

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À
TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
TARIK BAHRAOUI

FONCTIONS DE C -PUISSANCE ET APPLICATION À
L'INFÉRENCE DE COPULES

NOVEMBRE 2012

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail de maîtrise, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements sincères à M. Jean-François Quessy, qui est mon directeur de recherche et professeur de statistique au département de Mathématiques et d'information de l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR). Je lui suis reconnaissant du temps qu'il m'a consacré, de ses directives précieuses et de la qualité de son encadrement durant ces deux années.

J'adresse également des remerciements aux professeurs Mhamed Mesfioui et Fathallah Nouboud, du département de Mathématiques et d'information de l'UQTR. Leur appui moral et leurs encouragements durant ces deux années d'étude à l'UQTR ont été très appréciés. Je veux aussi remercier les membres du jury, MM. Taoufik Bouezmarni et Mhamed Mesfioui, pour avoir accepté de lire et évaluer mon mémoire. Leurs judicieux commentaires m'ont permis d'améliorer la version finale de ce travail.

Mes études de maîtrise ont été financées par des subventions de recherche octroyées à M. Jean-François Quessy par le *Fonds Québécois de Recherche Nature et Technologies* et par le *Conseil National de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie* du Canada. Je remercie aussi l'*Institut des Sciences Mathématiques* du Québec pour les bourses d'étude qu'ils m'ont accordées.

Enfin, la vie continue.

A la memoria de mi padre

Table des matières

Remerciements	i
Liste des tableaux	v
Liste des figures	vi
Chapitre 1. Introduction	1
Chapitre 2. Généralités sur les copules	6
2.1 Préliminaires	6
2.2 Copules & Théorème de Sklar	8
2.3 Quelques modèles	11
2.4 Copules à valeurs extrêmes	13
2.5 Copules Archimédiennes	15
2.6 Transformation intégrale de probabilité	18
Chapitre 3. Les fonctions de C-puissance théoriques	22
3.1 Définition	22
3.2 Quelques propriétés fondamentales	23
3.3 Lipschitz	23
3.4 Dominance stochastique	24
3.5 Calculs pour quelques modèles	25

3.5.1	Copule d'indépendance	25
3.5.2	Copules Archimédiennes	26
3.5.3	Transformation d'un générateur Archimédien	27
3.5.4	Copules à valeurs extrêmes	28
3.5.5	Copules <i>Archimax</i>	31
3.5.6	Copules de Durante	32
3.5.7	Transformation de copules	32
 Chapitre 4. Méthode Delta fonctionnelle		 33
4.1	Version <i>classique</i>	33
4.2	Généralisation aux espaces vectoriels	34
4.3	Fonction de répartition empirique	37
4.4	Autres applications	40
4.4.1	Fonction de répartition empirique bivariée	40
4.4.2	Copule empirique	42
4.4.3	Processus de Kendall	44
 Chapitre 5. Empirical C-power processes and their use for parameter estimation and goodness-of-fit in copula models		 46
5.1	Estimation of the C-power functions	46
5.2	A multiplier central limit Theorem	56
5.3	A generalized method-of-moment for the copula parameters	63
5.4	Goodness-of-fit tests for copulas	65
5.4.1	Test statistics	66
5.4.2	Computation of <i>p</i> -values	69
5.4.3	Verification of Assumption (3) for some models	71
5.5	Simulation studies	73

TABLE DES MATIÈRES	iv
5.5.1 Efficiency of the parameter estimation	73
5.5.2 Efficiency of the goodness-of-fit procedures	75
5.6 Illustration on the Uranium exploration data set	78
Chapitre 6. Conclusion	88
Références	90
Annexe A. Estimation du générateur Archimédien	95
A.1 Un estimateur <i>plug-in</i>	95
A.2 Interpolation linéaire de K_n	98

LISTE DES TABLEAUX

5.1	Estimation, based on 10 000 replicates, of n times the mean-squared error of the estimators $\hat{\theta}_{\{2\}}$, $\hat{\theta}_{\{3\}}$, $\hat{\theta}_{\{4\}}$ and $\hat{\theta}_{\{5\}}$, and of the inversion of Kendall's tau ($\hat{\theta}_\tau$), for five one-parameter families of copulas ($n = 100$)	82
5.2	Estimation, based on 10 000 replicates, of n times the mean-squared error of the estimators $\hat{\theta}_{\{2\}}$, $\hat{\theta}_{\{3\}}$, $\hat{\theta}_{\{4\}}$ and $\hat{\theta}_{\{5\}}$, and of the inversion of Kendall's tau ($\hat{\theta}_\tau$), for five one-parameter families of copulas ($n = 250$)	83
5.3	Estimation, based on 1 000 replicates, of the probability of rejection of \mathcal{H}_0 for the tests based on $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$ and $S_{n,\{3,4\}}$ when $n = 200$ and $\tau = .25$	84
5.4	Estimation, based on 1 000 replicates, of the probability of rejection of \mathcal{H}_0 for the tests based on $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$ and $S_{n,\{3,4\}}$ when $n = 200$ and $\tau = .5$	85
5.5	Estimation, based on 1 000 replicates, of the probability of rejection of \mathcal{H}_0 for the tests based on $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$ and $S_{n,\{3,4\}}$ when $n = 200$ and $\tau = .75$	86
5.6	Results of the parameter estimation and goodness-of-fit tests for the pairs (Co,Cs), (Co,Sc), (Co,Ti), (Cs,Sc), (Cs,Ti) and (Sc,Ti) in the Uranium exploration data set	87

LISTE DES FIGURES

3.1	Fonctions de C-puissance de la borne de Fréchet supérieure (—), de la copule d'indépendance (---) et de la borne de Fréchet inférieure (-.-) quand $p = 2$	26
3.2	Fonctions de C-puissance de la borne de Fréchet supérieure (—), de la copule d'indépendance (---) et de la borne de Fréchet inférieure (-.-) quand $p = 5$	27
5.1	Empirical C-power function (black), 95% confidence bands (red), and C-power function of the Gumbel–Hougaard copula when $p = 2$ (upper panel) and $p = 3$ (lower panel)	80
5.2	Empirical C-power function (black), 95% confidence bands (red), and C-power function of the Clayton copula when $p = 2$ (upper panel) and $p = 3$ (lower panel)	81

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la fonction de répartition conjointe est, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),$$

et les lois marginales sont

$$F(x) = P(X \leq x) \quad \text{et} \quad G(y) = P(Y \leq y).$$

Afin de modéliser le comportement de (X, Y) , une approche très populaire ces dernières années consiste à ajuster des modèles statistiques pour les marges et la structure de dépendance dans des étapes séparées. Cette approche est rendue possible grâce à un célèbre théorème dû à Sklar (1959). Ce résultat, qui sera détaillé plus loin dans ce mémoire, stipule que si les lois F et G sont continues, alors il existe une unique *copule* $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a la représentation $H(x, y) = C\{F(x), G(y)\}$. Autrement dit, la loi de (X, Y) peut se décomposer d'une part, selon les comportements marginaux représentés par F et G , et d'autre part selon la structure de dépendance dont l'information est contenue dans la fonction C .

À partir d'un échantillon $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ de *copies* aléatoires de (X, Y) , un problème d'un grand intérêt est d'inférer sur la forme inconnue de la copule C . Une approche populaire consiste à supposer que C appartient à une certaine famille paramétrique $\mathcal{F} = \{C_\theta; \theta \in \Theta\}$ et à estimer le paramètre inconnu θ . Cette étape d'estimation peut se faire, par exemple, via le maximum de la pseudo fonction de vraisemblance proposée par Shih & Louis (1995) et Genest et al. (1995) ou encore via une approche à distance minimale tel que proposée par Tsukahara (2005). Parmi les autres possibilités populaires, on retrouve l'inversion d'une mesure d'association, tel que suggéré par Genest et al. (2006) et Mesfioui et al. (2009).

Une autre étape cruciale dans la modélisation de la dépendance est d'attester que la famille de modèles choisie, à savoir $\mathcal{F} = \{C_\theta; \theta \in \Theta\}$, est adéquate. Pour s'assurer que \mathcal{F} modélise correctement la dépendance d'un phénomène, on utilise généralement un test d'adéquation. Le développement de tels tests est relativement récent. Parmi les premières contributions dans ce domaine, on retrouve les travaux de Fermanian (2005), Dobrić & Schmid (2005) et Genest et al. (2006). Quelques variantes et extensions de ces méthodes ont été proposées par Genest et al. (2009) et Mesfioui et al. (2009), entre autres. Plus récemment, Quessy & Bellerive (2012) ont étudié des méthodes d'adéquation pour la famille particulière des copules elliptiques.

L'objectif principal de ce mémoire est de développer de nouvelles méthodes d'estimation de paramètres et d'adéquation pour les modèles de copules à deux variables. L'idée maîtresse repose sur la notion de *fonctions de C-puissance* associées à une copule. Cette approche n'a jamais été considérée

jusqu'ici dans la littérature. On verra que les méthodologies développées dans ce mémoire, bien que reposant sur des bases théoriques assez profondes, sont faciles à implémenter et très rapides du point de vue calculatoire. Elles sont également très efficaces dans de nombreux contextes d'application.

En premier lieu, les *fonctions de C-puissance* associées à une copule seront introduites formellement. Bien que ces fonctions aient été mentionnées par quelques auteurs dans des contextes bien précis, par exemple par Alsina et al. (2006), elles n'ont jamais été considérées dans un cadre général. En outre, leurs propriétés n'ont jamais été étudiées et aucun calcul pour les nombreux modèles de copules existants n'ont été effectués. Cette lacune est comblée dans ce travail. Parmi les résultats théoriques découverts, on retrouve des versions des bornes de Fréchet inférieure et supérieure, des propriétés relatives aux ordres stochastiques, ainsi qu'une vérification d'une condition de Lipschitz. On verra aussi que des formules très simples pour les fonctions de C-puissance apparaissent pour plusieurs modèles de copules, notamment pour les familles Archimédienne, à valeurs extrême et Archimax.

La deuxième contribution de ce mémoire concerne l'obtention de versions empiriques non-paramétriques des fonctions de C-puissance et l'étude de leur comportement asymptotique. On obtiendra ainsi un théorème concernant la convergence faible de processus basés sur ces fonctions de C-puissance empiriques. Ces processus sont définis par $\mathbb{L}_{n,p}(s) = \sqrt{n}\{\ell_{n,p}(s) - \ell_{C,p}(s)\}$ et $\tilde{\mathbb{L}}_{n,p}(s) = \sqrt{n}\{\tilde{\ell}_{n,p}(s) - \tilde{\ell}_{C,p}(s)\}$. Ce résultat est valide sous des conditions de régularité vérifiables pour un grand nombre de scénarios possibles, c'est-à-dire sous divers modèles de copules. De plus, une version du Théorème

de la limite centrale du multiplicateur est décrite et validée rigoureusement. Ce résultat est extrêmement important puisqu'il permet d'*imiter* le comportement asymptotique des processus de C-puissance, et ainsi de calculer la p -valeur de tests d'adéquation. Il s'agit d'une variante de la méthode du *bootstrap* classique.

Le troisième et dernier objectif de ce travail consiste à exploiter les propriétés théoriques et échantillonnales des fonctions de C-puissance afin de développer de nouveaux outils d'inférence pour les modèles de copules. Ceci inclue l'estimation de paramètres pour des familles multi-paramétriques, de même qu'une méthodologie formelle et graphique pour l'adéquation à une famille. Dans de nombreux cas, les formules nécessaires pour estimer le paramètre d'une famille donnée sont faciles à manipuler, ce qui mène à des procédures faciles à mettre en œuvre. Ceci est particulièrement attirant dans des situations où la méthode d'inversion du tau de Kendall est difficile à appliquer, notamment pour plusieurs modèles à valeurs extrêmes. Une utilité notable concerne la relative facilité à traiter les modèles à plusieurs paramètres, ce qui n'est pas possible avec les méthodes d'inversion. Aussi, en exploitant la nature récursive des fonctions de C-puissance, les statistiques d'adéquation qui sont proposées sont très faciles à implémenter et rapide à calculer. En outre, leurs versions multiplicateurs s'obtiennent aisément. Enfin, on verra à l'aide de simulations Monte-Carlo que ces méthodes sont efficaces dans de nombreuses situations.

Le mémoire est organisé comme suit. Au Chapitre 2, on fait une revue des principaux résultats théoriques concernant les copules; quelques familles im-

portantes sont également décrites. Au Chapitre 3, on introduit formellement la notion de fonctions de C-puissance, on étudie quelques-unes de leurs propriétés fondamentales, et on présente des calculs pour un grand nombre de familles. Le Chapitre 4 est un prélude à la compréhension du Chapitre 5. Il concerne la méthode Delta fonctionnelle, qui est un outil fondamental en statistique asymptotique; plusieurs exemples d'application sont présentés.

Le Chapitre 5 offre, en anglais, les Sections 3–8 d'un article qui a été soumis à la revue *Bernoulli*. L'information des sections *amputées* 1 et 2 se retrouvent néanmoins dans ce mémoire. En effet, la Section 1 est une introduction dont l'essentiel se retrouve dans le présent Chapitre 1. Pour ce qui est de la Section 2, il s'agit principalement du Chapitre 3 du mémoire. Ainsi, la Section 5.1 définit les fonctions de C-puissance empiriques et un algorithme simple et rapide pour leur calcul est détaillé; aussi, on énonce un résultat sur leur convergence faible et on le démontre rigoureusement. À la Section 5.2, on définit des versions multiplicateurs de des processus de C-puissance et on démontre qu'elles sont valides asymptotiquement. Les sections 5.3–5.4 concernent le développement de méthodes d'inférence pour les modèles de copules bivariées, à savoir l'estimation de paramètres et l'adéquation. La Section 5.5 présente et commente des résultats de simulations Monte–Carlo pour étudier les propriétés à tailles finies des procédures nouvellement développées. Enfin, notre méthodologie est illustrée sur un jeu de données multivariées classique de Cook & Johnson (1981) concernant des mesures de concentration d'éléments chimiques dans des échantillons d'eau.

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES COPULES

2.1 Préliminaires

Avant de commencer, quelques notations seront introduites. D'abord, soit \mathbb{R} , la droite réelle ordinaire, c'est-à-dire $(-\infty, +\infty)$, et $\bar{\mathbb{R}}$, la droite réelle achevée, c'est-à-dire $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. De plus, $\bar{\mathbb{R}}^2$ représentera le plan euclidien $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$. Un rectangle B dans $\bar{\mathbb{R}}^2$ est donc le produit cartésien de deux intervalles fermés, à savoir $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Les sommets des rectangle B sont les points (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) et (x_2, y_2) . Le carré unité, noté \mathbf{I}^2 , est le produit $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$, où $\mathbf{I} = [0, 1]$.

Soient S_1 et S_2 , deux sous-ensembles non vides de $\bar{\mathbb{R}}$. Soit aussi H , une fonction réelle bivariable dont le domaine de définition est $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2$ et dont l'image est $\text{Im}(H) \subseteq \mathbb{R}$. Pour un rectangle $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dont les sommets sont dans $\text{Dom}(H)$, le H-volume de B est défini par

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

En définissant les différences d'ordre un de H sur le rectangle B par

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y)$$

et

$$\Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1),$$

on peut écrire, de façon équivalente,

$$V_H(B) = \Delta_{x_1}^{x_2} \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y).$$

Définition 2.1. *Une fonction H est dite 2-croissante si et seulement si $V_H(B) \geq 0$ pour tout rectangle B dont les sommets sont dans $\text{Dom}(H)$.*

Soit la fonction $H(x, y) = \max(x, y)$ définie sur $\mathbf{I}^2 = [0, 1]^2$. Celle-ci n'est pas 2-croissante car selon la Définition de H -volume, on a

$$\begin{aligned} V_H(\mathbf{I}^2) &= H(1, 1) - H(1, 0) - H(0, 1) + H(0, 0) \\ &= 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit la Définition 2.1.

Proposition 2.1. *On dit que la fonction H de domaine $\text{Dom}(H) = S_1 \times S_2$ sur \mathbb{R} est attachée si et seulement si pour tout $(x, y) \in \text{Dom}(H)$, on a*

$$H(x, a_2) = H(a_1, y) = 0,$$

où a_1 et a_2 sont les plus petits éléments de S_1 et S_2 , respectivement.

Exemple 2.1. *Soit une fonction croissante $f : I^2 \rightarrow I$ telle que $f(t, 1) = f(1, t) = t$ pour tout t dans I . La fonction f est attachée car $f(0, 1) = f(1, 0) = 0$. Par exemple, la fonction $f(x, y) = x \times y$ est attachée car $f(1, t) = 1 \times t = t$ et $f(t, 1) = t \times 1 = t$.*

2.2 Copules & Théorème de Sklar

Les copules sont des cas particuliers de fonctions attachées définies sur I^2 . On verra qu'elles ont une grande importance dans l'analyse de la dépendance de vecteurs aléatoires. On en donne d'abord la définition.

Définition 2.2. *Une copule bivariée est une fonction $C : I^2 \rightarrow I$ telle que*

$$(i) \text{ pour tout } u \in I, C(u, 0) = C(0, u) = 0;$$

$$(ii) \text{ pour tout } u \in I, C(u, 1) = C(1, u) = u;$$

(iii) *pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ tels que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a*

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Le Théorème suivant, dû à Sklar (1959), permet de relier la notion de copule à celle de fonction de répartition multivariée.

Théorème 2.1. *Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de répartition bidimensionnelle dont les fonctions de répartition marginales sont*

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) \quad \text{et} \quad G(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y).$$

Si F et G sont continues, alors il existe une unique copule $C : I^2 \rightarrow I$ telle que pour tout $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}^2$, on a la représentation

$$H(x, y) = C \{F(x), G(y)\}. \tag{2.1}$$

Le Théorème de Sklar (1959) permet de voir que la loi H d'un couple (X, Y) est composée des comportements marginaux de X et de Y , représentés respectivement par F et G , ainsi que de la dépendance entre X et Y , représentée

par la copule C . En effectuant le changement de variables $u = F(x)$ et $v = G(y)$, on extrait la copule C de H via l'équation (2.1), ce qui donne

$$C(u, v) = H \{ F^{-1}(u), G^{-1}(v) \}. \quad (2.2)$$

Proposition 2.2. *Toute copule C satisfait la condition de Lipschitz, c'est-à-dire que pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{I}^2$, on a*

$$|C(u_1, v_1) - C(u_2, v_2)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

Par conséquent, toute copule C est uniformément continue sur son domaine.

On définit les dérivées partielles d'une copule C par

$$C_{10}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \quad \text{et} \quad C_{01}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} C(u, v). \quad (2.3)$$

À noter que les fonctions $u \mapsto C_{01}(u, v)$ et $v \mapsto C_{10}(u, v)$ sont non décroissantes presque partout.

Théorème 2.2. *Pour tout $v \in I$, la dérivée partielle C_{10} existe presque sûrement pour tout $u \in I$ et $0 \leq C_{10}(u, v) \leq 1$. De même, pour tout $u \in I$, la dérivée partielle C_{01} existe presque sûrement pour tout $v \in I$ et $0 \leq C_{01}(u, v) \leq 1$.*

Il est possible d'obtenir des bornes valides pour toute copule C . D'abord, pour toute fonction de répartition H , les bornes de Fréchet–Hoeffding, d'abord découvertes par Fréchet (1957), sont telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max \{ F(x) + G(y) - 1, 0 \} \leq H(x, y) \leq \min \{ F(x), G(y) \}.$$

Par l'équation (2.2), on déduit que les copules associées à ces bornes sont respectivement $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ et $M(u, v) = \min(u, v)$. Ainsi, toute copule C est telle que pour tout $u, v \in [0, 1]^2$, on a

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v).$$

La copule W est la structure de dépendance qui correspond à la dépendance négative parfaite, alors que M correspond à la dépendance positive parfaite.

Proposition 2.3. *Soit une copule C et sa section diagonale définie par $\delta_C(t) = C(t, t)$. Alors $\delta_W(t) \leq \delta_C(t) \leq \delta_M(t)$, où $\delta_W(t) = \max(2t - 1, 0)$ et $\delta_M(t) = t$.*

Démonstration. On sait que pour toute copule C et pour tout $(u, v) \in (0, 1)^2$, on a $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$. Donc, en particulier pour $u = v = t$, on a $\delta_W(t) \leq \delta_C(t) \leq \delta_M(t)$, où $\delta_W(t) = W(t, t) = \max(2t - 1, 0)$ et $\delta_M(t) = M(t, t) = \min(t, t) = t$, ce qui complète la preuve. \diamond

On peut montrer que si $\delta_C(t) = \delta_M(t)$ pour tout $t \in I$, alors C est la copule de Fréchet–Hoeffding M . Par contre, si $\delta_C(t) = \delta_W(t)$ pour tout $t \in I$, cela n'implique pas nécessairement que $C = W$. On peut se référer à Nelsen (2006) pour la preuve de ces résultats.

2.3 Quelques modèles

Exemple 2.2. *La distribution de Gumbel (1960) bivariée est de la forme*

$$H_{\theta}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}, & \text{si } x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in [0, 1]$. Les fonctions de répartition marginales sont

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = 1 - e^{-x} \quad \text{et} \quad G(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = 1 - e^{-y}.$$

Ces fonctions de répartition correspondent à la loi exponentielle d'espérance un. En posant $u = F(x)$ et $v = G(y)$, on retrouve les fonctions inverses

$$F^{-1}(u) = -\ln(1 - u) \quad \text{et} \quad G^{-1}(v) = -\ln(1 - v).$$

Donc, d'après l'équation (2.2), on obtient après quelques calculs que l'unique copule de H_{θ} est

$$C_{\theta}(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v)e^{-\theta \ln(1-u) \times \ln(1-v)}.$$

Exemple 2.3. *Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la fonction de répartition conjointe est*

$$H(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Cette loi s'appelle la distribution logistique bivariée de Gumbel (1961). Les fonctions de répartition marginales sont données par

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y) = (1 + e^{-x})^{-1} \quad \text{et} \quad G(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y) = (1 + e^{-y})^{-1}.$$

Comme les fonctions inverses sont

$$F^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1}{u} - 1\right) \quad \text{et} \quad G^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1}{v} - 1\right),$$

on obtient, de l'équation (2.2), que la copule associée à H est

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

Exemple 2.4. Pour $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$, les copules de Fréchet–Mardia sont de la forme

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}(u, v) = \alpha_1 M(u, v) + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \Pi(u, v) + \alpha_2 W(u, v),$$

où W et M sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de Fréchet, et Π est la copule d'indépendance.

Exemple 2.5. On dit qu'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ suit une loi elliptique si et seulement si il admet une représentation stochastique de la forme $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + R\mathbf{A}\mathbf{U}$, où $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ est le vecteur des moyennes, R est une variable aléatoire positive, \mathbf{U} est uniformément distribuée sur l'hypersphère unité $\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{z}^T \mathbf{z} = 1\}$ et $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est une matrice telle que $\Sigma = AA^T$ est non-singulière et définie positive. La fonction de répartition associée à \mathbf{X} n'a généralement pas de forme explicite. Les copules elliptiques sont simplement les copules qui sont extraites des lois elliptiques via la représentation de Sklar inverse présentée à l'équation (2.2). Par exemple, la loi Normale fait parti de la famille elliptique. Sa copule dans le cas à deux variables est

$$C_\rho(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} h_\rho(s, t) dt ds,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale standard et

$$h_\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right\}$$

est la densité Normale bivariée de moyennes nulles, de variances unitaires, et de corrélation $\rho \in [-1, 1]$. La copule de Student, qui est également un membre des modèles elliptiques, est

$$C_{\rho, \nu}(u, v) = \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(v)} \frac{1}{\pi \nu \sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1 - \rho^2)} \right\}^{\frac{\nu}{2} + 1} dt ds,$$

où $\rho \in [-1, 1]$ et T_{ν} est la fonction de répartition de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire

$$T_{\nu}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + 1)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} dz.$$

2.4 Copules à valeurs extrêmes

Soit une suite X_1, \dots, X_n de variables aléatoire i.i.d. de fonction de répartition F , et considérons leur maximum, à savoir la statistique

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Supposons qu'il existe deux suites de nombres réels (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a_n x + b_n)\}^n = F^*(x),$$

où F^* est une fonction de répartition non dégénérée. Tel que démontré par Fisher & Tippett (1928), il y a uniquement trois formes possibles pour F^* , à savoir les lois de Gumbel, Fréchet et Weibull, dont les fonctions de répartition sont données respectivement par $F^*(x) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$, $F^*(x) = \exp(-x^{-a})$, $x > 0$, $a > 0$, et $F^*(x) = \exp\{-(-x)^a\}$, $x \leq 0$, $a > 0$.

La théorie des valeurs extrêmes a également été développée dans le cas bivarié. Pour la décrire, soit une suite de vecteurs aléatoires indépendants $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ dans \mathbb{R}^2 de fonction de répartition H . On considère les statistiques d'ordre maximum

$$M_{n,X} = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad M_{n,Y} = \max(Y_1, \dots, Y_n).$$

Leur distribution conjointe est

$$\begin{aligned} P(M_{n,X} \leq x, M_{n,Y} \leq y) &= P(X_j \leq x, Y_j \leq y, \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n\}) \\ &= \prod_{j=1}^n P(X_j \leq x, Y_j \leq y) \\ &= \{H(x, y)\}^n. \end{aligned}$$

Pour étudier le comportement asymptotique de $(M_{n,X}, M_{n,Y})$ quand $n \rightarrow \infty$, il faut considérer une normalisation de ces variables aléatoires car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_{n,X} \leq x, M_{n,Y} \leq y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{H(x, y)\}^n = 0$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour ce faire, soient des suites $a_{n,X}, b_{n,X}, a_{n,Y}, b_{n,Y}$, et posons

$$M_{n,X}^* = \frac{M_{n,X} - b_{n,X}}{a_{n,X}} \quad \text{et} \quad M_{n,Y}^* = \frac{M_{n,Y} - b_{n,Y}}{a_{n,Y}}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} P(M_{n,X}^* \leq x, M_{n,Y}^* \leq y) &= P(M_{n,X} \leq a_{n,X}x + b_{n,X}, M_{n,Y} \leq a_{n,Y}y + b_{n,Y}) \\ &= \{H(a_{n,X}x + b_{n,X}, a_{n,Y}y + b_{n,Y})\}^n. \end{aligned}$$

Si les suites sont choisies de telle sorte que la limite quand $n \rightarrow \infty$ de la probabilité précédente converge vers une loi bivariée non dégénérée, Pickands

(1981) a démontré que cette distribution limite est nécessairement de la forme

$$H^*(x, y) = \exp \left\{ -(x + y) A \left(\frac{y}{x + y} \right) \right\},$$

où $A : [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$ est une fonction convexe qui satisfait

$$\max(t, 1 - t) \leq A(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad A(0) = A(1) = 1.$$

De l'équation (2.2), on déduit que les copules à valeurs extrêmes s'écrivent

$$C_A(u, v) = \exp \left\{ \log uv A \left(\frac{\log u}{\log uv} \right) \right\}.$$

Parmi les copules à valeurs extrêmes, on retrouve la copule de Gumbel-Hougaard, dont la fonction de dépendance est

$$A_\theta(t) = \{(1 - t)^\theta + t^\theta\}^{1/\theta}, \quad \theta \geq 1.$$

La copule de Gumbel type A est générée par $A_\theta(t) = \theta t^2 - \theta t + 1$, alors que pour la copule de Galambos, on a

$$A_\theta(t) = 1 - \{t^{-\theta} + (1 - t)^{-\theta}\}^{-1/\theta}.$$

2.5 Copules Archimédiennes

Les copules Archimédiennes sont de la forme générale

$$C_\varphi(u, v) = \varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(v) \}, \quad (2.4)$$

où $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est un générateur convexe, continu et décroissant qui satisfait $\varphi(1) = 0$. Ces copules possèdent des propriétés intéressantes et

de nombreuses familles paramétriques, représentant une grande variété de structures de dépendance, sont Archimédiennes. Pour plus de détails sur leurs propriétés, se référer à l'excellent ouvrage de Nelsen (2006).

Un cas particulier survient lorsque $\varphi(t) = -\ln t$. On a alors $\varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$, ce qui fait que

$$C(u, v) = \exp[-\{(-\ln u) + (-\ln v)\}] = uv.$$

Autrement dit, $\varphi(t) = -\ln t$ génère la copule d'indépendance. Parmi les modèles de copules Archimédiennes, on retrouve la copule de Frank

$$C_{\theta}^{\text{F}}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right\},$$

dont le générateur est

$$\varphi_{\theta}^{\text{F}}(t) = -\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right), \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lorsque le générateur est $\varphi_{\theta}^{\text{GH}}(t) = |\ln t|^{1/\theta}$, $\theta \in [0, 1]$, on obtient la copule de Gumbel–Hougaard, à savoir

$$C_{\theta}^{\text{GH}}(u, v) = \exp \left\{ - \left(|\ln u|^{1/\theta} + |\ln v|^{1/\theta} \right)^{\theta} \right\}.$$

Enfin, le modèle de Clayton découle du générateur $\varphi_{\theta}^{\text{CL}}(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, où $\theta \geq -1$. La copule est alors

$$C_{\theta}^{\text{CL}}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}.$$

Exemple 2.6. *La borne inférieure de Fréchet est Archimédienne. En effet, soit $\varphi(t) = 1 - t$. Comme $\varphi^{-1}(t) = 1 - t$ si $t \in [0, 1]$ et $\varphi^{-1}(t) = 0$ si $t > 1$,*

alors $\varphi^{-1}(t) = \max(1 - t, 0)$. La copule associée à ce générateur est donc

$$\begin{aligned} C_\varphi(u, v) &= \varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(v) \} \\ &= \varphi^{-1} (2 - u - v) \\ &= \max \{ 1 - (2 - u - v), 0 \} \\ &= \max (u + v - 1, 0). \end{aligned}$$

Ainsi, $C_\varphi = W$.

De Nelsen (2006), une condition nécessaire pour qu'une copule C soit Archimédienne est que $\delta_C(s) < s$ pour tout $s \in (0, 1)$. Cette condition n'est pas satisfaite par la borne de Fréchet supérieure $M(u, v) = \min(u, v)$, car la diagonale $\delta_M(s) = s$ n'est pas strictement inférieure à s . Ainsi, M n'est pas une copule Archimédienne.

Parmi les propriétés des copules Archimédiennes, on a que C_φ est symétrique au sens où $C_\varphi(u, v) = C_\varphi(v, u)$ pour tout $(u, v) \in [0, 1]$. En effet,

$$C_\varphi(u, v) = \varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(v) \} = \varphi^{-1} \{ \varphi(v) + \varphi(u) \} = C_\varphi(v, u).$$

De plus, C_φ est associative, c'est-à-dire que pour tout $u, v, w \in [0, 1]$,

$$C_\varphi \{ C_\varphi(u, v), w \} = C_\varphi \{ u, C_\varphi(v, w) \}.$$

Il s'agit de calculer directement

$$\begin{aligned} C_\varphi \{ C_\varphi(u, v), w \} &= \varphi^{-1} \{ \varphi (C_\varphi(u, v)) + \varphi(w) \} \\ &= \varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w) \} \\ &= \varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(C_\varphi(v, w)) \} \\ &= C_\varphi \{ u, C_\varphi(v, w) \}. \end{aligned}$$

Enfin, si K est une constante positive, alors $\tilde{\varphi}(t) = K\varphi(t)$ génère aussi la copule C_φ . Il s'agit d'abord de noter que $\tilde{\varphi}^{-1}(t) = \varphi(t/K)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} C_{\tilde{\varphi}}(u, v) &= \tilde{\varphi}^{-1} \{ \tilde{\varphi}(u) + \tilde{\varphi}(v) \} \\ &= \varphi^{-1} \left\{ \frac{1}{K} (K\varphi(u) + K\varphi(v)) \right\} \\ &= \varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(v) \} \\ &= C_\varphi(u, v). \end{aligned}$$

Le critère d'Abel stipule qu'une copule C est Archimédienne si et seulement si les dérivées partielles, définies à l'équation (2.3), existent et si on peut trouver une fonction intégrable $\xi : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ telle que pour tout $u, v \in [0, 1]$,

$$\xi(u) C_{01}(u, v) = \xi(v) C_{10}(u, v).$$

Le cas échéant, le générateur φ de C_φ est donné, à une constante près, par

$$\varphi(t) = \int_t^1 \xi(s) ds.$$

2.6 Transformation intégrale de probabilité

En statistique, la notion de transformation intégrale de probabilité est connue comme la transformation d'une variable aléatoire continue X de fonction de répartition F par $U = F(X)$. On montre alors facilement que U est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, pour tout $u \in [0, 1]$,

$$P(U \leq u) = P\{F(X) \leq u\} = P\{X \leq F^{-1}(u)\} = F\{F^{-1}(u)\} = u.$$

Toutefois, la transformation intégrale de probabilité dans le cas bivarié ne mène pas à la même loi pour tous les modèles. D'abord, pour un couple

aléatoire (X, Y) de fonction de répartition H , on la définit comme la loi de $T = H(X, Y)$, c'est-à-dire

$$K_H(t) = P \{H(X, Y) \leq t\}.$$

Si les marges $F(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H(x, y)$ et $G(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x, y)$ sont continues, alors on sait que $H(x, y) = C\{F(x), G(y)\}$. Ainsi, en posant $U = F(X)$ et $V = G(Y)$, on peut écrire

$$K_H(t) = P \{C\{F(X), G(Y)\} \leq t\} = P \{C(U, V) \leq t\},$$

où $(U, V) \sim C$. Par conséquent, la transformation intégrale de probabilité bivariable ne dépend que de la copule, et non des marges d'une distribution. Ainsi, on notera K_C dans la suite. Un lien intéressant peut être fait entre la fonction K_C et la mesure de dépendance de Kendall. En effet, celle-ci peut se définir par $\tau(C) = 4E\{C(U, V)\} - 1$. Ainsi,

$$\tau(C) = 4E(T) - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1.$$

Par une simple intégration par partie, on peut également écrire

$$\tau(C) = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt. \quad (2.5)$$

Pour plus de détails sur K_C et sur les mesures de dépendance, consulter l'ouvrage de Nelsen (2006).

Un des cas les plus simples pour le calcul de K_C est lorsque C est la copule d'indépendance, c'est-à-dire $C(u, v) = uv$. La transformation intégrale de

probabilité se calcule alors directement par

$$\begin{aligned}
 K_C(t) &= P(UV \leq t) \\
 &= \int_0^1 P(UV \leq t | V = v) dv \\
 &= \int_0^1 P\left(U \leq \frac{t}{v} \middle| V = v\right) dv \\
 &= \int_0^t dv + \int_t^1 \frac{t}{v} dv \\
 &= t - t \log t.
 \end{aligned}$$

De façon générale, Genest & Rivest (1993) ont montré que

$$K_C(t) = t - \int_t^1 C_{01} \{C_v^{-1}(t), v\} dv$$

où $C_v^{-1}(t) = \inf \{u : C(u, v) = t\}$. Cette formule peut être utilisée pour obtenir la transformation intégral de probabilité d'une copule Archimédienne de générateur φ . On peut en effet montrer que

$$K_{C_\varphi}(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}. \quad (2.6)$$

On déduit de là que le tau de Kendall d'une copule Archimédienne est

$$\tau(C_\varphi) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

En particulier, si le générateur est celui de la copule de Clayton, à savoir $\varphi_\theta(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$, $\theta > -1$, alors

$$K_{C_\varphi}(t) = \frac{t(\theta + 1)}{\theta} - \frac{t^{\theta+1}}{\theta}.$$

De plus, $\tau(C_\varphi) = \theta/(\theta + 2)$. À l'Annexe A, la forme particulière de la transformation intégrale de probabilité pour les copules Archimédiennes rencontrée à l'équation (2.6) est exploitée pour proposer des versions empiriques

pour le générateur φ . L'idée consiste d'abord à représenter φ en fonction de K_{C_φ} , et ensuite à estimer K_{C_φ} avec l'estimateur non-paramétrique introduit par Genest & Rivest (1993). Deux méthodes sont décrites, l'une qui utilise directement cet estimateur, l'autre qui emploie une version linéarisée.

Comme dernier exemple de calcul de K_C , considérons la famille très générale des copules *Archimax*. Ces modèles sont de la forme

$$C_{\varphi,A}(u, v) = \varphi^{-1} \left\{ (\varphi(u) + \varphi(v)) A \left(\frac{\varphi(u)}{\varphi(u) + \varphi(v)} \right) \right\}, \quad (2.7)$$

où φ est un générateur Archimédien et A est une fonction de dépendance extrême. On retrouve la copule Archimédienne de générateur φ lorsque $A(t) \equiv 1$, alors qu'une copule extrême de fonction de dépendance A émerge quand $\varphi(t) = -\log t$. De Genest & Rivest (2001) et Capéraà et al. (2000), la transformation intégrale de probabilité de $C_{\varphi,A}$ est

$$K_{C_{\varphi,A}}(t) = t - \{1 - \tau(C_A)\} \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}.$$

En utilisant la formule (2.5), on obtient que le tau de Kendall associé à la copule $C_{\varphi,A}$ est

$$\begin{aligned} \tau(C_{\varphi,A}) &= 3 - 4 \int_0^1 \left\{ t - \{1 - \tau(C_A)\} \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} \right\} dt \\ &= 1 + 4 \{1 - \tau(C_A)\} \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \\ &= 1 + 4 \{1 - \tau(C_A)\} \left\{ \frac{\tau(C_\varphi) - 1}{4} \right\} \\ &= \tau(C_A) + \{1 - \tau(C_A)\} \tau(C_\varphi). \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

LES FONCTIONS DE C -PUISSANCE THÉORIQUES

Dans ce chapitre, on définit d'abord formellement les fonctions de C -puissance. Ensuite, quelques propriétés générales sont énoncées et démontrées. Enfin, des calculs pour un grand nombre de familles de copules sont présentés. On verra que des formules très simples émergent pour plusieurs de ces modèles.

3.1 Définition

Soit C , une copule. Les fonctions de C -puissance $\ell_{C,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $\tilde{\ell}_{C,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ associées à C sont définies récursivement par $\ell_{C,1}(s) = \tilde{\ell}_{C,1}(s) = s$ et pour $p \geq 1$,

$$\ell_{C,p+1}(s) = C\{s, \ell_{C,p}(s)\} \quad \text{et} \quad \tilde{\ell}_{C,p+1}(s) = C\{\tilde{\ell}_{C,p}(s), s\}. \quad (3.1)$$

À noter que $\ell_{C,2}(s) = \tilde{\ell}_{C,2}(s) = C(s, s)$ est la *diagonale* de C .

3.2 Quelques propriétés fondamentales

Comme première propriété des fonctions de C -puissance, on voit que $\ell_{C,p} = \tilde{\ell}_{C,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ lorsque C est symétrique, *i.e.* quand

$$C(u, v) = C(v, u) \quad \text{pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Aussi, les propriétés de C sur la frontière de $[0, 1]^2$ a pour effet que

$$\ell_{C,p}(0) = \tilde{\ell}_{C,p}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \ell_{C,p}(1) = \tilde{\ell}_{C,p}(1) = 1.$$

De plus, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, les fonctions $\ell_{C,p}$ et $\tilde{\ell}_{C,p}$ sont non-décroissantes. Pour le voir, on procède par induction. On note d'abord que $\ell_{C,1}(s) = s$ est croissante. Ensuite, en supposant que $\ell_{C,p}$ est croissante pour un certain $p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $s_1 \leq s_2 \in [0, 1]$ que

$$\ell_{C,p+1}(s_1) = C\{s_1, \ell_{C,p}(s_1)\} \leq C\{s_2, \ell_{C,p}(s_2)\} = \ell_{C,p+1}(s_2),$$

en utilisant le fait que les copules bivariées sont croissantes dans leurs arguments et que $\ell_{C,p}(s_1) \leq \ell_{C,p}(s_2)$, par l'hypothèse d'induction. Par conséquent, $\ell_{C,p}$ est non-décroissante pour tout $p \in \mathbb{N}$. La preuve est similaire pour $\tilde{\ell}_{C,p}$.

3.3 Lipschitz

Les fonctions de C -puissance sont Lipschitz, c'est-à-dire que pour toute copule C , on a pour chaque $p \in \mathbb{N}$ que

$$|\ell_{C,p}(s_1) - \ell_{C,p}(s_2)| \leq p |s_1 - s_2| \quad \text{et} \quad |\tilde{\ell}_{C,p}(s_1) - \tilde{\ell}_{C,p}(s_2)| \leq p |s_1 - s_2|.$$

Par conséquent, $\ell_{C,p}$ et $\tilde{\ell}_{C,p}$ sont uniformément continues sur $[0, 1]$. Pour le montrer, on remarque que le résultat est vrai quand $p = 1$ car $\ell_{C,1}(s) = s$. Ensuite, en supposant que (3.2) est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |\ell_{C,p+1}(s_1) - \ell_{C,p+1}(s_2)| &= |C\{s_1, \ell_{C,p}(s_1)\} - C\{s_2, \ell_{C,p}(s_2)\}| \\ &\leq |s_1 - s_2| + |\ell_{C,p}(s_1) - \ell_{C,p}(s_2)| \\ &\leq (p+1)|s_1 - s_2|, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que C est elle-même Lipschitz, c'est-à-dire que pour tout $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2$, on a

$$|C(u_1, v_1) - C(u_2, v_2)| \leq |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|.$$

3.4 Dominance stochastique

Une copule bivariable C_1 est stochastiquement dominée par une autre copule C_2 si seulement si

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \quad \text{pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2.$$

On note alors $C_1 \prec C_2$. Cette propriété implique l'ordre stochastique de fonction C -puissance. Plus précisément, si $C_1 \prec C_2$, alors pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\ell_{C_1,p}(s) \leq \ell_{C_2,p}(s) \quad \text{et} \quad \tilde{\ell}_{C_1,p}(s) \leq \tilde{\ell}_{C_2,p}(s). \quad (3.2)$$

Pour démontrer ce résultat par induction, on remarque d'abord qu'il est vrai pour $p = 2$. En effet,

$$\ell_{C_1,2}(s) = C_1(s, s) \leq C_2(s, s) = \ell_{C_2,2}(s).$$

Ensuite, supposons que (3.2) est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Comme les copules bivariées sont croissantes dans leurs arguments, on a

$$\ell_{C_1, p+1}(s) = C_1 \{s, \ell_{C_1, p}(s)\} \leq C_2 \{s, \ell_{C_2, p}(s)\} = \ell_{C_2, p+1}(s).$$

La preuve est similaire pour $\tilde{\ell}_{C, p}$.

Une conséquence de (3.2) est que toute fonction de C -puissance est bornée inférieurement et supérieurement. En effet, on a pour tout $s \in [0, 1]$ que

$$\ell_{W, p}(s) \leq \ell_{C, p}(s) \leq \ell_{M, p}(s) \quad \text{et} \quad \ell_{W, p}(s) \leq \tilde{\ell}_{C, p}(s) \leq \ell_{M, p}(s),$$

où

$$\ell_{W, p}(s) = \max(p s + 1 - p, 0) \quad \text{et} \quad \ell_{M, p}(s) = s$$

sont les fonctions de C -puissance associée aux bornes de Fréchet–Hoeffding

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \quad \text{et} \quad M(u, v) = \min(u, v),$$

respectivement. On rappelle que les copules W et M sont telles que pour toute copule C ,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v), \quad \text{pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2.$$

3.5 Calculs pour quelques modèles

3.5.1 Copule d'indépendance

Soit $\Pi(u, v) = uv$, la copule d'indépendance. Il est facile de montrer que

$$\ell_{\Pi, p}(s) = \tilde{\ell}_{\Pi, p}(s) = s^p.$$

À la Figure 3.1, les fonctions $\ell_{W,p}$, $\ell_{\Pi,p}$ et $\ell_{M,p}$ sont représentée pour $p = 2$. Ces mêmes fonctions pour le cas $p = 5$ se retrouvent à la Figure 3.2.

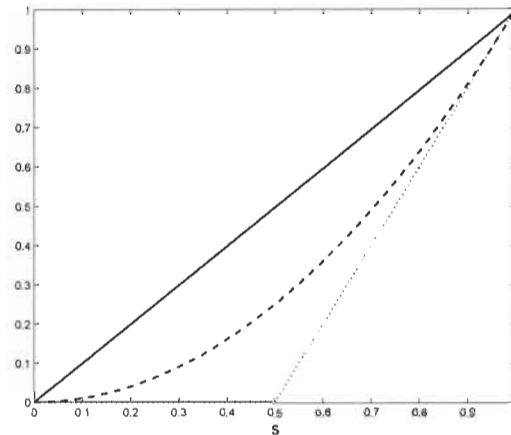


Figure 3.1: Fonctions de C -puissance de la borne de Fréchet supérieure (—), de la copule d'indépendance (---) et de la borne de Fréchet inférieure (- · -) quand $p = 2$

3.5.2 Copules Archimédiennes

La classe des copules Archimédiennes C_φ comprend les modèles qui s'écrivent sous la forme (2.4) pour un certain générateur φ . Quelques calculs directs permettent de montrer que

$$\ell_{C_\varphi,p}(s) = \tilde{\ell}_{C_\varphi,p}(s) = \varphi^{-1} \{p \varphi(s)\}.$$

Parmi les copules Archimédiennes les plus populaires, on retrouve les modèles paramétriques de Clayton (CL), Gumbel–Hougaard (GH) et Frank (F) dont

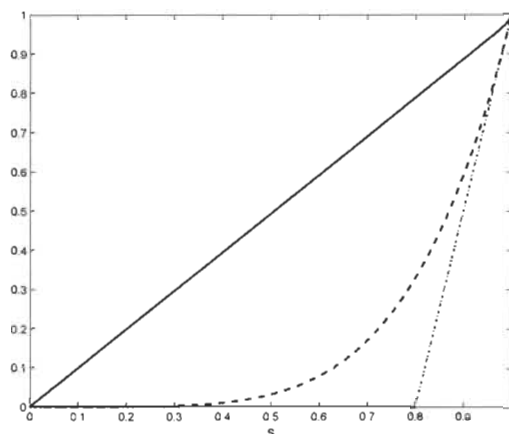


Figure 3.2: Fonctions de C-puissance de la borne de Fréchet supérieure (—), de la copule d'indépendance (- - -) et de la borne de Fréchet inférieure (- · -) quand $p = 5$

les générateurs sont décrits à la Section 2.5. Leurs fonctions de C-puissance correspondantes sont

$$\ell_{\text{CL},p}(s) = \max \left\{ 0, (ps^{-\theta} - p + 1)^{-1/\theta} \right\}, \quad \ell_{\text{GH},p}(s) = s^{p^{1-\theta}}$$

$$\text{et } \ell_{\text{F},p}(s) = \max \left\{ 0, -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta s} - 1)^p}{(e^{-\theta} - 1)^{p-1}} \right) \right\}.$$

3.5.3 Transformation d'un générateur Archimédien

Soit une copule Archimédienne générée par φ . Dans son article, Nelsen (1997) a observé que $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \{\varphi(t^\alpha)\}^\beta$, où $\alpha \in (0, 1]$ et $\beta \geq 1$, satisfait aussi les

propriétés d'un générateur Archimédien. On calcule

$$\begin{aligned}\ell_{C_{\alpha,\beta,p}}(s) &= \varphi_{\alpha,\beta}^{-1} \{p \varphi_{\alpha,\beta}(s)\} \\ &= [\varphi^{-1} \{p^{1/\beta} \varphi(s^\alpha)\}]^{1/\alpha} \\ &= \{\ell_{p^{1/\beta}}(s^\alpha)\}^{1/\alpha}.\end{aligned}$$

Par exemple, si $\varphi(t) = t^{-1} - 1$, alors $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = (t^{-\alpha} - 1)^\beta$. On a donc

$$\ell_{C_{\alpha,\beta,p}}(s) = \{p^{1/\beta} (s^{-\alpha} - 1) + 1\}^{-1/\alpha}.$$

3.5.4 Copules à valeurs extrêmes

On a vu au Chapitre 2 que les copules à valeurs extrêmes bivariées s'écrivent

$$C_A(u, v) = \exp \left\{ \log uv A \left(\frac{\log u}{\log uv} \right) \right\},$$

où $A : [0, 1] \rightarrow [0, 1/2]$ est la fonction de dépendance de Pickands (1981).

Cette dernière est convexe et satisfait les conditions

$$\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad A(0) = A(1) = 1.$$

Voir Gudendorf & Segers (2010) pour un aperçu des principaux résultats concernant la modélisation de la dépendance via cette classe de modèles.

Les copules à valeurs extrêmes sont *max-stables*, c'est-à-dire que pour tout $t > 0$, $C_A(u^t, v^t) = C^t(u, v)$ pour chaque $(u, v) \in [0, 1]^2$. Cette propriété entraîne la max-stabilité des fonctions de C -puissance correspondantes, ce qui permet également de caractériser la forme de $\ell_{C_A,p}$ et $\tilde{\ell}_{C_A,p}$.

Proposition 3.1. *Si C_A est une copule à valeurs extrêmes dont la fonction de dépendance de Pickands est A , alors pour tout $t > 0$ et $s \in [0, 1]$, on a*

$$\ell_{C_A,p}(s^t) = \{\ell_{C_A,p}(s)\}^t \quad \text{et} \quad \tilde{\ell}_{C_A,p}(s^t) = \{\tilde{\ell}_{C_A,p}(s)\}^t.$$

Par conséquent,

$$\ell_{C_A,p}(s) = s^{K_{A,p}} \quad \text{et} \quad \tilde{\ell}_{C_A,p}(s) = s^{\tilde{K}_{A,p}}$$

pour certaines constantes $K_{A,p}$ et $\tilde{K}_{A,p}$ dans l'intervalle $[1, p]$.

Démonstration. Le résultat est évidemment vrai pour $p = 1$, puisque

$$\ell_{C_A,1}(s^t) = s^t = \{\ell_{C_A,1}(s)\}^t.$$

Ensuite, supposons que $\ell_{C_A,p}(s^t) = \{\ell_{C_A,p}(s)\}^t$ est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Comme C_A est max-stable,

$$\begin{aligned} \ell_{C_A,p+1}(s^t) &= C_A \{s^t, \ell_{C_A,p}(s^t)\} \\ &= C_A \{s^t, (\ell_{C_A,p}(s))^t\} \\ &= C_A^t \{s, \ell_{C_A,p}(s)\} \\ &= \{\ell_{C_A,p+1}(s)\}^t, \end{aligned}$$

ce qui démontre la première partie de la proposition. La preuve est similaire pour $\tilde{\ell}_{C_A,p}$. Maintenant, on remarque que l'équation $\ell_{C_A,p}(s^t) = \{\ell_{C_A,p}(s)\}^t$ pour tous $t > 0$ et $s \in [0, 1]$ peut être ré-écrite

$$\ell_{C_A,p}(s \times s^{t-1}) = \ell_{C_A,p}(s) \{\ell_{C_A,p}(s)\}^{t-1} = \ell_{C_A,p}(s) \ell_{C_A,p}(s^{t-1}).$$

En effectuant la transformation bijective $x = s$ et $y = s^{t-1}$, on retrouve

$$\ell_{C_A,p}(xy) = \ell_{C_A,p}(x) \ell_{C_A,p}(y),$$

qui correspond à l'équation fonctionnelle multiplicative de Cauchy. De Jung (2011), par exemple, on déduit qu'il existe $K_{A,p} > 0$ tel que $\ell_{C_{A,p}}(x) = x^{K_{A,p}}$. On procède de manière similaire pour déduire $\tilde{\ell}_{C_{A,p}}(x) = x^{\tilde{K}_{A,p}}$. \diamond

Les constantes $K_{A,p}$ et $\tilde{K}_{A,p}$ dans la Proposition 3.1 sont définies récursivement par $K_{A,1} = \tilde{K}_{A,1} = 1$ et pour $p \in \mathbb{N}$,

$$K_{A,p+1} = (K_{A,p} + 1) A\left(\frac{1}{K_{A,p} + 1}\right)$$

et

$$\tilde{K}_{A,p+1} = (\tilde{K}_{A,p} + 1) A\left(\frac{\tilde{K}_{A,p}}{\tilde{K}_{A,p} + 1}\right).$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \ell_{C_{A,p+1}}(s) &= C_A(s, s^{K_{A,p}}) \\ &= \exp\left\{\log s^{K_{A,p+1}} A\left(\frac{\log s}{\log s^{K_{A,p+1}}}\right)\right\} \\ &= s^{(K_{A,p+1})A\left(\frac{1}{K_{A,p+1}}\right)}. \end{aligned}$$

L'argument est le même pour $\tilde{K}_{A,p+1}$.

Bien sûr, si la fonction de dépendance est symétrique, c'est-à-dire que $A(t) = A(1-t)$ pour tous $t \in [0, 1/2]$, alors $K_{A,p} = \tilde{K}_{A,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour les cas particuliers de l'indépendance et de la dépendance positive parfaite, c'est-à-dire quand $A_{\Pi}(t) = 1$ et $A_M(t) = \max(t, 1-t)$, on montre que

$$K_{A_{\Pi},p} = \tilde{K}_{A_{\Pi},p} = p \quad \text{et} \quad K_{A_M,p} = \tilde{K}_{A_M,p} = 1.$$

Pour les lois extrêmes de Galambos, dont la fonction de dépendance est

$$A_{\theta}(t) = 1 - \{t^{-\theta} + (1-t)^{-\theta}\}^{-1/\theta}, \quad \theta \geq 0,$$

quelques calculs permettent de montrer que

$$K_{A_\theta, p+1} = K_{A_\theta, p} + 1 - K_{A_\theta, p} (K_{A_\theta, p}^\theta + 1)^{-1/\theta}.$$

Pour la distribution de Gumbel A, caractérisée par $A_\theta(t) = \theta t^2 - \theta t + 1$ pour $\theta \in [0, 1]$, on déduit que

$$K_{A_\theta, p+1} = K_{A_\theta, p} + 1 - \theta \frac{K_{A_\theta, p}}{K_{A_\theta, p} + 1}.$$

3.5.5 Copules *Archimax*

Les familles Archimédienne et à valeurs extrêmes peuvent être unifiées sous la classe générale des copules *Archimax* introduites par Capéraà et al. (2000). La forme générale d'une telle copule en fonction d'un générateur Archimédien φ et d'une fonction de dépendance extrême A est présentée à l'équation (2.7). Ces modèles ont été étudiés par Genest & Rivest (2001) et Hürlimann (2005).

Des calculs simples permettent de montrer que

$$\ell_{C_{\varphi, A, p}}(s) = \varphi^{-1} \{K_{A, p} \varphi(s)\} \quad \text{et} \quad \tilde{\ell}_{C_{\varphi, A, p}}(s) = \varphi^{-1} \{\tilde{K}_{A, p} \varphi(s)\},$$

où $K_{A, p}$ et $\tilde{K}_{A, p}$ sont les constantes définies à la Proposition 3.1. Pour la fonction de dépendance extrême de la copule de Gumbel–Hougaard, à savoir

$$A_\theta(t) = \{t^{1/(1-\theta)} + (1-t)^{1/(1-\theta)}\}^{1-\theta}, \quad \theta \in [0, 1],$$

on peut montrer que $K_{A_\theta, p} = p^{1-\theta}$. Ainsi, on obtient

$$\ell_{C_{\varphi, A_\theta, p}}(s) = \tilde{\ell}_{C_{\varphi, A_\theta, p}}(s) = \varphi^{-1} \{p^{1-\theta} \varphi(s)\}.$$

Comme autre exemple, supposons que $\varphi_\theta(t) = |\ln t|^{1/(1-\theta)}$ est le générateur de la famille de Gumbel–Hougaard. Dans ce cas, on a

$$\ell_{C_{\varphi_\theta, A, p}}(s) = s^{K_{A, p}^{1-\theta}} \quad \text{et} \quad \tilde{\ell}_{C_{\varphi_\theta, A, p}}(s) = s^{\tilde{K}_{A, p}^{1-\theta}}.$$

3.5.6 Copules de Durante

Durante (2007) a introduit une famille générale de copules symétriques qui s'écrivent sous la forme $C_\Psi(u, v) = \min(u, v) \Psi \{\max(u, v)\}$, où $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue, croissante et dérivable (sauf peut-être en un nombre fini de points), $\Psi(x)/x$ est décroissante et $\Psi(1) = 1$. Par exemple, si $\Psi(x) = x^{1-\theta}$, $\theta \in [0, 1]$, on retrouve la distribution de Cuadrès–Augé, alors que $\Psi(x) = (1 - \theta)x + \theta$ correspond à la copule de Fréchet $C_{\text{Fr}}(u, v) = (1 - \theta)uv + \theta \min(u, v)$. On montre assez facilement que les fonctions de C-puissance associées à C_Ψ sont $\tilde{\ell}_{C_\Psi, p}(s) = \ell_{C_\Psi, p}(s) = s \{\Psi(s)\}^{p-1}$.

3.5.7 Transformation de copules

Si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est strictement croissante, continue et concave telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, Klement et al. (2004) ont montré que $C_f(u, v) = f^{-1}[C\{f(u), f(v)\}]$ est une copule. On obtient $\ell_{C_f, p}(s) = f^{-1}[\ell_{C, p}\{f(s)\}]$ et $\tilde{\ell}_{C_f, p}(s) = f^{-1}[\tilde{\ell}_{C, p}\{f(s)\}]$. Par exemple, si $f(x) = x^\delta$, alors

$$C_f(u, v) = \{C(u^\delta, v^\delta)\}^{1/\delta}$$

et les fonctions de C-puissance associées sont

$$\ell_{C_f, p}(s) = \{\ell_{C, p}(s^\delta)\}^{1/\delta} \quad \text{et} \quad \tilde{\ell}_{C_f, p}(s) = \{\tilde{\ell}_{C, p}(s^\delta)\}^{1/\delta}.$$

CHAPITRE 4

MÉTHODE DELTA FONCTIONNELLE

4.1 Version classique

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R} telle qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tel que

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable dont la dérivée g' est bornée dans un voisinage de μ , alors on peut montrer que

$$\sqrt{n}\{g(X_n) - g(\mu)\} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \{g'(\mu)\}^2 \sigma^2),$$

où ici et dans la suite, \rightsquigarrow signifie *convergence en loi*, aussi appelée la *convergence faible*. Ce résultat découle d'un développement en série de Taylor d'ordre un de g autour de μ . En effet, on a de façon heuristique que

$$g(X_n) \approx g(\mu) + g'(\mu)(X_n - \mu).$$

De là,

$$\sqrt{n} \{g(X_n) - g(\mu)\} \approx g'(\mu) \sqrt{n} (X_n - \mu).$$

En fait, de façon plus rigoureuse, on peut montrer que

$$\sqrt{n} \{g(X_n) - g(\mu)\} = g'(\mu) \sqrt{n} (X_n - \mu) + o_{\mathbb{P}}(1),$$

où le terme $o_{\mathbb{P}}(1)$ représente une quantité aléatoire qui converge en probabilité vers zéro. Puisque $\sqrt{n} (X_n - \mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, une application du Lemme de Slutsky (voir Casella & Berger (1990), par exemple, pour plus de détails) permet d'obtenir le résultat annoncé. Ce résultat se généralise assez facilement au cas où $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d . Dans ce cas, en autant que

$$\sqrt{n} (\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu}) \rightsquigarrow \mathcal{N}_d(\mathbf{0}_d, \Sigma),$$

où $\mathbf{0}_d = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ et Σ est une matrice de variance-covariance définie positive, on montre que pour toute fonction dérivable $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\sqrt{n} \{g(\mathbf{X}_n) - g(\boldsymbol{\mu})\} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, g'(\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma g'(\boldsymbol{\mu})),$$

où

$$g'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} g(\mathbf{x}) \right)^\top.$$

4.2 Généralisation aux espaces vectoriels

D'un intérêt encore plus considérable que la méthode Delta *classique* est sa généralisation à des fonctionnelles définies entre deux espaces vectoriels.

Pour la décrire, soient deux espaces vectoriels normés \mathbb{D} et \mathbb{E} , de même qu'une fonctionnelle $\Phi : \mathbb{D}_\Phi \rightarrow \mathbb{E}$, où $\mathbb{D}_\Phi \subseteq \mathbb{D}$. On définit d'abord la dérivabilité au sens d'Hadamard.

Définition 4.3. *La fonctionnelle Φ est dérivable au sens d'Hadamard au point $C \in \mathbb{D}_\Phi$ s'il existe une fonctionnelle linéaire continue $\Phi'_C : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{E}$ telle que pour tout $\Delta \in \mathbb{D}$ et pour toute suite $\Delta_n \in \mathbb{D}$ et $t_n \rightarrow 0$ tel que $\Delta_n \rightarrow \Delta$ et $C + t_n \Delta_n \in \mathbb{D}_\Phi$, on a*

$$\left\| \frac{\Phi(C + t_n \Delta_n) - \Phi(C)}{t_n} - \Phi'_C(\Delta) \right\|_{\mathbb{E}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour illustrer la définition précédente, soit l'espace des fonctions càdlàg (continue à droite, limite à gauche) sur l'intervalle $[0, 1]$, noté $\mathbb{D} = D[0, 1]$, muni de la norme uniforme, c'est-à-dire

$$\|f - g\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Soit l'ensemble $\mathbb{D}_\Phi = \{f \in D[0, 1] : |f| > 0\}$ et considérons la fonctionnelle $\Phi : \mathbb{D}_\Phi \rightarrow \mathbb{E}$, où $\mathbb{E} = D[0, 1]$, définie par

$$\Phi\{f(x)\} = \frac{1}{f(x)}.$$

On remarque que pour tout $C \in \mathbb{D}_\Phi$ et $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi\{C(x) + t_n \Delta_n(x)\} - \Phi\{C(x)\}}{t_n} &= \frac{1}{t_n \{C(x) + t_n \Delta_n(x)\}} - \frac{1}{t_n C(x)} \\ &= \frac{-\Delta_n(x)}{C(x) \{C(x) + t_n \Delta_n(x)\}} \\ &\rightsquigarrow -\frac{\Delta(x)}{\{C(x)\}^2}, \end{aligned}$$

car $\Delta_n \rightarrow \Delta$ et $t_n \rightarrow 0$. Ainsi, on déduit que Φ est différentiable au sens d'Hadamard et sa dérivée au point C est

$$\Phi'_C(\Delta) = -\frac{\Delta(x)}{\{C(x)\}^2}.$$

Basée sur la définition 4.3 de dérivabilité d'Hadamard, la méthode Delta fonctionnelle peut maintenant être énoncée formellement.

Théorème 4.3. *Soit $\Psi \in \mathbb{D}_\Phi$ et (Ψ_n) , une suite d'éléments aléatoires dans \mathbb{D}_Φ . Supposons que $r_n \rightarrow \infty$ est une suite de nombres réels telle que*

$$r_n(\Psi_n - \Psi) \rightsquigarrow \mathbb{Z},$$

où \mathbb{Z} est un élément aléatoire dans $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$. Si la fonctionnelle Φ est dérivable au sens d'Hadamard au point Ψ , notée Φ'_Ψ , alors

$$r_n \{\Phi(\Psi_n) - \Phi(\Psi)\} \rightsquigarrow \Phi'_\Psi(\mathbb{Z}).$$

Démonstration. Pour tout n , la fonction

$$g_n(h) = r_n \left\{ \Phi \left(\Psi + \frac{h}{r_n} \right) - \Phi(\Psi) \right\}$$

est définie sur l'ensemble

$$\mathbb{D}_n = \left\{ h \mid \Psi + \frac{h}{r_n} \in \mathbb{D}_\Phi \right\}.$$

Ensuite, pour toute suite $h_n \in \mathbb{D}_n$ qui converge vers $h \in \mathbb{D}_0$ et par la définition 4.3 de dérivabilité d'Hadamard, on a

$$g_n(h) \rightarrow \Phi'_\Psi(h).$$

On obtient le résultat en définissant

$$h_n = r_n (\Psi_n - \Psi) \quad \text{et} \quad h = \mathbb{Z},$$

car alors on a

$$\Psi_n = \Psi + \frac{h}{r_n} \quad \text{et} \quad r_n \{\Phi(\Psi_n) - \Phi(\Psi)\} = g_n(h_n),$$

ce qui complète la preuve. \diamond

4.3 Fonction de répartition empirique

Soient des observations i.i.d. X_1, \dots, X_n de loi F . La fonction de répartition empirique est définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x).$$

Il s'agit d'un estimateur uniformément convergent pour F au sens où

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0$$

presque sûrement. Ce résultat s'appelle le Théorème de Glivenko-Cantelli.

On montre aisément que

$$\mathbb{E}\{F_n(x)\} = F(x) \quad \text{et} \quad \text{var}\{F_n(x)\} = \frac{F(x)\{1 - F(x)\}}{n}.$$

Soit maintenant le processus empirique

$$\mathbb{F}_n(x) = \sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\}.$$

Le Théorème de Donsker indique que

$$\mathbb{F}_n(x) \rightsquigarrow \mathbb{F}(x) = \mathbb{B}\{F(x)\},$$

où \mathbb{B} est un pont Brownien, c'est-à-dire un processus gaussien de moyenne nulle défini sur $[0, 1]$ tel que

$$E\{\mathbb{B}(s)\mathbb{B}(t)\} = \min(s, t) - st.$$

On entend par *processus gaussien* que pour tout $0 \leq s_1 < \dots < s_d \leq 1$, le vecteur $(\mathbb{B}(s_1), \dots, \mathbb{B}(s_d))$ est distribué selon une loi Normal d -dimensionnelle de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance Σ telle que

$$\Sigma_{k\ell} = E\{\mathbb{B}(s_k)\mathbb{B}(s_\ell)\} = \min(s_k, s_\ell) - s_k s_\ell.$$

Un cas particulier du Théorème 4.3 appliqué à la fonction de répartition empirique permet donc d'obtenir la loi limite de processus de la forme

$$\Lambda_n = \sqrt{n}\{\Phi(F_n) - \Phi(F)\},$$

en autant que Φ soit dérivable au sens d'Hadamard. Dans ce cas, on a

$$\Lambda_n \rightsquigarrow \Lambda = \Phi'_F(\mathbb{F}).$$

En général, pour trouver la dérivée d'Hadamard d'une fonctionnelle Φ , on considère la fonction

$$h(t) = \Phi(C + t\Delta),$$

où $t \in \mathbb{R}$. En général, la dérivée au point C évaluée en Δ sera donnée par

$$\Phi'_C(\Delta) = \lim_{t \rightarrow 0} h'(t).$$

Pour illustrer cette idée, soit une fonction de répartition F qui possède une densité strictement positive $f = dF$. La transformation $\Phi(F) = F^{-1}$ est différentiable au sens d'Hadamard. La démonstration de ce résultat se retrouve à la page 386 de l'ouvrage de van der Vaart & Wellner (1996a). Pour trouver la dérivée, soit

$$h(t) = (F + t\Delta)^{-1}(u).$$

De là, $(F + t\Delta)\{h(t)\} = u$, ou encore

$$F\{h(t)\} + t\Delta\{h(t)\} = u. \quad (4.1)$$

En dérivant de chaque côté de l'équation (4.1) par rapport à t , on trouve

$$f\{h(t)\}h'(t) + \Delta\{h(t)\} + t\Delta'\{h(t)\} = 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on a alors

$$f\{h(0)\}h'(0) + \Delta\{h(0)\} = 0,$$

ce qui entraîne que la dérivée d'Hadamard de Φ au point F est

$$\Phi'_F(\Delta) = h'(0) = -\frac{\Delta\{h(0)\}}{f\{h(0)\}} = -\frac{\Delta\{F^{-1}(u)\}}{f\{F^{-1}(u)\}}.$$

Définissons maintenant la fonction percentile empirique par

$$F_n^{-1}(u) = \inf\{y \in \mathbb{R} : F_n(y) \geq u\}.$$

Comme $F_n^{-1} = \Phi(F_n)$, on déduit que

$$\sqrt{n}\{F_n^{-1}(u) - F^{-1}(u)\} \rightsquigarrow \Phi'_F(\mathbb{F}) = -\frac{\mathbb{F}\{F^{-1}(u)\}}{f\{F^{-1}(u)\}} = -\frac{\mathbb{B}(u)}{f\{F^{-1}(u)\}}.$$

4.4 Autres applications

4.4.1 Fonction de répartition empirique bivariée

Soit un échantillon de paires indépendantes et identiquement distribuées $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ d'une certaine loi H . La fonction de répartition empirique conjointe de ces observations est définie par

$$H_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x, Y_i \leq y). \quad (4.2)$$

La fonction empirique H_n est estimateur sans biais de H . En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{E} \{H_n(x, y)\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x, Y_i \leq y) = H(x, y).$$

Soit maintenant le processus empirique

$$\mathbb{H}_n(x, y) = \sqrt{n} \{H_n(x, y) - H(x, y)\}.$$

Son comportement asymptotique est semblable à celui du processus \mathbb{F}_n décrit à la Section 4.3. Spécifiquement, on peut montrer que $\mathbb{H}_n \rightsquigarrow \mathbb{H}$, où \mathbb{H} est un processus gaussien centré tel que

$$\mathbb{E} \{\mathbb{H}(x_1, y_1) \times \mathbb{H}(x_2, y_2)\} = H \{\min(x_1, x_2), \min(y_1, y_2)\} - H(x_1, y_1) H(x_2, y_2).$$

Si Φ est une fonctionnelle définie sur un espace de fonctions bivariées et que Φ'_H est sa dérivée d'Hadamard au point H , alors une application de la méthode Delta fonctionnelle assure que

$$\Lambda_n = \sqrt{n} \{\Phi(H_n) - \Phi(H)\} \rightsquigarrow \Lambda = \Phi'_H(\mathbb{H}). \quad (4.3)$$

L'exemple suivant est une application du résultat 4.3 pour obtenir le comportement limite du tau de Kendall empirique.

Exemple 4.1. *Le tau de Kendall est une mesure de dépendance définie comme la différence entre les probabilités de concordance et de discordance. Pour un couple (X, Y) dont la loi conjointe est H , une représentation du tau de Kendall est*

$$\tau(H) = 4 \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y) dH(x, y) - 1.$$

Une version empirique habituellement utilisée pour estimer $\tau(H)$ est basée sur une U-statistique d'ordre deux. Une représentation asymptotiquement équivalente, et commode ici, est

$$\tau_n = 4 \int_{\mathbb{R}^2} H_n(x, y) dH_n(x, y) - 1.$$

Afin d'obtenir le comportement asymptotique de

$$\mathbb{T}_n = \sqrt{n} \{ \tau_n - \tau(H) \},$$

on remarque d'abord que $\tau(H) = \Phi(H)$ et $\tau_n = \Phi(H_n)$, où

$$\Phi(\gamma) = 4 \int_{\mathbb{R}^2} \gamma(x, y) d\gamma(x, y) - 1.$$

Ainsi, en présupposant que Φ admet une dérivée d'Hadamard Φ'_H , on aura

$$\mathbb{T}_n = \sqrt{n} \{ \Phi(H_n) - \Phi(H) \} \rightsquigarrow \Phi'_H(\mathbb{H}).$$

Pour obtenir la dérivée d'Hadamard de Φ , soit

$$\begin{aligned} h(t) &= \Phi(H + t\Delta) \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} \{H(x, y) + t\Delta(x, y)\} d\{H(x, y) + t\Delta(x, y)\} - 1. \end{aligned}$$

On montre alors que la dérivée de Φ au point H évaluée en Δ est

$$\Phi'_H(\Delta) = \lim_{t \rightarrow 0} h'(t) = 4 \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \Delta(x, y) dH(x, y) + \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y) d\Delta(x, y) \right\}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{T}_n \rightsquigarrow 4 \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{H}(x, y) dH(x, y) + \int_{\mathbb{R}^2} H(x, y) d\mathbb{H}(x, y) \right\}.$$

4.4.2 Copule empirique

Soit un couple (X, Y) de loi H dont les marges F et G sont continues. Alors on sait de l'équation (2.2) qu'il existe une unique copule C telle que

$$C(u, v) = H \{ F^{-1}(u), G^{-1}(v) \}.$$

Un estimateur de C consiste à remplacer H , F et G par les estimateurs H_n , F_n et G_n , où H_n est défini à l'équation (4.2), alors que

$$F_n(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} H_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x)$$

et

$$G_n(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} H_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Y_i \leq y)$$

sont les fonctions de répartition empiriques marginales. Ainsi, on peut estimer C via la copule empirique

$$C_n(u, v) = H_n \{ F_n^{-1}(u), G_n^{-1}(v) \}.$$

Comme $F_n(x) = H_n(x, \infty)$ et $G_n(y) = H_n(\infty, y)$, on a $C_n = \Phi(H_n)$, où

$$\Phi(\gamma) = \gamma \{ \gamma_x^{-1}(u), \gamma_y^{-1}(v) \},$$

où $\gamma_x = \gamma(x, \infty)$ et $\gamma_y = \gamma(\infty, y)$. Soit maintenant

$$h(t) = (H + t\Delta) \left\{ (H_x + t\Delta_x)^{-1}(u), (H_y + t\Delta_y)^{-1}(v) \right\}.$$

La dérivée de Φ au point H évaluée en Δ est

$$\begin{aligned} \Phi'_H(\Delta) = h'(0) &= \Delta \{H_x^{-1}(u), H_y^{-1}(v)\} \\ &+ H_{10} \{H_x^{-1}(u), H_y^{-1}(v)\} \left. \frac{d}{dt} (H_x + t\Delta_x)^{-1}(u) \right|_{t=0} \\ &+ H_{01} \{H_x^{-1}(u), H_y^{-1}(v)\} \left. \frac{d}{dt} (H_y + t\Delta_y)^{-1}(v) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Après quelques calculs, on obtient

$$\left. \frac{d}{dt} (H_x + t\Delta_x)^{-1}(u) \right|_{t=0} = -\frac{\Delta_x \{H_x^{-1}(u), \infty\}}{h_x \{H_x^{-1}(u)\}}$$

et

$$\left. \frac{d}{dt} \{H_y + t\Delta_y\}^{-1}(v) \right|_{t=0} = -\frac{\Delta_y \{\infty, H_y^{-1}(v)\}}{h_y \{H_y^{-1}(v)\}}.$$

Une application directe du Théorème (4.3) amène alors

$$\mathbb{C}_n(u, v) = \sqrt{n} \{ \Phi(H_n) - \Phi(H) \} \rightsquigarrow \Phi'_H(\mathbb{H}).$$

On peut ensuite montrer que $\Phi'_H(\mathbb{H}) = \mathbb{C}(u, v)$, où

$$\mathbb{C}(u, v) = \mathbb{D}(u, v) - C_{01}(u, v) \mathbb{D}(u, 1) - C_{10}(u, v) \mathbb{D}(1, v)$$

et \mathbb{D} est la limite du processus empirique

$$\mathbb{D}_n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \{ (F(X_i) \leq u, G(Y_i) \leq v) - C(u, v) \}.$$

4.4.3 Processus de Kendall

Soit K_n , l'estimateur non-paramétrique de la transformation intégrale de probabilité K_C décrit à l'Annexe A. La convergence du processus de Kendall

$$\mathbb{K}_n(t) = \sqrt{n} \{K_n(t) - K_C(t)\}$$

a été étudiée par Barbe et al. (1996). Ils ont montré que $\mathbb{K}_n \rightsquigarrow \mathbb{K}$, où \mathbb{K} est une limite gaussienne centrée dont la structure de covariance a une forme compliquée en général. Ici, deux applications de la méthode Delta fonctionnelle basées sur K_n seront détaillées, à savoir l'estimation du tau de Kendall et l'estimation du générateur d'une copule Archimédienne.

Exemple 4.2. *Le tau de Kendall d'une copule C peut se représenter par*

$$\tau(C) = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt.$$

De même, le tau de Kendall empirique s'écrit

$$\tau_n = 3 - 4 \int_0^1 K_n(t) dt.$$

Ainsi, si pose

$$\Phi(\gamma) = 3 - 4 \int_0^1 \gamma(t) dt,$$

alors

$$\mathbb{T}_n = \sqrt{n} \{\tau_n - \tau(C)\} = \sqrt{n} \{\Phi(K_n) - \Phi(K_C)\}.$$

Par la méthode Delta fonctionnelle, on aura $\mathbb{T}_n \rightsquigarrow \Phi'_{K_C}(\mathbb{K})$, où

$$\Phi'_{K_C}(\Delta) = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(K_C + t \Delta) = -4 \int_0^1 \Delta(t) dt.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{T}_n \rightsquigarrow \mathbb{T} = -4 \int_0^1 \mathbb{K}(t) dt.$$

Exemple 4.3. L'estimateur φ_n du générateur d'une copule Archimédienne décrit à l'Annexe A.1 est tel que

$$\ln \varphi_n(w) = \int_{w_0}^w \frac{ds}{s - K_n(s)}.$$

Il s'agit d'un estimateur de φ qui satisfait

$$\ln \varphi(w) = \int_{w_0}^w \frac{ds}{s - K_C(s)}.$$

En définissant

$$\Phi(\gamma) = \int_{w_0}^w \frac{ds}{s - \gamma(s)},$$

on peut écrire $\Psi_n(w) = \sqrt{n}\{\ln \varphi_n(w) - \ln \varphi(w)\} = \sqrt{n}\{\Phi(K_n) - \Phi(K_C)\}$.

Pour trouver la dérivée d'Hadamard de Φ , on définit

$$h(t) = \Phi(\gamma + t\Delta) = \int_{w_0}^w \frac{ds}{s - \gamma(s) - t\Delta(s)}.$$

Ensuite, on montre que

$$\Phi'_\gamma(\Delta) = h'(0) = \int_{w_0}^w \frac{\Delta(s) ds}{\{s - \gamma(s)\}^2},$$

ce qui fait que

$$\Psi_n(w) \rightsquigarrow \Psi(w) = \int_{w_0}^w \frac{\mathbb{K}(s) ds}{\{s - K_C(s)\}^2}.$$

Enfin, par la méthode Delta classique,

$$\begin{aligned} \Lambda_n(w) &= \sqrt{n}\{\varphi_n(w) - \varphi(w)\} \\ &= \sqrt{n}\{e^{\ln \varphi_n(w)} - e^{\ln \varphi(w)}\} \\ &\approx e^{\ln \varphi(w)} \sqrt{n}\{\ln \varphi_n(w) - \ln \varphi(w)\} \\ &= \varphi(w) \Psi_n(w). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\Lambda_n(w) \rightsquigarrow \Lambda(w) = \varphi(w) \int_{w_0}^w \frac{\mathbb{K}(s) ds}{\{s - K_C(s)\}^2}.$$

CHAPITRE 5

EMPIRICAL C-POWER PROCESSES AND THEIR USE FOR PARAMETER ESTIMATION AND GOODNESS-OF-FIT IN COPULA MODELS

5.1 Estimation of the C-power functions

Let $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ be independent copies of $(X, Y) \sim H$, where H has continuous margins F and G . The aim of this section is to provide uniformly consistent estimators of the C-power functions and establish their weak convergence. The first step is to rely on the consistent estimation of the unique copula C of H via the empirical copula

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(U_{i,n} \leq u, V_{i,n} \leq v),$$

where $U_{i,n} = F_n(X_i)$ and $V_{i,n} = G_n(Y_i)$, with

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x) \quad \text{and} \quad G_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Y_i \leq y).$$

The bivariate function C_n , which is not a copula, is the empirical distribution of the normalized ranks, since $U_{i,n} = \text{rank}(X_i)/n$ and $V_{i,n} = \text{rank}(Y_i)/n$. The rationale for this definition of C_n is that $C(u, v) = H\{F^{-1}(u), G^{-1}(v)\}$, from which a plug-in estimator can be defined as $C'_n(u, v) = H_n\{F_n^{-1}(u), G_n^{-1}(v)\}$, where H_n is the joint empirical distribution. It can be shown that $\|C_n - C'_n\|_\infty \leq 2/n$, so that the two versions are asymptotically equivalent.

From equation (3.1), plug-in estimators of the C-power functions can be defined recursively via $\ell_{n,1}(s) = \tilde{\ell}_{n,1}(s) = s$ and for $p \geq 1$,

$$\ell_{n,p+1}(s) = C_n\{s, \ell_{n,p}(s)\} \quad \text{and} \quad \tilde{\ell}_{n,p+1}(s) = C_n\{\tilde{\ell}_{n,p}(s), s\}.$$

Remarque 5.1. *The empirical C-power functions are computed easily by exploiting their recursive nature. First note that they are constant on the intervals $[(i-1)/n, i/n)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, i.e.*

$$\ell_{n,p}(s) = \ell_{n,p}\left(\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}\right) \quad \text{and} \quad \tilde{\ell}_{n,p}(s) = \tilde{\ell}_{n,p}\left(\frac{\lfloor ns \rfloor}{n}\right).$$

Then, define the matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ such that

$$A_{ij} = C_n\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right), \quad i, j \in \{1, \dots, n+1\},$$

and the matrices B and \tilde{B} whose elements are

$$B_{pi} = \ell_{n,p}\left(\frac{i-1}{n}\right) \quad \text{and} \quad \tilde{B}_{pi} = \tilde{\ell}_{n,p}\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Then,

$$B_{2i} = \ell_{n,2}\left(\frac{i-1}{n}\right) = C_n\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i-1}{n}\right) = A_{ii},$$

and similarly, $\tilde{B}_{2i} = A_{ii}$. Then, for $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} B_{p+1,i} = \ell_{n,p+1} \left(\frac{i-1}{n} \right) &= C_n \left\{ \frac{i-1}{n}, \ell_{n,p} \left(\frac{i-1}{n} \right) \right\} \\ &= C_n \left(\frac{i-1}{n}, B_{pi} \right) \\ &= A_{ij}, \end{aligned}$$

where $j = nB_{pi} + 1$. Similarly, $\tilde{B}_{p+1,i} = A_{ji}$, where $j = n\tilde{B}_{pi} + 1$.

For statistical applications, it is useful to study the asymptotic behavior of the empirical C-power processes

$$\mathbb{L}_{n,p}(s) = \sqrt{n} \{ \ell_{n,p}(s) - \ell_{C,p}(s) \} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbb{L}}_{n,p}(s) = \sqrt{n} \{ \tilde{\ell}_{n,p}(s) - \tilde{\ell}_{C,p}(s) \},$$

where $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. To this end, let $\ell^\infty(S)$ be the space of bounded functions on S and note that $\ell_{C,p}(s) = \Phi^p(C)$, $\tilde{\ell}_{C,p}(s) = \tilde{\Phi}^p(C)$, where the functionals $\Phi^p : \ell^\infty([0, 1]^2) \rightarrow \ell^\infty([0, 1])$, $\tilde{\Phi}^p : \ell^\infty([0, 1]^2) \rightarrow \ell^\infty([0, 1])$ are defined by $\Phi^1(C) = \tilde{\Phi}^1(C) = s$ and for $p \geq 1$,

$$\Phi^{p+1}(C) = C \{ s, \Phi^p(C) \} \quad \text{and} \quad \tilde{\Phi}^{p+1}(C) = C \{ \tilde{\Phi}^p(C), s \}.$$

This notation hides the fact that Φ^p and $\tilde{\Phi}^p$ depend on an additional argument s , but will nevertheless be adopted in the sequel for the sake of simplicity.

One can then write

$$\mathbb{L}_{n,p}(s) = \sqrt{n} \{ \Phi^p(C_n) - \Phi^p(C) \} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbb{L}}_{n,p}(s) = \sqrt{n} \{ \tilde{\Phi}^p(C_n) - \tilde{\Phi}^p(C) \}.$$

The weak convergence of $\mathbb{L}_{n,p}$ and $\tilde{\mathbb{L}}_{n,p}$ will follow from the Hadamard differentiability of Φ^p and $\tilde{\Phi}^p$ for any $p \in \mathbb{N}$, and from the weak convergence

of \mathbb{C}_n . In order to characterize the asymptotic behavior of \mathbb{C}_n , consider for each $(u, v) \in [0, 1]^2$ the process

$$\mathbb{C}(u, v) = \mathbb{B}_C(u, v) - C_{10}(u, v) \mathbb{B}_C(u, 1) - C_{01}(u, v) \mathbb{B}_C(1, v), \quad (5.1)$$

where \mathbb{B}_C is a tight and centered Gaussian process on $[0, 1]^2$ with

$$E \{ \mathbb{B}_C(u_1, v_1) \mathbb{B}_C(u_2, v_2) \} = C(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2) - C(u_1, v_1) C(u_2, v_2).$$

Following Segers (2012), C_{10} and C_{01} are the partial derivatives of C at (u, v) defined by

$$C_{10}(u, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(u+h, v) - C(u, v)}{h}, \quad (u, v) \in (0, 1) \times [0, 1],$$

$$C_{01}(u, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(u, v+h) - C(u, v)}{h}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times (0, 1).$$

The following assumption is necessary in order to obtain the weak convergence of \mathbb{C}_n ; it is also necessary for the validity of its multiplier versions described in Section 5.2. It is shown by Segers (2012) that the assumption holds for several models, including many Archimedean and extreme-value copulas.

Assumption 1. *The partial derivatives C_{10} and C_{01} exist and are continuous, respectively, on the sets $\{(u, v) \in [0, 1]^2 : 0 < u < 1\}$ and $\{(u, v) \in [0, 1]^2 : 0 < v < 1\}$.*

Assuming that Assumption 1 holds, Segers (2012) extended the domain of

C_{10} and C_{01} to $[0, 1]^2$ by defining

$$C_{10}(u, v) = \begin{cases} \limsup_{h \downarrow 0} \frac{C(h, v)}{h}, & \text{if } u = 0; \\ \limsup_{h \downarrow 0} \frac{v - C(1 - h, v)}{h}, & \text{if } u = 1, \end{cases}$$

and similarly for C_{01} . In this way, \mathbb{C} has continuous trajectories on the whole of $[0, 1]^2$. Then, $\mathbb{C}_n \rightsquigarrow \mathbb{C}$ in the space $\ell^\infty([0, 1]^2)$ equipped with the topology of uniform convergence; here and in the sequel, \rightsquigarrow means *convergence in distribution*.

It turns out that Φ^p and $\tilde{\Phi}^p$ admit Hadamard derivatives at C , noted respectively $(\Phi^p)'_C$ and $(\tilde{\Phi}^p)'_C$; this is formally stated in the next Theorem. An application of the functional Delta method then yields $\mathbb{L}_{n,p} \rightsquigarrow \mathbb{L}_p = (\Phi^p)'_C(\mathbb{C})$ and $\tilde{\mathbb{L}}_{n,p} \rightsquigarrow \tilde{\mathbb{L}}_p = (\tilde{\Phi}^p)'_C(\mathbb{C})$; the result is stated separately in Proposition 5.1.

Theorem 5.1. *Let C be a copula that satisfies Assumption 1 and consider the space $\mathcal{D}([0, 1]^2) \subset \ell^\infty([0, 1]^2)$ of continuous functions w such that $w(s_1, s_2)$ vanishes for those (s_1, s_2) such that $s_1 \in \{0, 1\}$, $s_2 \in \{0, 1\}$, or $C(s_1, s_2) = 0$. Then the functionals $(\Phi^p(C))_{p \geq 2}$ and $(\tilde{\Phi}^p(C))_{p \geq 2}$ are Hadamard differentiable tangentially to $\mathcal{D}([0, 1]^2)$ with derivatives at C given respectively by $(\Phi^p)'_C(\Delta)_{p \geq 2}$ and $(\tilde{\Phi}^p)'_C(\Delta)_{p \geq 2}$ such that*

$$(\Phi^2)'_C(\Delta) = (\tilde{\Phi}^2)'_C(\Delta) = \Delta(s, s)$$

and for $p \geq 2$,

$$(\Phi^{p+1})'_C(\Delta) = \Delta \{s, \ell_{C,p}(s)\} + C_{01} \{s, \ell_{C,p}(s)\} (\Phi^p)'_C(\Delta), \quad (5.2)$$

$$(\tilde{\Phi}^{p+1})'_C(\Delta) = \Delta \{\tilde{\ell}_{C,p}(s), s\} + C_{10} \{\tilde{\ell}_{C,p}(s), s\} (\tilde{\Phi}^p)'_C(\Delta). \quad (5.3)$$

Proof. Consider a sequence of real numbers $(t_n)_{n \geq 1}$ such that $t_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ and a sequence $\Delta_n \in \ell^\infty([0, 1]^2)$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(s_1, s_2) \in [0, 1]^2} |\Delta_n(s_1, s_2) - \Delta(s_1, s_2)| = 0, \quad (5.4)$$

where $\Delta \in \mathcal{D}([0, 1]^2)$. The proof that $\Phi^p : \ell^\infty([0, 1]^2) \rightarrow \ell^\infty([0, 1])$ is Hadamard differentiable with respect to the sup norm will proceed recursively. First, Φ^2 is Hadamard differentiable with derivative at C given by $(\Phi^2)'_C(\Delta) = \Delta(s, s)$ since as $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, 1]} \left| \frac{\Phi^2(C + t_n \Delta_n) - \Phi^2(C)}{t_n} - (\Phi^2)'_C(\Delta) \right| \\ = \sup_{s \in [0, 1]} |\Delta_n(s, s) - \Delta(s, s)| \\ \leq \sup_{(s_1, s_2) \in [0, 1]^2} |\Delta_n(s_1, s_2) - \Delta(s_1, s_2)| \\ \rightarrow 0, \end{aligned}$$

using (5.4). Now for a given $p \in \mathbb{N}$, assume that $(\Phi^p)'_C(\Delta)$ is the Hadamard derivative of $\Phi^p(C)$ at C . Then,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{p+1}(C + t_n \Delta_n) - \Phi^{p+1}(C)}{t_n} \\ = \Delta_n \{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\} \\ + \frac{C \{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\} - C \{s, \Phi^p(C)\}}{t_n}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

For the first term on the righthand side of equation (5.5), note that since Δ_n converges uniformly to Δ , one has $t_n \Delta_n \rightarrow 0$ and then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, 1]} |\Delta_n \{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\} - \Delta \{s, \Phi^p(C)\}| = 0.$$

For the second term on the righthand side of equation (5.5), the mean value Theorem ensures that there exists a real number $\Phi_{n,s}$ between $\Phi^p(C)$ and $\Phi^p(C + t_n \Delta_n)$ such that

$$\begin{aligned} & \frac{C \{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\} - C \{s, \Phi^p(C)\}}{t_n} \\ &= C_{01}(s, \Phi_{n,s}) \left\{ \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right\}. \end{aligned}$$

In view of equation (5.2), it remains to show that

$$\sup_{s \in [0,1]} \left| C_{01}(s, \Phi_{n,s}) \left\{ \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right\} - C_{01}\{s, \Phi^p(C)\} (\Phi^p)'_C(\Delta) \right|$$

tends to zero as $n \rightarrow \infty$. First, one has

$$\begin{aligned} & \left| C_{01}(s, \Phi_{n,s}) \left\{ \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right\} - C_{01}\{s, \Phi^p(C)\} (\Phi^p)'_C(\Delta) \right| \\ & \leq \left| \{C_{01}(s, \Phi_{n,s}) - C_{01}(s, \Phi^p(C))\} \left\{ \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right\} \right| \\ & \quad + \left| C_{01}\{s, \Phi^p(C)\} \left\{ \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} - (\Phi^p)'_C(\Delta) \right\} \right|. \quad (5.6) \end{aligned}$$

For the second term on the righthand side of (5.6), the fact that C_{01} is uniformly bounded by 1 entails

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0,1]} \left| C_{01}\{s, \Phi^p(C)\} \left\{ \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} - (\Phi^p)'_C(\Delta) \right\} \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0,1]} |C_{01}\{s, \Phi^p(C)\}| \sup_{s \in [0,1]} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} - (\Phi^p)'_C(\Delta) \right| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0,1]} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} - (\Phi^p)'_C(\Delta) \right| \\ & = 0, \end{aligned}$$

where the last equality follows from the assumed Hadamard differentiability of $\Phi^p(C)$. To show that the first term on the righthand side of (5.6) converges

to zero is more tricky. To this end, let $A_{\delta,p} = \{s : \ell_{C,p}(s) \in [\delta, 1 - \delta]\}$ and $A'_{\delta,p} = [0, 1] \setminus A_{\delta,p}$ for some arbitrarily small $\delta \in (0, 1/2)$, and write

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in [0,1]} \left| \{C_{01}(s, \Phi_{n,s}) - C_{01}(s, \Phi^p(C))\} \left\{ \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right\} \right| \\ & \leq \sup_{s \in A_{\delta,p}} |C_{01}(s, \Phi_{n,s}) - C_{01}(s, \Phi^p(C))| \sup_{s \in A_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right| \\ & + \sup_{s \in A'_{\delta,p}} |C_{01}(s, \Phi_{n,s}) - C_{01}(s, \Phi^p(C))| \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right| \end{aligned} \quad (5.7)$$

Since for $s \in A_{\delta,p}$, $\Phi_{n,s} \rightarrow \Phi^p(C) = \ell_{C,p}(s) \in [\delta, 1 - \delta]$, Assumption 1 ensures that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A_{\delta,p}} |C_{01}(s, \Phi_{n,s}) - C_{01}(s, \Phi^p(C))| = 0.$$

so that the first summand on the righthand side of (5.7) tends to 0 as $n \rightarrow \infty$.

For the second summand on the righthand side of equation (5.7), one uses the fact that $C_{01} \in [0, 1]$ to write

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in A'_{\delta,p}} |C_{01}(s, \Phi_{n,s}) - C_{01}(s, \Phi^p(C))| \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right| \\ & \leq \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right|. \end{aligned}$$

It remains to show that for any $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right| < \epsilon. \quad (5.8)$$

The proof will proceed recursively; for $p = 2$, one has

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,2}} \left| \frac{\Phi^2(C + t_n \Delta_n) - \Phi^2(C)}{t_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,2}} |\Delta_n(s, s)|.$$

Since $\Delta_n \rightarrow \Delta$ uniformly on $[0, 1]^2$ and $\Delta(s, s) = 0$ on the set $A'_{0,2} = \{0, 1\}$, one can find a $\delta > 0$ such that for any $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,2}} |\Delta_n(s, s)| < \epsilon$, invoking the continuity of Δ . Next, if (5.8) holds for a given $p \in \mathbb{N}$, then

$$\begin{aligned}
& \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^{p+1}(C + t_n \Delta_n) - \Phi^{p+1}(C)}{t_n} \right| \\
& \leq \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{C\{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\} - C\{s, \Phi^p(C)\}}{t_n} \right| \\
& \quad + \sup_{s \in A'_{\delta,p}} |\Delta_n\{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\}|. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

For the second term on the righthand side of (5.9), note that $\Phi^p(C + t_n \Delta_n) \rightarrow \Phi^p(C) = \ell_{C,p}(s)$. The fact that $s \in A'_{\delta,p}$ ensures that $\ell_{C,p}(s) \in [0, \delta) \cup (1 - \delta, 1]$.

Hence,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,p}} |\Delta_n\{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s_1 \in A'_{\delta,p}, s_2 \in A'_{\delta,p}} |\Delta_n(s_1, s_2)|.$$

Since $\Delta_n \rightarrow \Delta$ uniformly on $[0, 1]^2$ and $\Delta(s_1, s_2) = 0$ on the set $A'_{0,p} \times A'_{0,p}$, the continuity of Δ enables to find a $\delta > 0$ such that for any $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s_1 \in A'_{\delta,p}, s_2 \in A'_{\delta,p}} |\Delta_n(s_1, s_2)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

This quantity can then be made arbitrarily small. For the first term on the righthand side of equation (5.9), the fact that C is Lipschitz entails

$$\left| \frac{C\{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\} - C\{s, \Phi^p(C)\}}{t_n} \right| \leq \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right|.$$

Since (5.8) is assumed to hold, one can find $\delta > 0$ for any $\epsilon > 0$ such that

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{C\{s, \Phi^p(C + t_n \Delta_n)\} - C\{s, \Phi^p(C)\}}{t_n} \right| \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^p(C + t_n \Delta_n) - \Phi^p(C)}{t_n} \right| \\
& < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Thus, for any $\epsilon > 0$, one can find $\delta > 0$ such that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \frac{\Phi^{p+1}(C + t_n \Delta_n) - \Phi^{p+1}(C)}{t_n} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

which completes the proof on the Hadamard differentiability of Φ^p . The Hadamard differentiability of $\tilde{\Phi}^p$ is established similarly. \diamond

The statistical consequence of Theorem 5.1 is now stated.

Proposition 5.1. *If Assumption 1 holds, one has for any fixed $p \geq 2$ that*

$$\mathbb{L}_{n,p} \rightsquigarrow \mathbb{L}_p = (\Phi^p)'_C(\mathbb{C}) \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbb{L}}_{n,p} \rightsquigarrow \tilde{\mathbb{L}}_p = (\tilde{\Phi}^p)'_C(\mathbb{C}),$$

where \mathbb{C} is the limit of the empirical copula process defined in (5.1). Moreover, for any $K \geq 2$, $(\mathbb{L}_{n,2}, \dots, \mathbb{L}_{n,K}) \rightsquigarrow (\mathbb{L}_2, \dots, \mathbb{L}_K)$.

Proof. First, the conclusion of Theorem 5.1 combined with the functional Delta method described for example in van der Vaart & Wellner (1996b) yields

$$\mathbb{L}_{n,p} \rightsquigarrow (\Phi^p)'_C(\mathbb{C}) \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbb{L}}_{n,p} \rightsquigarrow (\tilde{\Phi}^p)'_C(\mathbb{C})$$

for any $p \geq 2$. A multidimensional version of the functional Delta method also implies that for any $K \geq 2$, $(\mathbb{L}_{n,2}, \dots, \mathbb{L}_{n,K}) \rightsquigarrow (\mathbb{L}_2, \dots, \mathbb{L}_K)$. \diamond

From equations (5.2)–(5.3), one can deduce that

$$\begin{aligned} (\Phi^p)'_C(\Delta) &= \sum_{j=1}^{p-1} \Delta \{s, \ell_{C,j}(s)\} \prod_{k=j+1}^{p-1} C_{01} \{s, \ell_{C,k}(s)\}, \\ (\tilde{\Phi}^p)'_C(\Delta) &= \sum_{j=1}^{p-1} \Delta \{\tilde{\ell}_{C,j}(s), s\} \prod_{k=j+1}^{p-1} C_{10} \{\tilde{\ell}_{C,k}(s), s\}, \end{aligned}$$

where products from $k = p$ to $k = p - 1$ are conventionally set to 1. As a special case, suppose $C_{\Pi}(u, v) = uv$ is the independence copula; it was shown in Section 2 that $\ell_{C_{\Pi}, p}(s) = \tilde{\ell}_{C_{\Pi}, p}(s) = s^p$. Since $C_{\Pi, 01}(u, v) = u$ and $C_{\Pi, 10}(u, v) = v$, one has

$$(\Phi^p)'_{C_{\Pi}}(\Delta) = \sum_{j=1}^{p-1} s^{p-1-j} \Delta(s, s^j) \quad \text{and} \quad (\tilde{\Phi}^p)'_{C_{\Pi}}(\Delta) = \sum_{j=1}^{p-1} s^{p-1-j} \Delta(s^j, s).$$

5.2 A multiplier central limit Theorem

Since the limits \mathbb{L}_p and $\tilde{\mathbb{L}}_p$ depend on C , it could be desired to obtain independent copies of these processes without any specification about the dependence structure. It is necessary, for example, when testing for bivariate extreme-value dependence (see Kojadinovic & Yan (2010) and Quessy (2012)) and symmetry of copulas (see Genest et al. (2012)). The strategy adopted by these authors is to rely on *multiplier* versions $\mathbb{C}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{C}_n^{(M)}$ of \mathbb{C}_n such that

$$(\mathbb{C}_n, \mathbb{C}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{C}_n^{(M)}) \rightsquigarrow (\mathbb{C}, \mathbb{C}^{(1)}, \dots, \mathbb{C}^{(M)}), \quad (5.10)$$

where $\mathbb{C}^{(1)}, \dots, \mathbb{C}^{(M)}$ are independent copies of the limit \mathbb{C} of \mathbb{C}_n described in equation (5.1). To be specific, consider the independent random vectors

$$(g_1^{(1)}, \dots, g_n^{(1)}), \dots, (g_1^{(M)}, \dots, g_n^{(M)}),$$

where for each $h \in \{1, \dots, M\}$, $g_1^{(h)}, \dots, g_n^{(h)}$ are independent and such that

$$\mathbb{E}(g_i^{(h)}) = \text{var}(g_i^{(h)}) = 1 \quad \text{and} \quad \int_0^{\infty} \sqrt{\mathbb{P}(g_i^{(h)} > x)} \, dx < \infty.$$

Then, define $\xi_i^{(h)} = g_i^{(h)} / \bar{g}^{(h)} - 1$, where $\bar{g}^{(h)} = \sum_{i=1}^n g_i^{(h)} / n$, and let

$$\mathbb{C}_n^{(h)}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(h)} P_i(u, v),$$

where

$$P_i(u, v) = \mathbb{I}(U_{i,n} \leq u, V_{i,n} \leq v) - \widehat{C}_{10}(u, v) \mathbb{I}(U_{i,n} \leq u) - \widehat{C}_{01}(u, v) \mathbb{I}(V_{i,n} \leq v).$$

Note that this version of the multiplier method with the weights $\xi_i^{(h)}$ is called the Bayesian bootstrap in Kosorok (2008). Here, \widehat{C}_{10} and \widehat{C}_{01} satisfy the following assumption.

Assumption 2. For any $\delta \in (0, 1/2)$,

$$\sup_{u \in [\delta, 1-\delta], v \in [0, 1]} \left| \widehat{C}_{10}(u, v) - C_{10}(u, v) \right| \quad \text{and} \quad \sup_{u \in [0, 1], v \in [\delta, 1-\delta]} \left| \widehat{C}_{01}(u, v) - C_{01}(u, v) \right|$$

converge in probability to zero.

Under Assumptions 1–2, Segers (2012) obtained that the convergence result in (5.10) holds. Now it will be shown that valid multiplier versions of $\mathbb{L}_{n,p}$ and $\widetilde{\mathbb{L}}_{n,p}$ are given respectively, for $h \in \{1, \dots, M\}$, by

$$\mathbb{L}_{n,p}^{(h)} = (\Phi^p)'_{C_n} (\mathbb{C}_n^{(h)}) \quad \text{and} \quad \widetilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(h)} = (\widetilde{\Phi}^p)'_{C_n} (\mathbb{C}_n^{(h)}),$$

where, according to equations (5.2) and (5.3),

$$(\Phi^2)'_{C_n} (\Delta) = (\widetilde{\Phi}^2)'_{C_n} (\Delta) = \Delta(s, s)$$

and for $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} (\Phi^{p+1})'_{C_n} (\Delta) &= \Delta \{s, \ell_{n,p}(s)\} + \widehat{C}_{01} \{s, \ell_{n,p}(s)\} (\Phi^p)'_{C_n} (\Delta), \\ (\widetilde{\Phi}^{p+1})'_{C_n} (\Delta) &= \Delta \{\widetilde{\ell}_{n,p}(s), s\} + \widehat{C}_{10} \{\widetilde{\ell}_{n,p}(s), s\} (\widetilde{\Phi}^p)'_{C_n} (\Delta). \end{aligned}$$

Theorem 5.2. *If Assumptions 1–2 hold, one has for all $p \geq 2$ that*

$$(\mathbb{L}_{n,p}, \mathbb{L}_{n,p}^{(1)}, \dots, \mathbb{L}_{n,p}^{(M)}) \rightsquigarrow (\mathbb{L}_p, \mathbb{L}_p^{(1)}, \dots, \mathbb{L}_p^{(M)})$$

and

$$(\tilde{\mathbb{L}}_{n,p}, \tilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(M)}) \rightsquigarrow (\tilde{\mathbb{L}}_p, \tilde{\mathbb{L}}_p^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbb{L}}_p^{(M)})$$

in the space $(\ell^\infty([0, 1]))^{(M+1)}$, where $\mathbb{L}^{(1)}, \dots, \mathbb{L}^{(M)}$ are independent copies of \mathbb{L}_p and $\tilde{\mathbb{L}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbb{L}}^{(M)}$ are independent copies of $\tilde{\mathbb{L}}_p$.

The proof of Theorem 5.2 relies mainly on the following lemma.

Lemma 5.1. *If Assumption 1 holds, then for all $p \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{s \in [0,1]} |(\Phi^p)'_{C_n}(\Delta) - (\Phi^p)'_C(\Delta)| \text{ and } \sup_{s \in [0,1]} \left| (\tilde{\Phi}^p)'_{C_n}(\Delta) - (\tilde{\Phi}^p)'_C(\Delta) \right| \quad (5.11)$$

converge to zero in probability.

Proof. The proof will only be detailed for $(\Phi^p)'_{C_n}(\Delta)$, since the proof for $(\tilde{\Phi}^p)'_{C_n}(\Delta)$ is similar. For $p = 2$, (5.11) is true since $(\Phi^2)'_C(\Delta) = \Delta$, whatever C . Now suppose equation (5.11) is true for some $p \in \mathbb{N}$. Then,

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in [0,1]} \left| (\Phi^{p+1})'_{C_n}(\Delta) - (\Phi^{p+1})'_C(\Delta) \right| \\ &= \sup_{s \in [0,1]} \left| \Delta \{s, \Phi^p(C_n)\} - \Delta \{s, \Phi^p(C)\} \right. \\ & \quad \left. + \hat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} (\Phi^p)'_{C_n}(\Delta) - C_{01} \{s, \Phi^p(C)\} (\Phi^p)'_C(\Delta) \right| \\ &\leq \xi_{n1} + \xi_{n2} + \xi_{n3}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\xi_{n1} &= \sup_{s \in [0,1]} |\Delta \{s, \Phi^p(C_n)\} - \Delta \{s, \Phi^p(C)\}|, \\ \xi_{n2} &= \sup_{s \in [0,1]} \left| \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} \{(\Phi^p)'_{C_n}(\Delta) - (\Phi^p)'_C(\Delta)\} \right|, \\ \xi_{n3} &= \sup_{s \in [0,1]} \left| (\Phi^p)'_C(\Delta) \left\{ \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C)\} \right\} \right|.\end{aligned}$$

Since $\Phi^p(C_n) \rightarrow \Phi^p(C)$ and Δ is uniformly continuous on $[0, 1]^2$, it is clear that ξ_{n1} converges to zero in probability. Next, since \widehat{C}_{01} is uniformly bounded by 1,

$$\begin{aligned}\xi_{n2} &\leq \sup_{s \in [0,1]} \left| \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} \right| \sup_{s \in [0,1]} |(\Phi^p)'_{C_n}(\Delta) - (\Phi^p)'_C(\Delta)| \\ &\leq \sup_{s \in [0,1]} |(\Phi^p)'_{C_n}(\Delta) - (\Phi^p)'_C(\Delta)|.\end{aligned}$$

By the induction assumption, this last term converges to zero in probability; hence $\xi_{n2} \rightarrow 0$ in probability. For ξ_{n3} , note that

$$\begin{aligned}\xi_{n3} &\leq \sup_{s \in A_{\delta,p}} |(\Phi^p)'_C(\Delta)| \sup_{s \in A_{\delta,p}} \left| \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C)\} \right| \\ &\quad + \sup_{s \in A'_{\delta,p}} |(\Phi^p)'_C(\Delta)| \sup_{s \in A'_{\delta,p}} \left| \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C)\} \right| \quad (5.12)\end{aligned}$$

The first summand on the righthand side of (5.12) is bounded above by

$$\begin{aligned}K \sup_{s \in A_{\delta,p}} \left| \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} \right| \\ + K \sup_{s \in A_{\delta,p}} |C_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C)\}|,\end{aligned}$$

where $K = \sup_{s \in A_{\delta,p}} |(\Phi^p)'_C(\Delta)| < \infty$. The fact that $\Phi^p(C_n) \rightarrow \Phi^p(C) \in [\delta, 1 - \delta]$ when $s \in A_{\delta,p}$ ensures that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A_{\delta,p}} \left| \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} \right| = 0,$$

in view of Assumption 2, while

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in A_{\delta,p}} |C_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C)\}| = 0,$$

because of Assumption 1. The second summand on the righthand side of (5.12) can be bounded above by

$$\sup_{s \in A'_{\delta,p}} |(\Phi^p)'_C(\Delta)|$$

since

$$\left| \widehat{C}_{01} \{s, \Phi^p(C_n)\} - C_{01} \{s, \Phi^p(C)\} \right| \leq 1.$$

In view of the expression of $(\Phi^p)'_C(\Delta)$ and the fact that Δ is continuous and vanishes on the set $A_{0,p}$, there exists a $\delta > 0$ for any $\epsilon > 0$ for which

$$\sup_{s \in A'_{\delta,p}} |(\Phi^p)'_C(\Delta)| < \epsilon.$$

This completes the proof of Lemma 5.1. \diamond

The proof of Theorem 5.2 can now be completed.

Proof. Lemma 5.1 entails that $\mathbb{L}_{n,p}^{(h)} = (\Phi^p)'_C(\mathbb{C}_n^{(h)}) + o_{\mathbb{P}}(1)$ for each $h \in \{1, \dots, M\}$. Hence,

$$(\mathbb{L}_{n,p}, \mathbb{L}_{n,p}^{(1)}, \dots, \mathbb{L}_{n,p}^{(M)}) = ((\Phi^p)'_C(\mathbb{C}_n), (\Phi^p)'_C(\mathbb{C}_n^{(1)}), \dots, (\Phi^p)'_C(\mathbb{C}_n^{(M)})) + o_{\mathbb{P}}(1).$$

The conclusion of the convergence result in equation (5.10) combined with the continuous mapping Theorem then yields

$$(\mathbb{L}_{n,p}, \mathbb{L}_{n,p}^{(1)}, \dots, \mathbb{L}_{n,p}^{(M)}) \rightsquigarrow (\mathbb{L}_p, \mathbb{L}_p^{(1)}, \dots, \mathbb{L}_p^{(M)}),$$

where $\mathbb{L}_p^{(h)} = (\Phi^p)'_C(\mathbb{C}^{(h)})$, $h \in \{1, \dots, M\}$, are independent copies of \mathbb{L}_p . By similar arguments, $(\widetilde{\mathbb{L}}_{n,p}, \widetilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(1)}, \dots, \widetilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(M)}) \rightsquigarrow (\widetilde{\mathbb{L}}_p, \widetilde{\mathbb{L}}_p^{(1)}, \dots, \widetilde{\mathbb{L}}_p^{(M)})$. \diamond

In the forthcoming applications, it will be convenient to approximate $\mathbb{L}_{n,p}^{(h)}(s)$ and $\tilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(h)}(s)$ at the middle points of the grid $\{j/T\}_{j=1}^T$ for $T \in \mathbb{N}$ sufficiently large. To this end, define the matrices $\Omega, \tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^{T \times T}$ such that

$$\Omega_{jk} = \hat{C}_{10} \left(\frac{j-.5}{T}, \frac{k-.5}{T} \right) \quad \text{and} \quad \tilde{\Omega}_{jk} = \hat{C}_{01} \left(\frac{j-.5}{T}, \frac{k-.5}{T} \right).$$

Then, let $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in \mathbb{R}^{T \times T}$ with

$$(\Lambda_i)_{jk} = P_i \left(\frac{j-.5}{T}, \frac{k-.5}{T} \right).$$

With this notation, one has for $j = \lfloor Ts \rfloor + 1$ that

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{n,2}^{(h)}(s) &\approx \mathbb{L}_{n,2}^{(h)} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(h)} P_i \left(\frac{j-.5}{T}, \frac{j-.5}{T} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(h)} (\Lambda_i)_{jj} \end{aligned}$$

and for $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{n,p+1}^{(h)}(s) &\approx \mathbb{L}_{n,p+1}^{(h)} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \\ &= \mathbb{C}_n^{(h)} \left\{ \frac{j-.5}{T}, \ell_{n,p} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \right\} \\ &\quad + \hat{C}_{01} \left\{ \frac{j-.5}{T}, \ell_{n,p} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \right\} \mathbb{L}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j-.5}{T} \right). \end{aligned}$$

Since

$$\ell_{n,p} \left(\frac{j-.5}{T} \right) = B_{pk}, \quad \text{where } k = \left\lfloor n \left(\frac{j-.5}{T} \right) \right\rfloor + 1,$$

one has for $r = \lfloor TB_{pk} + .5 \rfloor$ that

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{n,p+1}^{(h)}(s) &\approx \mathbb{C}_n^{(h)} \left(\frac{j - .5}{T}, \frac{r - .5}{T} \right) \\ &\quad + \widehat{C}_{01} \left(\frac{j - .5}{T}, \frac{r - .5}{T} \right) \mathbb{L}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j - .5}{T} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(h)} (\Lambda_i)_{jr} + \widetilde{\Omega}_{jr} \mathbb{L}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j - .5}{T} \right). \end{aligned}$$

For $\widetilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(h)}$, one obtains $\widetilde{\mathbb{L}}_{n,2}^{(h)}(s) = \mathbb{L}_{n,2}^{(h)}(s)$ and for $r = \lfloor T\widetilde{B}_{pk} + .5 \rfloor$,

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{n,p+1}^{(h)}(s) \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i^{(h)} (\Lambda_i)_{rj} + \Omega_{rj} \widetilde{\mathbb{L}}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j - .5}{T} \right).$$

The above multiplier method can be used to build nonparametric confidence bands for an unknown C-power functions $\ell_{C,p}$. To this end, let $q_{p,\alpha}$ be the real number such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{s \in [0,1]} |\mathbb{L}_{n,p}(s)| > q_{p,\alpha} \right\} = \alpha.$$

Hence, an approximate $1 - \alpha$ confidence band for $\ell_{C,p}$ is given by

$$\text{CB}_p(\alpha) = \left[\ell_{n,p}(s) - \frac{q_{p,\alpha}}{\sqrt{n}}, \ell_{n,p}(s) + \frac{q_{p,\alpha}}{\sqrt{n}} \right].$$

Since $q_{p,\alpha}$ depends on the unknown value of C , the latter has to be estimated.

A solution consists in using $\widehat{q}_{p,\alpha}$ as the $(1 - \alpha)$ -th percentile of

$$\sup_{s \in [0,1]} |\mathbb{L}_{n,p}^{(h)}(s)| \approx \max_{j \in \{1, \dots, T\}} \left| \mathbb{L}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j - .5}{T} \right) \right|, \quad h \in \{1, \dots, M\},$$

yielding

$$\widehat{\text{CB}}_p(\alpha) = \left[\ell_{n,p}(s) - \frac{\widehat{q}_{p,\alpha}}{\sqrt{n}}, \ell_{n,p}(s) + \frac{\widehat{q}_{p,\alpha}}{\sqrt{n}} \right]$$

as an approximate $1 - \alpha$ confidence band for $\ell_{C,p}$. To our knowledge, it is the first time that such model-free confidence bands are considered in a copula context. The construction of $\widehat{\text{CB}}_p(\alpha)$ from a real data set is presented in Section 5.6.

5.3 A generalized method-of-moment for the copula parameters

Let $\mathcal{F} = \{C_\theta; \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$, be a parametric family of copulas. From now on, denote by $(\ell_{\theta,p})_{p \geq 2}$ the C-power functions associated to C_θ . The method will only be described for $\ell_{\theta,p}$, since it is sufficient when the members of \mathcal{F} are symmetric; the adaptation of the method for $\tilde{\ell}_{\theta,p} = \tilde{\ell}_{C_\theta,p}$ is straightforward.

In order to develop a method-of-moment estimation procedure, let

$$\gamma_{n,p} = \int_0^1 \ell_{n,p}(s) \, ds \quad \text{and} \quad \gamma_{\theta,p} = \int_0^1 \ell_{\theta,p}(s) \, ds.$$

Note that since $\ell_{W,p}(s) \leq \ell_{\theta,p}(s) \leq \ell_{M,p}(s)$, one has $(2p)^{-1} \leq \gamma_{\theta,p} \leq 2^{-1}$. For models with positive dependence only, like those in the family of extreme-value copulas, these bounds reduce to $(p+1)^{-1} \leq \gamma_{\theta,p} \leq 2^{-1}$.

The case when θ is univariate will first be described. In this situation, an estimator can be defined for a given $p \geq 2$ as the real number $\hat{\theta}_p$ such that $\gamma_{\hat{\theta}_p,p} = \gamma_{n,p}$. Here, it is assumed that the mapping $\theta \mapsto \gamma_{\theta,p}$ is one-to-one and such that $\dot{\gamma}_{\theta,p} = \partial \gamma_{\theta,p} / \partial \theta$ is continuous and non-vanishing. By a first order Taylor expansion, one then has

$$\gamma_{\hat{\theta}_p,p} = \gamma_{\theta,p} + \dot{\gamma}_{\theta,p} (\hat{\theta}_p - \theta) + o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Hence,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\widehat{\theta}_p - \theta) &= \frac{1}{\dot{\gamma}_{\theta,p}} \sqrt{n}(\gamma_{\widehat{\theta}_p,p} - \gamma_{\theta,p}) + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &= \frac{1}{\dot{\gamma}_{\theta,p}} \sqrt{n}(\gamma_{n,p} - \gamma_{\theta,p}) + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &= \frac{1}{\dot{\gamma}_{\theta,p}} \int_0^1 \mathbb{L}_{n,p}(s) ds + o_{\mathbb{P}}(1).\end{aligned}$$

As a consequence of Proposition 5.1 and the continuous mapping Theorem,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_p - \theta) \rightsquigarrow \frac{1}{\dot{\gamma}_{\theta,p}} \int_0^1 \mathbb{L}_p(s) ds.$$

The idea can be generalized to the case when $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)^\top$. To this end, let $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)$, where $w_j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, and consider the vectors

$$\gamma_{n,\mathbf{w}} = (\gamma_{n,w_1}, \dots, \gamma_{n,w_d})^\top \quad \text{and} \quad \gamma_{\theta,\mathbf{w}} = (\gamma_{\theta,w_1}, \dots, \gamma_{\theta,w_d})^\top.$$

An estimator of θ is defined as the vector $\widehat{\theta}_{\mathbf{w}} = (\widehat{\theta}_{1,\mathbf{w}}, \dots, \widehat{\theta}_{d,\mathbf{w}})^\top$ such that $\gamma_{\widehat{\theta}_{\mathbf{w}},\mathbf{w}} = \gamma_{n,\mathbf{w}}$. Assuming again that the mapping $\theta \mapsto \gamma_{\theta,\mathbf{w}}$ is one-to-one, and that its gradient $(\dot{\gamma}_{\theta,\mathbf{w}})_{k\ell} = \partial \gamma_{\theta,w_k} / \partial \theta_\ell$ is continuous and non-singular, a first order multidimensional Taylor expansion yields

$$\gamma_{\widehat{\theta}_{\mathbf{w}},\mathbf{w}} = \gamma_{\theta,\mathbf{w}} + \dot{\gamma}_{\theta,\mathbf{w}}(\widehat{\theta}_{\mathbf{w}} - \theta) + o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

One can thus write

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{\mathbf{w}} - \theta) &= (\dot{\gamma}_{\theta,\mathbf{w}})^{-1} \sqrt{n}(\gamma_{n,\mathbf{w}} - \gamma_{\theta,\mathbf{w}}) + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &= (\dot{\gamma}_{\theta,\mathbf{w}})^{-1} \int_0^1 \mathbb{L}_{n,\mathbf{w}}(s) ds + o_{\mathbb{P}}(1),\end{aligned}$$

where $\mathbb{L}_{n,\mathbf{w}} = (\mathbb{L}_{n,w_1}, \dots, \mathbb{L}_{n,w_d})^\top$; here, it is understood that the integral of a vector is applied to each component. An application of the continuous

mapping Theorem combined with the conclusion of Proposition 5.1 yields

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\theta}_{\mathbf{w}} - \theta \right) \rightsquigarrow (\dot{\gamma}_{\theta, \mathbf{w}})^{-1} \int_0^1 \mathbb{L}_{\mathbf{w}}(s) ds, \quad (5.13)$$

where $\mathbb{L}_{\mathbf{w}} = (\mathbb{L}_{w_1}, \dots, \mathbb{L}_{w_d})^\top$. In Section 5.5, the performance of $\widehat{\theta}_{\mathbf{w}}$ in small samples is investigated for various copula families and many choices of \mathbf{w} .

5.4 Goodness-of-fit tests for copulas

This section develops formal goodness-of-fit procedures for copula models. To this end, reconsider a family $\mathcal{F} = \{C_\theta; \theta \in \Theta\}$ of bivariate copulas, where $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ is the parameter space. If C is the unknown copula of a bivariate population, then the composite null and alternative hypotheses to be tested are $\mathcal{H}_0 : C \in \mathcal{F}$ and $\mathcal{H}_1 : C \notin \mathcal{F}$.

Cramér–von Mises test statistics based on versions of the C-power processes that take into account the lack of information about the true value of the parameter are described in subsection 5.4.1; conditions for their weak convergence to hold are also carefully stated. In subsection 5.4.2, one develops a strategy for the computation of p -values that exploits the representation of the limiting goodness-of-fit process, together with the multiplier versions of the C-power processes encountered in Section 5.2.

5.4.1 Test statistics

Since under \mathcal{H}_0 , there exists $\theta \in \Theta$ such that $\ell_{C,p} = \ell_{\theta,p}$ for all $p \in \mathbb{N}$, natural test statistics are the Cramér–von Mises functionals

$$S_{n,p} = n \int_0^1 \left\{ \ell_{n,p}(s) - \ell_{\hat{\theta},p}(s) \right\}^2 d\ell_{\hat{\theta},p}(s),$$

where $\hat{\theta}$ is some (consistent) estimator of θ . Thanks to the use of the weight function $d\ell_{\hat{\theta},p}$, it can easily be shown that

$$\begin{aligned} S_{n,p} &= n \sum_{i=1}^n B_{pi}^2 \left\{ \ell_{\hat{\theta},p} \left(\frac{i}{n} \right) - \ell_{\hat{\theta},p} \left(\frac{i-1}{n} \right) \right\} \\ &\quad - n \sum_{i=1}^n B_{pi} \left\{ \ell_{\hat{\theta},p}^2 \left(\frac{i}{n} \right) - \ell_{\hat{\theta},p}^2 \left(\frac{i-1}{n} \right) \right\} + \frac{n}{3}, \end{aligned}$$

where the matrix B is described in Remark 5.1. Now in order to combine the test statistics $S_{n,p}$, $p \in \mathbb{N}$, let $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ and consider

$$S_{n,\mathcal{A}} = \sum_{j \in \mathcal{A}} S_{n,j}.$$

The asymptotic behavior of $S_{n,\mathcal{A}}$ is obtained by first noting that

$$S_{n,p} = \int_0^1 \{ \mathcal{G}_{n,p}(s) \}^2 d\ell_{\hat{\theta},p}(s),$$

where

$$\mathcal{G}_{n,p}(s) = \sqrt{n} \left\{ \ell_{n,p}(s) - \ell_{\hat{\theta},p}(s) \right\}$$

is a goodness-of-fit process whose weak convergence is described in the next proposition. Before stating it, consider the following assumption.

Assumption 3. For every $\theta \in \Theta$,

$$\dot{\ell}_{\theta,p}(s) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \ell_{\theta,p}(s), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_d} \ell_{\theta,p}(s) \right)$$

exists and is continuous for all $s \in [0, 1]$; moreover,

$$\sup_{|\theta^* - \theta| < \eta} \sup_{s \in [0, 1]} \left\| \dot{\ell}_{\theta^*, p}(s) - \dot{\ell}_{\theta, p}(s) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow 0.$$

It is shown in subsection 5.4.3 that Assumption 3 holds for many copula families. The main result of this section can now be stated.

Proposition 5.2. *If Assumption 1–3 hold, then $\mathcal{G}_{n,p}$ converges weakly in $\ell^\infty([0, 1])$ to $\mathcal{G}_p(s) = \mathbb{L}_p(s) - \dot{\ell}_{\theta, p}(s) \Theta$, where Θ is the limit in law of $\widehat{\Theta}_n = \sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)$. In particular, if $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_{\mathbf{w}}$, one has in view of (5.13) that*

$$\mathcal{G}_p(s) = \mathbb{L}_p(s) - \dot{\ell}_{\theta, p}(s) (\dot{\gamma}_{\theta, \mathbf{w}})^{-1} \int_0^1 \mathbb{L}_{\mathbf{w}}(r) dr,$$

where $\mathbb{L}_{\mathbf{w}} = (\mathbb{L}_{w_1}, \dots, \mathbb{L}_{w_d})^\top$.

Proof. The proof proceeds as the proof of Proposition 1 in Genest et al. (2006) or Proposition 2 in Mecsfioui et al. (2009). First note that $\mathcal{G}_{n,p}(s) = \mathbb{L}_{n,p}(s) - g_{n,p}(s)$, where

$$g_{n,p}(s) = \sqrt{n} \left\{ \ell_{\widehat{\theta}, p}(s) - \ell_{\theta, p}(s) \right\}.$$

It will be shown that

$$\sup_{s \in [0, 1]} \left| g_{n,p}(s) - \dot{\ell}_{\theta, p}(s) \widehat{\Theta}_n \right|$$

converges in probability to 0. To this end, note that $\widehat{\Theta}_n$ is tight since it converges in law to Θ , by assumption. This entails that for any given $\eta > 0$, there exists $M_\eta \in R^+$ and $N_0 \in \mathbb{N}$ such that $\mathbb{P} \left(\left\| \widehat{\Theta}_n \right\| > M_\eta \right) < \eta$ for all

$n \geq N_0$. For any such n , one has

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{s \in [0,1]} |g_{n,p}(s) - \dot{\ell}_{\theta,p}(s) \widehat{\Theta}_n| > \lambda \right\} \\ & \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{s \in [0,1]} |g_{n,p}(s) - \dot{\ell}_{\theta,p}(s) \widehat{\Theta}_n| > \lambda, \|\widehat{\Theta}_n\| \leq M_\eta \right\} + \mathbb{P} \left(\|\widehat{\Theta}_n\| > M_\eta \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{s \in [0,1]} |g_{n,p}(s) - \dot{\ell}_{\theta,p}(s) \widehat{\Theta}_n| > \lambda, \|\widehat{\Theta}_n\| \leq M \right\} + \eta. \end{aligned}$$

Next, the mean-value Theorem ensures that there exists θ^* between $\widehat{\theta}$ and θ such that $\ell_{\widehat{\theta},p}(s) = \ell_{\theta,p}(s) + \dot{\ell}_{\theta^*,p}(s)(\widehat{\theta} - \theta)$, which can be re-written as $g_{n,p}(s) = \dot{\ell}_{\theta^*,p}(s) \widehat{\Theta}_n$. Hence, under Assumption (3),

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{s \in [0,1]} |g_{n,p}(s) - \dot{\ell}_{\theta,p}(s) \widehat{\Theta}_n| > \lambda, \|\widehat{\Theta}_n\| \leq M_\eta \right\} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \|\widehat{\Theta}_n\| \sup_{s \in [0,1]} |\dot{\ell}_{\theta^*,p}(s) - \dot{\ell}_{\theta,p}(s)| > \lambda, \|\widehat{\Theta}_n\| \leq M_\eta \right\} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{|\theta^* - \theta| < \eta} \sup_{s \in [0,1]} |\dot{\ell}_{\theta^*,p}(s) - \dot{\ell}_{\theta,p}(s)| > \frac{\lambda}{M_\eta} \right\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Since η can be chosen arbitrary small, the result follows. In the special case when $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_{\mathbf{w}}$, it has already been shown that

$$\Theta = (\dot{\gamma}_{\theta, \mathbf{w}})^{-1} \int_0^1 \mathbb{L}_{\mathbf{w}}(r) dr,$$

which completes the proof. \diamond

From Proposition 5.2 and the continuous mapping Theorem,

$$S_{n,p} \rightsquigarrow S_p = \int_0^1 \{\mathcal{G}_p(s)\}^2 d\ell_{\theta,p}(s) \quad \text{and} \quad S_{n,\mathcal{A}} \rightsquigarrow S_{\mathcal{A}} = \sum_{j \in \mathcal{A}} S_j.$$

There is no hope for finding explicit expressions for these limit distributions. Moreover, the latter depend on the unknown value of the parameter. As a consequence, a re-sampling method is needed in order to compute the p -values of a test based on $S_{n,\mathcal{A}}$. In the next subsection, such a strategy is developed around the multiplier versions of $\mathcal{G}_{n,p}$.

5.4.2 Computation of p -values

For simplicity, assume that θ is estimated by $\widehat{\theta}_{\mathbf{w}}$. In that case, in view of the limit of the goodness-of-fit process $\mathcal{G}_{n,p}$ stated in Proposition 5.2, it seems natural to define its multiplier versions by

$$\mathcal{G}_{n,p}^{(h)}(s) = \mathbb{L}_{n,p}^{(h)}(s) - \dot{\ell}_{\widehat{\theta}_{\mathbf{w}},p}(s) \left(\dot{\gamma}_{\widehat{\theta}_{\mathbf{w}},\mathbf{w}} \right)^{-1} \int_0^1 \mathbb{L}_{n,\mathbf{w}}^{(h)}(r) dr,$$

where $\mathbb{L}_{n,\mathbf{w}}^{(h)} = (\mathbb{L}_{n,w_1}^{(h)}, \dots, \mathbb{L}_{n,w_d}^{(h)})^\top$. Theorem 5.2 combined with the continuous mapping Theorem entail

$$(\mathcal{G}_{n,p}, \mathcal{G}_{n,p}^{(1)}, \dots, \mathcal{G}_{n,p}^{(M)}) \rightsquigarrow (\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_p^{(1)}, \dots, \mathcal{G}_p^{(M)}),$$

where $\mathcal{G}_p^{(1)}, \dots, \mathcal{G}_p^{(M)}$ are independent copies of \mathcal{G}_p . Letting

$$S_{n,p}^{(h)} = \int_0^1 \{ \mathcal{G}_{n,p}^{(h)}(s) \}^2 d\ell_{\widehat{\theta}_{\mathbf{w}},p}(s) \quad \text{and} \quad S_{n,\mathcal{A}}^{(h)} = \sum_{j \in \mathcal{A}} S_{n,j}^{(h)},$$

one has

$$(S_{n,\mathcal{A}}, S_{n,\mathcal{A}}^{(1)}, \dots, S_{n,\mathcal{A}}^{(M)}) \rightsquigarrow (S_{\mathcal{A}}, S_{\mathcal{A}}^{(1)}, \dots, S_{\mathcal{A}}^{(M)}),$$

where $S_{\mathcal{A}}^{(1)}, \dots, S_{\mathcal{A}}^{(M)}$ are independent copies of $S_{\mathcal{A}}$. Asymptotically valid p -values for the test based on $S_{n,\mathcal{A}}$, as $M, n \rightarrow \infty$, are then given by

$$\widehat{p}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \mathbb{I} \left(S_{n,\mathcal{A}}^{(h)} > S_{n,\mathcal{A}} \right).$$

For the implementation of $S_{n,p}^{(1)}, \dots, S_{n,p}^{(M)}$, consider the approximation

$$S_{n,p}^{(h)} \approx \sum_{j=1}^T \left\{ \mathcal{G}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \right\}^2 \left\{ \ell_{\hat{\theta}_{\mathbf{w},p}} \left(\frac{j}{T} \right) - \ell_{\hat{\theta}_{\mathbf{w},p}} \left(\frac{j-1}{T} \right) \right\},$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j-.5}{T} \right) &= \mathbb{L}_{n,p}^{(h)} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \\ &\quad - \dot{\ell}_{\hat{\theta}_{\mathbf{w},p}} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \left(\dot{\gamma}_{\hat{\theta}_{\mathbf{w},\mathbf{w}}} \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \mathbb{L}_{n,\mathbf{w}}^{(h)} \left(\frac{j-.5}{T} \right) \right\}. \end{aligned}$$

When $\theta \subseteq \mathbb{R}$ is estimated by $\hat{\theta}_{\{p\}}$, the multiplier process $\mathcal{G}_{n,p}^{(h)}$ only depends on $\mathbb{L}_{n,p}^{(h)}$ since

$$\mathcal{G}_{n,p}^{(h)}(s) = \mathbb{L}_{n,p}^{(h)}(s) - \frac{\dot{\ell}_{\hat{\theta}_{\{p\},p}}(s)}{\dot{\gamma}_{\hat{\theta}_{\{p\},p}}} \int_0^1 \mathbb{L}_{n,p}^{(h)}(r) dr.$$

For extreme-value copulas,

$$\frac{\dot{\ell}_{\theta,p}(s)}{\dot{\gamma}_{\theta,p}} = -(K_{\theta,p} + 1)^2 s^{K_{\theta,p}} \log s.$$

As $K_{\hat{\theta}_{\{p\},p}} = \gamma_{n,p}^{-1} - 1$, it follows that $\mathcal{G}_{n,p}^{(h)}$ is the same for any extreme-value model. Since $S_{n,p}$ takes the same value whatever an extreme-value copula is, the method will not be able to distinguish between these models.

When simple and / or explicit expressions for $\dot{\ell}_{\theta,p}$ and $\dot{\gamma}_{\theta,p}$ are not available, as is the case for the Clayton and Frank copulas, the approximations

$$\dot{\ell}_{\theta,p}(s) \approx \frac{\ell_{\theta+\varepsilon,p}(s) - \ell_{\theta,p}(s)}{\varepsilon} \quad \text{and} \quad \dot{\gamma}_{\theta,p} = \int_0^1 \dot{\ell}_{\theta,p}(s) ds \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \dot{\ell}_{\theta,p} \left(\frac{j-.5}{T} \right)$$

will be used for sufficiently small ε and sufficiently large T .

Note that one could also use the parametric bootstrap in order to compute valid p -values for the test based on $S_{n,\mathcal{A}}$. The idea has been successfully employed by Genest et al. (2006) and Genest et al. (2009) in a copula goodness-of-fit context; the validity of the method is thoroughly studied by Genest & Rémillard (2008) in a general setting. The idea in our context would consist in generating M artificial random samples from $C_{\hat{\theta}}$ and compute $S_{n,\mathcal{A}}$ for each of these samples, yielding M asymptotically independent copies $S_{n,\mathcal{A}}^{(1)}, \dots, S_{n,\mathcal{A}}^{(M)}$. This methodology will not be further explored here, however, mainly because it is expected that the approach based on the multiplier versions is significantly less time consuming.

5.4.3 Verification of Assumption (3) for some models

For an Archimedean copula generated by φ_θ , $\theta \in \Theta$ (see equation (2.4)),

$$\dot{\ell}_{\theta,p}(s) = \frac{p\dot{\varphi}_\theta(s) - \dot{\varphi}_\theta\{\ell_{\theta,p}(s)\}}{\varphi'_\theta\{\ell_{\theta,p}(s)\}},$$

where $\dot{\varphi}_\theta(s) = \partial\varphi_\theta(s)/\partial\theta$ and $\varphi'_\theta(s) = \partial\varphi_\theta(s)/\partial s$. In particular, $\dot{\ell}_{\theta,p}(s) = -r_{p,\theta} \log p (s^{r_{p,\theta}} \log s)$ for the Gumbel–Hougaard copula, where $r_{p,\theta} = p^{1-\theta}$; since $r_{p,\theta} \in [1, p]$, $\dot{\ell}_{\theta,p}$ is clearly uniformly continuous on $[0, 1]$ for every $\theta \in [0, 1]$. For the Clayton copula, one obtains

$$\dot{\ell}_{\theta,p}(s) = \frac{\ell_{\theta,p}(s)}{\theta} \left\{ p s^{-\theta} \log s (\ell_{\theta,p}(s))^\theta - \log \ell_{\theta,p}(s) \right\}.$$

For extreme-value copulas, $\ell_{\theta,p}(s) = s^{K_{\theta,p}}$ (see Proposition 3.1), so that $\dot{\ell}_{\theta,p}(s) = \dot{K}_{\theta,p} s^{K_{\theta,p}} \log s$, where $\dot{K}_{\theta,p} = \partial K_{\theta,p}/\partial\theta$. Since $K_{p,\theta} \in [1, p]$ for each $\theta \in \Theta$, the function $s^{K_{\theta,p}} \log s$ is bounded on $[0, 1]$; thus Assumption (3)

holds if and only if

$$\sup_{|\theta^* - \theta| < \eta} \sup_{s \in [0,1]} \left| \dot{K}_{\theta^*,p} - \dot{K}_{\theta,p} \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } \eta \rightarrow 0. \quad (5.14)$$

For example, Assumption (5.14) is true for the Gumbel copula, since $K_{\theta,p} = p^{1-\theta}$ and $\dot{K}_{\theta,p} = -p^{1-\theta} \log p$. One has to work a little bit harder for the Gumbel A copula, in which case one can show that $K_{\theta,p+1} = K_{\theta,p} + 1 - \theta + \theta(K_{\theta,p} + 1)^{-1}$. This formula entails

$$\dot{K}_{\theta,p+1} = -\frac{K_{\theta,p}}{K_{\theta,p} + 1} + \left\{ 1 - \frac{\theta}{(K_{\theta,p} + 1)^2} \right\} \dot{K}_{\theta,p}.$$

Hence, since for any $\theta \in [0, 1]$,

$$\frac{K_{\theta,p}}{K_{\theta,p} + 1} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{p}{p+1} \right] \quad \text{and} \quad 1 - \frac{\theta}{(K_{\theta,p} + 1)^2} \in \left[1 - \frac{\theta}{4}, 1 - \frac{\theta}{(p+1)^2} \right],$$

$\dot{K}_{\theta,p+1}$ satisfies Assumption (5.14) as long as it is satisfied for $\dot{K}_{\theta,p}$. It is thus true for all $p \in \mathbb{N}$ since it is trivially true for $p = 1$.

For the members of Durante's class,

$$\dot{\ell}_{\theta,p+1}(s) = p s \{ \Psi_{\theta}(s) \}^{p-1} \dot{\Psi}_{\theta}(s),$$

where $\Psi_{\theta}(s) = \partial \Psi_{\theta}(s) / \partial \theta$. In particular, $\dot{\ell}_{\theta,p+1}(s) = p s^{p(1-\theta)+1} \log s$ and $\dot{\ell}_{\theta,p+1}(s) = p s(s-1) \{ (1-\theta)s + \theta \}^{p-1}$ for the Cuadras–Augé and Fréchet copulas, respectively. In both cases, Assumption (3) holds for all $\theta \in [0, 1]$.

5.5 Simulation studies

5.5.1 Efficiency of the parameter estimation

In this subsection, the efficiency of the parameter estimation procedure encountered in Section 5.3 is investigated for the one-parameter families of Gumbel–Hougaard, Gumbel A, Cuadras–Augé, Fréchet and Clayton. The accuracy of an estimator $\widehat{\theta}$ will be measured by its mean squared error, namely $\text{MSE}(\widehat{\theta}) = \text{E}\{(\widehat{\theta} - \theta)^2\}$. Indeed, since no explicit expression is available for $\text{MSE}(\widehat{\theta})$ in most cases, the latter will be estimated from simulated samples of size $n \in \{100, 250\}$, yielding copies $\widehat{\theta}^{(1)}, \dots, \widehat{\theta}^{(N)}$ of $\widehat{\theta}$. Hence, the estimated mean squared error is given by

$$\widehat{\text{MSE}}(\widehat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\widehat{\theta}^{(i)} - \theta)^2.$$

For an extreme-value copula with Pickands' dependence function A , one has $\ell_{C_{A,p}}(s) = s^{K_{A,p}}$, where $K_{A,1} = 1$ and $K_{A,p+1} = (K_{A,p} + 1)A\{1/(K_{A,p} + 1)\}$ (see Proposition 3.1). Hence $\gamma_{A,p} = \int_0^1 \ell_{C_{A,p}}(s) ds = 1/(K_{A,p} + 1)$, so that

$$K_{A,p+1} = \frac{A(\gamma_{A,p})}{\gamma_{A,p}}.$$

It follows that $\gamma_{A,1} = 1/2$ and for $p \geq 1$,

$$\gamma_{A,p+1} = \frac{1}{K_{A,p+1} + 1} = \left\{ \frac{A(\gamma_{A,p})}{\gamma_{A,p}} + 1 \right\}^{-1}. \quad (5.15)$$

When it is clear from the context, the notations $K_{\theta,p}$ and $\gamma_{\theta,p}$ will be adopted. For the Gumbel–Hougaard copula, $K_{\theta,p} = p^{1-\theta}$ and $\gamma_{\theta,p} = (1 + p^{1-\theta})^{-1}$; it follows readily that

$$\widehat{\theta}_{\{p\}} = \log \left(\frac{p \gamma_{n,p}}{1 - \gamma_{n,p}} \right) / \log p.$$

For the Gumbel A extreme-value model, for which $A_\theta(t) = \theta t^2 - \theta t + 1$, $\theta \in [0, 1]$, one obtains $\gamma_{\theta,2} = 2/(6 - \theta)$ and $\gamma_{\theta,3} = 2(6 - \theta)/(3\theta^2 - 22\theta + 48)$. However, the expressions are cumbersome for $p > 3$. In practice, the other values are implemented recursively using (5.15) and a numerical inversion procedure is performed in order to solve $\gamma_{\theta,p} = \gamma_{n,p}$. For the Cuadras–Augé distributions, $\ell_{\theta,p}(s) = s^{p(1-\theta)+\theta}$, $\theta \in [0, 1]$, and $\gamma_{\theta,p} = \{p + 1 - (p - 1)\theta\}^{-1}$; this entails that

$$\widehat{\theta}_{\{p\}} = \frac{(p + 1)\gamma_{n,p} - 1}{(p - 1)\gamma_{n,p}}.$$

For the Fréchet copula, *i.e.* $C_\theta(u, v) = (1 - \theta)uv + \theta \min(u, v)$, $\theta \in [0, 1]$, one has $\ell_{\theta,p}(s) = s \{s + \theta(1 - s)\}^{p-1}$. Hence, one obtains after straightforward computations that

$$\gamma_{\theta,p} = \frac{\theta^{p+1} - (p + 1)\theta + p}{p(p + 1)(1 - \theta)^2}.$$

One then obtains $\widehat{\theta}_{\{2\}} = 1 - 3(1 - 2\gamma_{n,2})$, $\widehat{\theta}_{\{3\}} = \sqrt{12\gamma_{n,3} - 2} - 1$ and

$$\widehat{\theta}_{\{4\}} = 1 - \frac{a_n^{1/3} + 5 - 5a_n^{-1/3}}{3},$$

where $a_n = 35 - 270\gamma_{n,4} + 15\sqrt{6 - 84\gamma_{n,4} + 324\gamma_{n,4}^2}$. Finally, for the Clayton and Frank copulas, since no explicit expressions are available for $\gamma_p(\theta)$, one must proceed by numerical integration and inversion procedures.

In Table 5.1 and Table 5.2, the values of $n \times \widehat{\text{MSE}}(\widehat{\theta})$, as estimated from $N = 10\,000$ replicates, are given for $\widehat{\theta}_{\{2\}}$, $\widehat{\theta}_{\{3\}}$, $\widehat{\theta}_{\{4\}}$, $\widehat{\theta}_{\{5\}}$. These estimators are compared to the so-called *inversion of Kendall's tau* $\widehat{\theta}_\tau = \tau^{-1}(\tau_n)$, where

$$\tau(\theta) = 4 \int_{[0,1]^2} C_\theta(u, v) dC_\theta(u, v) - 1$$

is the population value of Kendall's tau and τ_n is its sample version. First note that the results are generally similar for $n = 100$ and $n = 250$. The new estimators $\widehat{\theta}_{\{w\}}$ perform quite well under almost all scenarios; as they are sometimes easier to compute than the inversion of Kendall's tau, they then provide interesting alternatives to the latter. One observes that the estimated MSE's of $\widehat{\theta}_{\{w\}}$ and $\widehat{\theta}_\tau$ are smaller for high values of τ , except for the Clayton copula. Now, taking each model separately :

- (i) For the Gumbel–Hougaard family, the estimators are quite equivalent, the best being $\widehat{\theta}_\tau$, followed by $\widehat{\theta}_{\{3\}}$;
- (ii) For the Gumbel A family, all estimators are equally good, with $\widehat{\theta}_{\{3\}}$ being slightly better;
- (iii) For the Cuadras–Augé family, $\widehat{\theta}_{\{2\}}$ is the best for $\tau \in \{.25, .5\}$, while $\widehat{\theta}_\tau$ has the smallest MSE when $\tau = .75$; similar comments apply to the Fréchet family;
- (iv) For the Clayton family, $\widehat{\theta}_\tau$ outperforms its competitors; it can be explained by the fact that $\widehat{\theta}_{\{w\}}$ obtains from numerical integration and inversion methods.

5.5.2 Efficiency of the goodness-of-fit procedures

The size and power of the goodness-of-fit procedures based on the test statistics $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$, $S_{n,\{3,4\}}$ and $S_{n,\{2,3,4\}}$ have been investigated. To this end, 1 000 random samples of size $n = 200$ from the

Gumbel–Hougaard, Gumbel A, Fréchet, Clayton and Frank copulas have been generated for three levels of dependence as measured by Kendall’s measure of association. One can find the estimated powers in Tables 5.3, 5.4 and 5.5 for $\tau = 0.25$, $\tau = 0.50$ and $\tau = 0.75$, respectively. Note that $M = 1\,000$ multiplier samples have been used for the computation of the approximate p -values of the tests, while the multiplier versions $\mathbb{L}_{n,p}^{(h)}(s)$ have been approximated on the grid $(j - .5)/T$, $j \in \{1, \dots, T\}$, with $T = 20$. The estimator of C_{10} is defined by

$$\widehat{C}_{10}(u, v) = \begin{cases} \frac{C_n(2b_n, v)}{2b_n}, & u \in [0, b_n), \\ \frac{C_n(u + b_n, v) - C_n(u - b_n, v)}{2b_n}, & u \in [b_n, 1 - b_n], \\ \frac{C_n(1, v) - C_n(1 - 2b_n, v)}{2b_n}, & u \in (1 - b_n, 1], \end{cases}$$

where $b_n = n^{-1/2}$; the estimator \widehat{C}_{01} of C_{01} is defined similarly. From Lemma 4.1 in Segers (2012), these estimators of the partial derivatives of C satisfy Assumption 2, as required for the multiplier method to work.

A first look at Tables 5.3–5.5 enables to conclude that the test statistics keep generally their 5% nominal level quite well under all null hypotheses, except maybe under the Fréchet copula, especially for $S_{n,\{3\}}$. When $\tau = .75$, the tests seem to have more problem keeping their size, which is probably a consequence of the behavior of the multiplier method for high levels of dependence. This has also been observed by Bücher & Dette (2010). As mentioned in subsection 5.4.2, the tests cannot distinguish between the models in the extreme-value family. It can be noticed by looking at the estimated

probability of rejection of \mathcal{H}_0 when the data come from either the Gumbel–Hougaard or Gumbel A copula. Under Clayton alternatives, all test statistics are very powerful, especially when the null hypothesis concerns an extreme-value model; this coincides with the empirical results of Quesy (2012) when testing for extreme-value dependence. The Frank copula is also well detected by all the test statistics. One can also note that

- (i) when the alternatives belong to the extreme-value family, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$, $S_{n,\{3,4\}}$ and $S_{n,\{2,3,4\}}$ are almost as powerful ($S_{n,\{2,4\}}$ is the best), $S_{n,\{2\}}$ being significantly less powerful;
- (ii) under Fréchet alternatives, $S_{n,\{2\}}$ is significantly most powerful than its competitors, followed by $S_{n,\{2,3\}}$, while $S_{n,\{4\}}$ is the less powerful;
- (iii) under Clayton alternatives, the null hypothesis of an extreme-value copula is rejected for almost all test statistics.

It is also worth to note that our tests are very quick to implement, which is not negligible especially if one wants to analyze large data sets. This is mainly due to the use of the multiplier method and the recursive nature of the C-power functions. Considering this and the fact that the power of our tests seems in general comparable to that of the goodness-of-fit test of Genest et al. (2006), our method is an interesting alternative to existing methods.

5.6 Illustration on the Uranium exploration data set

The methods developed in this work will be illustrated on the Uranium exploration data set first considered by Cook & Johnson (1981) and Cook & Johnson (1986) and later revisited by Genest et al. (2006) in the light of new goodness-of-fit tests for copulas. The data set consists of 655 chemical measurements from water samples collected from the Montrose quadrangle of western Colorado in the United States. The analysis presented here considers the concentrations in cobalt (Co), caesium (Cs), scandium (Sc) and titanium (Ti). The models that were tested are the one-parameter copula families of Gumbel, Fréchet, Clayton and Frank. The results of the goodness-of-fit procedures based on $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$ and $S_{n,\{3,4\}}$ are in Table 5.6. The tests based on $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$ and $S_{n,\{4\}}$ were also performed, but the results were very similar; they therefore have been omitted. The p -values were estimated from $M = 1\,000$ multiplier samples. The conclusions coincide generally with those of Genest et al. (2006).

Some of the conclusions that one can extract from Table 5.6 could also be deduced by looking at the empirical C-power functions and their associated 95% confidence band computed from the multiplier method. For example, the Gumbel copula was selected as an appropriate model for the pair (Cs,Ti); all other models were clearly rejected. In that case, the C-power functions of the Gumbel copula can be seen to live inside the confidence band when $p = 2$ and $p = 3$ (see Figure 5.1), contrary to the C-power functions of the

Clayton copula (see Figure 5.2).

For the pair (Sc,Ti), the Fréchet copula was accepted, but the p -values are only slightly higher than .05. In such cases, it would be interesting to consider multi-parameter models. For example, consider an Archimax copula with a Gumbel Archimedean generator $\psi_\beta(t) = |\log t|^{1/(1-\beta)}$ and a Cuadras–Augé extreme part $A_\alpha(t) = 1 - \alpha \min(t, 1 - t)$. In that case, the estimation of $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ based on the method in Section 6 with $\mathbf{w} = \{2, 3\}$ exploits the fact that the first two C-power functions are of the form

$$\ell_{2,\alpha,\beta}(s) = s^{K_2^{1-\beta}(\alpha)} \quad \text{and} \quad \ell_{3,\alpha,\beta}(s) = s^{K_3^{1-\beta}(\alpha)},$$

where $K_2(\alpha) = 2 - \alpha$ and $K_3(\alpha) = 3 - 2\alpha$. It can be shown that $\hat{\alpha}_{\{2,3\}}$ is the solution of

$$\frac{\log(\gamma_{n,2}^{-1} - 1)}{\log(\gamma_{n,3}^{-1} - 1)} = \frac{\log(2 - \alpha)}{\log(3 - 2\alpha)},$$

and then

$$\hat{\beta}_{\{2,3\}} = 1 - \frac{\log(\gamma_{n,2}^{-1} - 1)}{\log(2 - \hat{\alpha}_{\{2,3\}})}.$$

Since for the pair (Sc,Ti), $\gamma_{n,2} = .402$ and $\gamma_{n,3} = .343$, one finds $\hat{\alpha}_{\{2,3\}} = .245$ and $\hat{\beta}_{\{2,3\}} = .294$. This estimation method for more than one parameter and the related goodness-of-fit test deserve to be investigated in more details in future works.

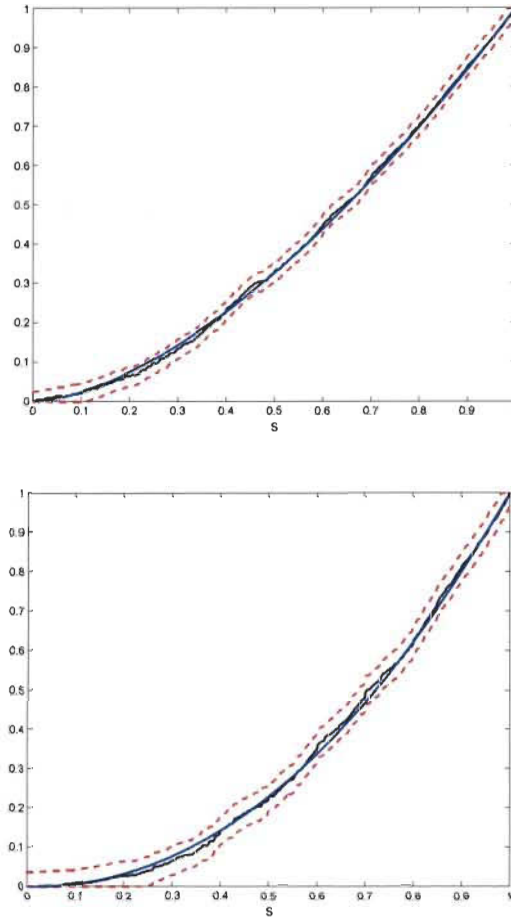


Figure 5.1: Empirical C-power function (black), 95% confidence bands (red), and C-power function of the Gumbel-Hougaard copula when $p = 2$ (upper panel) and $p = 3$ (lower panel)

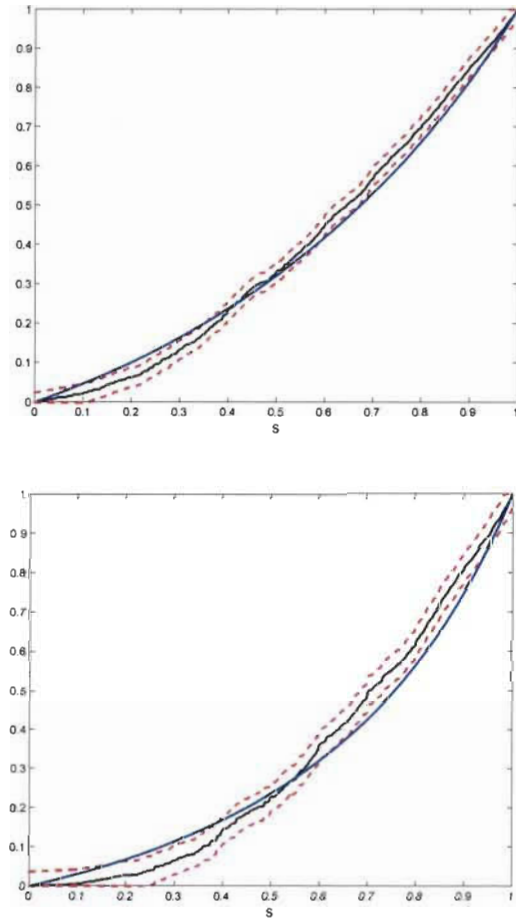


Figure 5.2: Empirical C-power function (black), 95% confidence bands (red), and C-power function of the Clayton copula when $p = 2$ (upper panel) and $p = 3$ (lower panel)

Table 5.1: Estimation, based on 10 000 replicates, of n times the mean-squared error of the estimators $\hat{\theta}_{\{2\}}$, $\hat{\theta}_{\{3\}}$, $\hat{\theta}_{\{4\}}$ and $\hat{\theta}_{\{5\}}$, and of the inversion of Kendall's tau ($\hat{\theta}_\tau$), for five one-parameter families of copulas ($n = 100$)

Model	τ	$\hat{\theta}_{\{2\}}$	$\hat{\theta}_{\{3\}}$	$\hat{\theta}_{\{4\}}$	$\hat{\theta}_{\{5\}}$	$\hat{\theta}_\tau$
Gumbel–Hougaard	.25	0.516	0.478	0.491	0.518	0.436
	.50	0.348	0.322	0.330	0.347	0.291
	.75	0.144	0.119	0.120	0.127	0.097
Gumbel A	.10	3.362	3.177	3.330	3.575	2.929
	.20	2.907	2.793	2.914	3.088	2.580
	.30	2.054	1.973	1.993	2.039	1.968
	.40	0.486	0.538	0.532	0.514	0.778
Cuadras–Augé	.25	0.631	0.795	0.981	1.169	0.942
	.50	0.406	0.452	0.534	0.613	0.435
	.75	0.190	0.191	0.215	0.238	0.154
Fréchet	.25	0.521	0.682	0.877	1.116	0.767
	.50	0.525	0.567	0.669	0.759	0.530
	.75	0.354	0.345	0.382	0.411	0.277
Clayton	−.75	0.336	0.465	0.599	0.729	0.104
	−.50	0.683	0.913	1.163	1.410	0.270
	−.25	1.101	1.378	1.699	2.007	0.662
	.00	2.151	2.279	2.521	2.796	1.879
	.25	5.903	5.918	6.110	6.391	5.796
	.50	20.263	20.070	20.472	21.047	19.802
	.75	119.502	118.790	121.917	125.857	118.644

Table 5.2: Estimation, based on 10 000 replicates, of n times the mean-squared error of the estimators $\hat{\theta}_{\{2\}}$, $\hat{\theta}_{\{3\}}$, $\hat{\theta}_{\{4\}}$ and $\hat{\theta}_{\{5\}}$, and of the inversion of Kendall's tau ($\hat{\theta}_\tau$), for five one-parameter families of copulas ($n = 250$)

Model	τ	$\hat{\theta}_{\{2\}}$	$\hat{\theta}_{\{3\}}$	$\hat{\theta}_{\{4\}}$	$\hat{\theta}_{\{5\}}$	$\hat{\theta}_\tau$
Gumbel–Hougaard	.25	0.472	0.455	0.468	0.489	0.429
	.50	0.303	0.293	0.302	0.316	0.279
	.75	0.107	0.098	0.100	0.104	0.089
Gumbel A	.10	3.013	2.957	3.138	3.386	3.036
	.20	2.889	2.851	2.939	3.073	2.814
	.30	2.227	2.144	2.168	2.222	1.937
	.40	0.687	0.733	0.725	0.709	0.863
Cuadras–Augé	.25	0.653	0.809	0.996	1.183	0.901
	.50	0.446	0.469	0.548	0.628	0.432
	.75	0.213	0.196	0.217	0.239	0.151
Fréchet	.25	0.559	0.695	0.880	1.079	0.757
	.50	0.575	0.586	0.685	0.803	0.525
	.75	0.392	0.353	0.389	0.427	0.269
Clayton	−.75	0.701	1.001	1.389	1.788	0.103
	−.50	1.044	1.424	1.935	2.507	0.264
	−.25	1.398	1.789	2.325	2.939	0.642
	.00	2.363	2.524	2.938	3.440	1.821
	.25	5.688	5.616	5.937	6.411	5.456
	.50	19.824	19.063	19.620	20.425	18.533
	.75	126.997	114.073	116.321	121.520	114.604

Table 5.3: Estimation, based on 1 000 replicates, of the probability of rejection of \mathcal{H}_0 for the tests based on $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$ and $S_{n,\{3,4\}}$ when $n = 200$ and $\tau = .25$

Model under \mathcal{H}_1	$S_{n,A}$	Model under \mathcal{H}_0				
		Gumbel	Gumbel A	Fréchet	Clayton	Frank
Gumbel	$S_{n,\{2\}}$	6.3	6.3	10.4	77.0	23.0
	$S_{n,\{3\}}$	4.6	4.6	5.5	80.7	29.1
	$S_{n,\{4\}}$	4.1	4.1	3.8	80.6	32.1
	$S_{n,\{2,3\}}$	5.2	5.2	6.8	80.8	28.2
	$S_{n,\{2,4\}}$	4.2	4.2	5.2	81.5	32.2
	$S_{n,\{3,4\}}$	4.3	4.3	4.5	80.5	31.7
Gumbel A	$S_{n,\{2\}}$	6.9	6.9	11.0	81.2	24.8
	$S_{n,\{3\}}$	4.7	4.7	5.0	85.3	30.4
	$S_{n,\{4\}}$	3.9	3.9	3.9	84.4	31.8
	$S_{n,\{2,3\}}$	5.2	5.2	7.3	85.1	30.1
	$S_{n,\{2,4\}}$	4.6	4.6	5.2	86.1	32.5
	$S_{n,\{3,4\}}$	4.1	4.1	4.7	85.4	32.5
Fréchet	$S_{n,\{2\}}$	47.6	47.4	8.4	57.0	14.8
	$S_{n,\{3\}}$	28.1	28.0	7.1	52.6	14.3
	$S_{n,\{4\}}$	20.4	20.4	6.7	46.2	13.2
	$S_{n,\{2,3\}}$	34.3	34.1	7.6	55.1	15.0
	$S_{n,\{2,4\}}$	24.3	24.3	6.7	49.4	13.6
	$S_{n,\{3,4\}}$	22.7	22.7	6.8	49.3	13.6
Clayton	$S_{n,\{2\}}$	97.1	97.1	76.0	5.0	54.1
	$S_{n,\{3\}}$	97.2	97.2	84.1	5.2	49.1
	$S_{n,\{4\}}$	97.1	97.1	86.1	5.3	43.4
	$S_{n,\{2,3\}}$	97.5	97.5	83.5	5.2	52.6
	$S_{n,\{2,4\}}$	97.7	97.7	86.8	5.7	47.7
	$S_{n,\{3,4\}}$	97.4	97.4	86.0	5.5	46.5
Frank	$S_{n,\{2\}}$	49.6	49.6	21.6	39.3	3.9
	$S_{n,\{3\}}$	53.9	53.9	28.4	39.2	3.9
	$S_{n,\{4\}}$	56.1	56.1	33.0	35.2	3.9
	$S_{n,\{2,3\}}$	53.3	53.3	28.2	41.1	3.9
	$S_{n,\{2,4\}}$	57.1	57.1	33.4	37.9	3.8
	$S_{n,\{3,4\}}$	56.5	56.5	31.3	36.9	3.6

Table 5.4: Estimation, based on 1 000 replicates, of the probability of rejection of \mathcal{H}_0 for the tests based on $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$ and $S_{n,\{3,4\}}$ when $n = 200$ and $\tau = .5$

Model under \mathcal{H}_1	$S_{n,\mathcal{A}}$	Model under \mathcal{H}_0				
		Gumbel	Gumbel A	Fréchet	Clayton	Frank
Gumbel	$S_{n,\{2\}}$	6.5	59.2	25.6	99.8	60.6
	$S_{n,\{3\}}$	4.1	61.4	14.3	100.0	69.2
	$S_{n,\{4\}}$	3.1	60.9	10.7	100.0	72.1
	$S_{n,\{2,3\}}$	4.4	61.5	17.5	100.0	68.1
	$S_{n,\{2,4\}}$	4.0	61.3	12.7	100.0	71.5
	$S_{n,\{3,4\}}$	3.7	61.8	12.2	100.0	71.2
Fréchet	$S_{n,\{2\}}$	58.8	94.8	9.7	96.4	56.4
	$S_{n,\{3\}}$	41.0	73.3	5.8	94.2	49.4
	$S_{n,\{4\}}$	29.9	43.9	5.8	90.2	39.2
	$S_{n,\{2,3\}}$	47.2	86.3	7.0	95.3	52.6
	$S_{n,\{2,4\}}$	36.7	68.3	6.3	92.5	43.1
	$S_{n,\{3,4\}}$	35.0	58.6	6.0	92.2	42.3
Clayton	$S_{n,\{2\}}$	100.0	100.0	99.0	3.1	96.7
	$S_{n,\{3\}}$	100.0	100.0	99.8	3.0	95.6
	$S_{n,\{4\}}$	100.0	100.0	99.9	2.8	93.2
	$S_{n,\{2,3\}}$	100.0	100.0	99.5	2.9	96.6
	$S_{n,\{2,4\}}$	100.0	100.0	99.8	2.9	95.1
	$S_{n,\{3,4\}}$	100.0	100.0	99.8	3.1	94.5
Frank	$S_{n,\{2\}}$	74.0	95.3	49.4	93.7	2.9
	$S_{n,\{3\}}$	77.4	95.3	51.5	92.9	3.2
	$S_{n,\{4\}}$	78.9	94.8	52.5	90.0	3.9
	$S_{n,\{2,3\}}$	76.5	95.5	51.7	93.6	3.5
	$S_{n,\{2,4\}}$	79.4	95.3	53.8	92.6	3.9
	$S_{n,\{3,4\}}$	78.5	95.3	52.6	91.7	3.6

Table 5.5: Estimation, based on 1 000 replicates, of the probability of rejection of \mathcal{H}_0 for the tests based on $S_{n,\{2\}}$, $S_{n,\{3\}}$, $S_{n,\{4\}}$, $S_{n,\{2,3\}}$, $S_{n,\{2,4\}}$ and $S_{n,\{3,4\}}$ when $n = 200$ and $\tau = .75$

Model under \mathcal{H}_1	$S_{n,A}$	Model under \mathcal{H}_0				
		Gumbel	Gumbel A	Fréchet	Clayton	Frank
Gumbel	$S_{n,\{2\}}$	4.6	100.0	24.3	100.0	72.9
	$S_{n,\{3\}}$	3.0	100.0	15.1	100.0	80.1
	$S_{n,\{4\}}$	2.4	100.0	12.4	100.0	81.9
	$S_{n,\{2,3\}}$	3.4	100.0	17.8	100.0	79.2
	$S_{n,\{2,4\}}$	2.8	100.0	14.4	100.0	81.7
	$S_{n,\{3,4\}}$	2.5	100.0	13.1	100.0	81.4
	Fréchet	$S_{n,\{2\}}$	56.8	100.0	16.0	99.7
$S_{n,\{3\}}$		40.7	100.0	8.7	98.6	69.4
$S_{n,\{4\}}$		32.7	100.0	7.9	97.9	62.2
$S_{n,\{2,3\}}$		45.3	100.0	9.4	99.0	70.7
$S_{n,\{2,4\}}$		36.4	100.0	9.0	98.2	64.9
$S_{n,\{3,4\}}$		35.2	100.0	8.3	98.3	65.0
Clayton		$S_{n,\{2\}}$	100.0	100.0	100.0	2.3
	$S_{n,\{3\}}$	100.0	100.0	99.8	2.0	99.2
	$S_{n,\{4\}}$	100.0	100.0	99.9	2.1	98.5
	$S_{n,\{2,3\}}$	100.0	100.0	99.9	2.3	99.4
	$S_{n,\{2,4\}}$	100.0	100.0	99.9	2.3	98.9
	$S_{n,\{3,4\}}$	100.0	100.0	99.9	2.1	98.7
	Frank	$S_{n,\{2\}}$	80.5	100.0	77.3	99.4
$S_{n,\{3\}}$		78.0	100.0	73.3	98.9	1.0
$S_{n,\{4\}}$		77.3	100.0	70.9	98.6	1.2
$S_{n,\{2,3\}}$		79.3	100.0	75.5	99.4	0.8
$S_{n,\{2,4\}}$		79.1	100.0	73.6	99.0	1.1
$S_{n,\{3,4\}}$		78.2	100.0	72.1	98.7	1.1

Table 5.6: Results of the parameter estimation and goodness-of-fit tests for the pairs (Co,Cs), (Co,Sc), (Co,Ti), (Cs,Sc), (Cs,Ti) and (Sc,Ti) in the Uranium exploration data set

Pair	Model under \mathcal{H}_0	Estimation			$(S_{n,\mathcal{A}}, \widehat{p}_{\mathcal{A}})$		
		$\widehat{\theta}_{\{2\}}$	$\widehat{\theta}_{\{3\}}$	$\widehat{\theta}_{\{4\}}$	$\mathcal{A} = \{2, 3\}$	$\mathcal{A} = \{2, 4\}$	$\mathcal{A} = \{3, 4\}$
(Co,Cs)	Gumbel	0.17	0.13	0.11	(0.41, .00)	(0.48, .00)	(0.61, .00)
	Fréchet	0.16	0.15	0.15	(0.22, .01)	(0.29, .01)	(0.38, .01)
	Clayton	0.31	0.24	0.19	(0.07, .30)	(0.09, .34)	(0.10, .40)
	Frank	0.34	0.89	0.79	(0.11, .09)	(0.11, .18)	(0.15, .18)
(Co,Sc)	Gumbel	0.51	0.50	0.50	(0.29, .00)	(0.37, .00)	(0.48, .00)
	Fréchet	0.50	0.55	0.59	(0.07, .38)	(0.09, .39)	(0.12, .40)
	Clayton	1.88	1.88	1.82	(1.14, .00)	(1.70, .00)	(2.22, .00)
	Frank	5.63	5.63	5.59	(0.26, .00)	(0.35, .00)	(0.46, .00)
(Co,Ti)	Gumbel	0.36	0.35	0.33	(0.53, .00)	(0.74, .00)	(0.94, .00)
	Fréchet	0.34	0.39	0.42	(0.31, .00)	(0.43, .00)	(0.55, .00)
	Clayton	1.00	0.97	0.93	(0.65, .00)	(0.84, .00)	(1.09, .00)
	Frank	3.29	3.21	3.06	(0.07, .35)	(0.01, .34)	(0.11, .40)
(Cs,Sc)	Gumbel	0.23	0.25	0.26	(0.54, .00)	(0.82, .00)	(1.07, .00)
	Fréchet	0.22	0.29	0.34	(0.23, .00)	(0.40, .00)	(0.53, .00)
	Clayton	0.50	0.61	0.65	(0.14, .03)	(0.25, .01)	(0.32, .01)
	Frank	1.99	2.20	2.37	(0.09, .12)	(0.10, .21)	(0.11, .31)
(Cs,Ti)	Gumbel	0.31	0.31	0.31	(0.08, .26)	(0.13, .20)	(0.16, .22)
	Fréchet	0.30	0.36	0.39	(0.32, .00)	(0.42, .00)	(0.52, .00)
	Clayton	0.80	0.84	0.82	(1.86, .00)	(2.78, .00)	(3.59, .00)
	Frank	2.71	2.82	2.82	(0.65, .00)	(1.03, .00)	(1.33, .00)
(Sc,Ti)	Gumbel	0.43	0.41	0.40	(0.22, .01)	(0.34, .01)	(0.44, .01)
	Fréchet	0.41	0.46	0.49	(0.14, .07)	(0.23, .04)	(0.29, .05)
	Clayton	1.37	1.31	1.24	(1.19, .00)	(1.71, .00)	(2.20, .00)
	Frank	4.31	4.24	4.04	(0.24, .00)	(0.34, .00)	(0.42, .01)

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Dans ce mémoire, les fonctions de C-puissance associées à une copule ont été introduites et leurs propriétés ont été étudiées théoriquement. Ensuite, des versions empiriques ont été proposées, de même que des formules récursives qui facilitent grandement leur évaluation. Par une application non-triviale de la méthode Delta fonctionnelle, on a montré la convergence faible de processus basés sur les versions normalisées de ces fonctions empiriques. On a également démontré rigoureusement la validité asymptotique de versions multiplicateurs de ces processus.

Comme applications des résultats asymptotiques obtenus, de nouvelles procédures d'inférence pour les modèles de copules ont été développées. Premièrement, on a proposé une méthode d'estimation de paramètres qui s'avère particulièrement utile pour des modèles à plusieurs paramètres. Deuxièmement, des statistiques d'adéquation ont été définies afin de tester l'hypothèse d'appartenance à une certaine famille de copules. Ces statistiques sont faciles à calculer et puissantes. Des illustrations sur de vraies données ont montré l'utilité de ces méthodes.

Dans le futur, il serait intéressant d'utiliser les fonctions de C-puissance pour tester d'autres types d'hypothèses relatives aux copules. Par exemple, une adaptation relativement directe des résultats de ce mémoire permettrait de tester la symétrie d'un modèle de copule. On pourrait également développer des tests pour les valeurs extrêmes bivariées, ainsi que pour vérifier l'hypothèse d'*Archimédianité*.

Références

- ALSINA, C., FRANK, M. J. & SCHWEIZER, B. (2006). *Associative functions*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. Triangular norms and copulas.
- BARBE, P., GENEST, C., GHOUDI, K. & RÉMILLARD, B. (1996). On Kendall's process. *J. Multivariate Anal.* **58**, 197–229.
- BÜCHER, A. & DETTE, H. (2010). A note on bootstrap approximations for the empirical copula process. *Statistics and Probability Letters* **80**, 1925–1932.
- CAPÉRAÀ, P., FOUGÈRES, A.-L. & GENEST, C. (2000). Bivariate distributions with given extreme value attractor. *J. Multivariate Anal.* **72**, 30–49.
- CASELLA, G. & BERGER, R. L. (1990). *Statistical inference*. The Wadsworth & Brooks/Cole Statistics/Probability Series. Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.
- COOK, R. D. & JOHNSON, M. E. (1981). A family of distributions for

- modelling nonelliptically symmetric multivariate data. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **43**, 210–218.
- COOK, R. D. & JOHNSON, M. E. (1986). Generalized Burr-Pareto-logistic distributions with applications to a uranium exploration data set. *Technometrics* **28**, 123–131.
- DOBRIĆ, J. & SCHMID, F. (2005). Testing goodness of fit for parametric families of copulas—application to financial data. *Comm. Statist. B—Simul. Comput.* **34**, 1053–1068.
- DURANTE, F. (2007). A new family of symmetric bivariate copulas. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **344**, 195–198.
- FERMANIAN, J.-D. (2005). Goodness-of-fit tests for copulas. *J. Multivariate Anal.* **95**, 119–152.
- FISHER, R. A. & TIPPETT, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **24**, 180.
- FRÉCHET, M. (1957). Les tableaux de corrélation dont les marges et des bornes sont données. *Ann. Univ. Lyon. Sect. A (3)* **20**, 13–31.
- GENEST, C., GHOUDI, K. & RIVEST, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* **82**, 543–552.
- GENEST, C., NEŠLEHOVÁ, J. & QUESSY, J.-F. (2012). Tests of symmetry for bivariate copulas. *Ann. Inst. Statist. Math.* .

- GENEST, C., QUESSY, J.-F. & RÉMILLARD, B. (2006). Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation. *Scand. J. Statist.* **33**, 337–366.
- GENEST, C. & RÉMILLARD, B. (2008). Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **44**, 1096–1127.
- GENEST, C., RÉMILLARD, B. & BEAUDOIN, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study. *Insurance Math. Econom.* **44**, 199–213.
- GENEST, C. & RIVEST, L.-P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *J. Amer. Statist. Assoc.* **88**, 1034–1043.
- GENEST, C. & RIVEST, L.-P. (2001). On the multivariate probability integral transformation. *Statist. Probab. Lett.* **53**, 391–399.
- GUDENDORF, G. & SEGERS, J. (2010). Extreme-value copulas. *Copula Theory and Its Applications*, 127–145.
- GUMBEL, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **55**, 698–707.
- GUMBEL, E. J. (1961). Bivariate logistic distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **56**, 335–349.
- HÜRLIMANN, W. (2005). Properties and measures of dependence for the Archimax copula. *Adv. Appl. Stat.* **5**, 125–143.

- JUNG, S.-M. (2011). *Hyers-Ulam-Rassias stability of functional equations in nonlinear analysis*, vol. 48 of *Springer Optimization and Its Applications*. New York: Springer.
- KLEMENT, E. P., MESIAR, R. & PAP, E. (2004). Transformation of copulas and quasi-copulas. In *Soft methodology and random information systems*, Adv. Soft Comput. Berlin: Springer, pp. 181–188.
- KOJADINOVIC, I. & YAN, J. (2010). Nonparametric rank-based tests of bivariate extreme-value dependence. *J. Multivariate Anal.* **101**, 2234–2249.
- KOSOROK, M. (2008). *Introduction to empirical processes and semiparametric inference*. New York: Springer.
- MESFIOUI, M., QUESSY, J.-F. & TOUPIN, M.-H. (2009). On a new goodness-of-fit process for families of copulas. *Canad. J. Statist.* **37**, 80–101.
- NELSEN, R. B. (1997). Dependence and order in families of Archimedean copulas. *J. Multivariate Anal.* **60**, 111–122.
- NELSEN, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer Series in Statistics. New York: Springer, 2nd ed.
- PICKANDS, III, J. (1981). Multivariate extreme value distributions. In *Proceedings of the 43rd session of the International Statistical Institute, Vol. 2 (Buenos Aires, 1981)*, vol. 49. With a discussion.
- QUESSY, J.-F. (2012). Testing for bivariate extreme dependence using Kendall's process. *Scandinavian Journal of Statistics* **39**, 398–417.

- QUESSY, J.-F. & BELLERIVE, R. (2012). Statistical procedures for the selection of a multidimensional meta-elliptical distribution. *Journal de la Société Française de Statistique – Special issue on copula modelling* .
- SEGBERS, J. (2012). Weak convergence of empirical copula processes under nonrestrictive smoothness assumptions. *Bernoulli* **18**, 764–782.
- SHIH, J. H. & LOUIS, T. A. (1995). Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data. *Biometrics* **51**, 1384–1399.
- SKLAR, M. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8**, 229–231.
- TSUKAHARA, H. (2005). Semiparametric estimation in copula models. *Canad. J. Statist.* **33**, 357–375.
- VAN DER VAART, A. W. & WELLNER, J. A. (1996a). *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlag. With applications to statistics.
- VAN DER VAART, A. W. & WELLNER, J. A. (1996b). *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlag. With applications to statistics.

ANNEXE A

ESTIMATION DU GÉNÉRATEUR ARCHIMÉDIEN

A.1 Un estimateur *plug-in*

L'objectif de cette section est de décrire un estimateur non-paramétrique du générateur φ d'une copule Archimédienne. Le premier estimateur proposé exploite le fait que la transformation intégrale de probabilité d'une copule Archimédienne C_φ est

$$K_{C_\varphi}(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}.$$

Pour la simplicité, on notera plutôt $K_{C_\varphi} = K_\varphi$ dans la suite. De là, on a

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{t - K_\varphi(t)},$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\frac{d}{dt} \ln \varphi(t) = \frac{1}{t - K_\varphi(t)}.$$

En intégrant de chaque côté, on déduit finalement

$$\ln \varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{s - K_\varphi(s)}.$$

Ainsi, si \widehat{K} est un estimateur non-paramétrique de K_φ basé sur un échantillon $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, alors une estimation non-paramétrique du générateur φ est donnée par la fonction $\widehat{\varphi}$ telle que

$$\ln \widehat{\varphi}(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{s - \widehat{K}(s)}.$$

La façon la plus naturelle d'estimer K_φ de manière non-paramétrique est d'utiliser

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(W_{i,n} \leq t),$$

où

$$W_{i,n} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}(X_j < X_i, Y_j < Y_i).$$

Cet estimateur a été proposé par Genest & Rivest (1993) et son comportement asymptotique a été caractérisé de façon générale par Barbe et al. (1996).

L'estimateur de φ basé sur K_n est donc la fonction φ_n telle que

$$\ln \varphi_n(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{s - K_n(s)}.$$

De façon à obtenir une forme explicite pour φ_n , soient $\zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_N$, $N \leq n$, les endroits où la fonction K_n possède des sauts. Une autre façon d'écrire K_n est alors

$$K_n(t) = \sum_{j=1}^n p_j \mathbb{I}(\zeta_j \leq t),$$

où pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$p_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(W_{i,n} = \zeta_j).$$

Quand $t < \zeta_1$, on doit considérer, afin d'assurer que $K_n(s) - s > 0$,

$$\begin{aligned} \ln \varphi_n(t) &= \int_{\zeta_1}^t \frac{ds}{|s - K_n(s)|} \\ &= - \int_{\zeta_1}^t \frac{ds}{s} \\ &= \ln \left(\frac{\zeta_1}{t} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_n(t) = \zeta_1/t$ lorsque $t < \zeta_1$, ce qui permet de rencontrer les exigences d'un générateur Archimédien. Si $t \in [\zeta_j, \zeta_{j+1}]$, alors

$$\begin{aligned} \ln \varphi_n(t) &= \int_0^t \frac{ds}{|s - K_n(s)|} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\zeta_j}^{\min(\zeta_{j+1}, t)} \frac{ds}{s - p_j} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor nt-1 \rfloor} \ln(s - p_j) \Big|_{s=\zeta_j}^{s=\zeta_{j+1}} + \int_{\lfloor nt \rfloor / n}^t \frac{ds}{s - p_{\lfloor nt \rfloor}} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor nt-1 \rfloor} \ln \left(\frac{\zeta_{j+1} - p_j}{\zeta_j - p_j} \right) + \ln \left(\frac{t - p_{\lfloor nt \rfloor}}{\lfloor nt \rfloor / n - p_{\lfloor nt \rfloor}} \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\varphi_n(t) = \prod_{j=0}^{\lfloor nt-1 \rfloor} \left(\frac{\zeta_{j+1} - p_j}{\zeta_j - p_j} \right) \times \left(\frac{t - p_{\lfloor nt \rfloor}}{\lfloor nt \rfloor / n - p_{\lfloor nt \rfloor}} \right).$$

À noter que

$$\varphi_n(1) = \left(1 - \frac{\zeta_1}{p_0} \right) \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\zeta_{j+1} - p_j}{\zeta_j - p_j} \right) = 0,$$

ce qui est une des exigences imposées aux générateurs Archimédiens. Aussi, on peut montrer que

$$\varphi_n \left(\frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{\zeta_1}{p_0}.$$

A.2 Interpolation linéaire de K_n

L'interpolation linéaire de K_n est définie pour $t \in [\zeta_{i-1}, \zeta_i]$ par

$$\begin{aligned} K_n^*(t) &= K_n(\zeta_{i-1}) + \{K_n(\zeta_i) - K_n(\zeta_{i-1})\} \left(\frac{t - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} \right) \\ &= \frac{(\zeta_i - t) K_n(\zeta_{i-1}) - (\zeta_{i-1} - t) K_n(\zeta_i)}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}. \end{aligned}$$

En notant que

$$\begin{aligned} K_n(\zeta_i) &= \sum_{j=1}^N p_j \mathbb{I}(\zeta_j \leq \zeta_i) \\ &= \sum_{j=1}^i p_j \mathbb{I}(\zeta_j \leq \zeta_i) + \sum_{j=i+1}^N p_j \mathbb{I}(\zeta_j \leq \zeta_i) \\ &= \sum_{j=1}^i p_j, \end{aligned}$$

on déduit que pour $t \in [\zeta_{i-1}, \zeta_i]$,

$$K_n^*(t) = \sum_{j=1}^{i-1} p_j + p_i \left(\frac{t - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} \right).$$

Soit maintenant

$$\ln \varphi_n^*(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{s - K_n^*(s)}.$$

La fonction φ_n^* est un générateur Archimédien au sens où elle est convexe et décroissante. Aussi, $\varphi_n^*(1) = 0$ en autant que $K_n^*(t) > t$ pour tout t . Il s'agit de prendre, en général, $t_0 = \zeta_1$ et $p_0 = \zeta_0 = 0$. Dans le cas $t < \zeta_1$, on a

$$K_n^*(t) = p_1 \left(\frac{t - \zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0} \right) + p_0 = \frac{p_1 t}{\zeta_1}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
 \ln \varphi_n^*(t) &= \int_{\zeta_1}^t \frac{ds}{s - K_n^*(s)} \\
 &= \int_{\zeta_1}^t \frac{ds}{s - \frac{p_1 s}{\zeta_1}} \\
 &= \left(1 - \frac{p_1}{\zeta_1}\right)^{-1} \int_{\zeta_1}^t \frac{ds}{s} \\
 &= \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - p_1} \ln \left(\frac{t}{\zeta_1}\right),
 \end{aligned}$$

ce qui fait que

$$\varphi_n^*(t) = \left(\frac{t}{\zeta_1}\right)^{\frac{\zeta_1}{\zeta_1 - p_1}}.$$

Si $t \in [\zeta_{i-1}, \zeta_i)$, alors

$$\begin{aligned}
 \ln \varphi_n^*(t) &= \sum_{j=2}^{i-1} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \frac{ds}{s - K_n^*(s)} + \int_{\zeta_{i-1}}^t \frac{ds}{s - K_n^*(s)} \\
 &= \sum_{j=2}^{i-1} I_j + R_i(t).
 \end{aligned}$$

Ici,

$$\begin{aligned}
 I_j &= \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \frac{ds}{s - K_n^*(s)} \\
 &= \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \frac{ds}{s - \sum_{k=1}^{j-1} p_k + p_j \left(\frac{s - \zeta_{j-1}}{\zeta_j - \zeta_{j-1}}\right)} \\
 &= \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} \frac{ds}{s \left(1 + \frac{p_j}{\zeta_j - \zeta_{j-1}}\right) - K_j}
 \end{aligned}$$

où

$$K_j = \sum_{k=1}^{j-1} p_k + \frac{p_j \zeta_{j-1}}{\zeta_j - \zeta_{j-1}}.$$

En intégrant, on obtient

$$I_j = \left(1 - \frac{p_j}{\zeta_j - \zeta_{j-1}}\right)^{-1} \ln \left[\frac{\zeta_j \left(1 - \frac{p_j}{\zeta_j - \zeta_{j-1}}\right) - K_j}{\zeta_{j-1} \left(1 - \frac{p_j}{\zeta_j - \zeta_{j-1}}\right) - K_j} \right].$$

Également,

$$\begin{aligned} R_i(t) &= \int_{\zeta_{i-1}}^t \frac{ds}{s - K_n^*(s)} \\ &= \int_{\zeta_{i-1}}^t \frac{ds}{s - \sum_{j=1}^{i-1} p_j - \frac{s p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} + \frac{p_i \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}} \\ &= \int_{\zeta_{i-1}}^t \frac{ds}{s \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right) - \left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j - \frac{p_i \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right)} \\ &= \int_{\zeta_{i-1}}^t \frac{ds}{s \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right) - K_i} \\ &= \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right)^{-1} \ln \left\{ \frac{t \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right) - K_i}{\zeta_{i-1} \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right) - K_i} \right\}. \end{aligned}$$

On montre ainsi que

$$\varphi_n^*(t) = \exp \left(\sum_{j=2}^{i-1} I_j \right) \left\{ \frac{\zeta_i \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right) - K_i}{\zeta_{i-1} \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right) - K_i} \right\} \left(1 - \frac{p_i}{\zeta_i - \zeta_{i-1}}\right)^{-1}.$$