s3}T_{res})}{4\omega} \end{array} \right) \quad (I.89.2)$$

Nous poursuivons ainsi de proche en proche et en utilisant une démonstration par récurrence, nous aboutissons aux termes généraux suivants.

Pour q trous et pour m =1, nous trouvons :

$$H_{(2q+1),1} = E_1 \int_{n_S q T_{res}}^{T/2} \sin(\omega t) \sin(\omega t) dt = E_1 \int_{n_S q T_{res}}^{T/2} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_S q T_{res}}^{T/2}$$

(I.90)

En sommant tous les termes de 1 à q, le résultat suivant est obtenu :

$$a_{1,q} = -E_1 \left( \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(-n_{Ik} + n_{Sk}) T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{Ik} T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk} T_{res})}{4\omega} \right) \quad (I.91)$$

$$\text{En admettant l'écriture } n_{I(q+1)} T_{res} = \frac{T}{2} \text{ et } n_{S(q+1)} T_{res} = 0. \quad (I.92)$$

Pour  $q = 3$ , et dans le but de simplifier les calculs et sachant que  $H_{3,2} \cong H_{5,2} \cong H_{7,2} \cong \dots \cong 0$ , nous arrivons à l'expression de la somme harmonique à minimiser.

$$\sqrt{S_o} = \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left( \begin{array}{l} E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I1} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I1} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) + \\ E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I2} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{S1} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I2} T_{res})}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{S1} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) + \\ E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I3} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{S2} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I3} T_{res})}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{S2} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \\ E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/2)}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{S3} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)T/2)}{2(m+1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{S3} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{array} \right) \quad (I.93)$$

De la même manière que pour les coefficients  $a_i$ , nous déterminons les coefficients de Fourier  $b_i$ , comme suit.

$$b_m = \frac{B_m}{A_0} \quad (I.94)$$

$$b_m = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i_{red,e} \frac{\cos(m\omega t)}{A_0} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i_{red,s} \frac{\cos(m\omega t)}{A_0} dt$$

$$= Hb_1 + Hb_3 + Hb_5 + Hb_7 \quad (I.95)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{T} \int_0^{n_{l1} T_{res}} \frac{-4a^2}{\pi(1-a^2)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(m \frac{2\pi}{T}t\right) dt + \\
&\quad \frac{4}{T} \int_{n_{l1} T_{res}}^{n_{l2} T_{res}} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-2a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l1})}{N}} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l1}+1)}{N}} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \cos\left(m \frac{2\pi}{T}t\right) dt \\
&\quad \frac{4}{T} \int_{n_{l2} T_{res}}^{n_{l3} T_{res}} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-2a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l2})}{N}} \sin(n_{l2} \frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l2}+1)}{N}} \sin(n_{l2} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l3})}{N}} \sin(n_{l3} \frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l3}+1)}{N}} \sin(n_{l3} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \cos\left(m \frac{2\pi}{T}t\right) dt \\
&\quad \frac{4}{T} \int_{n_{l3} T_{res}}^{n_l T_{res}} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-2a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l3})}{N}} \sin(n_{l3} \frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l3}+1)}{N}} \sin(n_{l3} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{-a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l1})}{N}} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{l1}+1)}{N}} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \cos\left(m \frac{2\pi}{T}t\right) dt \quad (I.96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{b1} &= E_1 \int_0^{n_l T_{res}} \sin(\omega t) \cos(m \omega t) dt = E_1 \int_0^{n_l T_{res}} \frac{\sin((m-1)\omega t) + \sin((m+1)\omega t)}{2} dt = \\
&= -E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l1} T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l1} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \quad (I.97)
\end{aligned}$$

$$H_{b1} = E_1 \int_0^{n_{l1} T_{res}} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = E_1 \int_0^{n_{l1} T_{res}} \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt = -E_1 \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{n_{l1} T_{res}} \quad (I.98)$$

$$H_{b1} = E_1 \left( -\frac{\cos(2\omega n_{l1} T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{I.99})$$

$$H_{b2} = H_{b4} = H_{b6} = 0 \quad (\text{I.100})$$

$$H_{b3} = H_{b3,1} + H_{b3,2} \quad (\text{I.101})$$

$$\begin{aligned} H_{b3,1} &= E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \sin(\omega t) \cos(m\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \frac{\sin((m-1)\omega t) + \sin((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &- E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l2}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s1}T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l2}T_{res})}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s1}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.102})$$

Ainsi pour m = 1, nous aurons :

$$H_{b3,1} = E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt = Scumb2_1 = -E_1 \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} \quad (\text{I.103})$$

Donc et pour m = 1,

$$b_{l,3} = E_1 \left( \frac{\cos(2\omega n_{s1}T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{l2}T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{l1}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{I.104})$$

Nous continuons avec un nombre de trous égal à 5 sachant que les termes pairs disparaissent.

$$Hb_5 = Hb_{5,1} + Hb_{5,2} \quad (\text{I.105})$$

$$\begin{aligned} Hb_{5,1} &= E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \sin(\omega t) \cos(m\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \frac{\sin((m-1)\omega t) + \sin((m+1)\omega t)}{2} dt = \\ &- E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l3}T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s2}T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l3}T_{res})}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s2}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{aligned}$$

$$(\text{I.106})$$

Pour m=1 :

$$Hb_{5,1} = E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt = Scum2_5 = -E_1 \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}}$$

(I.107)

$$b_{1,5} = E_1 \left( \frac{\cos(2\omega n_{s1}T_{res}) + \cos(2\omega n_{s2}T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{I2}T_{res}) + \cos(2\omega n_{I3}T_{res})}{4\omega} \right)$$

Pour q=7, nous aboutissons à :

$$Hb_7 = Hb_{7,1} + Hb_{7,2}$$

$$Hb_{7,1} = E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \sin(\omega t) \cos(m\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \frac{\sin((m-1)\omega t) + \sin((m+1)\omega t)}{2} dt =$$

$$- E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)T/2)}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s3}T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)T/2)}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s3}T_{res})}{2(m+1)\omega} \right)$$

(I.108)

Pour m=1 :

$$Hb_{7,1} = E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = E_1 \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/2} \frac{\sin(2\omega t)}{2} dt = Scumb2_7 = -E_1 \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s3}T_{res}}^{T/2}$$

(I.109)

$$b_{1,7} = E_1 \left( \begin{array}{c} \frac{\cos(2\omega n_{s1}T_{res}) + \cos(2\omega n_{s2}T_{res}) + \cos(2\omega n_{s3}T_{res})}{4\omega} \\ - \frac{\cos(2\omega n_{I2}T_{res}) + \cos(2\omega n_{I3}T_{res}) + \cos(2\omega \frac{T}{2})}{4\omega} \end{array} \right)$$

(I.110)

Plus généralement, et sachant la réduction de l'écriture suivante

$$n_{I(q+1)}T_{res} = \frac{T}{2} \quad (I.111),$$

nous avons

$$b_{l,q} = E_l \sum_{k=1}^q \left( \frac{\cos(2\omega n_{sk} T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{l(k+1)} T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{I.112})$$

La démonstration peut se faire par récurrence.

On pose :

$$\begin{aligned} \theta_{l1} &= \omega n_{l1} T_{res}, \theta_{l2} = \omega n_{l2} T_{res}, \theta_{l3} = \omega n_{l3} T_{res}, \theta_{l4} = \omega n_{l4} T_{res} \\ \theta_{s1} &= \omega n_{s1} T_{res}, \theta_{s2} = \omega n_{s2} T_{res}, \theta_{s3} = \omega n_{s3} T_{res}, \\ \theta_3 &= \omega T / 2, \end{aligned} \quad (\text{I.113.1 à 3})$$

On aura :

$$\sqrt{S_b} = \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} -E_l \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l1} T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l1} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \\ -E_l \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l2} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s1} T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l2} T_{res})}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s1} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \\ -E_l \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{l3} T_{res})}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s2} T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{l3} T_{res})}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s2} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \\ -E_l \left( \frac{\cos(\omega(m-1)T/2)}{2(m-1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-1)n_{s3} T_{res})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)T/2)}{2(m+1)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+1)n_{s3} T_{res})}{2(m+1)\omega} \right) \end{array} \right] \quad (\text{I.114})$$

En faisant le développement :

$$S_b = (\sqrt{S_b})^2 \quad (\text{I.115})$$

Pour  $m=1$ , nous aurons :

$$S_{a,q,1} = \sum_{k=1}^q (Scum_{1,k})^2 + 2 \sum_{i \neq j}^q (Scum_{1,i})(Scum_{1,j}) \quad (\text{I.116.1})$$

$$S_{b,q,1} = \sum_{k=1}^q (Scum_{b,1,k})^2 + 2 \sum_{i \neq j}^q (Scum_{b,1,i})(Scum_{b,1,j}) \quad (I.116.2)$$

$$b_{1,q} = E_1 \sum_{k=1}^q \left( \frac{\cos(2\omega n_{sk} T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{l(k+1)} T_{res})}{4\omega} \right) = \frac{TE_1}{8\pi} \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/N) - \cos(2\pi n_{l(k+1)}/N))$$

(I.117)

Lorsque ce terme est divisé par  $-E_1 \left( \frac{T}{4} \right)$  supposé être le coefficient de multiplication de Fourier multiplié par le facteur constant., alors

$$b_{1,q} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/N) - \cos(2\pi n_{l(k+1)}/N)) \quad (I.118)$$

*qui est le même que celui trouvé dans le travail de Cheriti-Sendali même si les facteurs sont différends dans leur écriture, cela est dû au fait que Cheriti-Sendali ont fait l'hypothèse que la série est confondue à une intégrale.*

Aussi, pour le coefficient  $a_{1,q}$ , nous avons :

$$-\frac{a_{1,q}}{-TE_1} = \sum_{k=1}^{q+1} \left( \frac{(-n_{Ik} + n_{Sk})T_{res}}{\frac{T}{2}} + \frac{\sin(2\omega n_{Ik} T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk} T_{res})}{2\pi} \right) = \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{Sk}}{N}) - \sin(\frac{2\pi n_{Ik}}{N})}{2\pi} \right)$$

(I.119)

Lorsqu'on n'a aucun trou :

$$a_{1,q} = -E_1 \left( \frac{(-n_{I(q+1)} T_{res})}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{I(q+1)} T_{res})}{4\omega} \right) = E_1 \left( \frac{T}{4} \right) = A_0 \quad (I.120)$$

Ce dernier coefficient devrait être le même que celui pour  $I_{max}$ ,

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \left( 1 + \alpha^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{2 \log \alpha} \right) - 1 \right) m_{tr}^2 V_{ca}. \text{ Pour notre cas,}$$

$$E_1 = \frac{4}{T} \alpha^2 \frac{4}{\pi} \frac{T}{(1-\alpha^2)4} \sqrt{\frac{C}{L}} V_{ca} = \frac{2}{\pi} \alpha^2 \frac{4}{\pi} \frac{T}{(1-\alpha^2)4} \sqrt{\frac{C}{L}} V_{ca} = \frac{2}{\pi} A_0 \quad (I.121)$$

Nous allons multiplier donc par  $\frac{2}{\pi}$  l'expression du facteur de puissance en fin de calcul.

Nous avons alors obtenu le même résultat que celui dans le travail de Cheriti-Sandali

$$\begin{aligned} \frac{b_{1,q}^2 + \alpha_{1,q}^2}{A_0^2} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/N)) \right]^2 \\ &+ \left[ \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{sk} - n_{Ik})}{N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{sk}}{N}) - \sin(\frac{2\pi n_{Ik}}{N})}{2\pi} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (I.122)$$

Pour  $m$  quelconque et pour un nombre de trous égal à 3, et après plusieurs développements que nous omettons dans cette annexe, l'expression  $S_a + S_b$  devient :

$$S_a + S_b = S_{a1} + S_{b1} + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{7}{(m-1)^2} + \frac{7}{(m+1)^2} \right) \right) + S_T + \text{Prod}_{a+b}(\text{tet3.Autres}) \quad (I.123)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{Prod}, b(\text{tet3.Autres})}{-2E_1^2} = \\
& \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{11})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{11}}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{12})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{12})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{13})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{13})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{11})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{11}}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{12})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{12})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{13})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{13})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{s1}}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{s1}}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_3)}{4\omega^2(m^2-1)}
\end{aligned} \tag{I.124}$$

La partie Prod<sub>a,b</sub> va être simplifiée après rassemblement des termes semblables.

Cela est grâce au fait aussi que pour m impair et que au point  $\theta_3$ , le cosinus contenant (m+1) ou (m-1) disparaît pour m différent de 1.

L'expression de S<sub>a</sub>, sans le facteur en m=1, d'une part, devient



$$FCARRÉ = E_1^2 \left[ \begin{array}{l} \frac{\sin^2(\omega(m+l)n_{11}T_{res})}{(2\omega)^2(m+l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-l)n_{11}T_{res})}{(2\omega)^2(m-l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m+l)n_{12}T_{res})}{(2\omega)^2(m+l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-l)n_{12}T_{res})}{(2\omega)^2(m-l)^2} \\ + \frac{\sin^2(\omega(m+l)n_{13}T_{res})}{(2\omega)^2(m+l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-l)n_{13}T_{res})}{(2\omega)^2(m-l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m+l)n_{s1}T_{res})}{(2\omega)^2(m+l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-l)n_{s1}T_{res})}{(2\omega)^2(m-l)^2} \\ + \frac{\sin^2(\omega(m+l)n_{s2}T_{res})}{(2\omega)^2(m+l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-l)n_{s2}T_{res})}{(2\omega)^2(m-l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m+l)n_{s3}T_{res})}{(2\omega)^2(m+l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-l)n_{s3}T_{res})}{(2\omega)^2(m-l)^2} \\ + \frac{\sin^2(\omega(m+l)T/2)}{(2\omega)^2(m+l)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-l)T/2)}{(2\omega)^2(m-l)^2} \end{array} \right] \quad (I.126)$$

D'autre part, nous avons :

$$S_b = \sum_{m \text{ impair}} b_m^2 = (HB_1 + HB_2 + HB_3)^2 = HB_1^2 + HB_2^2 + HB_3^2 + 2(HB_1 + HB_2)HB_3 + 2HB_1HB_2 \quad (I.127)$$

$$\sqrt{S_b} = \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} -E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-l)n_{11}T_{res})}{2(m-l)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+l)n_{11}T_{res})}{2(m+l)\omega} \right) \\ -E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-l)n_{12}T_{res})}{2(m-l)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-l)n_{s1}T_{res})}{2(m-l)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+l)n_{12}T_{res})}{2(m+l)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+l)n_{s1}T_{res})}{2(m+l)\omega} \right) \\ -E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-l)n_{13}T_{res})}{2(m-l)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-l)n_{s2}T_{res})}{2(m-l)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+l)n_{13}T_{res})}{2(m+l)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+l)n_{s2}T_{res})}{2(m+l)\omega} \right) \\ -E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-l)T/2)}{2(m-l)\omega} - \frac{\cos(\omega(m-l)n_{s3}T_{res})}{2(m-l)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+l)T/2)}{2(m+l)\omega} - \frac{\cos(\omega(m+l)n_{s3}T_{res})}{2(m+l)\omega} \right) \end{array} \right] \quad (I.128)$$

Pour m= 1

$$S_{b,1} = E_1^2 \left( -\frac{\cos(2\omega n_1 T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(\omega T)}{4\omega} + \frac{\cos(2\omega n_s T_{res})}{4\omega} \right)^2 \quad (I.129)$$

Et pour m différent de 1, nous aurons :

$$\left. \begin{aligned}
& F_b Carré + \Pr{od(tet3.Autres)} + \\
& \left( \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m+1)\theta_{I_2})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos(m-1)\theta_{I_2}}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos(m+1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{I_1})}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{I_2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m+1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{I_1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_2})\cos((m+1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{I_2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m-1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{I_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_1})\cos((m+1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_1})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos(m+1)\theta_{S_2})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_{S_1})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_1})\cos((m+1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_1})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_3})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_{S_1})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_2})\cos((m+1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_2})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_3})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_{S_2})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_1})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_2})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S_3})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m+1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S_1})\cos((m-1)\theta_{I_1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos(m+1)\theta_{I_1})\cos((m+1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{S_2})\cos((m-1)\theta_{I_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m+1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S_3})\cos((m-1)\theta_{I_1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_1})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_2})\cos((m+1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S_2})\cos((m-1)\theta_{I_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_2})\cos((m+1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S_3})\cos((m-1)\theta_{I_2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_2})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m+1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S_2})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{S_1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m+1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{S_2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m+1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S_3})\cos((m-1)\theta_{I_3})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_{I_3})\cos((m-1)\theta_{S_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
\end{aligned} \right) \quad (I.130)$$

$S_b = S_{b,1} + \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} + 2E_1^2$

En rassemblant la partie a et la partie b dans une partie nommée  $S_T$ , pour total, nous arrivons au résultat suivant :

(I.131)

Après plusieurs transformations mathématiques, et en généralisant pour un nombre quelconque de trous, nous obtenons finalement :

$$\frac{S_T}{E_1^2} = 2 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i \neq j \\ \frac{q(q+1)}{2} \text{ facteurs}} \atop {i+j}} \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ - \sum_{\substack{i,j \\ q^2 \text{ facteurs}} \atop {i+j}} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) \right) \quad (I.132)$$

En posant  $\theta_q = \omega T / 2$  est équivalent à  $\theta_{j(q+1)}$ , nous aurons :

$$\frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) \\ + 2 \sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ - \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) \right) \quad (I.133)$$

Nous présentons maintenant les transformations successives en remplaçant les séries par leur terme de convergence et en simplifiant les expressions sans faire d'approximations.

- *Étape 1 de conversion :*

$$\begin{aligned}
\frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(2k)^2} + \frac{2q+1}{(2k+2)^2} \right) \right) + DPT \\
&+ 2 \sum_{\substack{m \text{ impair}}}^{\infty} \left( \left[ \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k+2)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(2k)^2} \\ \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(2k)^2} \\ - \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} \right) \end{array} \right] \right)
\end{aligned} \tag{I.134.1}$$

Avec :

$$DPT = 2 \left( \left[ \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{-2\cos((\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2} - \frac{\cos 2\theta_h}{4\omega^2} \\ \sum_{i \neq j} \frac{-2\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2} - \frac{\cos 2\theta_{Si}}{4\omega^2} \\ + \sum_{i,j} \left( \frac{2\cos(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2} \right) \end{array} \right] \right) \tag{I.134.2}$$

- *Étape 2 de conversion :*

$$\begin{aligned}
\frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m \text{ impair} \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(2k)^2} + \frac{2q+1}{(2k+2)^2} + \frac{2q+1}{(2)^2} - \frac{2q+1}{(2)^2} \right) \right) + DPT \\
&+ 2 \sum_{\substack{m \text{ impair}}}^{\infty} \left( \left[ \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k+2)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{4\omega^2(2k+1)^2} \\ \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k+2)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{Si}}{4\omega^2(2k+1)^2} \\ - \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((2k+2)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(2k+2)^2} + \frac{2\cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2k)^2} \right) \end{array} \right] \right. \\
&\quad \left. \sum_{i,j \neq *} \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2)^2} - \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(2)^2} + \frac{\cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2)^2} - \frac{\cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(2)^2} + \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(2)^2} - \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(2)^2} \right)
\end{aligned} \tag{I.134.3}$$

- *Étape 3 de conversion :*

$$\begin{aligned}
& \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) - (2q+1) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{2q+1}{(k)^2} + DPT \\
& + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k+2)(\theta_h - \theta_j))}{(2k+2)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{ji} - \theta_j))}{(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{(2k+1)^2} \right) \right. \\
& \left. \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k+2)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k+2)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{Si}}{(2k+1)^2} \right) \right. \\
& \left. + \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((2k+2)(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2k+2)^2} + \frac{2\cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Si})\cos(\theta_h - \theta_{Si})}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2k)^2} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((2k+2)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{(2k+2)^2} + \frac{2\cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{i,j,z} \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_j))}{(2)^2} - \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_j))}{(2)^2} + \frac{\cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2)^2} - \frac{\cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2)^2} + \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2)^2} - \frac{\cos(2(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2)^2} \right)
\end{aligned}$$

(I.134.4)

- *Étape 4 de conversion :*

$$\begin{aligned}
& \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)^2} \right) + DPT \\
& + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_j))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{ji} - \theta_j))}{(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{(2k+1)^2} \right) \right. \\
& \left. \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{Si}}{(2k+1)^2} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2k)^2} + \frac{2\cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Si})\cos(\theta_h - \theta_{Si})}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2k)^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2}{4} \sum_{i,j,z} \cos(2(\theta_h - \theta_j)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \right)
\end{aligned}$$

(I.134.5)

- *Étape 5 de conversion :*

$$\begin{aligned}
& 4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + 2 \frac{\pi^2}{6} \right) + DPT \\
& + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \left[ \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_j))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{ji} - \theta_j))}{(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h - \theta_j))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{(2k+1)^2} \right) \right. \\
& \left. \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((2k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{Si}}{(2k+1)^2} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{i,j} \left( \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2k)^2} + \frac{2\cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Si})\cos(\theta_h - \theta_{Si})}{(2k+1)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Si}))}{(2k)^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2}{4} \sum_{i,j,z} \cos(2(\theta_h - \theta_j)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \right)
\end{aligned}$$

(I.134.6)

- *Étape 6 de conversion :*

$$\begin{aligned}
 4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\geq 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
 &+ 2 \left[ \sum_{i \neq j}^q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_y))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_y))}{(2k)^2} + \frac{\cos((2k)(\theta_{si} - \theta_{sj}))}{(2k)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_{si} - \theta_{sj}))}{(2k)^2} \right. \\
 &+ 2 \left. \sum_{i \neq j}^q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos((2k+1)(\theta_h + \theta_y))\cos((\theta_h - \theta_y))}{(2k+1)^2} + \frac{2\cos((2k+1)(\theta_{si} + \theta_{sj}))\cos((\theta_{si} - \theta_{sj}))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{si}}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{(2k+1)^2} \right. \\
 &\left. - \sum_{i,j}^q \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\cos((2k)(\theta_h - \theta_{si}))}{(2k)^2} + \frac{2\cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{sj})\cos(\theta_h - \theta_{sj})}{(2k+1)^2} + \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{sj}))}{(2k)^2} \right) \right] \\
 &- \frac{2}{4} \sum_{i,j,s} \cos(2(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(\theta_{si} - \theta_{sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{si}))
 \end{aligned} \tag{I.134.7}$$

- *Étape 7 de conversion,*

sachant que  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2)$ , avec :  $x = \text{mod}(x, 2\pi)$ , en général,

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos(k(2(\theta_1 + \theta_2)))}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3(\theta_1 + \theta_2 - \pi)^2 - \pi^2) = \frac{1}{4}((\theta_1 + \theta_2 - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3}), \quad x = \text{mod}(2x, 2\pi) \tag{I.134.8}$$

**Attention :** Ces formules s'appliquent aux valeurs des angles et non pas aux unités de ces angles. En effet, la convergence de la série se fait mathématiquement sur les valeurs.

nous aurons :

$$\begin{aligned}
4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong 4\omega^2(S_{a,l} + S_{b,l}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
&+ 2 \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{2}{16} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{2}{16} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right. \\ &+ 2 \sum_{i \neq j}^q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos((2k+1)(\theta_h + \theta_y)) \cos((\theta_h - \theta_y))}{(2k+1)^2} + \frac{2 \cos((2k+1)(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_{Si}}{(2k+1)^2} + \frac{\cos 2(2k+1)\theta_h}{(2k+1)^2} \\ &\left. - \sum_{i,j}^q \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2 \cos(2k+1)(\theta_h + \theta_{Sj}) \cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{(2k+1)^2} \right) \right] \\ &- \frac{2}{4} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \end{aligned} \right] \quad (I.134.9)
\end{aligned}$$

- *Étape 8*

*En sachant que :*

$$(\pi - 2|x|) \frac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad (I.135)$$

Il ne faut pas oublier qu'êtant si  $x$  déborde de  $\pi$  ou de  $2\pi$ , il faudra le remplacer par le résultat du modulo  $p$ , car la fonction est périodique.

$$\begin{aligned}
4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong 4\omega^2(S_{a,l} + S_{b,l}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
&+ 2 \left[ \begin{aligned} &\left( \frac{2}{16} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{2}{16} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right. \\ &+ 2 \sum_{i \neq j}^q \left( (\pi - 2|\theta_h + \theta_y|) \frac{\pi}{8} \cos(\theta_h - \theta_y) + (\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{8} \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right. \\ &\left. + (\pi - 2\theta_{Si}) \frac{\pi}{8} + (\pi - 2\theta_y) \frac{\pi}{8}, x = \text{mod}(2x, \pi) \right) \\ &- \sum_{i,j}^q \left( 2(\pi - 2|\theta_h + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{8} \cos(\theta_h - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right) \\ &- \frac{2}{4} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \end{aligned} \right] \quad (I.136.1)
\end{aligned}$$

- *Étape 9 de conversion :*

$$\begin{aligned}
& 4\omega^2 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong 4\omega^2 (S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
& + \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{4} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_j - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{1}{4} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right. \\ \left. + \sum_{i \neq j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_j|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_j) + (\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right. \\ \left. + (2\pi - 2\theta_{Si} - 2\theta_h) \frac{\pi}{4}, x = \text{mod}(2x, \pi) \right. \\ \left. - \sum_{i,j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq *} \cos(2(\theta_h - \theta_j)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \\
& \end{array} \right] \quad (I.136.2)
\end{aligned}$$

Sachant qu'il faut multiplier par  $\left(\frac{2}{\pi}\right)^2$  omis par avant, nous aurons donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{(S_a + S_b)}{A_0^2} \cong (S_{a,1} + S_{b,1}) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{4\omega^2} \frac{(2q+1)}{4} \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
& + \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{4} \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_h - \theta_j - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{1}{4} \sum_{i,j}^q \left( (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{4\omega^2} \sum_{i \neq j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_j|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_j) + (\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right. \\ \left. + (2\pi - 2\theta_{Si} - 2\theta_h) \frac{\pi}{4}, x = \text{mod}(2x, \pi) \right. \\ \left. - \sum_{i,j}^q (\pi - 2|\theta_h + \theta_{Sj}|) \frac{\pi}{2} \cos(\theta_h - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right] \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{4\omega^2} \sum_{i,j \neq *} \cos(2(\theta_h - \theta_j)) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_h - \theta_{Si})) \\
& \end{array} \right] \quad (I.136.3)
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
& 4\omega^2 (S_{a1} + S_{b1}) = \frac{b_{1,q}^2 + a_{1,q}^2}{I_0^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q \left( \cos(2\pi n_{sk}/N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/N) \right) \right]^2 \\
& + \left[ \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{Sk}}{N}) - \sin(\frac{2\pi n_{Ik}}{N})}{2\pi} \right) \right]^2 \\
& \end{aligned} \quad (I.137)$$

### Calcul de la fonction objective

Nous finalisons l'expression du facteur harmonique puissance par l'équation suivante (le facteur de puissance est une formule simple donnée à partir du facteur harmonique) :

$$\begin{aligned}
FH = \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q \left( \cos(2\pi n_{sk}/N) - \cos(2\pi n_{l(k+1)}/N) \right) \right]^2 + \left[ \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{Sk}}{N}) - \sin(\frac{2\pi n_{Ik}}{N})}{2\pi} \right) \right]^2 \\
&+ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 (2q+1) \left( -1 + \frac{\pi^2}{3} \right) + DPT \\
&+ \left( \sum_{i \neq j}^q \left( (\theta_{hi} - \theta_{lj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) + \left( (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) - \sum_{i,j}^q \left( (\theta_{hi} - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right) \\
&+ \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left( \sum_{i \neq j}^q 2\pi(\pi - 2|\theta_{hi} + \theta_{lj}|) \cos(\theta_{hi} - \theta_{lj}) + 2\pi(\pi - 2|\theta_{Si} + \theta_{Sj}|) \cos(\theta_{Si} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) + \pi(2\pi - 2\theta_{Si} - 2\theta_{hi}), x = \text{mod}(2x, \pi) \right. \\
&\quad \left. - 2\pi \sum_{i,j}^q (\pi - 2|\theta_{hi} + \theta_{Sj}|) \cos(\theta_{hi} - \theta_{Sj}), x = \text{mod}(x, \pi) \right) \\
&- \frac{2}{4\pi^2} \sum_{i,j,*} \cos(2(\theta_{hi} - \theta_{lj})) + \cos(2(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - \cos(2(\theta_{hi} - \theta_{Si}))
\end{aligned} \tag{I.138}$$

## Annexe B – Formulation détaillée du facteur de puissance. Application au système triphasé.

Dans cette annexe, nous donnons le développement mathématique qui nous permet d'exprimer le facteur de puissance dans le cas de l'onduleur connecté à un réseau triphasé par son expression la plus simple et exacte que possible (avec le minimum d'hypothèses simplificatrices). Nous utilisons certaines propriétés mathématiques pour arriver à cette fin comme pour le cas du monophasé.

### 1) Calcul des séries

Le calcul préalable est différent du monophasé vu que nous voulons obtenir une fonction symétrique qui permette d'éliminer des facteurs lourds à calculer.

Nous utilisons des expressions dans le corps des nombres complexes parce que nous avons affaire à une série avec cosinus et sinus comme termes.

La formule de Moivre et la formule d'Euler sont la base de nos calculs. Elles traduisent la notation exponentielle du couple trigonométrique sinus et cosinus liés par un nombre complexe.

**1.1) Calcul du terme :**  $\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} a^{2j} u(n-j)$

$$\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} a^{2j} \cos\left(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) - \sum_{j=0}^{n_s - n_f} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) \right\} \quad (\text{II.1.1})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+\frac{N}{2}-1} \left( a^{2j} e^{ij\frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i\frac{n\pi}{3N}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-\frac{n}{2}} \left( a^{2j} e^{-ij\frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i\frac{n\pi}{3N}} \right) \quad (\text{II.1.2})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+\frac{N}{2}}}{1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)} e^{-i\frac{n\pi}{3N}} + \frac{1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+\frac{N}{2}}}{1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)} e^{i\frac{n\pi}{3N}} \right\} \quad (\text{II.1.3})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+\frac{N}{2}} \right) + \left( e^{i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+\frac{N}{2}} \right)}{\left( 1 - a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right) \left( 1 - a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)} \right\} \quad (\text{II.1.4})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+\frac{N}{2}} \right) + \left( e^{i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+\frac{N}{2}} \right)}{\left( 1 - a^2 \left( e^{-i\frac{\pi}{3N}} + e^{i\frac{\pi}{3N}} \right) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.1.5})$$

$$= \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N}) - a^{2n+N} \cos(\frac{2}{3N}\pi) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2n+N+2} \cos(\frac{2}{3N}\pi + \frac{\pi}{3N})}{\left( 1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.1.6})$$

$$= \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N}) - a^{2n+N} \cos(\frac{\pi}{6}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2n+N+2} \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3N})}{\left( 1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.1.7})$$

**1.2) Terme général :**  $\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \cos(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N})$

$$\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \cos(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) - \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n\pi}{3N})} \right) \right\} \quad (\text{II.2.1})$$

$$\sum_{j=0}^{n-n_l} a^{2j} \cos(n \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i \frac{n\pi}{3N}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-n_l} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i \frac{n\pi}{3N}} \right) \quad (\text{II.2.2})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n-n_l+1}}{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right)} e^{-i \frac{n\pi}{3N}} + \frac{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n-n_l+1}}{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)} e^{i \frac{n\pi}{3N}} \right\} \quad (\text{II.2.3})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i \frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{-i \frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n-n_l+1} \right) + \left( e^{i \frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{i \frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n-n_l+1} \right)}{\left( 1 - a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right) \left( 1 - a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)} \right\} \quad (\text{II.2.4})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i \frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{-i \frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n-n_l+1} \right) + \left( e^{i \frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{i \frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n-n_l+1} \right)}{\left( 1 - a^2 \left( e^{-i \frac{\pi}{3N}} + e^{i \frac{\pi}{3N}} \right) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.2.5})$$

$$= \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) + a^{4+2n-2n_l} \cos(-\frac{\pi n_l}{3N}) - a^{2+2n-2n_l} \cos(-\frac{\pi n_l}{3N} + \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N})}{\left( 1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.2.6})$$

$$\cong \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) + a^{4+2n-2n_I} \cos(-\frac{\pi n_I}{3N}) - a^{2+2n-2n_I} \cos(-\frac{\pi n_I}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-2a^2+a^4)} \right\} \quad (\text{II.2.7})$$

$$\cong \left\{ (1-a^2) \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2+2n-2n_I} \cos(\frac{\pi n_I}{3N})}{(1-a^2)^2} \right\} = \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2+2n-2n_I} \cos(\frac{\pi n_I}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \quad (\text{II.2.8})$$

**1.3) Calcul du terme :**  $a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} a^{2j} u(n_s - j)$

$$a^{2(n-n_s)} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} a^{2j} \cos(n_s \frac{\pi}{3N} - j \frac{\pi}{3N}) = \frac{a^{2(n-n_s)}}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n_s \pi}{3N})} \right) - \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{-i(j \frac{\pi}{3N} - \frac{n_s \pi}{3N})} \right) \right\} \quad (\text{II.3.1})$$

$$= a^{2(n-n_s)} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i \frac{n_s \pi}{3N}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n_s-n_I} \left( a^{2j} e^{-ij \frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i \frac{n_s \pi}{3N}} \right) \quad (\text{II.3.2})$$

$$= \frac{a^{2(n-n_s)}}{2} \left\{ \frac{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n_s-n_I+1}}{1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right)} e^{-i \frac{n_s \pi}{3N}} + \frac{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n_s-n_I+1}}{1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)} e^{i \frac{n_s \pi}{3N}} \right\} \quad (\text{II.3.3})$$

$$= \frac{a^{2(n-n_s)}}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i \frac{n_s \pi}{3N}} - a^2 e^{-i \frac{\pi(n_s+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n_s-n_I+1} \right) + \left( e^{i \frac{n_s \pi}{3N}} - a^2 e^{i \frac{\pi(n_s+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)^{n_s-n_I+1} \right)}{\left( 1 - a^2 e^{i \frac{\pi}{3N}} \right) \left( 1 - a^2 e^{-i \frac{\pi}{3N}} \right)} \right\} \quad (\text{II.3.4})$$

$$\frac{a^{2(n-n_s)}}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i\frac{n_s\pi}{3N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n_s+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n_s-n_l+1} \right) + \left( e^{i\frac{n_s\pi}{3N}} - a^2 e^{i\frac{\pi(n_s+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n_s-n_l+1} \right)}{\left( 1 - a^2 \left( e^{-i\frac{\pi}{3N}} + e^{i\frac{\pi}{3N}} \right) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.3.5})$$

$$= a^{2(n-n_s)} \left\{ \frac{\cos(n_s \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_s-n_l} \cos(\frac{n_l\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_s\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_s-n_l} \cos(n_l \frac{\pi}{3N})}{\left( 1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.3.6})$$

$$\cong a^{2(n-n_s)} \left\{ \frac{\cos(n_s \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_s-n_l} \cos(\frac{n_l\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_s\pi}{3N}) + a^{4+2n_s-n_l} \cos(\frac{n_l\pi}{3N})}{\left( 1 - 2a^2 + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.3.7})$$

$$\cong a^{2(n-n_s)} \left\{ \left( 1 - a^2 \right) \frac{\cos(\frac{n_s\pi}{3N}) - a^{2+2n_s-n_l} \cos(\frac{n_l\pi}{3N})}{\left( 1 - a^2 \right)^2} \right\} = a^{2(n-n_s)} \left\{ \frac{\cos(\frac{n_s\pi}{3N}) - a^{2+2n_s-n_l} \cos(\frac{n_l\pi}{3N})}{\left( 1 - a^2 \right)} \right\}$$

(II.3.8)

## 2) Expression de la tension aux bornes de la capacité

Rappel :

La tension U est de période  $\frac{\pi}{6}$ , n est compris entre  $-N/2$  et  $N/2$  pour une période temporelle de  $[-T/12, T/12]$ ,  $N=T/(6T_{\text{res}})$ .

Entre  $n_l T_{\text{res}}$  et  $n_s T_{\text{res}}$  on a un cycle de roue libre ( la tension est nulle par définition)

### 2.1) Expression de la tension aux bornes de la capacité pour un trou et q trous

2.1.1) Calcul de  $\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} a^{2j} u(n-j)$

$$\sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} a^{2j} u(n-j) = \left[ \sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} \left( a^{2j} e^{ij\frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{-i\frac{n\pi}{3N}} \right) + \sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} \left( a^{2j} e^{-ij\frac{\pi}{3N}} \right) \left( e^{i\frac{n\pi}{3N}} \right) \right] \quad (\text{II.4.1})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+(N/2)}}{1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)} e^{-i\frac{n\pi}{3N}} + \frac{1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+(N/2)}}{1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)} e^{i\frac{n\pi}{3N}} \right\} \quad (\text{II.4.2})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+N/2} \right) + \left( e^{i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+N/2} \right)}{\left( 1 - a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right) \left( 1 - a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)} \right\} \quad (\text{II.4.3})$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left( e^{-i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{-i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+N/2} \right) + \left( e^{i\frac{n\pi}{3N}} - a^2 e^{i\frac{\pi(n+1)}{3N}} \right) \left( 1 - \left( a^2 e^{-i\frac{\pi}{3N}} \right)^{n+N/2} \right)}{\left( 1 - a^2 \left( e^{-i\frac{\pi}{3N}} + e^{i\frac{\pi}{3N}} \right) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.4.4})$$

$$= \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{3N} + \frac{\pi}{6}) - a^{2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{6})}{\left( 1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.4.5})$$

Une forme simplifiée s'exprime par l'équation :

$$\sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} a^{2j} u(n-j) = \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N}) + a^{2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{6})}{\left( 1 - a^2 \right)} \right\}, \quad (\text{II.4.6})$$

Le coefficient  $a$  est un nombre inférieur à 1, une autre forme encore plus simplifiée nous donne :

$$\sum_{j=0}^{n+(N/2)-1} a^{2j} u(n-j) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{3N}\right) \\ \left(1-a^2\right) \end{cases} \quad (\text{II. 4.7})$$

2.1.2) Calcul de  $\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j)$

Le terme  $u''(n-j)$  n'est non nul qu'à l'intérieur du trou (il est la négation de la tension qui existe hors de trou). Il faut voir la variation de  $n-j$  en fonction de la gamme de variation de  $n$ .

**1<sup>er</sup> cas**  $1-N/2 \leq n < n_{l1}$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n]$ .  $(n-j)$  demeure alors inférieur à  $n_{l1}$ , d'où

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j) = 0. \quad (\text{II.5})$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{l1} \leq n < n_{s1}$

L'intervalle de  $j$ ,  $[0, n-1]$  est partagé en **trois** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{l1}] \cup [n-n_{l1}+1, n_{s1}] \cup [n_{s1}+1, n-1].$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_2''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0 \quad (\text{II.6})$$

(II.6) vraie quelque soit l'intervalle, car  $n-j$  est inférieur à toute borne inférieure du trou.

Donc :

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_1''(n-j) \quad (\text{II.7})$$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}, n]$ . D'où  $u''_1(n-j) = u(n-j)$ .

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{l1}-1]$ . D'où  $u''_1(n-j) = 0$

$u''_k(n-j) = 0$  ailleurs que pour  $k = 1$ .

Ainsi :

$$\sum_{j=0}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_k(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_1(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j). \quad (\text{II.8})$$

D'après l'expression (II.1.6),

$$\sum_{j=0}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) = \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) + a^{4+2n-2n_{l1}} \cos(-\frac{\pi n_{l1}}{3N}) - a^{2+2n-2n_{l1}} \cos(-\frac{\pi n_{l1}}{3N} + \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N})}{(-1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4)} \right\} \quad (\text{II.9.1})$$

$$\cong \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2+2n-2n_{l1}} \cos(\frac{\pi n_{l1}}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \quad (\text{II.9.2})$$

**3e cas**  $n_{s1} < n < n_{l2}$

Pour cet intervalle, nous aurons :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_2(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_q(n-j) = 0 \quad (\text{II.10})$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en **trois** intervalles (attention  $n-n_{s1}$  est plus petit que  $n-n_{l1}$ ) :  $[0, n-1] = [0, n-n_{s1}-1] \cup [n-n_{s1}, n-n_{l1}] \cup [n-n_{l1}+1, n-1]$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{s1}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}+1, n]$ . D'où  $u''_k(n-j) = 0$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{l1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}, n_{s1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ . En effet, dans cet intervalle, on a un trou.

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{l1}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u''(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} \alpha^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.11})$$

Si on fait le changement de variable  $l = j-n+n_{s1}$ .

$$\sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} \alpha^{2j} u(n-j) = \sum_{l=0}^{n_{s1}-n_{l1}} \alpha^{2(j+n-n_{s1})} u(n_s - l) = \alpha^{2(n-n_{s1})} \sum_{j=0}^{n_{s1}-n_{l1}} \alpha^{2j} u(n_s - j) \quad (\text{II.12})$$

(après changement de la variable muette  $l$  par  $j$ ), et d'après l'expression (II.3.3),

$$\alpha^{2(n-n_{s1})} \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} \alpha^{2j} u(n-j) = \alpha^{2(n-n_{s1})} \left\{ \frac{\cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n_{s1}-n_{l1}} \cos(\frac{n_{l1}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_{s1}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_{s1}-n_{l1}} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \right\} \quad (\text{II.13.1})$$

$$\cong \left\{ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \cos(\frac{n_{s1}\pi}{3N}) - \alpha^{2+2n-n_{l1}} \cos(\frac{n_{l1}\pi}{3N})}{(1-\alpha^2)} \right\} \quad (\text{II.13.2})$$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{l1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{l1}+1, 1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Ici prend fin de calcul pour un trou, s'il y a un seul trou, remplacer  $n_{l2}$  par  $N$ .

**4e cas**  $n_{I2} < n < n_{s2}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_3(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_q(n-j) = 0$$

L'intervalle de  $j$ ,  $[0, n-1]$  est partagé en **quatre** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{I2}] \cup [n-n_{I2}+1, n-n_{s1}] \cup [n-n_{s1}+1, n-n_{I1}] \cup [n-n_{I1}+1, n-1]$$

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{I2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I2}, n]$ . D'où

$$u''_k(n-j) = u(n-j), \quad \sum_{l=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_k(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{I2}} a^{2j} u''_2(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{I2}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.14})$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I2}+1, n-n_{s1}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{s1}, n_{I2}-1]$ . D'où  
 $u''_k(n-j) = 0$ .

Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{s1}, n-n_{I1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I1}, n_{s1}]$ . Les bornes ont l'indice 1, donc

$$u''_k(n-j) = u(n-j), \text{ donc}$$

$$\sum_{l=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''_k(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{I1}} a^{2j} u'_1(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{I1}} a^{2j} u(n-j). \quad (\text{II.15})$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{I1}-1]$ . D'où  
 $u''_k(n-j) = 0$ .

Donc :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{I2}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{I1}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.16})$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{S2} < n < n_{I3}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_3''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en **cinq** intervalles :

$$\begin{aligned} [0, n-1] = & [0, n-n_{S2}-1] \cup [n-n_{S2}, n-n_{I2}] \cup [n-n_{I2}+1, n-n_{S1}-1] \cup [n-n_{S1}, n-n_{I1}] \\ & \cup [n-n_{I1}+1, n-1] \end{aligned}$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{S2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S2}+1, n]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S2}, n-n_{I2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I2}, n_{S2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I2}+1, n-n_{S1}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S1}+1, n_{I2}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S1}, n-n_{I1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S1}, n_{I1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I1}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{I1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$

Donc :

$$\sum_{k=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=n-n_{S1}}^{n-n_{I1}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{S2}}^{n-n_{I2}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.18})$$

Ici prend fin de calcul pour deux trous, s'il y a deux trous, remplacer  $n_{I3}$  par N

**6<sup>e</sup> cas**  $n_{I3} < n < n_{S3}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_4''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en **cinq** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{I3}] \cup [n-n_{I3}, n-n_{S2}-1] \cup [n-n_{S2}, n-n_{I2}] \cup [n-n_{I2}+1, n-n_{S1}-1]$$

$$\cup [n-n_{S1}, n-n_{II}] \cup [n-n_{II}+1, n-1]$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{I3}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I3}, n]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I3}, n-n_{S2}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S2}+1, n_{I3}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S2}, n-n_{I2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I2}, n_{S2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I2}+1, n-n_{S1}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S1}, n_{I2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S1}, n-n_{II}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{II}, n_{S1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{II}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{II}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$

Donc :

$$\sum_{k=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{I3}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{S2}}^{n-n_{I2}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{S1}}^{n-n_{II}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{II}+1}^{n-1} a^{2j} u(n-j) \quad (II.18)$$

**7e cas**  $n_{S3} < n < n_{I4}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_4''(n-j) = \dots \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_q''(n-j) = 0$$

L'intervalle de  $j$   $[0, n-1]$  est partagé en **six** intervalles :

$$[0, n-1] = [0, n-n_{S3}+1] \cup [n-n_{S3}, n-n_{I3}] \cup [n-n_{I3}+1, n-n_{S2}-1] \cup [n-n_{S2}, n-n_{I2}]$$

$$\cup [n-n_{I2}+1, n-n_{S1}+1] \cup [n-n_{S1}, n-n_{II}] \cup [n-n_{II}+1, n-1]$$

- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[0, n-n_{S3}+1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S3}, n]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S3}, n-n_{I3}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I3}, n_{S2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I3}+1, n-n_{S2}-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S2}+1, n_{I3}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S2}, n-n_{I2}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{I2}, n_{S2}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{I2}+1, n-n_{S1}+1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{S1}-1, n_{I2}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{S1}, n-n_{II}]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[n_{II}, n_{S1}]$ . D'où  $u_k''(n-j) = u(n-j)$ .
- Quand  $j$  varie dans l'intervalle  $[n-n_{II}+1, n-1]$ ,  $(n-j)$  varie dans  $[1, n_{II}-1]$ . D'où  $u_k''(n-j) = 0$ .

Donc :

$$\sum_{k=1}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=n-n_{S3}}^{n-n_{I3}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{S2}}^{n-n_{I2}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{S1}}^{n-n_{II}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.19})$$

**Ici prend fin de calcul pour trois trous, s'il y a trois trous, remplacer  $n_{I4}$  par  $N$**

Ainsi de suite de proche en proche, on peut démontrer par récurrence que :

**Si  $n_{Im} < n < n_{sm}$**

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=n-n_{sk}}^{n-n_{lk}} \alpha^{2j} u(n-j) + \sum_{j=0}^{n-n_{lq}} \alpha^{2j} u(n-j)$$

(II.20)

**Si**  $n_{sm} < n < n_{I(m+1)}$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=n-n_{sk}}^{n-n_{lk}} \alpha^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.21})$$

**Les expressions de  $v_c$  (au facteur multiplicateur  $\hat{V}$ ) prêt deviennent :**

**1<sup>er</sup> cas**  $1 - \frac{N}{2} \leq n < n_{I1}$

$$v_c(n) = a^{2n+N} (v_c - v_c'') (-N/2) - (1+a^2)^2 \sum_{j=0}^{n+N/2-1} a^{2j} (u - u'')(n-j) \quad (\text{II.22.1})$$

$$= a^{2n+N} (v_c - v_c'') (-N/2) - (1+a^2) \left\{ \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{3N} + \frac{\pi}{6}) - a^{2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{6})}{\left(1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4\right)} \right\} \quad (\text{II.22.2})$$

$$\text{Assimilable à un terme négligeable prêt : } -(1+a^2) \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} \quad (\text{II.22.3})$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{I1} \leq n < n_{s1}$

$$v_c(n) = a^{2n+N} (v_c - v_{c''})(-N/2) - (1+a^2) \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{3N} + \frac{\pi}{6}) - a^{2n+N/2} \cos(\frac{\pi}{6})}{\left(1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4\right)} - \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) + a^{4+2n-2n_{I_1}} \cos(-\frac{\pi n_{I_1}}{3N}) - a^{2+2n-2n_{I_1}} \cos(-\frac{\pi n_{I_1}}{3N} + \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N})}{\left(1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4\right)} \right\} \right\} \quad (\text{II.22.4})$$

$$= -(1+a^2) \left\{ \frac{-a^{4+2n-2n_{I1}} \cos(-\frac{\pi n_{I1}}{3N}) + a^{2+2n-2n_{I1}} \cos(-\frac{\pi n_{I1}}{3N})}{\left(1 - 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + a^4\right)} \right\}, \quad (\text{II.22.5})$$

qui peut être assimilé à :

$$v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \frac{\left[ \alpha^{2+2n-2n_{I1}} \cos\left(\frac{\pi n_{I1}}{3N}\right) \right]}{(1 - \alpha^2)} \quad (\text{II.22.6})$$

Cette dernière expression peut être réécrite par :

$$v_c(n) = -(1 + a^2) \frac{\left[ \beta_n \cos\left(\frac{\pi n_{I1}}{3N}\right) \right]}{(1 - a^2)} \quad (\text{II.22.7})$$

3<sup>e</sup> cas  $n_{s1} < n < n_{I_2}$

$$v_c(n) = -(1 + a^2) \left\{ \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n} \cos(\frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} - a^{2(n-n_s)} \left[ \frac{\cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_{s1}-n_{l1}} \cos(\frac{n_{l1}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_s\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_s-n_l} \cos(n_l \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \right] \right\}$$

Sensiblement égale à :

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left[ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) + a^{2(n-n_{l1}+1)} \cos(\frac{n_{l1}\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \quad (\text{II.23.2})$$

**4<sup>e</sup> cas**  $n_{l2} < n < n_{s2}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{l2}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.23.3})$$

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left[ \begin{array}{l} \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n} \cos(\frac{\pi}{3N})}{\left(1-2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N})+a^4\right)} - \\ \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^{4+2n-2n_{l2}} \cos(-\frac{\pi n_{l2}}{3N}) + a^{2+2n-2n_{l2}} \cos(-\frac{\pi n_{l2}}{3N} + \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N})}{\left(1-2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N})+a^4\right)} \\ - a^{2(n-n_{s1})} \left[ \frac{\cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_{s1}-n_{l1}} \cos(\frac{n_{l1}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_{s1}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_{s1}-n_{l1}} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{\left(1-2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N})+a^4\right)} \right] \end{array} \right] \quad (\text{II.23.4})$$

Sensiblement égale à :

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left[ \frac{-a^{2+2n-2n_{l2}} \cos(\frac{\pi n_{l2}}{3N}) + a^{2(n-n_{s1})} \cos(\frac{n_{s1}\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \quad (\text{II.23.5})$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{s2} < n < n_{l3}$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u(n-j) = \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{l1}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s2}}^{n-n_{l2}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.24.1})$$

$$v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - \alpha^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + \alpha^{2+2n} \cos(\frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - \alpha^4 \right)} - \\ \alpha^{2(n-n_{s1})} \left[ \frac{\cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - \alpha^{2+2n_{s1}-n_{I1}} \cos(\frac{n_{I1}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - \alpha^2 \cos(\frac{n_{s1}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + \alpha^{4+2n_{s1}-n_{I1}} \cos(n_{I1} \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - \alpha^4 \right)} \right] \\ - \alpha^{2(n-n_{s2})} \left[ \frac{\cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) - \alpha^{2+2n_{s2}-n_{I2}} \cos(\frac{n_{I2}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - \alpha^2 \cos(\frac{n_{s2}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + \alpha^{4+2n_{s2}-n_{I2}} \cos(n_{I2} \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - \alpha^4 \right)} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{II.24.2})$$

Sensiblement égale à :

$$v_c(n) = -(1 + \alpha^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1 - \alpha^2)} + \\ \left[ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - \alpha^{2(n-n_{I1}+1)} \cos(\frac{n_{I1}\pi}{3N})}{(1 - \alpha^2)} \right. \\ \left. + \frac{\alpha^{2(n-n_{s2})} \cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) - \alpha^{2(n-n_{I2}+1)} \cos(\frac{n_{I2}\pi}{3N})}{(1 - \alpha^2)} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{II.24.3})$$

**6<sup>e</sup> cas**  $n_{I3} < n < n_{s3}$ , q=4

$$\sum_1^q \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=0}^{n-n_{I3}} \alpha^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s2}}^{n-n^2} \alpha^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s1}}^{n-n_{I1}} \alpha^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.25.1})$$

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n} \cos(\frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \\ \hline \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^{4+2n-2n_{I_2}} \cos(-\frac{n\pi_{I_2}}{3N}) + a^{2+2n-2n_{I_2}} \cos(-\frac{n\pi_{I_2}}{3N} + \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \\ \hline a^{2(n-n_{s_1})} \left[ \frac{\cos(n_{s_1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_{s_1}-n_{I_1}} \cos(\frac{n_{I_1}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_{s_1}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_{s_1}-n_{I_1}} \cos(n_{I_1} \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \right] \\ a^{2(n-n_{s_2})} \left[ \frac{\cos(n_{s_2} \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_{s_2}-n_{I_2}} \cos(\frac{n_{I_2}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_{s_2}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_{s_2}-n_{I_2}} \cos(n_{I_2} \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \right] \end{array} \right\}$$

(II.25.2)

**Avant-dernier cas**  $n_{s(q-1)} < n < n_{I_q}$ 

$$\sum_{j=0}^q \sum_{j=0}^{n-1} a^{2j} u_k''(n-j) = \sum_{j=n-n_{s_3}}^{n-n_{I_3}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s_2}}^{n-n_{I_2}} a^{2j} u(n-j) + \sum_{j=n-n_{s_1}}^{n-n_{I_1}} a^{2j} u(n-j) \quad (\text{II.26})$$

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{2+2n} \cos(\frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} + \\ + \sum_{k=1}^q a^{2(n-n_{s_k})} \left[ \frac{\cos(n_{s_k} \frac{\pi}{3N}) - a^{2+2n_{s_k}-n_{I_k}} \cos(\frac{n_{I_k}\pi}{3N} - \frac{\pi}{3N}) - a^2 \cos(\frac{n_{s_k}\pi}{3N} + \frac{\pi}{3N}) + a^{4+2n_{s_k}-n_{I_k}} \cos(n_{I_k} \frac{\pi}{3N})}{\left( -1 + 2a^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) - a^4 \right)} \right] \end{array} \right\}$$

(II.27.1)

Sensiblement égale à :

$$v_c(n) = -(1+a^2) \left\{ \frac{\cos(n \frac{\pi}{3N})}{(-1+a^2)} + \sum_{k=1}^q a^{2(n-n_{s_k})} \left[ \frac{\cos(\frac{n_{s_k}\pi}{3N}) - a^{2+2n_{s_k}-n_{I_k}} \cos(\frac{n_{I_k}\pi}{3N})}{(-1+a^2)} \right] \right\} \quad (\text{II.27.2})$$

Que nous pouvons écrire :

$$v_c(n) \cong -(1 + \alpha^2) \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N})}{(-1 + \alpha^2)} + \sum_{k=1}^q \frac{\alpha^{2(n-n_{sk})} \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - \alpha^{2(n-n_{lk})} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N})}{(-1 + \alpha^2)} \right\}$$

(II.27.3)

dernier cas  $n_{sq} < n < \frac{N}{2}$

$$v_c(n) = \alpha^2 v_c(-N/2) - \sum_{k=1}^q (1 + \alpha^2) \alpha^{2(n-n_{sk})} \left\{ \frac{\cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - \alpha^{2+2n_{sk}-n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N}) + \alpha^2 \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) + \alpha^{4+2n_{sk}-n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N})}{\left(1 - 2\alpha^2 \cos(\frac{\pi}{3N}) + \alpha^4\right)} \right\}$$

(II.28.1)

$$v_c(n) \cong -(1 + \alpha^2) \left\{ \frac{\sum_{k=1}^q \left\{ \alpha^{2(n-n_{sq})} \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - \alpha^{2+2n-2n_{lk}} \cos(\frac{n_{lk}\pi}{3N}) \right\}}{(1 - \alpha^2)} \right\}$$

(II.28.2)

### 3) Calcul des courants

Expressions des grandeurs électriques en fonction de la variable discrète n

1<sup>er</sup> cas  $1 - \frac{N}{2} \leq n < n_{I_1}$

$$i_{red,s}(n) = -\frac{2}{\pi} \left[ \cos(\frac{n\pi}{3N}) - (1 + \alpha^2) \frac{\cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1 - \alpha^2)} \right],$$

(II.30.1)

pouvant être reformulée par :

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\alpha^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-\alpha^2)} \right] \quad (\text{II.30.2})$$

**2<sup>e</sup> cas**  $n_{l1} \leq n < n_{s1}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (\text{II.31})$$

**3<sup>e</sup> cas**  $n_{s1} < n < n_{l2}$

$$i_{red,s}(n) = -\frac{2}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{3N}\right) - (1+\alpha^2) \left\{ \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N})}{(1-\alpha^2)} + \left[ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1}\frac{\pi}{3N}) - \alpha^{2(n-n_{l1}+1)} \cos(n_{l1}\frac{\pi}{3N})}{(1-\alpha^2)} \right] \right\} \right] \quad (\text{II.32.1})$$

En d'autres termes :

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2\alpha^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{1-\alpha^2} + (1+\alpha^2) \left\{ \left[ \frac{\alpha^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1}\frac{\pi}{3N}) - \alpha^{2(n-n_{l1}+1)} \cos(n_{l1}\frac{\pi}{3N})}{1-\alpha^2} \right] \right\} \right] \quad (\text{II.32.2})$$

**4<sup>e</sup> cas**  $n_{l2} < n < n_{s2}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (\text{II.33})$$

**5<sup>e</sup> cas**  $n_{s2} < n < n_{l3}$

$$i_{red,s}(n) = -\frac{2}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{3N}\right) - (1+a^2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos(n\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} + \\ & \frac{a^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1}\frac{\pi}{N}) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \cos(n_{l1}\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \end{aligned} \right\} + \left[ \frac{a^{2(n-n_{s2})} \cos(n_{s2}\frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \cos(n_{l2}\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \end{aligned} \right] \quad (\text{II.34.1})$$

réduite à

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos\left(\frac{n\pi}{3N}\right)}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{a^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1}\frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1}\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \\ & + \frac{a^{2(n-n_{s2})} \cos(n_{s2}\frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \cos(n_{l2}\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \end{aligned} \right\} \right] \quad (\text{II.34.2})$$

**6<sup>e</sup> cas**  $n_{l3} < n < n_{s3}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (\text{II.35})$$

**7<sup>e</sup> cas**  $n_{s3} < n < n_{l4}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos\left(\frac{n\pi}{3N}\right)}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{a^{2(n-n_{s1})} \cos(n_{s1}\frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1}\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \\ & + \frac{a^{2(n-n_{s2})} \cos(n_{s2}\frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l2}+1)} \cos(n_{l2}\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \\ & + \frac{a^{2(n-n_{s3})} \cos(n_{s3}\frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{l3}+1)} \sin(n_{l3}\frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \end{aligned} \right\} \right] \quad (\text{II.36})$$

Jusque-là, il s'agissait de trois cycles de roues libres (trois trous).

Ainsi de suite, nous avons par récurrence :

Avant dernier cas  $n_{lq} < n < n_{sq}$

$$i_{red,s}(n) = 0 \quad (\text{II.37})$$

dernier cas  $n_{sq} < n < n_{lq+1} = \frac{N}{2}$

$$i_{red,s}(n) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{n\pi}{3N})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^g \left\{ \frac{a^{2(n-n_{sk})} \cos(n_{sk} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(n-n_{lk}+1)} \sin(n_{lk} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right\} \right] \quad (\text{II.38})$$

### 3.2 Expressions des grandeurs électriques en fonction de la variable t

Rappel :  $t = nT_{\text{res}}$  et  $N = T/(6T_{\text{res}})$ , donc  $n = t/(T/6N) = 6N t/T$

#### 3.2.1 Expressions des courants du redresseur

1er cas  $\frac{T}{12} \leq t < n_{l1} \frac{T}{6N}$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{(1-a^2)} \right] \quad (\text{II.39})$$

2<sup>e</sup> cas  $n_{l1} \frac{T}{6N} \leq t < n_{s1} \frac{T}{6N}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (\text{II.40})$$

$$\underline{\text{3e cas}} \quad n_{s1} \frac{T}{6N} < t < n_{I2} \frac{T}{6N}$$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{1-a^2} + (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{I1}+1)} \cos(n_{I1} \frac{\pi}{3N})}{1-a^2} \right] \right\} \right]$$

$$\underline{\text{4e cas}} \quad n_{I2} \frac{T}{6N} < t < n_{s2} \frac{T}{6N}$$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$\underline{\text{5e cas}} \quad n_{s2} \frac{T}{6N} < t < n_{I3} \frac{T}{6N}$$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{I1}+1)} \cos(n_{I1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{s2})} \cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{res}}-n_{I2}+1)} \cos(n_{I2} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right]$$

$$(\text{II.34})$$

$$\underline{\text{6e cas}} \quad n_{I3} \frac{T}{6N} < t < n_{s3} \frac{T}{6N}$$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (\text{II.35})$$

$$\underline{\text{7e cas}} \quad n_{s3} \frac{T}{6N} < t < n_{I4} \frac{T}{6N}$$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left[ \begin{aligned} & \left[ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l1})} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l1}+1)} \sin(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l2})} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l2}+1)} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \\ & + \left[ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l3})} \cos(n_{l3} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{l3}+1)} \sin(n_{l3} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \end{aligned} \right] \quad (II.36)$$

Jusque-là, il s'agissait de trois cycles de roues libres (trois trous).

**Avant dernier cas**  $n_{lq} \frac{T}{6N} < t < n_{sq} \frac{T}{6N}$

$$i_{red,s}(t) = 0 \quad (II.37)$$

**dernier cas**  $n_{sq} \frac{T}{6N} < t < T/12$

$$i_{red,s}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \sum_{k=1}^q \left[ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{sk})} \cos(n_{sk} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{re}}-n_{lk}+1)} \sin(n_{lk} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \quad (II.38)$$

### 3.2.2 Courants à l'entrée du redresseur sans trou :

Les courants sont donnés au chapitre 7.

### 3.2.3 Courants à l'entrée du redresseur pour quelques trous :

$$0 \leq t < \frac{T}{12}, \quad i_1 = 0. \quad (II.39)$$

$$\underline{\text{1er cas}} \quad \frac{T}{12} \leq t < \left(1 + \frac{n_{l1}}{N}\right) \frac{T}{6}$$

$$i_l(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a^2 \cos(\frac{2\pi t}{3T} - \frac{\pi}{3})}{(1-a^2)} \right] \quad (\text{II.40})$$

$$\underline{\text{2e cas}} \quad \left(1 + \frac{n_{l1}}{N}\right) \frac{T}{6} \leq t < \left(1 + \frac{n_{s1}}{N}\right) \frac{T}{6}$$

$$i_l(t) = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\underline{\text{3e cas}} \quad \left(1 + \frac{n_{s1}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \left(1 + \frac{n_{l2}}{N}\right) \frac{T}{6}$$

$$i_l(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2nt}{T} - \frac{\pi}{3})}{1-a^2} + (1+a^2) \left\{ \frac{a^{2(\frac{t}{T_{res}} - n_{s1})} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{2(\frac{t}{T_{res}} - n_{l1}+1)} \cos(\frac{n_{l1}\pi}{3N})}{1-a^2} \right\} \right] \quad (\text{II.42})$$

$$\underline{\text{4e cas}} \quad \left(1 + \frac{n_{l2}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \left(1 + \frac{n_{s2}}{N}\right) \frac{T}{6}$$

$$i_l(t) = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$\underline{\text{5e cas}} \quad \left(1 + \frac{n_{s2}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \left(1 + \frac{n_{l3}}{N}\right) \frac{T}{6}$$

$$i_1(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{3})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{s1})}{3}} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{l1}+1)}{3}} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{\frac{2(n-n_{s1})}{3}} \cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{l2}+1)}{3}} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right]$$

(II.44)

**6<sup>e</sup> cas**  $\left(1 + \frac{n_{l3}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \left(1 + \frac{n_{s3}}{N}\right) \frac{T}{6}$

$$i_1(t) = 0 \quad (\text{II.45})$$

**7<sup>e</sup> cas**  $\left(1 + \frac{n_{s3}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \left(1 + \frac{n_{l4}}{N}\right) \frac{T}{6}$

$$i_1(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{3})}{(1-a^2)} + (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{s1})}{3}} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{l1}+1)}{3}} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{s2})}{3}} \cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) + a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{l2}+1)}{3}} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{s3})}{3}} \cos(n_{s3} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_{sa}} - n_{l3}+1)}{3}} \cos(n_{l3} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right]$$

(II.48)

Ainsi de suite,

**pour**  $\left(1 + \frac{n_{lq}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \left(1 + \frac{n_{sq}}{N}\right) \frac{T}{6}$

$$i_1(t) = 0 \quad (\text{II.49})$$

**pour**  $\left(1 + \frac{n_{sq}}{N}\right) \frac{T}{6} < t < \frac{3T}{12},$

$$i_1(t) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos(\frac{2nt}{T} - \frac{\pi}{3})}{(1-a^2)} + (1+a^2)a^{\frac{2t}{T_{res}}} \left\{ \sum_{k=1}^q \left[ \frac{a^{-2n_{sk}} \cos(\frac{n_{sk}\pi}{3N}) - a^2 a^{-2n_{Ik}} \cos(\frac{n_{Ik}\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \quad (\text{II.50})$$

Par symétrie, on déduit le reste de  $i_1$ .

$$\frac{3T}{12} \leq t \leq \frac{5T}{12} \quad i_1(t) = i_1(t - \frac{T}{6}) \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{5T}{12} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad i_1(t) = 0 \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{T}{2} \leq t \leq T \quad i_1(t) = -i_1(t - \frac{T}{2}) \quad (\text{II.53})$$

Etc.

La double symétrie nous permet d'alléger les formules de développement de Fourier.

#### 4) Développement en série de Fourier :

De la même manière que pour le redresseur monophasé, les termes  $\sum_{m \text{ impair}} a_m^2$  et  $\sum_{m \text{ impair}} b_m^2$  seront écrits en fonction d'un seul terme (fonction de convergence).

Nous procédons maintenant au calcul des coefficients de Fourier pour l'analyse spectrale et harmonique des courants d'entrée. Les alternances positives ( $0 \leq t \leq T/2$ ) et négatives ( $T/2 \leq t \leq T$ ), du courant  $I_{red,e}$  sont identiques au signe près. En conséquence, le spectre de  $I_{red,e}$  ne comporte que des harmoniques de rang impair.

$$i_{l(t)} = \sum_{m \text{ impair}} A_m \sin(m\omega t) + B_m \cos(m\omega t) \quad (\text{II.54})$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i_l \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt = \frac{4}{T} \int_{-T/12}^{T/12} i_l \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt + \frac{4}{T} \int_{T/12}^{T/12} i_l(t - T/6) \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt \\ &= \frac{8}{T} \cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} i_l \frac{\sin(m\omega t + m\frac{\pi}{6})}{A_0} dt = \frac{8}{T} \cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} i_{red,s}(t) \frac{\sin(m\omega t + m\frac{\pi}{6})}{A_0} dt \end{aligned}$$

$$\text{Avec : } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

de même :

$$B_m = \frac{8}{T} \cos\left(\frac{m\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} i_{red,s}(t) \frac{\cos(m\omega t + m\frac{\pi}{6})}{A_0} dt \quad (\text{II.55})$$

#### 7.4 Développent des séries de Fourier pour zéro trou.

Lorsque nous avons 0 trou, vu la symétrie par rapport à  $\frac{\pi}{2}$  et vu que les alternances positives et négatives sont égales en valeurs positives, les coefficients  $B_m$  sont nuls.

- Amplitude du fondamental

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{8}{T} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} A_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt \\ A_1 &= \frac{8}{T} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} A_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t) dt \\ A_1 &= \frac{8}{T} A_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \int_{-T/12}^{T/12} \frac{\cos(4\pi \frac{t}{T}) + 1}{2} dt = \frac{8}{T} A_0 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \left[ \frac{\sin(4\pi \frac{t}{T})}{4\pi} + \frac{t}{2} \right]_{-T/12}^{T/12} \quad (\text{II.56.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{T} A_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{2 \sin(\frac{\pi}{3})}{2} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{8}{T} A_0 \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{2}{\pi} A_0 \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} A_0 \left[ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} + 1 \right] = A_0 C_d
\end{aligned} \tag{II.56.2}$$

Avec  $C_d = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} + 1 \right]$

- Amplitude des harmoniques de rang quelconque.

$$A_{m, m \neq 1} = \frac{8}{T} \cos(m \frac{\pi}{6}) \int_{-T/12}^{T/12} A_0 \cos(\omega t) \sin(m\omega t + \frac{m\pi}{2}) dt \tag{II.57.1}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \int_{-T/12}^{T/12} \frac{\sin((m-1)\omega t + m \frac{\pi}{2}) + \sin((m+1)\omega t + m \frac{\pi}{2})}{2} dt \\
&= \cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)T/12 + m \frac{\pi}{2}) - \cos(-\omega(m-1)T/12 + m \frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos(\omega(m+1)T/12 + m \frac{\pi}{2}) - \cos(-\omega(m+1)T/12 + m \frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \right)
\end{aligned} \tag{II.57.2}$$

$$A_{m, m \neq 1} = 2 \sin(m \frac{\pi}{2}) \cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right) \tag{II.58.3}$$

$$\begin{aligned}
A_{m, m \neq 1} &= 2 \sin(3k\pi \pm 1 \frac{\pi}{2}) \cos((6k \pm 1) \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right) \\
A_{m, m \neq 1} &= 2(-1)^k \cos((6k \pm 1) \frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right) \\
A_{m, m \neq 1} &= 2(-1)^k (-1)^k \cos(\frac{\pi}{6}) E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/12)}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/12)}{2(m+1)\omega} \right)
\end{aligned} \tag{II.58.4}$$

Mais, nous savons que  $m = 6k \pm 1$ , donc :

$$A_k = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \left( \frac{\sin(\pi k)}{12k\omega} + \frac{\sin(\pi/3)}{4(3k+1)\omega} - \frac{\sin(\pi/3)}{4(3k-1)\omega} + \frac{\sin(\pi(6k)/6)}{2(6k)\omega} \right) = \frac{-3E_1}{4\omega(3k+1)(3k-1)} \quad (\text{II.58.5})$$

## 7.5 Développent des séries de Fourier en présence de roues libres.

Nous procèderons d'abord par calcul d'un exemple à 1, 3 et 5 trous.

Nous posons :

$$\alpha = m \frac{2\pi}{T}, \quad \beta = \frac{2 \log \alpha}{T_{res}} \quad (\text{II.59})$$

Nous avons alors :

$$a_m = \frac{A_m}{A_0} \quad (\text{II.60})$$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{8}{T} \int_0^{T/6} i_{red,e} \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt = \frac{8}{T} \int_0^{T/6} i_{red,s} \frac{\sin(m\omega t)}{A_0} dt \\
&= \frac{8}{T} \int_0^{n_1 T_\infty} \frac{4a^2}{\pi(1-a^2)} \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right) \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt + \frac{8}{T} \int_{n_1 T_\infty}^{n_1 T} (0) \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt + \\
&\quad \frac{8}{T} \int_{n_1 T_\infty}^{n_1 T_\infty} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{s1})}{3}} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{l1})+1}{3}} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt + \\
&\quad \frac{8}{T} \int_{n_1 T_\infty}^{n_1 T_\infty} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{s1})}{3}} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{l1})+1}{3}} \cos(n_{l1} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{s2})}{3}} \cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{l2})+1}{3}} \cos(n_{l2} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\
&\quad \frac{8}{T} \int_{n_1 T_\infty}^{n_1 T_\infty} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-2a^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)}{(1-a^2)} - (1+a^2) \left\{ \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{s3})}{3}} \cos(n_{s3} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{l3})+1}{3}} \cos(n_{l3} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] + \left[ \frac{a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{s4})}{3}} \cos(n_{s4} \frac{\pi}{3N}) - a^{\frac{2(\frac{t}{T_\infty}-n_{l4})+1}{3}} \cos(n_{l4} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right\} \right] \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt + \dots \\
&\quad + \frac{8}{T} \int_{n_1 T_\infty}^{n_1 T_\infty} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2a^2 \cos\left(\frac{2nt}{T}\right)}{(1-a^2)} + (1+a^2) a^{\frac{2t}{T_\infty}} \sum_{k=1}^q \left[ \frac{a^{-2n_{sk}} \cos(n_{sk} \frac{\pi}{3N}) - a^2 a^{-2n_{lk}} \cos(n_{lk} \frac{\pi}{3N})}{(1-a^2)} \right] \right] \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt
\end{aligned} \tag{II.61}$$

Nous posons aussi :

$$E_1 = \alpha^2 \frac{8}{T} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(1-\alpha^2)} \quad (\text{II.62.1})$$

Sachant que  $A_0 = \frac{8}{T} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left[ \frac{2a^2}{(1-a^2)} \right]$  et que le facteur  $\sqrt{\frac{C}{L}}$  sera rajouté dans  $E_1$ , et que

le signe - sera rajouté dans l'expression des  $a_i$  et  $b_i$  par la suite, donc  $E_1$  est le même facteur que  $A_0$  aux constantes électriques prêt.

$$E_{21} = a^{(2-2n_{I1})} \frac{8}{T} \frac{2}{\pi} \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \cos\left(\frac{\pi n_{I1}}{3N}\right) \quad (\text{II. 62.2})$$

$$E_{22} = a^{(2-2n_{I2})} \frac{8}{T} \frac{2}{\pi} \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \cos\left(\frac{\pi n_{I2}}{3N}\right) \quad (\text{II. 62.3})$$

$$E_{23} = a^{(2-2n_{I3})} \frac{8}{T} \frac{2}{\pi} \frac{(1+a^2)}{(1-a^2)} \cos\left(\frac{\pi n_{I3}}{3N}\right) \quad (\text{II. 62.4})$$

$$E_{31} = \frac{8(1+a^2)3}{T\pi(1-a^2)} \left[ -a^{-2n_{s1}} \cos(n_{s1} \frac{\pi}{3N}) + a^{2(-n_{I1}+1)} \cos\left(\frac{n_{I1}\pi}{3N}\right) \right] \quad (\text{II. 62.5})$$

$$E_{32} = \frac{8(1+a^2)3}{T\pi(1-a^2)} \left[ -a^{-2n_{s2}} \cos(n_{s2} \frac{\pi}{3N}) + a^{2(-n_{I2}+1)} \cos\left(\frac{n_{I2}\pi}{3N}\right) \right] \quad (\text{II. 62.6})$$

$$E_{33} = \frac{8(1+a^2)3}{T\pi(1-a^2)} \left[ -a^{-2n_{s3}} \cos(n_{s3} \frac{\pi}{3N}) + a^{2(-n_{I3}+1)} \cos\left(\frac{n_{I3}\pi}{3N}\right) \right] \quad (\text{II. 62.7})$$

...etc.

D'après les calculs numériques par Matlab,  $\beta$  est très grand et est négatif, car  $a$  est un nombre inférieur à 1.

Nous allons négliger dans un premier calcul tous les éléments dans lesquels nous déterminons les exponentiels de  $a$ .

Pour un trou, l'expression suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} H_{1, m} &= \cos\left(m \frac{\pi}{6}\right) E_1 \int_0^{n_{I1} T_{res}} \cos(\omega t) \sin(m\omega t + m \frac{\pi}{2}) dt \\ &= \cos\left(m \frac{\pi}{6}\right) E_1 \int_0^{n_{I1} T_{res}} \frac{\sin((m-1)\omega t + m \frac{\pi}{2}) + \sin((m+1)\omega t + m \frac{\pi}{2})}{2} dt \\ &= \cos\left(m \frac{\pi}{6}\right) E_1 \left( \frac{\cos(\omega(m-1)n_{I1} T_{res} + m \frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{I1} T_{res} + m \frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} + \frac{m \cos(m \frac{\pi}{2})}{2\omega(m^2 - 1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Sachant que :

$$\frac{m \cos(m \frac{\pi}{2})}{2\omega(m^2 - 1)} = \frac{2k \cos(2k \frac{\pi}{2})}{2\omega(2k^2 - 1)} = \begin{cases} \frac{k(-1)^k}{\omega(2k^2 - 1)} & \text{si } m = 2k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

qui est le terme d'une série convergente.

Or,  $m = 6k \pm 1$ , donc l'expression précédente est nulle.

Pour  $m=1$  :

$$\begin{aligned} H_{1,1} &= \cos(\frac{\pi}{6})E_1 \int_0^{n_{I1}T_{res}} \cos(\omega t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = \cos(\frac{\pi}{6})E_1 \int_0^{n_{I1}T_{res}} \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2} dt \\ &= \cos(\frac{\pi}{6})E_1 \left[ \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{1}{2} \right]_0^{n_{I1}T_{res}} \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

$$H_3 = H_{3,1} + H_{3,2} \quad (\text{II.66})$$

De même manière,

$$\begin{aligned} H_{3,m} &= \cos(m \frac{\pi}{6})E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} \cos(\omega t) \sin(m\omega t + m \frac{\pi}{2}) dt \\ &= \cos(m \frac{\pi}{6})E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} \frac{\sin((m-1)\omega t + m \frac{\pi}{2}) + \sin((m+1)\omega t + m \frac{\pi}{2})}{2} dt = \\ &\cos(m \frac{\pi}{6})E_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(\omega(m-1)n_{I2}T_{res} + m \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m-1)n_{s1}T_{res} + m \frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \\ + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{I2}T_{res} + m \frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m+1)n_{s1}T_{res} + m \frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

Pour  $m=1$  :

$$H_{3,1} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \int_{n_s T_{res}}^{n_{I2} T_{res}} \cos(\omega t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \int_{n_s T_{res}}^{n_{I2} T_{res}} \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2} dt = E_1 \left[ \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{1}{2} \right]_{n_s T_{res}}^{n_{I2} T_{res}}$$

(II.68.1)

$$H_{3,1} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \left( \frac{\sin(2\omega n_{I2} T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{S1} T_{res})}{4\omega} + \frac{(n_{I2} - n_{S1}) T_{res}}{2} \right) \quad (II.68.2)$$

Cela nous donne un coefficient de Fourier cumulé de :

$$\alpha_{1,3} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) E_1 \left( \frac{\sin(2\omega n_{I1} T_{res})}{4\omega} + \frac{\sin(2\omega n_{I2} T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{S1} T_{res})}{4\omega} + \frac{(n_{I1} + n_{I2} - n_{S1}) T_{res}}{2} \right) \quad (II.69)$$

Pour 5 trous, nous aurons :

$$H_5 = H_{5,1} + H_{5,2} \quad (II.70)$$

$$H_{5,m} = \cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \int_{n_{s2} T_{res}}^{n_{I3} T_{res}} \cos(\omega t) \sin(m\omega t + \frac{m\pi}{2}) dt =$$

$$\cos(m \frac{\pi}{6}) E_1 \int_{n_{s2} T_{res}}^{n_{I3} T_{res}} \frac{\sin((m-1)\omega t + \frac{m\pi}{2}) - \sin((m+1)\omega t + \frac{m\pi}{2})}{2} dt \quad (II.71.1)$$

$$= \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) E_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos(\omega(m-1)n_{I3} T_{res} + \frac{m\pi}{2}) - \cos(\omega(m-1)n_{s2} T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \\ + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{I3} T_{res} + \frac{m\pi}{2}) - \cos(\omega(m+1)n_{s2} T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \end{array} \right\} \quad (II.72.2)$$

Pour m=1 :

$$\frac{H_{5,1}}{\cos(\frac{\pi}{6})} = E_1 \int_{n_{S2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \cos(\omega t) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = E_1 \int_{n_{S2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2} dt = E_1 \left[ \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{t}{2} \right]_{n_{S2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}}$$

(II.73),

Ce qui donne

$$a_{1,5} = \cos(\frac{\pi}{6}) E_1 \left( \begin{array}{l} \frac{\sin(2\omega n_{I1} T_{res})}{4\omega} + \frac{\sin(2\omega n_{I2} T_{res})}{4\omega} + \frac{\sin(2\omega n_{I3} T_{res})}{4\omega} \\ - \frac{\sin(2\omega n_{S1} T_{res})}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega n_{S2} T_{res})}{4\omega} + \frac{(n_{I1} + n_{I2} + n_{I3} - n_{S1} - n_{S2}) T_{res}}{2} \end{array} \right) \quad (\text{II.74})$$

Pour un nombre q trouvons les expressions de  $a_{1,2q+1}$  sont:

$$H_{(2q+1),1} = \cos(\frac{\pi}{6}) E_1 \int_{n_{Sq}T_{res}}^{T/6} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = \cos(\frac{\pi}{6}) E_1 \int_{n_{Sq}T_{res}}^{T/6} \frac{\cos(2\omega t) + t}{2} dt = \cos(\frac{\pi}{6}) E_1 \left[ \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} + \frac{t}{2} \right]_{n_{Sq}T_{res}}^{T/6} \quad (\text{II.75})$$

$$\frac{a_{1,2q+1}}{\cos(\frac{\pi}{6}) E_1} = \left( \sum_{k=1}^{q+1} \frac{\sin(2\omega n_{Ik} T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk} T_{res})}{4\omega} + T_{res} \frac{n_{Ik} - n_{Sk}}{2} \right) \quad (\text{II.76})$$

$$\text{En admettant l'écriture } n_{I(q+1)} T_{res} = \frac{T}{6} \text{ et } n_{S(q+1)} T_{res} = 0 \quad (\text{II.77})$$

La démonstration se fait par récurrence.

Sacahnt aussi que :

$$H_{3,2} \cong H_{5,2} \cong H_{7,2} \cong 0 \quad (\text{II.78})$$

Donc :

$$\frac{\sqrt{S_a}}{E_1} = \sum_{m=6}^{\infty} \cos(m\frac{\pi}{6}) \left( \begin{array}{c} \frac{\cos(\omega(m-1)n_{I_1}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m+1)n_{I_1}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \\ \frac{\cos(\omega(m-1)n_{I_2}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m-1)n_{s_1}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) + \cos(\omega(m+1)n_{I_2}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m+1)n_{s_1}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \\ \frac{\cos(\omega(m-1)n_{I_3}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m-1)n_{s_2}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) + \cos(\omega(m+1)n_{I_3}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) + \cos(\omega(m+1)n_{s_2}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \\ \frac{\cos(\omega(m-1)T/6 + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m-1)n_{I_3}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) + \cos(\omega(m+1)T/6 + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m+1)n_{I_3}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \end{array} \right) \quad (II.79)$$

De manière générale et pour un nombre q de trous et sachant que  $n_{s_0} = 0$ :

$$\sqrt{S_a} = E_1 \sum_{m=6}^{\infty} \cos(m\frac{\pi}{6}) \sum_{k=0}^{k=q} \left( \begin{array}{c} \frac{\cos(\omega(m-1)n_{I(k+1)}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m-1)n_{sk}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} \\ + \frac{\cos(\omega(m+1)n_{I(k+1)}T_{res} + m\frac{\pi}{2}) - \cos(\omega(m+1)n_{sk}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \end{array} \right) \quad (II.80)$$

De la même manière et pour un premier temps jusqu'à 7 trous, nous obtenons :

$$b_m = \frac{B_m}{A_0} \quad (II.81)$$

$$\frac{b_m}{\cos(\frac{m\pi}{6})} = \frac{12}{T} \int_0^{T/6} i_{red,e} \frac{\cos(m\omega t + \frac{m\pi}{2})}{A_0} dt = \frac{12}{T} \int_0^{T/6} i_{red,s} \frac{\cos(m\omega t + \frac{m\pi}{2})}{A_0} dt = Hb_1 + Hb_3 + Hb_5 + Hb_7 \quad (II.82)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{H_{b,1}}{\cos(\frac{m\pi}{6})} = E_1 \int_0^{n_{I_1}T_{res}} \cos(\omega t) \cos(m\omega t + \frac{m\pi}{2}) dt = E_1 \int_0^{n_{I_1}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t + \frac{m\pi}{2}) + \cos((m+1)\omega t + \frac{m\pi}{2})}{2} dt = \\
& = E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I_1}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I_1}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} + \frac{m \sin(m\frac{\pi}{2})}{2\omega(m^2-1)} \right)
\end{aligned} \tag{II.83}$$

Pour m=1,

$$\begin{aligned}
& \frac{H_{b1}}{\frac{\pi}{6}} = E_1 \int_0^{n_{s1}T_{res}} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = E_1 \int_0^{n_{s1}T_{res}} \frac{-\sin(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{n_{s1}T_{res}}
\end{aligned} \tag{II.84}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{H_{b,3,m}}{\cos(\frac{m\pi}{6})} = E_1 \int_{n_{I_1}T_{res}}^{n_{I_2}T_{res}} \cos(\omega t) \cos(m\omega t + \frac{m\pi}{2}) dt = E_1 \int_{n_{I_1}T_{res}}^{n_{I_2}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t + \frac{m\pi}{2}) + \cos((m+1)\omega t + \frac{m\pi}{2})}{2} dt = \\
& = E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{I_2}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s1}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{I_2}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s1}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \right)
\end{aligned} \tag{II.85}$$

Pour m=1 :

$$\begin{aligned}
& \frac{H_{b3,1}}{\cos(\frac{\pi}{6})} = E_1 \int_{n_{s1}T_{res}}^{n_{I_2}T_{res}} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = E_1 \int_0^{n_{s1}T_{res}} \frac{-\sin(2\omega t)}{2} dt = E_1 \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s1}T_{res}}^{n_{I_2}T_{res}}
\end{aligned} \tag{II.86}$$

Pour m = 1, le coefficient b<sub>3</sub> devient :

$$\frac{b_{1,3}}{\cos(\frac{\pi}{6})E_1} = \frac{\cos(2\omega n_{I_1}T_{res}) - 1}{4\omega} + \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s1}T_{res}}^{n_{I_2}T_{res}} \tag{II.87}$$

- 5 trous

$$\begin{aligned}
 \frac{H_{b,5,m}}{\cos(\frac{m\pi}{6})} &= E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \cos(\omega t) \cos(m\omega t + \frac{m\pi}{2}) dt = E_1 \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \frac{\cos((m-1)\omega t + \frac{m\pi}{2}) + \cos((m+1)\omega t + \frac{m\pi}{2})}{2} dt = \\
 &E_1 \left( \frac{\sin(\omega(m-1)n_{l3}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s2}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)n_{l3}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s2}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \right)
 \end{aligned} \tag{II.88}$$

Pour m=1 :

$$\frac{H_{b,5,1}}{E_1 \cos(\frac{\pi}{6})} = \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = \int_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \frac{-\sin(2\omega t)}{2} dt = \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \tag{II.89}$$

$$\frac{b_{1,5}}{-\cos(\frac{\pi}{6})E_1} = \frac{\cos(2\omega n_{l1}T_{res}) - 1}{4\omega} + \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s1}T_{res}}^{n_{l2}T_{res}} + \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s2}T_{res}}^{n_{l3}T_{res}} \tag{II.90}$$

- 7 trous

$$\begin{aligned}
 \frac{H_{b,7,m}}{\cos(\frac{m\pi}{6})} &= \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/6} \cos(\omega t) \cos(m\omega t + \frac{m\pi}{2}) dt = \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/6} \frac{\cos((m-1)\omega t + \frac{m\pi}{2}) + \cos((m+1)\omega t)}{2} dt = \\
 &\left( \frac{\sin(\omega(m-1)T/6 + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s3}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m-1)\omega} + \frac{\sin(\omega(m+1)T/6 + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} - \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s3}T_{res} + \frac{m\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \right)
 \end{aligned} \tag{II.91}$$

Pour m=1 :

$$\frac{Hb_{1,1}}{E_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/6} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) dt = \int_{n_{s3}T_{res}}^{T/6} \frac{-\sin(2\omega t)}{2} dt = \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s3}T_{res}}^{T/6} \quad (\text{II.92})$$

$$\frac{b_{1,7}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)E_1} = \frac{\cos(2\omega n_{I1}T_{res}) - 1}{4\omega} + \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s1}T_{res}}^{n_{I2}T_{res}} + \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s2}T_{res}}^{n_{I3}T_{res}} + \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{s3}T_{res}}^{\frac{T}{6}} \quad (\text{II.93})$$

Plus généralement, et sachant que  $n_{I(q+1)}T_{res} = \frac{T}{6}$

$$\frac{b_{1,2q+1}}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)E_1} = E_1 \sum_{k=0}^q \left( \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]_{n_{sk}T_{res}}^{n_{Ik}T_{res}} \right) \quad (\text{II.94})$$

Démonstration : par récurrence.

Nous posons par la suite :

$$\begin{aligned} \theta_{I1} &= \omega n_{I1}T_{res}, \theta_{I2} = \omega n_{I2}T_{res}, \theta_{I3} = \omega n_{I3}T_{res}, \theta_{I4} = \omega n_{I4}T_{res} \\ \theta_{s1} &= \omega n_{s1}T_{res}, \theta_{s2} = \omega n_{s2}T_{res}, \theta_{s3} = \omega n_{s3}T_{res}, \\ \theta_3 &= \omega T/2, \text{ etc} \end{aligned} \quad (\text{II.95.1 à 3})$$

$$S_b = \sum_{m \text{ impair}} a_m^2 = (H_1 + H_3 + H_5 + H_7)^2 = H_1^2 + H_3^2 + H_5^2 + H_7^2 + 2(H_1 + H_3 + H_5)H_7 + 2(H_1 + H_3)H_5 + 2H_1H_3 \quad (\text{II.96})$$

Et :

$$\pm \frac{\sqrt{S_b}}{E_1} = \sum_{m, \text{impair}}^{\infty} \cos\left(m \frac{\pi}{6}\right) \left( \begin{array}{cccc} \frac{\sin(\omega(m-1)n_{i1}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m+1)n_{i1}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} & \frac{m \sin(m\frac{\pi}{2})}{2\omega(m^2-1)} \\ \\ \frac{\sin(\omega(m-1)n_{i2}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s1}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m+1)n_{i2}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s1}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \\ \\ \frac{\sin(\omega(m-1)n_{i3}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m-1)n_{s2}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m+1)n_{i3}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m+1)n_{s2}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \\ \\ \frac{\sin(\omega(m-1)T/6 + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m-1)n_{i3}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m-1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m+1)T/6 + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} & \frac{\sin(\omega(m+1)n_{i3}T_{res} + m\frac{\pi}{2})}{2(m+1)\omega} \end{array} \right) \quad (\text{II.97})$$

$$\frac{b_{1,2q+1}}{\cos(\frac{\pi}{6})E_1} = \sum_{k=0}^q \left( \left[ \frac{\cos(2\omega t)}{4\omega} \right]^{n_{ik}T_{res}} \right) \quad (\text{II.98.1})$$

$$\frac{b_{1,2q+1}}{\cos(\frac{\pi}{6})E_1} = \sum_{k=0}^q \left( \frac{\cos(2\omega n_{I(k+1)}T_{res})}{4\omega} - \frac{\cos(2\omega n_{Sk}T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{II.98.2})$$

$$\frac{8\pi b_{1,2q+1}}{TE_1 \cos(\frac{\pi}{6})} = \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/3N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/3N)) \quad (\text{II.98.3})$$

Lorsque ce terme est divisé par  $-E_1 \left( \frac{T}{8} \right)$  supposé être le coefficient de multiplication

de Fourier multiplié par le facteur constant, alors  
 $b_{1,q} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/3N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/3N))$  qui est *le même que celui trouvé par Sandali-Cheriti.*

$$a_{l,q} = -E_l \sum_{k=1}^{q+1} \left( \frac{(-n_{Ik} + n_{Sk})T_{res}}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{Ik} T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk} T_{res})}{4\omega} \right) \quad (\text{II.99.1})$$

$$\frac{a_{l,q}}{-TE_l \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sum_{k=1}^{q+1} \left( \frac{(-n_{Ik} + n_{Sk})T_{res}}{\frac{T}{2}} + \frac{\sin(2\omega n_{Ik} T_{res}) - \sin(2\omega n_{Sk} T_{res})}{2\pi} \right) = \sqrt{3} \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{3N} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi n_{Sk}}{3N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n_{Ik}}{3N}\right)}{2\pi} \right) \quad (\text{II.99.2})$$

Vu le signe – mis en facteur au début.

$$\text{Lorsqu'il n'y a aucun trou } a_{l,q} = -E_l \left( \frac{(-n_{I(q+1)} T_{res})}{2} + \frac{\sin(2\omega n_{I(q+1)} T_{res})}{4\omega} \right) = -E_l \left( \frac{T}{4} \right) \quad (\text{II.99.3})$$

Ce dernier coefficient devrait être le même que celui pour Pmax

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \left( 1 + a^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{2 \log a} \right) - 1 \right) m_{tr}^2 V_{ca}, \quad \text{mais pour notre cas,}$$

$$A_0 = a^2 \frac{16}{T\pi} \frac{T}{(1-a^2)4} \sqrt{\frac{C}{L}} V_{ca} = \frac{4}{\pi} \frac{a^2}{(1-a^2)} \sqrt{\frac{C}{L}} V_{ca} \quad (\text{II.99.4})$$

Ainsi :

$$\frac{b_{l,q}^2 + a_{l,q}^2}{I_0^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q \left( \cos(2\pi n_{Sk}/3N) - \cos(2\pi n_{I(k+1)}/3N) \right)^2 + \left[ \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{Sk} - n_{Ik})}{3N} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi n_{Sk}}{3N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n_{Ik}}{3N}\right)}{2\pi} \right)^2 \right] \right] \quad (\text{II.100})$$

## 7.6 Calcul de la somme des harmoniques Sa+S<sub>b</sub> et Formulation générale pour q trous.

Afin de bien démontrer la véracité de la fonction objective à optimiser, nous allons d'abord faire un calcul détaillé pour un trou, puis généraliser pour un nombre quelconque de trous.

Nous ferons aussi des calculs de certains facteurs qui nous ont permis de simplifier l'expression du facteur de puissance (on utilise souvent le facteur harmonique à minimiser au lieu du facteur de puissance à maximiser à cause de l'expression plus simple du facteur harmonique).

- **Calcul exact du déphasage et du facteur multiplicatif**

Dans le cas du triphasé, il faut éliminer les facteurs pairs et multiples de 3 dans la sommation par rapport à  $m$ .

Donc :

$$m \in [6k] \cup [6k+1] \cup [6k+2] \cup [6k+3] \cup [6k+4] \cup [6k+5] - [6k] - [6k+2] - [6k+4] - [6k+3].$$

Ce qui donne :

$$m \in [6k+1] \cup [6k+5] = [6k+1] \cup [6k-1] \quad (\text{II.101})$$

$$\text{Ainsi, } \cos((6k \pm 1)\frac{\pi}{6}) = (-1)^k \cos \frac{\pi}{6}, \quad (\text{II.102})$$

De même,

$$\begin{aligned} \cos(x + (6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) &= \cos x \cos((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) - \sin x \sin((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos x \cos(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) - \sin x \sin(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin x \sin(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) = -(-1)^k \sin x \end{aligned} \quad (\text{II.103})$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \cos(x + (6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) &= \cos x \cos((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) - \sin x \sin((6k \pm 1)\frac{\pi}{2}) \\ &= \cos x \cos(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) - \sin x \sin(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) \\ &= -\sin x \sin(3k\pi \pm \frac{\pi}{2}) = -(-1)^k \sin x \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

Aussi dans l'expression de  $S_b$ ,

$$\frac{m \sin(m \frac{\pi}{2})}{2\omega(m^2 - 1)} = \frac{(6k \pm 1) \sin((6k \pm 1) \frac{\pi}{2})}{2\omega((6k \pm 1)^2 - 1)} = \frac{(6k \pm 1)(-1)^{k \pm 1}}{2\omega((6k \pm 1)^2 - 1)} = \frac{(6k \pm 1)(-1)^{k \pm 1}}{2\omega 6k(6k \pm 2)} \quad (\text{II.105})$$

En rajoutant les deux premiers termes, nous obtenons l'expression :  $\frac{(-1)^{k \pm 1}}{2\omega 6k}$ , en

sachant le facteur  $(-1)^k \cos \frac{\pi}{6}$ , l'expression devient :  $\frac{-1 \cos \frac{\pi}{6}}{12k\omega}$  dont le carré est le terme d'une série convergente.

Lorsque nous multiplions toutes les expressions obtenues ci-haut par le facteur  $(-1)^k \cos \frac{\pi}{6}$ , nous obtenons les expressions simples :  $-\sin x$  et  $\cos x$  respectivement.

Finalement, nous obtenons :

$$S_a + S_b = S_{a1} + S_{b1} + \sum_{\substack{m=6k \pm 1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{7}{(m-1)^2} + \frac{7}{(m+1)^2} \right) \right) + S_T + \text{Prod}_{a+b}(\text{tet3.Autres})$$

(II.106)

La relation  $m = 6k \pm 1, m \neq 1$  sera omise pour simplification de calcul.

$$\begin{aligned}
& \frac{\Pr{od, b(\theta_3, Autres)}}{-2E_1^2} = \\
& \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin(m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_3)}{4\omega^2(m^2-1)}
\end{aligned}$$

(II.107),

et

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{Prod}, a(\theta 3. Autres)}{-2E_1^2} = \\
& \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_3)}{4\omega^2(m^2-1)} \quad (\text{II.108})
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \text{Prod,} a\_b(\theta3.\text{Autres}) = \\
& -\frac{2E_1^2}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{l1})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l2})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{l3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos(m-1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin(m-1)\theta_{s1})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s2})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m-1)\theta_{s3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_3)\cos((m+1)\theta_3)}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_3)\sin((m+1)\theta_3)}{4\omega^2(m^2-1)}
\end{aligned}
\tag{II.109.1}$$

Après simplification et rassemblement des termes semblables,

$\frac{\text{Prod}, a\_b(\theta_3.\text{Autres})}{-2E_1^2}$  devient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{11})) - \cos((m+1)\theta_3 + (m-1)\theta_{11}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{12})) - \cos((m+1)\theta_3 + (m-1)\theta_{12}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
 & + \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{13})) - \cos((m+1)\theta_3 + (m-1)\theta_{13}))}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m-1)\theta_3 + (m+1)\theta_{11})) + \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{11}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\
 & - \frac{\cos((m-1)\theta_3 + (m+1)\theta_{12})) + \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{12}))}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_3 + (m+1)\theta_{13})) + \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{13}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\
 & - \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{s1})) + \cos((m+1)\theta_3 + (m-1)\theta_{s1}))}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{s2})) + \cos((m+1)\theta_3 + (m-1)\theta_{s2}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
 & - \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{s3})) + \cos((m+1)\theta_3 + (m-1)\theta_{s3}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)\theta_3 + (m+1)\theta_{s1})) - \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{s1}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\
 & + \frac{\cos((m-1)\theta_3 + (m+1)\theta_{s2})) - \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{s2}))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)\theta_3 + (m+1)\theta_{s3})) - \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{s3}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\
 & - \frac{\cos(2m\theta_3))}{4\omega^2(m^2-1)}
 \end{aligned}$$

(II.109.2)

$\frac{\text{Prod}, a\_b(\theta_3.\text{Autres})}{-2E_1^2}$  deviendrait aussi :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{11})) + \cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{12})) + \cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{13}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
 & + \frac{\cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{11})) + \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{12})) + \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{13}))}{4\omega^2(m-1)^2} \\
 & - \frac{2\cos(m(\theta_3 + \theta_{11}))\cos((\theta_3 - \theta_{11}))}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{2\cos(m(\theta_3 + \theta_{12}))\cos((\theta_3 - \theta_{12}))}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{2\cos(m(\theta_3 + \theta_{13}))\cos((\theta_3 - \theta_{13}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\
 & - \frac{\cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{s1})) - \cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{s2})) - \cos((m+1)(\theta_3 - \theta_{s3}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
 & - \frac{\cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{11})) - \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{s3})) - \cos((m-1)(\theta_3 - \theta_{s2}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos(2m\theta_3))}{4\omega^2(m^2-1)} \\
 & \frac{2\cos(m(\theta_3 + \theta_{11}))\cos(\theta_3 - \theta_{11}))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{2\cos(m(\theta_3 + \theta_{12}))\cos(\theta_3 - \theta_{12}))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{2\cos(m(\theta_3 + \theta_{13}))\cos(\theta_3 - \theta_{13}))}{4\omega^2(m^2-1)}
 \end{aligned}$$

(II.109.3)

$\theta_3$  est équivalent à  $\theta_{14}$

L'expression de  $S_a$ , sans le facteur en  $m=1$ , d'une part, devient :

$S_a$  : négatif :  $(m+1)I, (m-1)s$       positif :  $(m-1)I, (m+1)s$

$S_b$  : négatif :  $(m+1)I, (m-1)I$       positif :  $(m-1)s, (m+1)s$

$$\begin{aligned}
& \left( F_a \text{Carré} + \text{Prod}, a \right) (\text{let } 3. \text{Autres}) + \\
& \left( \sum_{m=6k+1}^{\infty} S_{a,i} + 2E_1^2 \right) \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m+1)\theta_{l_2}) - \cos((m+1)\theta_{l_1})\cos(m-1)\theta_{l_2}}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos(m+1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{l_2}) + \cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m+1)\theta_{l_3}) - \cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m+1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{l_1}) + \cos((m-1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{l_3}) + \cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m+1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{l_3}) - \cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{l_2}) + \cos((m-1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{l_1}) - \cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{l_2}) - \cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{s_1})\cos((m+1)\theta_{s_2}) - \cos((m+1)\theta_{s_1})\cos((m-1)\theta_{s_2}) - \cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\cos((m-1)\theta_{s_1})\cos((m-1)\theta_{s_2}) + \cos((m+1)\theta_{s_1})\cos((m+1)\theta_{s_3}) - \cos((m+1)\theta_{s_1})\cos((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{s_3})\cos((m-1)\theta_{s_1}) + \cos((m-1)\theta_{s_1})\cos((m-1)\theta_{s_3}) + \cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)\theta_{s_1})\cos((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{s_3}) - \cos((m+1)\theta_{s_3})\cos((m-1)\theta_{s_2}) + \cos((m-1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{s_1})\cos((m-1)\theta_{s_1}) - \cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{s_2}) - \cos((m+1)\theta_{s_3})\cos((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m+1)\theta_{s_1}) + \cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{s_1}) + \cos((m+1)\theta_{s_1})\cos((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{s_1}) - \cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m+1)\theta_{s_2}) + \cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{l_1}) - \cos((m-1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{s_2}) - \cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{s_3}) + \cos((m+1)\theta_{s_3})\cos((m-1)\theta_{l_1}) - \cos((m-1)\theta_{l_1})\cos((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m+1)\theta_{s_1}) + \cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{s_1}) + \cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{s_1}) - \cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m+1)\theta_{s_2}) + \cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{l_2}) - \cos((m-1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{s_2}) - \cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{s_3}) + \cos((m+1)\theta_{s_3})\cos((m-1)\theta_{l_2}) - \cos((m-1)\theta_{l_2})\cos((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m+1)\theta_{s_1}) + \cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{s_1}) + \cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\cos((m-1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{s_1}) - \cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m+1)\theta_{s_2}) + \cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{s_2})\cos((m-1)\theta_{l_3}) - \cos((m-1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{s_2}) - \cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\cos((m+1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{s_3}) + \cos((m+1)\theta_{s_3})\cos((m-1)\theta_{l_3}) - \cos((m-1)\theta_{l_3})\cos((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2}
\end{aligned}$$

(II.110.1)

$$Fa_{CARRE} = E_l^2 \left( \begin{array}{l} \frac{\cos^2(\omega(m+1)n_{l1}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m-1)n_{l1}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m+1)n_{l2}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m-1)n_{l2}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} \\ + \frac{\cos^2(\omega(m+1)n_{l3}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m-1)n_{l3}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m+1)n_{s1}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m-1)n_{s1}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} \\ + \frac{\cos^2(\omega(m+1)n_{s2}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m-1)n_{s2}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m+1)n_{s3}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m-1)n_{s3}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} \\ + \frac{\cos^2(\omega(m+1)T/2)}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\cos^2(\omega(m-1)T/2)}{(2\omega)^2(m-1)^2} \end{array} \right) \quad (II.111)$$

D'autre part, nous avons :

$$S_b = \sum_{m \text{ impair}} b_m^2 = (HB_1 + HB_2 + HB_3)^2 = HB_1^2 + HB_2^2 + HB_3^2 + 2(HB_1 + HB_2)HB_3 + 2HB_1HB_2$$

(II.112)

D'où :

S<sub>a</sub> : négatif : (m+1)I, (m-1)s

positif : (m-1)I, (m+1)s

S<sub>b</sub> : négatif : (m+1)I, (m-1)I

positif : (m-1)s, (m+1)s

$$Fb_{CARRE} = E_l^2 \left( \begin{array}{l} \frac{\sin^2(\omega(m+1)n_{l1}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-1)n_{l1}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m+1)n_{l2}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-1)n_{l2}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} \\ + \frac{\sin^2(\omega(m+1)n_{l3}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-1)n_{l3}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m+1)n_{s1}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-1)n_{s1}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} \\ + \frac{\sin^2(\omega(m+1)n_{s2}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-1)n_{s2}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m+1)n_{s3}T_{res})}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-1)n_{s3}T_{res})}{(2\omega)^2(m-1)^2} \\ + \frac{\sin^2(\omega(m+1)T/2)}{(2\omega)^2(m+1)^2} + \frac{\sin^2(\omega(m-1)T/2)}{(2\omega)^2(m-1)^2} \end{array} \right) \quad (II.113)$$

$$\begin{aligned}
S_b = S_{b,1} + \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} & \left( Fb_{CARRE} + \Pr{od, b} \text{tet3.Autres} + \right. \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m+1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\sin((m-1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m+1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m+1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m-1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m+1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_1})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\sin((m-1)\theta_{s_1})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_1})\sin((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_1})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_3})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m-1)\theta_{s_1})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_3})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\sin((m-1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_1})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\sin((m+1)\theta_{s_3})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m+1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_1})\sin((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m+1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_3})\sin((m-1)\theta_{l_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_1})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m+1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m+1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_3})\sin((m-1)\theta_{l_2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_2})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m+1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{s_1})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m+1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_2})\sin((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{s_2})}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m+1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
& - \frac{\sin((m+1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m+1)\theta_{s_3})\sin((m-1)\theta_{l_3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\sin((m-1)\theta_{l_3})\sin((m-1)\theta_{s_3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
\left. \right) \quad (II.114)
\end{aligned}$$

En rassemblant Sa et Sb, nous obtenons l'expression  $S_T$  suivante.

$$S_T = \sum_{\substack{m=6k\pm1 \\ m \neq 1}}^{\infty} 2E_1^2 \left( \begin{array}{l}
\frac{\cos((m+1)\theta_{I1} - (m+1)\theta_{I2}) - \cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{I2})}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos(m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{I1}}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m-1)\theta_{I1} - (m-1)\theta_{I2}) + \cos((m+1)\theta_{I1} - (m+1)\theta_{I3}) - \cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{I1}) + \cos((m-1)\theta_{I1} - (m-1)\theta_{I3}) + \cos((m+1)\theta_{I2} - (m+1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{I3}) - \cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{I2}) + \cos((m-1)\theta_{I2} - (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{I1}) - \cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{I2}) - \cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{S1} - (m+1)\theta_{S2}) - \cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{S2}) - \cos(m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{S1}}{4\omega^2(m+1)^2} \\
+ \frac{\cos((m-1)\theta_{S1} - (m-1)\theta_{S2}) + \cos((m+1)\theta_{S1} - (m+1)\theta_{S3}) - \cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{S1}) + \cos((m-1)\theta_{S1} - (m-1)\theta_{S3}) + \cos((m+1)\theta_{S2} - (m+1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{S3}) - \cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{S2}) + \cos((m-1)\theta_{S2} - (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{S1}) - \cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{S2}) - \cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} - (m+1)\theta_{S1}) + \cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{S1}) + \cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{I1})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
- \frac{\cos((m-1)\theta_{I1} - (m-1)\theta_{S1}) - \cos((m+1)\theta_{I1} - (m+1)\theta_{S2}) + \cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I1}) - \cos((m-1)\theta_{I1} - (m-1)\theta_{S2}) - \cos((m+1)\theta_{I1} - (m+1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{S3}) + \cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{I1}) - \cos((m-1)\theta_{I1} - (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} - (m+1)\theta_{S1}) + \cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{S1}) + \cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{I2})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
- \frac{\cos((m-1)\theta_{I2} - (m-1)\theta_{S1}) - \cos((m+1)\theta_{I2} - (m+1)\theta_{S2}) + \cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m-1)^2} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I2}) - \cos((m-1)\theta_{I2} - (m-1)\theta_{S2}) - \cos((m+1)\theta_{I2} - (m+1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{S3}) + \cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{I2}) - \cos((m-1)\theta_{I2} - (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\sin((m+1)\theta_{I3} - (m+1)\theta_{S1}) + \cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{S1}) - \cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m+1)^2} \\
- \frac{\cos((m-1)\theta_{I3} - (m-1)\theta_{S1}) - \cos((m+1)\theta_{I3}) - (m+1)\theta_{S2}}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I2}) - \cos((m-1)\theta_{I3} - (m-1)\theta_{S2}) - \cos((m+1)\theta_{I3} - (m+1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{I2}) + \cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{S3}) - \cos((m-1)\theta_{I3} - (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)}
\end{array} \right)$$

(II.115.1)

$$S_T = \sum_{\substack{m=6k\pm1 \\ m \neq 1}}^{\infty} 2E_1^2 \left( \begin{array}{l}
\frac{\cos((m+1)(\theta_{I1} - \theta_{I2}))}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{I2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos(m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{I1}}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m-1)(\theta_{I1} - \theta_{I2}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)(\theta_{I1} - \theta_{I3}))}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{I1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{I1} - \theta_{I3}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)(\theta_{I2} - \theta_{I3}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{I2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{I2} - \theta_{I3}))}{4\omega^2(m-1)^2} \\
- \frac{\cos(2m\theta_{I1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos(2m\theta_{I2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos(2m\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)(\theta_{S1} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos(m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{S1}}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m-1)(\theta_{S1} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)(\theta_{S1} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m+1)^2} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{S1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{S1} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m-1)^2} + \frac{\cos((m+1)(\theta_{S2} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{S2} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m-1)^2} \\
- \frac{\cos(2m\theta_{S1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos(2m\theta_{S2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos(2m\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)(\theta_{I1} - \theta_{S1}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{S1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{I1})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m-1)(\theta_{I1} - \theta_{S1}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)(\theta_{I1} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{I1} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)(\theta_{I1} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{I1} + (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{I1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{I1} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m-1)^2} \\
- \frac{\cos((m+1)(\theta_{I2} - \theta_{S1}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{S1})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S1} + (m-1)\theta_{I2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m-1)(\theta_{I2} - \theta_{S1}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)(\theta_{I2} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{I2} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)(\theta_{I2} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{I2} + (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{I2})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{I2} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m-1)^2} \\
- \frac{\sin((m+1)(\theta_{I3} - \theta_{S1}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{S1})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
- \frac{\cos((m-1)(\theta_{I3} - \theta_{S1}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)(\theta_{I3} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{S2})}{4\omega^2(m^2-1)} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{S2} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{I3} - \theta_{S2}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{\cos((m+1)(\theta_{I3} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m+1)^2} \\
+ \frac{\cos((m+1)\theta_{S3} + (m-1)\theta_{I3})}{4\omega^2(m^2-1)} + \frac{\cos((m+1)\theta_{I3} + (m-1)\theta_{S3})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{I3} - \theta_{S3}))}{4\omega^2(m-1)^2}
\end{array} \right)$$

(II.115.2)

## 7.7 Généralisation à un nombre quelconque de trous

En généralisant pour un nombre de roues libres  $q$ , nous obtenons :

$$\frac{S_T}{E_1^2} = 2 \sum_{\substack{m=6k\pm 1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \begin{array}{l} \sum_{\substack{i \neq j \\ \frac{q(q+1)}{2} \text{ facteurs}} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ \sum_{i \neq j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ \sum_{\substack{i,j \\ q^2 \text{ facteurs}} \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \end{array} \right) \right)$$

(II.116)

En posant  $\theta_q = \omega T / 2$  est équivalent à  $\theta_{I(q+1)}$ , l'expression suivante est obtenue :

$$\frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m=6k\pm 1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) + 2 \sum_{\substack{m=6k\pm 1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_j))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ + \sum_{i \neq j} \left( \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \\ + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_h + \theta_{Sj})\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i,j} \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \end{array} \right)$$

(II.117)

Ici il y a deux termes distincts. Le premier concerne le cas  $6k+1$ , facile à introduire lorsqu'on a l'expression  $m-1$  et le cas  $6k-1$ , facile à introduire pour l'expression  $m+1$ .

Sinon, nous obtenons des expressions de la forme  $6k+2 = 2(3k+1)$  et  $6k-2 = 2(3k-1)$ . Dans ces deux dernières expressions, le coefficient 2 sortira de la somme et fera partie de la nouvelle variable  $2X$ . Il restera donc des sommes sur tous les  $3k+1$  et  $3k-1$  qui donnent tous les nombres moins les  $3k$ , ce qui est égal aux nombres multiples de 3. Cela nous donne la somme de tout nombre en la variable  $2X$  moins le tiers de somme de tout nombre en la variable  $3X$ . La simplification de la sommation en termes connus et faciles à établir.

Lorsque les premières séries sont transformées en leur équivalent, on obtient les étapes de réduction de la série. Pour rendre plus commode la présentation, nous omettons la racine carrée lorsque nous parlons de facteur de puissance (FP). Nous optimisons la partie variable du facteur de puissance.

• *Étape 1*

$$\begin{aligned}
 & \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) + \sum_{\substack{m=6k-1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) \\
 & + 2 \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{ii} + \theta_{jj}))\cos((\theta_{ii} + \theta_{jj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_{ji} - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_{ii} + \theta_{Sj})\cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_{ii}}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{ii} + \theta_{jj}))\cos((\theta_{ii} + \theta_{jj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((m+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{\cos((m-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_{ii} - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos m(\theta_{ii} + \theta_{Sj})\cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((m-1)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_{ii}}{4\omega^2(m^2-1)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

(II.118.1)

- *Étape 2 :*

$$\begin{aligned}
& \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) + \sum_{\substack{m=6k-1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{(m-1)^2} + \frac{2q+1}{(m+1)^2} \right) \right) \\
& + 2 \sum_{\substack{m=6k+1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \left[ \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k+2)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(6k+2)^2} + \frac{\cos((6k)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(6k)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{ii} + \theta_{jj}))\cos((\theta_{ii} + \theta_{jj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k+2)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(6k+2)^2} + \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(6k)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k+2)(\theta_{ii} - \theta_{Si}))}{4\omega^2(6k+2)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{ii} + \theta_{Sj}))\cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((6k)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m-1)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i,j} \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \end{array} \right] \right) \\
& + 2 \sum_{\substack{m=6k-1 \\ m \neq 1}}^{\infty} \left( \left[ \begin{array}{l} \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(6k)^2} + \frac{\cos((6k-2)(\theta_{ii} - \theta_{jj}))}{4\omega^2(6k-2)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{ii} + \theta_{jj}))\cos((\theta_{ii} + \theta_{jj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(6k)^2} + \frac{\cos((6k-2)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(6k-2)^2} - \frac{2\cos(m(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((m+1)(\theta_{ii} - \theta_{Si}))}{4\omega^2(m+1)^2} + \frac{2\cos(m(\theta_{ii} + \theta_{Sj}))\cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{4\omega^2(m^2-1)} - \frac{\cos((6k-2)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2(6k-2)^2} \right) + \frac{\cos 2m\theta_h}{4\omega^2(m^2-1)} \\ + \sum_{i,j} \frac{\cos 2m\theta_{Si}}{4\omega^2(m^2-1)} \end{array} \right] \right)
\end{aligned}$$

(II.118.2)

• *Étape 3,*

$$\begin{aligned}
 \frac{(S_a + S_b)}{E_1^2} &\approx S_{a,1} + S_{b,1} + \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{36k^2} + \frac{2q+1}{4(3k+1)^2} \right) \right) + \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \left( \frac{E_1^2}{4\omega^2} \left( \frac{2q+1}{4(3k-1)^2} + \frac{2q+1}{36k^2} \right) \right) \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i,j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_h - \theta_y)) + \cos((6k)(\theta_h - \theta_y)) - 2\cos(6k(\theta_h + \theta_y))\cos((\theta_h + \theta_y))}{4\omega^2 4(3k+1)^2} \right. \right. \\
 &+ \sum_{i,j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) + \cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - 2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 4(3k+1)^2} \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k+2)(\theta_h - \theta_{Si})) + 2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2 4(3k+1)^2} - \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6k)^2} \right) + \frac{\cos 12k\theta_h}{4\omega^2 (6k)^2} \right) \right. \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i,j} \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_y)) + \cos(2(3k-1)(\theta_h - \theta_y)) - 2\cos(6k(\theta_h + \theta_y))\cos((\theta_h + \theta_y))}{4\omega^2 (6k)^2} \right. \right. \\
 &+ \sum_{i,j} \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) + \cos(2(3k-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj})) - 2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6k)^2} \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_{Si})) + 2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{4\omega^2 (6k)^2} - \frac{\cos((6k-2)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 4(3k-1)^2} \right) + \frac{\cos 12k\theta_h}{4\omega^2 (6k)^2} \right) \right. \\
 &+ \sum_{i,j} \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{4\omega^2 (6k)^2} \left( +2ier termes \right)
 \end{aligned}$$

(II.118.3)

Les deux premiers termes notés DPT :

$$\begin{aligned}
 DPT = & \sum_{i=1,n} \left( \frac{\cos 10\theta_{ii}}{4\omega^2 24} + \frac{\cos 14\theta_{ii}}{4\omega^2 48} \right) + \left( \frac{\cos 10\theta_{Si}}{4\omega^2 24} + \frac{\cos 14\theta_{Si}}{4\omega^2 48} \right) \\
 & - \frac{\cos 24\theta_{ii}}{4\omega^2 (12)^2} - \frac{\cos 12\theta_{ii}}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos 24\theta_{Si}}{4\omega^2 (12)^2} - \frac{\cos 12\theta_{Si}}{4\omega^2 (6)^2} \\
 & - \frac{\cos(5(\theta_{ii} + \theta_{ij})) \cos((\theta_{ii} + \theta_{ij}))}{4\omega^2 24} + \frac{\cos(7(\theta_{ii} + \theta_{ij})) \cos((\theta_{ii} + \theta_{ij}))}{4\omega^2 48} \\
 & - 2 \sum_{i \neq j} \frac{\cos(6(\theta_{ii} + \theta_{ij})) \cos((\theta_{ii} + \theta_{ij}))}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos(12(\theta_{ii} + \theta_{ij})) \cos((\theta_{ii} + \theta_{ij}))}{4\omega^2 (12)^2} \\
 & \frac{\cos(5(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 24} + \frac{\cos(7(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 48} \\
 & - 2 \sum_{i \neq j} \frac{\cos(6(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos(12(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (12)^2} \\
 & \frac{\cos 5(\theta_{ii} + \theta_{Sj}) \cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{4\omega^2 24} + \frac{\cos 7(\theta_{ii} + \theta_{Sj}) \cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{4\omega^2 48} \quad (\text{II.119}) \\
 & + 2 \sum_{i,j} \frac{\cos(6(\theta_{ii} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (6)^2} - \frac{\cos(12(\theta_{ii} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4\omega^2 (12)^2}
 \end{aligned}$$

Étape 4

$$\begin{aligned}
 \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \cong & 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{2q+1}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{2q+1}{4} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{(3k-1)^2} + \frac{1}{(3k+1)^2} + \frac{1}{(3k)^2} - \frac{1}{(3k)^2} \right) \right. \\
 & \left. \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_{ii} - \theta_{ij}))}{4(3k+1)^2} + \frac{\cos((6k)(\theta_{ii} - \theta_{ij}))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{ii} + \theta_{ij})) \cos((\theta_{ii} + \theta_{ij}))}{(6k)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4(3k+1)^2} + \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k+2)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4(3k+1)^2} + \frac{2\cos 6k(\theta_{ii} + \theta_{Sj}) \cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{(6k)^2} - \frac{\cos((6k)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{(6k)^2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_{ii}}{(6k)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_{ii} - \theta_{ij}))}{(6k)^2} + \frac{\cos(2(3k-1)(\theta_{ii} - \theta_{ij}))}{4(3k-1)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{ii} + \theta_{ij})) \cos((\theta_{ii} + \theta_{ij}))}{(6k)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(6k)^2} + \frac{\cos(2(3k-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4(3k-1)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj})) \cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{(6k)^2} + \frac{2\cos 6k(\theta_{ii} + \theta_{Sj}) \cos(\theta_{ii} - \theta_{Sj})}{((6k)^2 \text{ (+2ier termes)})} - \frac{\cos((6k-2)(\theta_{ii} - \theta_{Sj}))}{4(3k-1)^2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_{ii}}{(6k)^2 \text{ (+2ier termes)}} + \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2 \text{ (+2ier termes)}} \right. \right. \quad (\text{II.120.1})
 \end{aligned}$$

• *Étape 5*

$$\begin{aligned}
 \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} &\equiv 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{2q+1}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{2q+1}{4} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \left( \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{9k^2} \right) \right) + DPT \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_h - \theta_j))}{4(3k+1)^2} + \frac{\cos(2(3k-1)(\theta_h - \theta_j))}{4(3k-1)^2} + \frac{\cos(2(3k)(\theta_h - \theta_j))}{4(3k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{(6k)^2} \right. \right. \\
 &+ \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2(3k+1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4(3k+1)^2} + \frac{\cos(2(3k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4(3k)^2} + \frac{\cos(2(3k-1)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4(3k-1)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2} \\
 &+ \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos(2(3k+1)(\theta_h - \theta_{Si}))}{4(3k+1)^2} - \frac{\cos(2(3k)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4(3k)^2} - \frac{\cos(2(3k-1)(\theta_h - \theta_{Sj}))}{4(3k-1)^2} + \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{(6k)^2} \right) \\
 &\left. \left. + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_h}{(6k)^2} + \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2} \right) \right) \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_j))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{(6k)^2 (+2ier termes)} + \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2 (+2ier termes)} \right. \right. \\
 &\left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_{Si}))}{(6k)^2} + \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{((6k)^2 (+2ier termes))} \right) + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_h}{(6k)^2} + \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{II.120.2}$$

• *Étape 6*

$$\begin{aligned}
 \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} &\equiv 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{2(2q+1)}{36} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{8(2q+1)}{36} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_j))}{4k^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{(6k)^2 (+2ier termes)} + \frac{\cos(2k(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{4k^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2 (+2ier termes)} \right. \right. \\
 &+ \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos(2k(\theta_h - \theta_{Si}))}{4k^2} + \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{(6k)^2 (+2ier termes)} \right) + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_h}{(6k)^2} + \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2} \\
 &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i \neq j} \frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_j))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_j))\cos((\theta_h + \theta_j))}{(6k)^2 (+2ier termes)} + \frac{\cos((6k)(\theta_{Si} - \theta_{Sj}))}{(6k)^2} - \frac{2\cos(6k(\theta_{Si} + \theta_{Sj}))\cos((\theta_{Si} + \theta_{Sj}))}{(6k)^2 (+2ier termes)} \right. \right. \\
 &\left. \left. + \sum_{i,j} \left( -\frac{\cos((6k)(\theta_h - \theta_{Si}))}{(6k)^2} + \frac{2\cos(6k(\theta_h + \theta_{Sj}))\cos(\theta_h - \theta_{Sj})}{((6k)^2 (+2ier termes))} \right) + \sum_{i=1}^q \frac{\cos 12k\theta_h}{(6k)^2} + \frac{\cos 12k\theta_{Si}}{(6k)^2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{II.120.3}$$

Sachant par exemple que  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(k(\theta_1 + \theta_2))}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3(\theta_1 + \theta_2)^2 - 6\pi|(\theta_1 + \theta_2)| + 2\pi^2)$  vraie pour des valeurs de la variable  $|x| \leq 2\pi$

Mais la série  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(2k(\theta_1 + \theta_2))}{(2k)^2} = \frac{1}{12}(3(\theta_1 + \theta_2)^2 - 3\pi|(\theta_1 + \theta_2)| + \frac{\pi^2}{2})$ , vraie pour des valeurs de la variable  $|x| \leq \pi$ .

Aussi, la série  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(3(2k(\theta_1 + \theta_2)))}{9(2k)^2} = \frac{1}{9x12}(9x3(\theta_1 + \theta_2)^2 - 9\pi|(\theta_1 + \theta_2)| + \frac{\pi^2}{2})$  n'est pas toujours valide.

En fait, l'expression  $\sum_1^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3|x|^2 - 6\pi|x| + 2\pi^2)$ , est vraie pour  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

Pour  $|x| \geq 2\pi$ , il faut remplacer x par  $\text{mod}(x, 2\pi)$ , étant donné que le modulo est toujours positif, la valeur absolue peut être soustraite et nous obtenons :

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(k)^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2), \text{ avec : } x = \text{mod}(x, 2\pi).$$

- *Étape 7 :*

$$\begin{aligned}
 \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} &\cong 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
 &+ 2 \sum_{i \neq j} \left( \begin{array}{l} \left. \frac{1}{48} (3(\theta_{ii} - \theta_{jj})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{jj}) + 2\pi^2) + \frac{1}{48} (3(\theta_{si} - \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{si} - \theta_{sj}) + 2\pi^2) \right|_{x = \text{mod}(2x, 2\pi)} \\ + 2 \sum_{i \neq j} \left( \begin{array}{l} \left. \frac{1}{12x36} (3(\theta_{ii} - \theta_{jj})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{jj}) + 2\pi^2) + \frac{1}{12x36} (3(\theta_{si} - \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{si} - \theta_{sj}) + 2\pi^2) \right|_{x = \text{mod}(6x, 2\pi)} \\ + \left. \frac{4}{12x36} \left( - (3(\theta_{ii} + \theta_{jj})^2 - 6\pi(\theta_{ii} + \theta_{jj}) + 2\pi^2) \cos(\theta_{ii} + \theta_{jj}) - (3(\theta_{si} + \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{si} + \theta_{sj}) + 2\pi^2) \cos(\theta_{si} + \theta_{sj}) \right) * \right|_{x = \text{mod}(6x, 2\pi)} \\ - \frac{(3(\theta_{ii} - \theta_{si})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{si}) + 2\pi^2)}{4} \Big|_{x = \text{mod}(2x, 2\pi)} \\ - \frac{2}{12} \sum_{i,j} \left( \left. (3(\theta_{ii} - \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{ii} - \theta_{sj}) + 2\pi^2) - 4(3(\theta_{ii} + \theta_{sj})^2 - 6\pi(\theta_{ii} + \theta_{sj}) + 2\pi^2)(\theta_{ii} + \theta_{sj}) \right) * \right|_{x = \text{mod}(6x, 2\pi)} \\ + \frac{4}{12x36} \sum_{i=1}^q \left( 3\theta_{ii}^2 - 6\pi\theta_{ii} + 2\pi^2 \right) + \left( 3\theta_{si}^2 - 6\pi\theta_{si} + 2\pi^2 \right) * \Big|_{x = \text{mod}(12x, 2\pi)} \end{array} \right) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

(II.120.4)

$^*(+2 \text{ premiers termes})$

*Étape 8*

$$\begin{aligned}
 & \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \equiv 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
 & + 2 \sum_{i \neq j} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{48} \left( 3 \left[ (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) + \frac{1}{48} \left( 3 \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ \frac{1}{12x36} \left( 3 \left[ (\theta_h - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) + \frac{1}{12x36} \left( 3 \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right), x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \frac{4}{12x36} \left[ \begin{array}{l} - \left( 3 \left[ (\theta_h + \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) \cos(\theta_h + \theta_y) \\ - \left( 3 \left[ (\theta_{Si} + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) \cos(\theta_{Si} + \theta_{Sj}) \end{array} \right] * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \end{array} \right] \\
 & - \frac{2}{12} \sum_{i,j} \frac{\left( 3 \left[ (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right)}{4} * x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\
 & - \frac{2}{12} \sum_{i,j} \frac{\left( \left( 3 \left[ (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) - 4 \left( 3 \left[ (\theta_h + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) (\theta_h + \theta_{Sj}) \right)}{36} *, x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\
 & + \frac{4}{12x36} \sum_{i=1}^q \left( 3 \left[ (\theta_h - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) + \left( 3 \left[ (\theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) *, x = \text{mod}(12x, 2\pi)
 \end{aligned}$$

\*

(II.120.5)

$(^*+2 \text{ premiers termes})$

Que nous pouvons transformer en :

$$\begin{aligned}
& \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \geq 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
& + 2 \sum_{i \neq j} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{16} \left( \left[ (\theta_h - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right), x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right. \\ \left. + 2 \sum_{i \neq j} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{16x9} \left( \left[ (\theta_h - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right), x = \text{mod}(6x, 2\pi) \right. \\ \left. + \frac{-4}{16x9} \left( \left[ (\theta_h + \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_h + \theta_{ij}) + \left[ (\theta_{Si} + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_{Si} + \theta_{Sj}) \right) * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \right. \\ \left. \left[ \left[ (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right] \right. \end{array} \right. \\ \left. \left. x = \text{mod}(2x, 2\pi) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{4} \sum_{i,j} \left( \left[ \left[ (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right] - 4 \left( \left[ (\theta_h + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) (\theta_h + \theta_{Sj}) \right) * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{36} \sum_{i=1}^q \left( \left[ (\theta_h - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) * x = \text{mod}(12x, 2\pi) \right. \right. \end{array} \right\} \\
& \quad (II.120.6)
\end{aligned}$$

Puis finalement,

$$\begin{aligned}
& \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \geq 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \sum_{k=1,\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} + DPT \\
& + \frac{1}{8} \sum_{i \neq j} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left[ (\theta_h - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ + \frac{1}{9} \left( \left[ (\theta_h - \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right), x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ - \frac{4}{9} \left( \left[ (\theta_h + \theta_{ij} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_h + \theta_{ij}) + \left[ (\theta_{Si} + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_{Si} + \theta_{Sj}) \right) * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \left[ \left[ (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ - \frac{1}{8} \sum_{i,j} \left( \left[ \left[ (\theta_h - \theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right] - 4 \left( \left[ (\theta_h + \theta_{Sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) (\theta_h + \theta_{Sj}) \right) * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ + \frac{1}{36} \sum_{i=1}^q \left( \left[ (\theta_h - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{Si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right) * x = \text{mod}(12x, 2\pi) \end{array} \right\} \\
& \quad (II.120.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_1^2} \equiv 4\omega^2(S_{a,1} + S_{b,1}) + \frac{5(2q+1)}{18} \frac{\pi^2}{6} + DPT \\
& + \frac{1}{8} \sum_{i \neq j} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \left[ (\theta_u - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{si} - \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ & \left[ \frac{1}{9} \left[ (\theta_u - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{si} - \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ & \left[ \frac{-4}{9} \left[ (\theta_u + \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_u + \theta_y) + \left[ (\theta_{si} + \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_{si} + \theta_{sj}) \right] * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \end{aligned} \right\} \\
& - \frac{1}{8} \sum_{i,j} \left( \left[ (\theta_u - \theta_{si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] - 4 \left[ (\theta_u + \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] (\theta_u + \theta_{sj}) \right)_* * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\
& + \frac{1}{36} \sum_{i=1}^q \left( \left[ (\theta_u - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right)_* * x = \text{mod}(12x, 2\pi)
\end{aligned} \tag{II.120.8}$$

Au facteur  $A$  prêt, nous avons

$$\begin{aligned}
4\varpi^2(S_{a1} + S_{b1}) &= \frac{b_{1,q}^2 + a_{1,q}^2}{I_0^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \sum_{k=1}^q \left( \cos(2\pi n_{sk}/3N) - \cos(2\pi n_{l(k+1)}/3N) \right) \right]^2 \\
& + \left[ \sum_{k=1}^q \left( -\frac{(n_{sk} - n_{lk})}{N} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{sk}}{3N}) - \sin(\frac{2\pi n_{lk}}{3N})}{2\pi} \right) \right]^2
\end{aligned} \tag{II.121}$$

### Calcul de la fonction objective (facteur harmonique)

$$\begin{aligned}
 \bar{F}\bar{H} = & \frac{4\omega^2(S_a + S_b)}{E_i^2} \equiv 4\omega^2 \left\{ \frac{1}{4\pi^2 A^2} \left[ \sum_{k=1}^q (\cos(2\pi n_{sk}/3N) - \cos(2\pi n_{s(k+1)}/3N))^2 \right] \right. \\
 & + \left. \left[ \sum_{k=1}^{q+1} \left( -\frac{(n_{sk} - n_{sk})}{NA} + \frac{\sin(\frac{2\pi n_{sk}}{3N}) - \sin(\frac{2\pi n_{sk}}{3N})}{2\pi A} \right)^2 \right] \right\} \\
 & + \frac{5(2q+1)}{18} \frac{\pi^2}{6} + DPT \\
 & + \frac{1}{8} \sum_{i \neq j} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \left[ (\theta_n - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{si} - \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(2x, 2\pi) \\ \frac{1}{9} \left[ \left[ (\theta_n - \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{si} - \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right], x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\ \frac{-4}{9} \left[ \left[ (\theta_n + \theta_y - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_n + \theta_y) + \left[ (\theta_{si} + \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \cos(\theta_{si} + \theta_{sj}) \right] * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \end{array} \right\} \\
 & - \frac{1}{8} \sum_{i,j} \left[ \left[ (\theta_n - \theta_{si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right] - 4 \left[ \left[ (\theta_n + \theta_{sj} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] (\theta_n + \theta_{sj}) \right] * x = \text{mod}(6x, 2\pi) \\
 & + \frac{1}{36} \sum_{i=1}^q \left[ \left[ (\theta_n - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] + \left[ (\theta_{si} - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3} \right] \right] * x = \text{mod}(12x, 2\pi)
 \end{aligned} \tag{II.122}$$

### Paramètres électriques

Résistance : R est entre 2 et 6 ohms.

Inductance : L est entre un dixième et quelques milliHenri.

Capacité : C est comprise entre un quelques centièmes à quelques dixièmes de Farad.

Coefficient d'amortissement électrique.

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \tag{II.123}$$

Période de résonance

$$T_{res} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (\text{II.124})$$

Autres paramètres électriques.

$$\alpha = 1 - \pi \left( \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \quad (\text{II.125})$$

### Calcul explicite de chaque série.

Les séries de fonctions (ou de Fourier) de types suivants sont rencontrées. Notons que les cas singuliers seront traités à part (ne respecte pas la formulation générale).

$$\frac{1}{2} \sum_{m, \text{impair}}^{\infty} \left( \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1} \right) = 1/4 \quad (\text{II.126})$$

$$\sum_{m \text{ impair}}^{\infty} \left( \frac{\cos(mx)}{m^2 - 1} \right) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{4k(k+1)} \quad (\text{II.127})$$

$$\sum_{\text{impair}}^{\infty} \left( \frac{\cos(2mx)}{(m+1)^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\cos((2k-1)X)}{4k^2} \right) \quad (\text{II.128})$$

Après changement de variables et sachant que :

$$\frac{1}{(m^2 - 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(m-1)} - \frac{1}{(m+1)} \right) \quad (\text{II.129})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k(k+1)} = (1 - \cos x) \log[2 \sin(\frac{x}{2})] - (\pi - x) \frac{\sin x}{2} \quad (\text{II.130})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(kx)}{k(k+1)} = 1 - (1 + \cos x) \log[2 \cos(\frac{x}{2})] - x \frac{\sin x}{2} \quad (\text{II.131})$$

En exemple, nous donnons les résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k)(\theta_1 + \theta_2))}{4\omega^2 4(k)^2} = \frac{12(\theta_1 + \theta_2)^2 + 2\pi^2 - 12\pi(\theta_1 + \theta_2)}{12.16\omega^2} \quad (\text{II.132})$$

Car :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{1}{12} (3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) \quad (\text{II.133})$$

Voici d'autres développements qui nous seront utiles pour des fonctions de périodicité  $2\pi$ .

$$1) \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad \text{si } 0 \leq x \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{4} \quad \text{si non} \quad (\text{II.134})$$

$$2) \quad x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (\text{II.135})$$

$$3) \quad \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \text{prolongement par imparité de la fonction.} \quad (\text{II.136})$$

$$4) \quad \frac{(\pi-x)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n} \quad (\text{II.137})$$

$$5) \quad (\pi-2x) \frac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad \text{prolongement par parité de la fonction} \quad (\text{II.138})$$

$$6) \quad x^2 = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} \quad (\text{II.139})$$

$$7) \quad -\log(2\sin(x))/2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n} \quad (\text{II.140})$$

$$8) \quad -\int \log(2\sin(x))/2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{(2n)^2} \quad (\text{II.141})$$

### Série de Fourier d'une fonction de période arbitraire

Soit  $f$  une fonction  $l$ -périodique. Pour obtenir la série de Fourier sur le segment  $[-l, l]$ .

En faisant le changement de variable  $x = \frac{l}{\pi}t$ , la fonction  $F(t) = f(\frac{l}{\pi}t)$  sera  $2\pi$  périodique.

$$F(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt) \quad (\text{II.142})$$

où :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos(nt) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin(nt) dt \end{aligned} \quad (\text{II.143})$$

En retournant aux variables  $x$ , on obtient :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{nxt}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{nxt}{l}\right) \quad (\text{II.144})$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dt \quad (\text{II.145})$$