UNIVERSITE DU QUEBEC

MEMOIRE PRESENTE A

L'UNIVERSITE DU QUEBEC A TROIS-RIVIERES

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE ES SCIENCES (PHYSIQUE)

PAR

ROBERT TREMBLAY

HOMOGENEITE DE L'ESPACE-TEMPS ET LINEARITE DES TRANSFORMATIONS CINEMATIQUES

Décembre 1991

RESUME

Dans la littérature, on retrouve plusieurs démonstrations des transformations de Lorentz où leur caractère linéaire est déduit d'un principe alors nommé *principe d'homogénéité de l'espace-temps*. L'argumentation est rarement explicite, et la notion d'homogénéité même, demeure souvent vague. Dans cette étude, nous nous proposons de préciser la notion d'homogénéité de l'espace-temps, et de vérifier si elle implique la linéarité des transformations cinématiques.

Dans le premier chapitre, nous analysons quelques définitions d'homogénéité de l'espace-temps qui ont été données, justement dans le dessein de déduire le caractère linéaire des transformations de Lorentz. De plus, nous y ajoutons deux autres définitions qui poursuivent un but tout à fait différent.

Nous amorçons le second chapitre avec une définition explicite de l'homogénéité de l'espace-temps lorsque ce dernier est considéré plat. Nous en profitons pour bien spécifier ce que nous entendons par *transformation cinématique*. Nous terminons ce chapitre avec trois autres définitions de l'homogénéité données dans le cadre des théories métriques de la gravité.

A partir de deux exemples puisés dans la théorie des groupes de transformations continues, nous allons voir, au chapitre trois, si l'homogénéité implique la linéarité des transformations cinématiques.

Enfin, nous allons conclure sur le fait que les transformations de Lorentz se démontrent avec un minimum d'axiomes ne faisant pas intervenir de principe comme celui de l'homogénéité de l'espace-temps.

REMERCIEMENTS

Je tiens particulièrement à remercier le Docteur Louis Marchildon qui m'a dirigé dans cette recherche avec beaucoup de patience et de disponibilité. Son aide et ses conseils toujours judicieux m'ont considérablement aidé à organiser et clarifier ce travail. J'en profite également pour souligner l'excellente collaboration de madame Aline Simoneau, secrétaire au département de physique de l'U.Q.T.R.. De par sa persévérance et son professionnalisme, cette dernière a permis au texte de ce mémoire d'apparaître dans sa présente forme.

TABLE DES MATIERES

Page

INTRODUCTION

Dans la littérature, on retrouve plusieurs démonstrations des transformations de Lorentz où leur caractère linéaire est déduit d'un principe alors nommé *principe d'homogénéité de l'espace-temps*. L'argumentation est rarement explicite, et la notion d'homogénéité même, demeure souvent vague. Dans cette étude, nous nous proposons de préciser la notion d'homogénéité de l'espace-temps, et de vérifier si elle implique la linéarité des transformations cinématiques.

Dans le premier chapitre, nous analysons quelques définitions d'homogénéité de l'espace-temps qui ont été données, justement dans le dessein de déduire le caractère linéaire des transformations de Lorentz. De plus, nous incluons deux définitions qui poursuivent un but tout à fait différent. En fait, les définitions sont envisagées, soit dans le contexte d'un espace-temps plat, soit en présence d'un champ gravitationnel. Dans ce dernier cas, les *théories métriques de la gravité* constituent le point de départ à la discussion.

Nous amorçons le second chapitre avec une définition explicite de l'homogénéité de l'espace-temps lorsque ce dernier est considéré plat. Dans ce sens, nous disons que l'espace-temps est homogène s'il y a un sous-ensemble du groupe des transformations de coordonnées tel que, pour toute paire de points de l'espace-temps, il existe un élément du sous-ensemble qui transforme ces deux points l'un dans l'autre. Il est à noter que le groupe des transformations de coordonnées forme un sous-groupe invariant du groupe de symétrie des lois physiques. On peut touver un sous-groupe des transformations de coordonnées qui nous permet de construire une variété homéomorphe à l'espace-temps, comme un "espace quotient". Cette définition fait appel au formalisme mathématique de la théorie des groupes et nous conduit à la définition de *groupe cinématique* qui correspond au sous-groupe des transformations de coordonnées. Nous terminons ce chapitre avec trois autres définitions de l'homogénéité données dans le cadre des théories métriques de la gravité. Ces dernières font intervenir le formalisme de la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Nous allons vérifier, au chapitre trois, la validité de l'affirmation qui dit que l'homogénéité implique la linéarité des transformations cinématiques. Pour ce faire, nous élaborerons deux exemples puisés dans la théorie des groupes de transformations continues. En fait, nous allons montrer que le groupe cinématique constitué par les transformations homogènes de Lorentz est une application linéaire sur la variété formée à partir du groupe des transformations de Poincaré. Nous rappelons que le groupe de Poincaré préserve les équations de la relativité restreinte. Par contre, le groupe cinématique formé à partir des produits du groupe homogène de Lorentz, des dilatations et des accélérations constitue, lui, une application non linéaire sur la variété construite avec le groupe conforme. Le groupe conforme préserve les équations de l'électrodynamique.

CHAPITRE 1

HOMOGENEITE DE L'ESPACE-TEMPS: EXAMEN DE LA LITTERATURE

1.1 Introduction

Nous nous proposons ici de faire ressortir certaines définitions qui ont été données depuis Albert Einstein en ce qui a trait à la propriété d'homogénéité que l'on attribue à la structure de l'espace-temps. Notre but n'est pas de faire une analyse exhaustive de ces définitions, ou de noter toutes celles qui ont été faites à ce jour, mais bien de cerner les principales selon un ordre chronologique et de souligner leurs limites. Suite à ce survol, il nous sera loisible de jeter les bases pour de nouvelles définitions.

1.2 Einstein (1905)

Lors de la recherche des équations de transformation de l'espace-temps reliant un système de référence en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un système de référence inertiel*, Einstein(1) affirma que ces dernières doivent être linéaires si la propriété d'homogénéité de l'espace-temps est posée.

---

* L'expression anglaise utilisée dans la traduction de l'article de 1905 d'Einstein était "stationnary system" pour signifier un système de coordonnées dans lequel les équations de la mécanique newtonienne sont valides (en première approximation). Nous utiliserons l'expression plus usuelle de nos jours, soit "système de référence inertiel".

Einstein fut le premier à invoquer cette propriété pour justifier la linéarité des équations de transformation. Il n'a pas explicité davantage ce qu'il entendait par homogénéité de l'espace-temps.

1.3 Lalan (1937)

Dans le cadre de la détermination des cinématiques*, M.V. Lalan[2] a donné une définition de l'homogénéité de l'espace-temps.

Soit C l'opération qui consiste à changer de référentiel tout en conservant l'origine de l'espace-temps:

$$C: \quad \begin{aligned} x' &= f(x,t,v) \\ t' &= g(x,t,v), \end{aligned} \qquad (1.3.1)$$

où v représente la grandeur de la vitesse d'un point quelconque fixe dans le système de référence S′ par rapport à un système de référence S. Lalan postule que l'opération C jouit de la propriété suivante:

> "...si avant d'effectuer l'opération C, on change l'origine du système S, il est possible de ramener l'opération C à sa forme primitive en effectuant un changement d'origine convenable dans le système S′."

---

* Il est à noter ici que l'auteur n'indique pas ce qu'il entend par "cinématique". Nous nous proposons d'en donner une définition au chapitre suivant.

Autrement dit, si on note

$$T_0: \quad \begin{aligned} x &\to x-x_0 \\ t &\to t-t_0 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

et

$$T_{0'}: \quad \begin{aligned} x' &\to x'-x'_0 \\ t' &\to t'-t'_0 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

les deux changements d'origine respectivement dans S et S', la propriété d'homogénéité de l'espace-temps s'exprimera par

$$T_{0'}CT_0 = C, \tag{1.3.4}$$

c'est-à-dire

$$f(x-x_0,t-t_0,v)-x'_0 = f(x,t,v) \tag{1.3.5}$$

et

$$g(x-x_0,t-t_0,v)-t'_0 = g(x,t,v), \tag{1.3.6}$$

d'où l'on déduit aussitôt la forme linéaire* de f et g par rapport à x et t, soit

$$x' = \alpha(v)(x-vt) \tag{1.3.7}$$

---

* Il est à noter que l'auteur ne donne pas la preuve que ladite propriété conduit à la linéarité. En fait, ce résultat est bien démontré en annexe d'un article de V. Berzi et V. Gorini(3).

$$t' = \beta(v)x + \gamma(v)t \ . \tag{1.3.8}$$

Une question se soulève ici, soit: les changements d'origine peuvent-ils toujours s'exprimer comme les transformations T_0 et $T_{0'}$?

A cet effet, Lalan affirme ceci:

> "Quelque hypothèse qu'on fasse sur la nature de l'espace-temps, il est toujours loisible de faire agir dans cette variété un groupe quelconque. C'est la nature de l'opération à représenter qu'il importe d'examiner, et aussi le genre de variables que l'on se propose d'utiliser, car un groupe change de forme quand on change de variables.
>
> Nous caractérisons les variables x, t par la façon dont elles se transforment quand on change d'origine dans l'espace-temps. Les changements d'origine dans l'espace-temps (à deux dimensions, par hypothèse) sont des opérations dont l'ensemble constitue un groupe à deux paramètres. Ce groupe est abélien, car les changements d'origine sont permutables deux à deux; en conséquence, il peut s'écrire grâce à un choix convenable des variables
>
> $$u' = u-u_0,\ v' = v-v_0 \ ." \tag{1.3.9}$$

Nous pouvons remarquer que Lalan considère l'espace-temps comme une variété. A ce sujet, on peut retrouver dans les volumes de A.O. Barut et R. Raczka[4] et de Gilmore[5] une bonne définition de ce que l'on entend par une variété. Par exemple, Barut et Raczka définissent les variétés topologiques, différentielles et analytiques*. Dans l'ordre énuméré, les variétés sont dotées de plus en plus de structure. Nous pouvons remarquer aussi que la question ci-haut mentionnée peut se ramener à la suivante: les changements d'origine dans la variété de l'espace-temps peuvent-ils toujours s'exprimer comme les transformations T_0 et $T_{0'}$?

Nous pouvons faire les constatations suivantes:

-Première constatation

Le fait de considérer l'espace-temps comme une variété, assure qu'on peut construire un système de coordonnées dans le voisinage de n'importe quel point de la variété.

-Deuxième constatation

Prenons comme variété un espace vectoriel réel et dotons ce dernier de coordonnées rectilignes. Nous pouvons alors toujours exprimer les changements d'origine comme T_0 et $T_{0'}$.

Soit un espace euclidien réel muni de coordonnées rectangulaires (ou cartésiennes). Chaque point de cet espace, que nous choisissons de dimension deux, peut être exprimé par la suite de deux nombres réels, soit

---

* Dans l'annexe A, nous avons trouvé opportun de rappeler la définition d'un espace vectoriel et d'un espace euclidien. Dans l'annexe B, nous donnons la définition d'une variété topologique, d'une variété différentielle et d'une variété analytique.

$$P = (x,y) . \tag{1.3.10}$$

Dans ce système de coordonnées, la métrique (ici la distance entre deux points) sera donnée par

$$d = [(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]^{1/2} . \tag{1.3.11}$$

Ceci représente la distance entre un point quelconque $P = (x,y)$ et un point fixe $P_1 = (x_1,y_1)$ qu'on peut considérer comme nouvelle origine, c'est-à-dire autre que $P_0 = (0,0)$.

Par un choix approprié du système de coordonnées, ici les coordonnées rectangulaires, il est possible d'exprimer un changement d'origine par nos transformations T_0 et $T_{0'}$ dans un espace vectoriel réel. Il n'en serait pas de même si on avait choisi, par exemple, un système de coordonnées polaires.

-Troisième constatation

Prenons des surfaces dans un espace euclidien réel à trois dimensions et qui constituent des variétés. Analysons trois cas, soit un cylindre, une sphère et une surface quelconque. Dans le cas du cylindre, nous obtenons la métrique

$$d = [R^2(\theta-\theta_1)^2+(z-z_1)^2]^{1/2} \tag{1.3.12}$$

lorsqu'on utilise des coordonnées cylindriques. Le changement d'origine peut alors être exprimé par T_0 et $T_{0'}$.

Dans le cas de la sphère, que nous prendrons de rayon R = 1 pour simplifier, nous obtenons la métrique

$$d = \cos^{-1}\{(1/2)[\cos(\theta-\theta_1)-\cos(\theta+\theta_1)]\cos(\varphi-\varphi_1) \\ + (1/2)[\cos(\theta-\theta_1)+\cos(\theta+\theta_1)]\} \ , \qquad (1.3.13)$$

lorsque nous utilisons les coordonnées sphériques. Comme la métrique n'est pas seulement une fonction de $\theta-\theta_1$ (ou $\theta+\theta_1$), elle n'est pas invariante sous T_0 et $T_{0'}$. Sans en faire une preuve formelle, nous pouvons présumer que dans le cas de la sphère, il n'existe pas de système de coordonnées dans lequel T_0 et $T_{0'}$ représentent un changement d'origine.

Si nous choisissons une surface quelconque, dans l'espace euclidien réel à trois dimensions, qui satisfait la définition d'une variété topologique, alors il existe un voisinage autour de chaque point de la variété qui est en corresondance biunivoque avec un voisinage de l'espace euclidien à deux dimensions. Nous pouvons sûrement effectuer des transformations du type T_0 et $T_{0'}$ à l'intérieur de ces voisinages. Mais ce n'est sans doute pas toujours le cas lorsque nous prenons une partie de la surface qui n'est pas en correspondance biunivoque avec un voisinage de l'espace euclidien réel à deux dimensions.

Donc, l'affirmation de Lalan en ce qui a trait aux transformations T_0 et $T_{0'}$ à l'intérieur d'une variété n'est valide que lorsqu'on ajoute certaines contraintes comme, par exemple, lorsqu'on se limite à l'intérieur de voisinages qui sont en correspondance biunivoque avec un voisinage de l'espace euclidien réel, ou lorsqu'on prend un espace vectoriel réel. De plus, la définition d'homogénéité de cet auteur exclut la sphère qui est homogène du point de vue métrique*. Par contre, si on prend comme variété une surface quelconque, cette dernière sera non homogène tant du point de vue métrique que selon la définition de Lalan.

1.4 Drake (1966)

Passons maintenant à la contribution de E. Drake[7]. Il écrit**

> "We summarize first the usual application of the principle of relativity to two frames in uniform relative motion to fine down the form of transformation. Motion and all measurements are in the x direction.
>
> Let
>
> $$x' = F(v,x,t). \tag{1.4.1}$$
>
> Assume that dx' caused by dx and dt is independent of x ant t. Also fix the clocks so that at $x = 0$, $t = 0$ then $x' = 0$, $t' = 0$. These conditions demand that F must be linear in x and t. Thus

---

* En fait, c'est ce que nous verrons à la section 1.9.

** Nous avons décidé de noter les citations en anglais lorsque l'article est dans cette langue et ce, de manière à rendre exactement ce que les auteurs veulent nous communiquer.

$$x' = ax + ht \tag{1.4.2}$$

where a and h depend on v only."

Comme l'hypothèse au sujet du dx' est reprise plus en détail dans un article de J.M. Lévy-Leblond, nous en discuterons lorsque nous analyserons ce dernier.

1.5 Berzi et Gorini (1969)

V. Berzi et V. Gorini(3) ont tenté de déduire le principe de réciprocité à partir de certaines hypothèses, entre autres, l'homogénéité de l'espace-temps. Il est à noter que le principe de réciprocité établit que la vitesse d'un système de référence inertiel S par rapport à un autre système de référence inertiel S' est l'opposée de la vitesse de S' par rapport à S.

En fait, ces auteurs reprennent la définition de l'homogénéité qui a été donnée par Lalan. Ces derniers parlent au début de l'article de variété. En effet,

> "By using the principle of relativity, together with the customary assumption concerning the nature of the space-time manifold in special relativity, namely, space-time homogeneity and isotropy of space, a simple but rigorous proof is given of the reciprocity relation for the relative motion of two inertial frames of reference, which is usually assumed as a postulate in the standard derivations of

> the Lorentz transformations without the principle of invariance of light velocity"

Regardons maintenant comment les auteurs appliquent le principe d'homogénéité de l'espace-temps.

> "(...), let us employ the notation ξ for the two-vector (x,t) and write the transformation which connects S to S′ as
>
> $$\xi' = f(\xi) \tag{1.5.1}$$
>
> (...)
>
> The homogeneity of space-time requires that a space-time translation T not affect the relation between the two observers and thus leaves the transformation invariant. Denoting by T_α and $T_{\alpha'}$ the representations of T relative to S and S′, respectively, we express this property by the relation
>
> $$f(T_\alpha \xi) = T_{\alpha'} f(\xi) \tag{1.5.2a}$$
>
> or
>
> $$f(\xi + \alpha) = f(\xi) + \alpha', \tag{1.5.2b}$$
>
> where $\alpha = (\alpha_x, \alpha_t)$, $\alpha' = (\alpha_{x'}, \alpha_{t'})$, and α' depends on f and α but not on ξ."

Nous pouvons faire les mêmes remarques ici que celles que nous avons faites dans la section 1.3. Il est intéressant de noter que les auteurs donnent une preuve que leur définition d'homogénéité implique la linéarité; ce qui n'était pas le cas pour Lalan.

1.6 Lugiato et Gorini (1972)

L.A. Lugiato et V. Gorini[8] ont discuté, entre autres, du contenu de ce qu'ils appellent "l'axiome de l'homogénéité de l'espace-temps", faisant suite à l'article de Berzi et Gorini ainsi qu'à celui de Lalan.

Ici, les auteurs affirment explicitement que la structure de l'espace-temps est vectorielle:

> "For definiteness, we shall assume without loss of generality that the coordinates are chosen in such a way that the domain of coordinate sets of all possible events is R^4 and that two distinct events have distinct coordinate sets".

Un peu plus loin, les auteurs considèrent l'espace (sans le temps) euclidien:

> "We now postulate on experimental grounds the existence of a nonvoid class $\mathcal{O} = \{O\}$ of observers, with the class $\mathcal{J} = \{J\}$ of their corresponding frames $J \leftrightarrow O = O_J$, which we call "pre-inertial frames of reference", such that
>
> (A) with respect to each observer of the class $\mathcal{O}$, space appears to be Euclidean and the

localization of events in space is given in terms of orthogonal, say, right-handed triads and

(B) the clocks of each frame $J \in \mathcal{J}$ can be synchronized in such a way that the following properties hold."

Suite à ces affirmations, les auteurs donnent une signification (que nous pouvons considérer en même temps comme une définition et un postulat) de ce qu'ils entendent par homogénéité de l'espace-temps, soit:

1°

"If $J \in \mathcal{J}$, space and time are homogeneous according to O_J, meaning that

(i) for any given apparatus A_0 at rest in J and geometrically characterized by the set of spatial coordinates $\{\mathbf{x}\}$ and for any given 3-vector $\mathbf{a}$, O_J can in principle build a copy $A_\mathbf{a}$ of A_0, which is geometrically characterized by the set of coordinates $\{\mathbf{x} + \mathbf{a}\}$;

(ii) for any given experiment E_0 performed with A_0 and geometricaly characterized by the set of space-time coordinates $\{\mathbf{x},t\}$ and for any given 4-vector $\{\mathbf{a},t_0\}$, O_J can in principle perform with $A_\mathbf{a}$ a corresponding copy experiment $E_{\mathbf{a},t_0}$ geometrically characterized by the set of coordinates $\{\mathbf{x} + \mathbf{a}, t + t_0\}$."

2°

> "Axiom T: Let J, J′ ∈ 𝒥 and let $x \rightarrow x' = f(x)$ be the coordinate transformation from J to J′. If b is an arbitrary 4-vector, let $J_{(b)}$ denote the frame space-time translated by b with respect to J:
>
> $$x^{(b)} = x - b.$$
>
> Then $J_{(b)}$ is seen also by J′ as being space-time translated with respect to J, namely a 4-vector b′ exists such that
>
> $$f(x^{(b)}) = f(x) - b'."$$

Ce qui est intéressant dans cet article, c'est que les auteurs ajoutent plus de contenu physique que ne le font Berzi et Gorini. De plus, en se limitant à des espaces vectoriels, leurs affirmations au sujet des translations sont valides.

1.7 Lévy-Leblond (1976)

J.M. Lévy-Leblond (9) définit l'homogénéité comme suit:

> "We assume first that space-time is homogeneous, in that it has "everywhere and every time" the same properties. More precisely, the transformation properties of a spatio-temporal interval (Δx, Δt) depend only on the interval and not the location of its end points (in the considered reference frame). In other words, the transformed interval ($\Delta x'$, $\Delta t'$)

obtained through an inertial transformation is independent of these end points.

Looking at an infinitesimal interval (dx, dt), for which

$$dx' = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt \tag{1.7.1a}$$

$$dt' = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt, \tag{1.7.1b}$$

this requirement is seen to mean that the coefficients of dx and dt must be independent of x and t, so that F and G are linear functions of x and t. We thus write

$$x' = H(a)x - K(a)t, \tag{1.7.2a}$$

$$t' = L(a)t - M(a)x, \tag{1.7.2b}$$

where the minus sign has been introduced for future convenience".

On voit bien que cette définition coïncide avec l'hypothèse faite par Drake, du moins lorsqu'on exclut le début qui dit que les propriétés de l'espace-temps sont partout et en tout temps les mêmes, si on considère l'espace-temps homogène. Il est à noter que Drake utilisait une hypothèse sans la relier à une propriété de l'espace-temps.

Disons immédiatement que la définition de l'homogénéité de l'espace-temps proposée par Lévy-Leblond nous paraît restrictive.

1.8 Sjödin (1982)

T. Sjödin[10] reprend, à peu de choses près, ce que Lévy-Leblond donnait comme définition de l'homogénéité de l'espace-temps.

> "The problem of the linearity of the Lorentz transformations has been discussed by many authors. Different starting points have been chosen, as e.g. the wave equation, Newton's first law, homogeneity of inertial frames, etc. The principle of relativity is often used at some stage at these derivations. Here, continuing in the tradition of Fitzgerald, Lorentz, Larmor, Poincaré, Yves, Podlaha, and others, the principle of relativity will not be used, but a set of very general linear transformations will be derived, comprising the Galilei and Lorentz transformations as special cases. It will be shown that, presupposing a convenient choice of units and of synchronization, their linearity is a consequence of the fact that the functions deciding the behaviour of moving bodies and clocks are independent of the time and space coordinates ("homogeneity of time and space")."

1.9 Homogenéité dans le cadre des théories métriques de la gravité

Nous donnerons ici deux définitions de l'homogénéité de l'espace-temps dans le contexte des théories métriques de la gravité.

Au préalable, nous allons noter deux hypothèses qui sont généralement admises au sujet du formalisme mathématique à utiliser lorsque l'on discute des théories, métriques ou non, de la gravité* .

(H1) L'espace-temps est une variété différentielle quadridimensionnelle dans laquelle chaque point correspond à un événement physique. A priori, la variété n'est pas nécessairement dotée d'une métrique ou d'une connection affine, mais il semble que l'expérience nous amène à conclure qu'il en est ainsi.

(H2) Les équations décrivant les phénomènes gravitationnels, ainsi que les grandeurs physiques qu'on y retrouve, doivent être exprimées dans une forme covariante, c'est-à-dire dans une forme indépendante du choix du système de coordonnées.

a) <u>Première définition</u>**

Considérons un espace quadridimensionnel muni du tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$, où $\mu,\ \nu = 0,1,2,3$.

---

* Voir C.M. Will[14], page 17.

** On peut retrouver les développements effectués ici au chapitre 13 du volume de S. Weinberg[11]. Ils sont repris dans le mémoire de J. Gauthier[12].

Ce tenseur est dit de forme invariante sous une transformation des coordonnées $x \rightarrow x'$ lorsque la dépendance fonctionnelle du tenseur métrique transformé $g'_{\mu\nu}(x')$ en termes de x' est la même que celle de $g_{\mu\nu}(x)$ en termes de x, c'est-à-dire:

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \tag{1.9.1}$$

pour tout y. On sait qu'en tout point, la relation entre les deux tenseurs métriques est donnée par

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} x^{\rho} \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} [x^{\sigma}]\, g_{\rho\sigma}(x) \tag{1.9.2}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} x'^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [x'^{\sigma}]\, g'_{\rho\sigma}(x'). \tag{1.9.3}$$

Les équations (1.9.1) et (1.9.3) donnent:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} x'^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [x'^{\sigma}]\, g_{\rho\sigma}(x'). \tag{1.9.4}$$

Toute transformation $x \rightarrow x'$ telle que la relation (1.9.4) est satisfaite est appelée isométrie. Considérons le cas particulier où la transformation est infinitésimale,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon\xi^{\mu} \text{ avec } |\varepsilon| << 1. \tag{1.9.5}$$

L'équation (1.9.4) devient alors

$$0=\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}[\xi^{\mu}(x)]\, g_{\mu\sigma}(x)+\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}[\xi^{\nu}(x)]\, g_{\rho\nu}(x)+\xi^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\rho\sigma}(x)\,. \quad (1.9.6)$$

A l'aide de l'équation

$$\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma}\, \xi^{\mu} \quad (1.9.7)$$

reliant les composantes covariantes et contravariantes du quadrivecteur ξ, on démontre que l'équation (1.9.6) devient

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} \quad (1.9.8)$$

où, rappelons-le,

$$\xi_{\sigma;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \xi_{\sigma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho}\, \xi_{\alpha} \quad (1.9.9)$$

est la dérivée covariante de ξ_{σ} et le $\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho}$ est le symbole de Christoffel (ou connection affine),

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} g_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\sigma\rho} \right). \quad (1.9.10)$$

La matrice $\| g^{\nu\sigma} \|$ est définie comme l'inverse de la matrice $\| g_{\nu\sigma} \|$. Alors,

$$g^{\nu\sigma}\, g_{\kappa\nu} = \delta^{\sigma}{}_{\kappa}.$$

Tout quadrivecteur satisfaisant à l'équation (1.9.8) est dit vecteur de Killing du tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$ et la transformation infinitésimale $x'^{\mu} = x^{\mu}+\varepsilon\xi^{\mu}(x)$ est appelée une isométrie infinitésimale. On peut montrer qu'il y a au plus $N(N+1)/2$ vecteurs de Killing indépendants dans un espace à N dimensions. Certaines isométries, au plus N dans un espace à N dimensions, correspondent à des translations infinitésimales, les autres corespondent à des rotations autour d'un point.

Un espace à N dimensions est dit homogène s'il existe N isométries indépendantes, de sorte que tout point x puisse être transporté en tout point $x + dx$ situé dans son voisinage au moyen d'une isométrie. On peut montrer que l'espace sphérique bidimensionnel dont nous avons parlé à la fin de la section 1.3 est homogène au sens de cette définition.

b) <u>Deuxième définition</u>

Une autre définition peut être construite à partir des postulats qui sont à la base de toute théorie métrique de la gravité. En fait, ces théories sont construites à partir des deux hypothèses citées au début de cette section au sujet du formalisme mathématique à utiliser et des deux postulats* suivants:

(P1) L'espace-temps quadridimensionnel est doté d'une métrique dont le tenseur métrique est symbolisé par $g_{\mu\nu}$.

(P2) Le principe d'équivalence d'Einstein** est valide.

---

* Voir C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler[13], page 1067.

** Ce principe est connu sous l'expression anglaise de "Einstein equivalence principle (EEP)".

Explicitons maintenant le principe d'équivalence d'Einstein. Ce dernier stipule qu'au voisinage de n'importe quel point de l'espace-temps, situé dans un champ gravitationnel quelconque* , on peut toujours trouver un système de référence dans lequel les lois décrivant n'importe quelles expériences locales non gravitationnelles** sont celles prescrites par la théorie de la relativité restreinte. Ce système de reférence est alors appelé *système de référence localement inertiel* et il correspond en fait à un système de référence en chute libre. Le principe d'équivalence d'Einstein peut être exprimé plus spécifiquement à partir des trois postulats*** suivants:

(E1) Le principe d'équivalence de Newton**** est valide pour n'importe quel 'corps ponctuel' ***** .

(E2) Dans un repère localement inertiel, les résultats de n'importe quelles expériences locales non gravitationnelles sont indépendants de la vitesse de ce dernier. En fait, dans deux laboratoires localement inertiels situés au voisinage d'un même point de l'espace-temps et se déplaçant l'un par rapport à l'autre, on obtiendrait des résultats identiques pour des expériences identiques.

---

* On suppose ici que le seul champ externe en est un de nature gravitationnelle.

** On entend par expérience locale non gravitationnelle une expérience effectuée dans un laboratoire suffisamment petit de façon à ce que les inhomogénéités du champ gravitationnel soient négligeables, de même que les effets gravitationnels internes.

*** Voir C.M. Will[14] à la page 22.

**** Connu sous l'expression anglaise de "Newton's equivalence principle" ou "Weak equivalence principle(WEP)".

***** On entend par 'corps ponctuel' un corps suffisamment petit pour que les inhomogénéités du champ gravitationnel soient négligeables, de même que son énergie gravitationnelle interne.

(E3) Dans un repère localement inertiel, les résultats de n'importe quelles expériences locales non gravitationnelles sont indépendantes de où et quand dans l'univers elles sont effectuées.

Le troisième postulat peut être interprété comme la propriété d'homogénéité que l'on veut attribuer à la structure de l'espace-temps.

Pour terminer, nous expliquerons ce que nous entendons par principe d'équivalence de Newton. Ce principe stipule que la 'masse inertielle' M_I est égale à la 'masse gravitationnelle' m_G. Nous entendons par masse inertielle la propriété d'un corps qui régit sa réponse à une force appliquée quelconque, et par masse gravitationnelle la propriété d'un corps qui régit sa réponse à une force de nature gravitationnelle. Dans ce sens, tous les 'corps ponctuels', baignant dans un champ gravitationnel quelconque, subissent la même accélération en un point donné indépendamment de leur structure interne.

1.10 Remarques

Il est approprié, à ce stade-ci, d'apporter certains commentaires sur le processus utilisé par les auteurs précédents pour définir la propriété d'homogénéité que l'on veut attribuer à l'espace-temps. Rappelons d'abord ce qu'il en est.

(i) Pour Lalan, Berzi et Gorini, Lugiato et Gorini.

Soit $\xi(x,t)$ et $\xi' = f(\xi)$ la transformation de coordonnées reliant deux référentiels. Alors, si on appelle T_α et $T_{\alpha'}$ les translations dans les deux repères on aura, si l'espace-temps est homogène,

$f\,(T_\alpha \xi) = T_{\alpha'}\, f(\xi)$.

(ii) Pour Drake, Lévy-Leblond et Sjödin.

Soit $x' = F(x,t,v)$ et $t' = G(x,t,v)$ les transformations entre deux référentiels. Alors, si l'espace-temps est homogène, les dérivées partielles et premières de F et G sont constantes.

Ces auteurs déduisent la linéarité des transformations de coordonnées entre une certaine classe de référentiels. Ils imposent une contrainte sur les transformations et par la suite démontrent qu'elles doivent être linéaires. Ils attribuent la cause de cette contrainte à la propriété que l'espace-temps est homogène. A notre avis, ils perdent de vue le sens premier qu'on devrait donner au terme homogénéité, c'est-à-dire ce 'quelque chose' qui a la même nature partout et en tout temps. Dans ce sens, rappelons la phrase suivante tirée de l'article de Lévy-Leblond:

> "we assume first that space-time is homogeneous, in that it has 'everywhere and every time' the same properties".

C'est une définition qui nous semble difficilement contestable. Par contre, l'auteur en dévie rapidement.

D'autre part, la définition avancée par les auteurs cités en (i) exclut le cas de la sphère qui nous apparaît intuitivement homogène.

Les définitions données dans le cadre des théories métriques de la gravité, ainsi que d'autres, seront discutées à la fin du chapitre suivant. Nous tenterons, dans ce chapitre, de donner une définition formelle qui se rapproche le plus possible de ce qu'on entend intuitivement par *homogénéité de l'espace-temps*.

CHAPITRE 2

L'HOMOGENEITE DANS DIFFERENTS CONTEXTES

2.1 Espaces plats*

Avant d'aborder de nouvelles définitions en ce qui a trait à la propriété d'homogénéité que l'on veut attribuer à la structure de l'espace-temps, nous allons définir ce qu'on entend par un espace-temps plat. Cette définition est en fait celle utilisée dans les théories métriques de la gravité.

L'espace-temps est plat si le tenseur de courbure $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta}$ *s'annule en tout point***.

En termes du symbole de Christoffel, soit:

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\sigma\nu} \{ g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\nu\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\nu} \} \qquad (2.1.1a)$$

où

$$g_{\mu\nu,\lambda} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (g_{\mu\nu}) \ , \qquad (2.1.1b)$$

le tenseur de courbure, ou tenseur de Riemann-Christoffel, s'écrit:

---

* Connus sous l'expression anglaise de "flat spaces".

** On peut retrouver cette définition, entre autres, dans les traités de relativité générale comme les volumes de P.A.M. Dirac[15], S. Weinberg[11] et R. Adler, M. Bazin et M. Schiffer[16].

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu k} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,k} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu k,\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{k\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu k}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}, \qquad (2.1.2a)$$

où

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,k} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}). \qquad (2.1.2b)$$

On peut démontrer que si le tenseur de courbure s'annule en tout point, il est toujours possible de choisir un système de référence constitué de coordonnées rectilignes*, où le tenseur métrique est constant.

2.2 Homogénéité de l'espace-temps lorsqu'on considère l'espace-temps plat**

Nous définirons ici ce que nous entendons par homogénéité de l'espace-temps lorsque ce dernier est considéré plat. Par la suite, nous donnerons un exemple d'application.

(i) Définition

Nous considérons ici l'espace-temps dans le cadre de théories comme la théorie de la relativité galiléenne ou restreinte, la théorie de l'électromagnétisme, la théorie du champ classique, etc.

---

* Voir Dirac[15] à la page 22.

** La définition que nous donnerons ici de l'homogénéité de l'espace-temps, ainsi que d'autres que nous donnerons plus loin dans le contexte des théories métriques de la gravité, a servi de base à un exposé que nous avons donné dans le cadre d'un congrès de l'Association canadienne française pour l'avancement des sciences (ACFAS)[17].

Soit G le groupe de toutes les transformations de coordonnées et de champs du type

$$x'_\mu = f_\mu(x_\nu) \qquad (2.2.1a)$$

et

$$A'_a(x') = F_a\{A_b(x), x\} \quad , \qquad (2.2.1b)$$

qui laisse les lois physiques invariantes. Il est à noter que nous avons implicitement supposé que les transformations sont telles que l'ensemble transformé est une copie conforme de l'ensemble initial et que les éléments sont en correspondance biunivoque.

G ainsi défini dénote le groupe de symétrie des lois physiques. Soit H le sous-groupe de G pour lequel f_μ est l'identité. Nous pouvons vérifier (ce que nous ferons en (ii)) que H est un sous-groupe invariant de G. Alors, on peut choisir un ensemble G/H, ou $G\backslash H$, de telle façon que ce dernier forme un groupe que nous appellerons G. Seule l'identité dans G laisse les coordonnées invariantes. En fait, nous avons construit le groupe G de manière à ne conserver que les transformations qui changent les coordonnées x_ν.

Dans ce contexte, nous dirons que l'espace-temps est homogène si G *possède un sous-ensemble tel que, pour toute paire de points de l'espace-temps, il existe un élément du sous-ensemble qui transforme ces deux points l'un dans l'autre. Alors, il existe un sous-groupe* H *de* G *tel que* G/H *(ou* G\H*) est* *homéomorphe à l'espace-temps. Nous appelons* H *le groupe cinématique. En fait, le groupe cinématique* H *laisse invariant un point spécifique** .

(ii) Discussion

Il est à remarquer que notre définition de la propriété d'homogénéité de l'espace-temps a été construite dans la suite logique de la conclusion que nous avons faite au chapitre précédent. Nous débutons avec le groupe de tranformations qui laissent invariantes les lois physiques, ce qui contient en soi la notion première d'homogénéité, c'est-à-dire ce 'quelque chose' qui a la même nature partout. Ensuite, nous affirmons que l'espace-temps est homogène si le sous-groupe G contient un sous-ensemble tel que, pour toute paire de points, il existe un élément du sous-ensemble qui transforme ces deux points l'un dans l'autre. Si c'est le cas, les lois physiques seront invariantes en tout point de l'espace-temps.

Il faut noter aussi que nous utilisons une hypothèse au début de la définition, soit que les transformations de coordonnées et de champs qui laissent les lois physiques invariantes dans un espace-temps plat forment un groupe** . Nous nous assurerons que les quatre propriétés d'un groupe sont vérifiées.

Pour ce faire, nous rappelons que, par hypothèse, les transformations sont telles que l'ensemble transformé est une copie conforme de l'ensemble initial et que les éléments sont en correspondance biunivoque. Aussi, nous définissons le produit de deux transformations comme étant le résultat de

---

* Dans la discussion qui précède, il ne faut pas confondre G avec $\mathcal{G}$, ni H avec H.

** Nous donnons dans l'annexe C quelques définitions, notations et théorèmes concernant la théorie des groupes.

deux transformations effectuées une à la suite de l'autre. Procédons maintenant à la preuve.

La propriété de fermeture est implicitement vérifiée à partir de l'hypothèse sur les transformations et de la définition du produit de deux transformations.

L'existence de l'identité consiste à n'effectuer aucune transformation sur l'ensemble.

L'existence d'un élément inverse pour chaque élément du groupe provient de la propriété de biunivocité des transformations.

Il nous reste à vérifier finalement que le produit des transformations est associatif. Prenons trois transformations notées T_1, T_2 et T_3 et appelons e un élément de l'ensemble. Nous devons prouver que $[(T_3T_2)T_1]e = [T_3(T_2T_1)]e$. En fait, cette propriété est vérifiée tout simplement du fait que le produit de deux transformations est défini comme étant le résultat de deux transformations effectuées une à la suite de l'autre.

Avant d'aborder un exemple, nous allons donner la preuve que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$. Alors, l'ensemble $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, ou $\mathcal{G}\backslash\mathcal{H}$, forme un groupe que nous appelons G.

Soit $\mathcal{G}$ le groupe de toutes les transformations de coordonnées et de champs du type (2.2.1a) et (2.2.1 b).

Si $g \varepsilon \mathcal{G}$,

$gx = x'$; $g\,A(x) = A'(x')$.

Si $\mathcal{H}$ est le sous-groupe de $\mathcal{G}$ pour lequel f_μ est l'identité et $h \varepsilon \mathcal{H}$,

$hx = x$.

$\mathcal{H}$ est alors un sous-groupe invariant (ou normal) de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire que $g^{-1}hg \varepsilon \mathcal{H}$, pour tout $h \varepsilon \mathcal{H}$ et tout $g \varepsilon \mathcal{G}$.

En effet,

$(g^{-1}hg)x = (g^{-1}h)x' = g^{-1}x' = x$.

Donc,

$g^{-1}hg \varepsilon \mathcal{H}$

et $\mathcal{H}$ est alors un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$.

(iii) *Exemple**

Soit SO(4,1) le groupe de Lie de toutes les matrices réelles d'ordre 5 satisfaisant les conditions dét $||M||=1$ et

$$M^T \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \qquad (2.2.2)$$

---

* La majorité du formalisme utilisé ici, ainsi que les principaux développements, ont été pris dans les volumes de R. Gilmore[5], A.O. Barut et R. Raczka[4], F. Ayres jr.[20], ou résultent des travaux personnels que nous avons effectués.

Avant d'aller plus loin, nous spécifions une notation que nous allons utiliser ici et ultérieurement, soit:

- I_n est la matrice identité d'ordre n.
- $I_{m,n}$ est la matrice de la forme.

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}.$$

En fait, SO(4,1) préserve la forme quadratique

$$X^T \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X, \quad \text{avec} \quad X^T = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5). \tag{2.2.3}$$

On aura l'algèbre so(4,1) qui peut s'écrire dans la décomposition des espaces vectoriels suivants:

$$so(4,1) = so(3,1) \quad \dotplus \quad \{ (so(4,1)/so(3,1) \} \tag{2.2.4}$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \dotplus \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 4 & 1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & c \\ -c^T I_{3,1} & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \end{array} . \tag{2.2.5}$$

Ici, $a = -a^T$ et $\dotplus$ signifie une somme directe d'espaces vectoriels*. Tous les éléments des matrices a, b et c sont réels.

En exponentiant les deux espaces de la décomposition, nous obtenons

---

* Voir Barut et Raczka[4] à la page 5.

$$\text{a) } \exp\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 4 & 1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \end{array} , \tag{2.2.6}$$

$$\text{avec } A^T I_{3,1} A = I_{3,1} \ . \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \exp\begin{bmatrix} 0 & c \\ -c^T I_{3,1} & 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} [I_4 - XX^T I_{3,1}]^{1/2} & X \\ -X^T I_{3,1} & [1 - X^T I_{3,1} X]^{1/2} \end{bmatrix} , \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

$$\text{avec } X_i = c_i \ \frac{\sin\sqrt{c^T I_{3,1} c}}{\sqrt{c^T I_{3,1} c}} \ , \text{ où } i = 1,2,3,4. \tag{2.2.9}$$

Nous avons construit en (2.2.6) un élément du groupe SO(3,1). En (2.2.8) nous avons construit un élément de SO(4,1)/SO(3,1)* . Nous nous sommes servis de la paramétrisation exponentielle et des algèbres de Lie de SO(4,1) et SO(3,1)**.

L'ensemble SO(4,1)/SO(3,1) est une variété homéomorphe à l'hyperboloïde H^4 dans l'espace euclidien R^5. Posons

$$X^5 = \pm \sqrt{1 - X^T I_{3,1} X} \ , \tag{2.2.10}$$

---

* A partir d'ici, nous n'utiliserons que la notation du complexe associé au sous-groupe par la droite, en sous-entendant qu'il serait possible d'utiliser également celle par la gauche.

** Voir le chapitre 1 de Barut et Raczka[4].

alors nous avons

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2-X_4^2+X_5^2 = 1. \tag{2.2.11}$$

Ceci veut dire qu'ici on n'a pas un espace plat au sens de la définition donnée à la section 2.1.

Pour obtenir un espace plat, utilisons le processus de contraction*. Remplaçons X_5 par RX_5 et écrivons la forme quadratique (2.2.11) comme

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2-X_4^2+(RX_5)^2 = R^2 \tag{2.2.12}$$

ou

$$\frac{1}{R^2}\,[X_1^2+X_2^2+X_3^2-X_4^2] + X_5^2 = 1\,. \tag{2.2.13}$$

En faisant tendre R vers l'infini, nous obtenons

$X_5 = 1$ et les X_i (avec $i = 1,2,3,4$) sont arbitraires.

Nous venons donc de construire un espace plat de dimension quatre. La variété que nous noterons ISO(3,1)/SO(3,1) et que nous obtenons par la contraction de SO(4,1)/SO(3,1) est homéomorphe à l'espace plat de Minkowski**.

Appliquons ceci à la représentation matricielle de SO(4,1)

---

* Voir Gilmore[5] aux pages 454-455.

** Il est à noter qu'à la page 455 du volume de Gilmore[5], ce dernier parle d'un "flat Euclidean space R^n" comme d'un homéomorphisme de ISO (n)/SO(n).

a) Contractons SO(4,1), i.e., effectuons

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}, \tag{2.2.14}$$

ce qui donne

$$A^T I_{3,1} A + C^T R^2 C = I_{3,1} \tag{2.2.15a}$$

$$B^T I_{3,1} A + DR^2 C = 0 \tag{2.2.15b}$$

$$A^T I_{3,1} B + C^T R^2 D = 0 \tag{2.2.15c}$$

$$B^T I_{3,1} B + DR^2 D = R^2 \tag{2.2.15d}$$

où (2.1.15b) et (2.1.15c) sont transposées l'une de l'autre.

Faisons tendre R^2 vers l'infini. Alors,

$$D^2 = 1, \; C = 0, \text{B est arbitraire, et } A^T I_{3,1} A = I_{3,1} \; . \tag{2.2.16}$$

Nous désignerons le groupe ainsi obtenu par contraction ISO(3,1), dont un élément s'écrit

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2.17}$$

où nous avons choisi $D = I$, $A^T I_{3,1} A = I_{3,1}$, et B est arbitraire.

Nous pouvons vérifier* que le groupe ISO(3,1) est le groupe inhomogène de Lorentz (ou groupe de Poincaré) obtenu à partir du produit semi-direct du groupe des translations T^4 avec le groupe homogène de Lorentz (ou tout simplement groupe de Lorentz), soit SO(3,1). On note ce groupe

$$ISO(3,1) = T^4 \;\times)\; SO(3,1)\,. \tag{2.2.18}$$

b) Nous pouvons écrire un élément de l'algèbre iso (3,1) comme

$$\begin{array}{ccc} 4 & 1 & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} \bar{a} & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} & \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \end{array},$$

$$\text{où } \bar{a} = \begin{array}{ccc} 3 & 1 & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} a & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}} & \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \end{array}, \text{ avec } a = -a^T. \tag{2.2.19}$$

Si nous décomposons cette algèbre, nous obtenons:

$$\begin{aligned} iso(3,1) &= t^4 \;+)\; so(3,1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;+)\; \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Le symbole +) correspond à la somme semi-directe** .

En exponentiant un élément de t^4 nous obtenons un élément de T^4, soit

---

* Ce qui est fait à la page 97 du volume de Barut et Raczka[4].

** Voir Barut et Raczka[4] à la page 9.

$$T^4 \rightarrow \begin{bmatrix} I_4 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2.21}$$

où c est un quadrivecteur arbitraire.

En exponentiant un élément de so(3,1) nous obtenons un élément de SO(3,1), soit

$$SO(3,1) \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.2.22}$$

avec $A^T I_{3,1} A = I_{3,1}$.

(iv) Discussion de l'exemple versus la définition d'homogénéité que nous avons donnée pour un espace plat.

Nous avons construit un espace plat à partir du groupe de Lie SO(4,1). Nous avons fait ceci en contractant le groupe; nous aurions obtenu le même résultat si nous avions contracté le groupe SO(3,2). Le résultat nous a donné le groupe de Poincaré, soit $ISO(3,1) = T^4 \times) SO(3,1)$, et en formant l'ensemble ISO(3,1)/SO(3,1) nous avons obtenu une variété homéomorphe à l'espace plat de Minkowski.

Est-ce que la définition d'homogénéité s'applique dans notre exemple? Dans le cas où les lois physiques sont invariantes* sous le groupe concerné, la

---

* Les lois qui sont laissées invariantes ici sont celles qu'on retrouve en relativité restreinte.

réponse est oui. En effet, si on a deux éléments quelconques $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2 \in G/H$, ces derniers sont reliés par une équation du type suivant:

$$\bar{c}_2 = (\bar{c}_2\, \bar{c}_1^{-1})\bar{c}_1, \tag{2.2.23}$$

et qui signifie que n'importe quelle paire de points de notre variété est relié par un élément, soit $\bar{c}_2\, \bar{c}_1^{-1}$, d'un sous-ensemble de G. Cette relation s'écrit dans notre espace plat comme:

$$\begin{bmatrix} I_4 & \bar{c}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} I_4 & \bar{c}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -\bar{c}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_4 & \bar{c}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.2.24}$$

Donc, si les lois physiques sont invariantes sous ISO(3,1), notre variété est homogène au sens de la définition que nous avons donnée. Comme cette variété est homéomorphe à l'espace-temps plat de Minkowski, alors ce dernier est homogène.

Notre groupe SO(3,1), qui est le groupe homogène de Lorentz, constitue ce que nous avons appelé le groupe cinématique H. Ce groupe a la propriété de laisser un point spécifique fixe.

Ecrivons la transformation de Lorentz inhomogène sous la forme habituelle, soit

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu + a_\mu . \tag{2.2.25}$$

On voit que le groupe des translations $\{a_\mu\}$ ne laisse pas l'origine invariante, contrairement au groupe de Lorentz $\{\Lambda_\mu{}^\nu\}$.

Si on choisit un point fixe autre que l'origine, soit $\bar{x}$, on peut trouver un groupe isomorphe à $\{\Lambda_\mu{}^\nu\} = \Gamma$ qui laisse ce point fixe. Prenons le groupe conjugué à Γ, soit

$$g_{\bar{x}}\, \Gamma\, g_{\bar{x}}^{-1}, \tag{2.2.26}$$

avec

$$g_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} I_4 & \bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{2.2.27}$$

nous obtenons,

$$\begin{bmatrix} I_4 & \bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -\bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \bar{x}-\Lambda\bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Appliquons ce groupe sur le point spécifique

$$\begin{bmatrix} I_4 & \bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ soit}$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda & \bar{x}-\Lambda\bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & \bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, le groupe conjugué $g_{\bar{x}}\, \Lambda\, g_{\bar{x}}^{-1}$, laisse le point spécifique $\bar{x}$ fixe.

En théorie des groupes on appelle 'groupe de stabilité' le groupe qui laisse un point fixe*. En fait, le sous-groupe de G (considéré comme un groupe de transformation topologique) qui laisse fixe un point $\gamma \varepsilon \Gamma$ d'un espace topologique est appelé le groupe de stabilité de γ. Si H_γ est le groupe de stabilité du point γ, et $\gamma' = g\,\gamma$, alors le groupe de stabilité du point γ' est le groupe $H_{\gamma'} = g\, H_\gamma\, g^{-1}$. Ainsi, les groupes de stabilité de n'importe quelle paire de points d'un espace homogène** Γ sont isomorphes.

La question à savoir si l'homogénéité de l'espace-temps implique la linéarité des transformations cinématiques sera discutée dans le chapitre suivant. Nous le ferons pour notre exemple et pour un autre que nous élaborerons à ce moment-là.

Nous terminons le présent chapitre avec d'autres définitions de l'homogénéité de l'espace-temps dans le cadre des théories métriques de la gravité.

2.3 Homogénéité de l'espace-temps dans le cadre des théories métriques de la gravité.

Nous allons maintenant examiner quelques définitions de l'homogénéité applicables au cas où la structure de l'espace-temps dépend du contenu matériel. Nous utiliserons le formalisme des théories métriques de la gravité***. Dans ce sens, nous référons le lecteur à la section 1.9 du présent

---

* Voir Barut et Raczka[4] au chapitre 4.

** Un espace topologique $\{X, \tau\}$ est homogène si, pour n'importe quelle paire de points $x, y \,\varepsilon\, X$ il existe un homéomorphisme f de l'espace $\{X, \tau\}$ sur lui-même tel que $f(x) = y$.

*** A la page 67 du volume de Will[14], ce dernier affirme que les seules théories de la gravité qui ont possiblement une chance de survivre à l'expérience sont les théories métriques.

ouvrage. Nous rappelons les deux hypothèses (H1 et H2) généralement admises au sujet du formalisme mathématique à utiliser lorsqu'on discute des théories de la gravité, les deux postulats (P1 et P2) qui sont à la base des théories métriques de la gravité et les trois postulats (E1 à E3) explicitant le principe d'équivalence d'Einstein.

Avant de présenter d'autres définitions de l'homogénéité, nous allons discuter brièvement de la première définition que nous avons donnée à la section 1.9. Cette définition spécifiait que l'espace-temps est homogène s'il existe des transformations qui portent n'importe quel point (du moins dans son voisinage immédiat) dans n'importe quel autre, et qui font que la forme du tenseur métrique est invariante. Cette définition est intéressante du fait qu'elle garde son sens premier à la définition d'homogénéité, soit ce 'quelque chose' qui a la même nature partout et en tout temps. De plus, les espaces sphériques sont homogènes selon cette définition et non les espaces quelconques. Bien sûr, le fait que la forme du tenseur métrique demeure invariante, impose des contraintes sur la distribution de matière dans l'univers. D'ailleurs, cette définition nous amène à la notion d'une certaine classe d'espaces appelés espaces symétriques. En soi, cette définition a sa place, mais elle ne poursuit pas le même but que le nôtre qui est de donner, comme nous l'avons déjà dit, une définition formelle qui se rapproche le plus de ce qu'on entend intuitivement par *homogénéité de l'espace-temps*. Pour ce faire, nous baserons nos définitions sur les lois physiques elles-mêmes et non sur le tenseur métrique qui est le résultat de la solution des équations du champ gravitationnel, pour une distribution de matière spécifique.

On peut donner plusieurs définitions de l'homogénéité de l'espace-temps dans le contexte des théories métriques de la gravité. En voici trois exemple:

(D1) L'espace-temps est homogène si, dans la limite où il est plat, la définition donnée à la section précédente s'applique.

(D2) L'espace-temps est homogène si, dans un repère localement inertiel, les résultats de n'importe quelles expériences locales non gravitationnelles sont indépendantes de où et quand dans l'univers elles sont effectuées.

(D3) L'espace-temps est homogène si, dans un repère local* en chute libre dans un champ gravitationnel quelconque, les résultats de n'importe quelles expériences locales, gravitationnelles ou non, sont indépendants de où et quand dans l'univers elles sont effectuées.

La définition (D1) a fait l'objet de la section 2.2. Quant à la définition (D2), elle correspond à la deuxième définition que nous avons donnée à la section 1.9. La définition (D3) sera maintenant discutée.

Discussion

La définition (D3) correspond en fait à un des postulats d'un principe que nous appellerons principe d'équivalence élargi**. Ce principe peut être exprimé à partir des trois postulats suivants:

---

* Dans les cas où les expériences effectuées dans ce repère sont de nature non gravitationnelles, ce dernier est appelé "repère localement inertiel".

** Connu sous l'expression anglaise de "Strong equivalence principle (SEP)".

(EE1) Le principe d'équivalence de Newton est valide, non seulement pour les 'corps ponctuels', mais pour les corps dont l'énergie gravitationnelle interne est non négligeable, mais qui sont suffisamment petits de façon à ce que les inhomogénéités du champ gravitationnel soient, elles, négligeables. Cela peut être une étoile, un trou noir, le système solaire, la balance de Cavendish, etc.

(EE2) Dans un repère local en chute libre dans un champ gravitationnel quelconque, les résultats de n'importe quelles expériences locales, gravitationnelles ou non, sont indépendantes de la vitesse de ce dernier.

(EE3) Dans un repère local en chute libre dans un champ gravitationnel quelconque, les résultats de n'importe quelles expériences locales, gravitationnelles ou non, sont indépendantes de où et quand dans l'univers elles sont effectuées.

En fait, le principe d'équivalence élargi est différent de celui d'Einstein dans le sens qu'il inclut des corps avec des énergies gravitationnelles internes non négligeables (planètes, étoiles, etc.), et des expériences faisant intervenir des forces gravitationnelles (balance de Cavendish, mesures gravimétriques, etc.).

Dépendamment de la théorie métrique de la gravité choisie, un postulat (ou plus), du principe d'équivalence élargi, peut être violé. Par exemple la théorie métrique de la relativité générale satisfait les trois postulats du principe d'équivalence élargi. Dans ce cas, l'homogénéité au sens de la définition (D3) serait respectée. Par contre, la théorie métrique de Brans-Dicke viole le postulat (EE3) du principe d'équivalence élargi. La définition (D3) n'y est pas respectée, mais la définition (D2) l'est. En fait, la validité de (D2) découle de celle du principe d'équivalence d'Einstein, qui est à la base de toute théorie métrique de la gravité.

Pour bien comprendre ces dernières affirmations, analysons plus en détail ce que contiennent ces deux théories.

<u>Théorie de la relativité générale</u>

Les équations du champ gravitationnel sont données par

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8 \pi G T_{\mu\nu} \qquad (2.3.1)$$

où,

$R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci obtenu en contractant le tenseur de courbure $R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\nu}$, c'est-à-dire en remplaçant l'indice α par λ et en sommant sur λ,
R est le scalaire de courbure obtenu en contractant le tenseur de Ricci, soit $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$,
G est une constante appelée la constante gravitationnelle,
et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion.

En contractant avec $g^{\mu\nu}$, l'équation (2.3.1) devient

$$R = 8\pi G T, \qquad (2.3.2)$$

où $T = T^{\mu}{}_{\mu}$,

et en remplaçant dans (2.3.1)

$$R_{\mu\nu} = -8\ \pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}). \tag{2.3.3}$$

Il est clair qu'on peut retrouver (2.3.1) à partir de (2.3.3). Donc, ces deux équations seront considérées comme des formes entièrement équivalentes des équations du champ gravitationnel.

Nous pouvons noter que de (2.3.3), $R_{\mu\nu} = 0$ pour un espace vide, car $T_{\mu\nu} = 0$.

Dans cette théorie, il n'y a qu'un seul champ tensoriel de nature gravitationnelle, soit le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. En vertu du principe d'équivalence d'Einstein, ce dernier peut toujours, localement, être ramené à la forme minkowskienne $\eta_{\mu\nu}$. Alors, les expériences locales gravitationnelles ou non se comportent comme si la gravité était absente et les trois postulats du principe d'équivalence élargi sont valides. Le couplage entre les champs non gravitationnels et la gravité s'opère au moyen du tenseur $g_{\mu\nu}$, qui prend la forme de $\eta_{\mu\nu}$ dans un repère en chute libre*

Théorie de Brans-Dicke

Dans cette théorie, il y a en plus du champ tensoriel $g_{\mu\nu}$, un champ scalaire ϕ. Les équations du champ gravitationnel sont

---

* Nous supposons ici que le couplage ne fait pas intervenir de termes de courbure.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{-8\pi}{\phi} [T_M{}^{\mu\nu} + T_\phi{}^{\mu\nu}] \tag{2.3.4}$$

et

$$\Box^2 \phi = 4 \Pi \lambda T_M{}^{\mu}{}_{\mu} \ , \tag{2.3.5}$$

où,

$$\Box^2 \phi = \phi_{;}{}^{\rho}{}_{;\rho} \text{ (le d'Alembertien dans la forme covariante)}$$

$$= (g^{\rho\nu} \phi_{;\nu})_{;\rho}$$

$$= (g^{\rho\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu})_{;\rho} \qquad [\text{car } \phi_{;\nu} = \phi_{,\nu} \text{ pour un scalaire}]$$

$$= \Phi^{\rho}{}_{;\rho} \qquad [\text{avec } \Phi_\nu = \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}]$$

$$= \Phi^{\rho}{}_{,\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\rho\nu} \Phi^{\nu} ,$$

λ est une constante de couplage,

$T_M{}^{\mu\nu}$ est le tenseur d'énergie-impulsion de la matière dans l'univers, excluant le champ scalaire ϕ (M est un indice spécifiant ce tenseur, $T_M{}^{\mu\nu} \equiv (T_M)^{\mu\nu}$),

et $T_\phi{}^{\mu\nu}$ est le tenseur du champ scalaire de Brans-Dicke (ϕ est un indice spécifiant ce tenseur, $T_\phi{}^{\mu\nu} \equiv (T_\phi)^{\mu\nu}$).

On peut déduire* que les équations du champ gravitationnel deviennent

* Voir Weingerg (11) aux pages 157 à 160.

$$\square^2 \phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} \; T_M{}^{\mu}{}_{\mu} \tag{2.3.6}$$

où

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} \quad , \tag{3.2.7}$$

et

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{-8\pi}{\phi} \; T_{M\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} \, (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu}$$

$$- \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho}) - \frac{1}{\phi} \, (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square^2 \phi). \tag{2.3.8}$$

Il est à remarquer que dans la limite où ω devient beaucoup plus grand que l'unité, la théorie de Brans-Dicke tend vers celle de la théorie de la relativité générale* .

De manière à éviter toute confusion avec le potentiel ϕ de Newton, nous remplacerons ϕ par

$$\phi \rightarrow \mathcal{G}^{-1} (1+\xi) \tag{2.3.9}$$

où $\mathcal{G}$ est une constante de l'ordre de G et ξ est un champ scalaire. Alors, les équations du champ gravitationnel (2.3.6) et (2.3.8) deviennent

$$\xi_{;}{}^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{8\pi \mathcal{G}}{3+2\omega} \; T^{\mu}{}_{\mu} \tag{2.3.10}$$

---

* Voir Weinberg[11], page 160.

et

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G(1+\xi)^{-1} T_{\mu\nu}$$
$$- \omega (1+\xi)^{-2} (\xi_{;\mu}\xi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \xi_{;\rho}\xi^{;\rho})$$
$$- (1+\xi)^{-1} (\xi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \xi^{;\rho}{}_{;\rho}), \qquad (2.3.11)$$

où nous avons enlevé l'indice M au tenseur d'énergie-impulsion de la matière.

Contractant (2.3.11) pour trouver R et utilisant (2.3.10), l'équation (2.3.11) devient

$$R_{\mu\nu} = -8\pi \; G(1+\xi)^{-1} [T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T^{\lambda}{}_{\lambda} \left(\frac{\omega+1}{2\omega+3} \right)]$$
$$- \omega(1+\xi)^{-2} \xi_{;\mu}\xi_{;\nu} - (1+\xi)^{-1} \xi_{;\mu;\nu} \quad . \qquad (2.3.12)$$

Les équations représentées par (2.3.12) sont celles du champ gravitationnel dans la théorie de Brans-Dicke. Il est à noter que le champ scalaire n'a d'effet qu'au niveau des équations du champ gravitationnel. Une fois les $g_{\mu\nu}$ calculés on peut, en vertu du principe d'équivalence d'Einstein, ramener ces derniers à la forme minkowskienne $\eta_{\mu\nu}$. Alors, les expériences locales non gravitationnelles se comportent comme si la gravité était absente. Ce qui n'est pas le cas des expériences locales gravitationnelles. En fait, nous allons voir dans l'exemple qui suit que le postulat (EE3) du principe d'équivalence élargi est violé et que de ce fait, l'homogénéité selon la définition (D3) n'est pas respectée.

En n'importe quel point P dans un champ gravitationnel nous pouvons choisir un système de coordonnées localement inertiel tel que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0$ à ce point. Cependant, le champ ξ est un scalaire et de ce fait ne s'annule pas à P.

Dans l'approximation post-newtonienne* , on peut montrer** que

$$\xi \simeq -(\omega+2)^{-1}\, \phi, \qquad (2.3.13a)$$

et

$$\mathcal{G} = [\,(2\omega+3)/(2\omega+4)\,]\, G \qquad (3.3.13b)$$

où ϕ est le potentiel gravitationnel de Newton.

L'équation (2.3.12) montre que dans ce système de coordonnées, le champ gravitationnel d'une petite masse située au point P peut être calculé en remplaçant G par

$$G_{eff} = \mathcal{G}(1+\xi)^{-1} \simeq \mathcal{G}\,[1+(\omega+2)^{-1}\,\phi]\,. \qquad (2.3.14)$$

En prenant $\omega = 6$ et $\phi = -6,9\times10^{-10}$ à la surface de la Terre, la valeur de G_{eff} qui serait mesurée par une expérience de la balance de Cavendish près de la surface de la Terre serait plus petite que celle mesurée par un satellite situé sur une orbite éloignée par un facteur de l'ordre de $[1-8\times10^{-11}]$.

---

* C'est l'approximation pour un système de 'particules' liées par des forces gravitationnelles faibles et dont les mouvements sont lents, tel le système solaire.

** Weinberg [11], pages 244 à 248.

Conclusion

La définition (D2) de l'homogénéité serait donc respectée dans toute théorie métrique de la gravité, tandis que la définition (D3) le serait dans les théories comme celle de la relativité générale, mais pas dans celle de Brans-Dicke.

En fait, la théorie de Brans-Dicke permet à un terme de dépendre du scalaire de courbure R. En effet, contractons (2.3.8) par $g^{\mu\nu}$ soit

$$-R = \frac{-8\pi}{\phi} T_M{}^\mu{}_\mu + \frac{\omega}{\phi^2} \phi_;{}^\rho \phi_{;\rho} - \frac{1}{\phi}(\phi_;{}^\rho{}_{;\rho} - 4\,\Box^2\phi). \qquad (2.3.15)$$

Isolons $T_M{}^\mu{}_\mu$, soit

$$T_M{}^\mu{}_\mu = \frac{\phi}{8\pi} R + \frac{\omega}{8\pi}\frac{1}{\phi}\phi_;{}^\rho\phi_{;\rho;} - \frac{1}{8\pi}(\phi_;{}^\rho{}_{;\rho} - 4\,\Box^2\phi). \qquad (2.3.16)$$

Remplaçons (2.3.16) dans (2.3.6); nous obtenons

$$\Box^2\phi = \frac{1}{3+2\omega}\phi R + \frac{\omega}{3+2\omega}\frac{1}{\phi}\phi_;{}^\rho\phi_{;\rho} - \frac{1}{3+2\omega}(\phi_;{}^\rho{}_{;\rho} - 4\,\Box^2\phi). \qquad (2.3.17)$$

On voit bien dans l'équation (2.3.17) que le champ scalaire ϕ dépend du scalaire de courbure.

Remarques

En relation avec les trois définitions (D1), (D2) et (D3) de l'homogénéité, on peut se demander quel est le groupe cinématique? On peut répondre naturellement à cette question d'au moins deux façons distinctes.

(i) Cela peut être le groupe d'invariance des lois physiques dans un espace-temps plat, laissant invariant un point spécifique.

(ii) Cela peut être le groupe local d'invariance des lois physiques dans un repère en chute libre, laissant invariant un point spécifique.

Dans le cas (i), la définition (D1) [et par conséquent (D2) et (D3), lesquelles impliquent (D1)] a les mêmes implications sur la linéarité que la définition donnée à la section 2.2.

Dans le cas (ii), nous avons affaire à un groupe local plus qu'à un groupe. Il semble que ni (D1), ni (D2), ni (D3) n'imposent de restrictions sur le groupe local.

CHAPITRE 3

HOMOGENEITE ET LINEARITE : EXEMPLES

3.1 Introduction

Avant d'aborder les exemples que nous voulons examiner ici, nous allons rappeler ce qu'on entend par linéarité en algèbre linéaire et spécifier un cas particulier de l'application d'un élément du sous-groupe H d'un groupe G sur un élément de la variété G/H.

(i) Linéarité*

Si, à chaque vecteur $\mathbf{x}$ d'un espace vectoriel $\mathbf{V}$ on peut associer un seul et unique vecteur $\mathbf{y}$ du même espace, alors l'application $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ est appelée une transformation de l'espace vectoriel **.

Cette transformation est linéaire si les deux conditions suivantes sont satisfaites pour tous λ, x, x_1 et x_2:

1. $A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1)+A(\mathbf{x}_2),$ (3.1.1)

2. $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x})$ (3.1.2)

On peut remplacer les deux conditions (3.1.1) et (3.1.2) par la condition

---

* Voir I.M. Gel'fand [6] au chapitre 2.

** Si l'application est biunivoque, on a un groupe en définissant le produit de deux transformations comme nous l'avons fait à la section 2.2 du chapitre précédent.

$$A(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 A(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 A(\mathbf{x}_2) \quad . \tag{3.1.3}$$

A moins qu'il y ait possibilité de confusion, on peut écrire $A(\mathbf{x})$ au lieu de $A\mathbf{x}$.

(ii) Cas particulier

Soit H un sous-groupe d'un groupe G et $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ les algèbres correspondantes. Soit la décomposition suivante

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{M}. \tag{3.1.4}$$

Soit $h \in H$, $c = e^m \in G/H$ et $m \in \mathcal{M}$. Nous avons

$$hch^{-1} = he^m h^{-1} = e^{hmh^{-1}} \quad . \tag{3.1.5}$$

La dernière égalité est obtenue en développant $e^{hmh^{-1}}$ par la série de l'exponentielle.

Si nous vérifions la propriété

$$hmh^{-1} = m' \in \mathcal{M} \tag{3.1.6}$$

alors, (3.1.5) devient

$$hch^{-1} = e^{m'} = c', \tag{3.1.7}$$

ou

$$hc = c'h. \qquad (3.1.8)$$

La propriété (3.1.6) nous permet de connaître l'application d'un élément quelconque h du sous-groupe H sur un élément quelconque c de la variété G/H. Comme nous le verrons, entre autres, dans l'exemple qui suit, cela nous permet de déduire facilement si l'application est linéaire ou non.

3.2 Exemple où linéarité et homogénéité coexistent

Reprenons l'exemple abordé à la section 2.2 du chapitre précédent. Soit G = ISO(3,1) le groupe de Poincaré et H = SO(3,1) le groupe de Lorentz. Comme nous l'avons vu dans cette section, la variété G/H, homéomorphe à l'espace plat de Minkowski, est homogène au sens de la définition que nous avons donnée à ce moment-là. Avant de déduire si l'application du groupe cinématique H sur la variété est linéaire ou non, nous allons faire ressortir quelques propriétés supplémentaires des groupes de Lorentz et de Poincaré.

(a) Discussion

En fait, le groupe de Poincaré correspond au groupe de Lorentz augmenté des translations. Le groupe de Lorentz contient en réalité quatre composantes, soit:

$$L^{\uparrow}_{+},\ L^{\uparrow}_{-},\ L^{\downarrow}_{+},\ L^{\downarrow}_{-}\ , \qquad (3.2.1)$$

selon que dét $||\Lambda|| = +1$ ou -1 et que le signe de $\Lambda^4{}_4$ soit +1 ou −1 (la valeur de ce dernier signe correspondant aux symboles $^\uparrow$ et $^\downarrow$). On se souvient que la transformation de Lorentz s'écrit :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\nu \qquad (3.2.2)$$

avec $x^i = x^1, x^2, x^3$, correspondant aux coordonnées spatiales et x^4 à la coordonnée temporelle*. De la propriété que $\Lambda^T I_{3,1} \Lambda = I_{3,1}$, on déduit que dét $||\Lambda|| = \pm 1$ et $|\Lambda^4{}_4| \geq 1$. Si on suppose que les éléments d'une composante sont obtenus par une variation continue des paramètres, alors la seule composante formant un groupe et obtenue à partir de l'identité est $L^\uparrow{}_+$. Les autres composantes ne forment pas un groupe, et leurs éléments ne semblent pas correspondre à des symétries physiques exactes. Le groupe $L^\uparrow{}_+$ est appelé groupe orthochrone propre de Lorentz. Les autres composantes correspondent aux transformations dites impropres de Lorentz.

Le groupe de Poincaré laisse invariante la quantité ds^2 donnée par

$$ds^2 \equiv \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad (3.2.3)$$

où

$$[\eta_{\mu\nu}] = \mathrm{diag}\,(1,1,1,-1), \qquad (3.2.4)$$

c'est-à-dire le tenseur métrique de Minkowski.

---

* Nous avons choisi ici de varier les indices de 1 à 4, au lieu de 0 à 3 comme dans les deux autres chapitres, de manière à avoir une notation similaire à celle utilisée dans l'exemple suivant.

Il est à noter ici que nous considérons un système d'unités tel que la vitesse de la lumière égale l'unité. Donc, au lieu d'écrire l'expression de ds^2 comme

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2 , \tag{3.2.5}$$

nous écrivons

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2-dt^2 . \tag{3.2.6}$$

Les équations de la relativité restreinte sont invariantes, dans leur forme, sous le groupe de Poincaré. Les principales lois de la physique en relativité restreinte sont d'abord*

$$f^\alpha = m \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} \tag{3.2.7}$$

avec

$$d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad . \tag{3.2.8}$$

m est la masse d'une particule au repos et τ est appelé le temps propre. En réalité, l'équation (3.2.7) peut être considérée comme une définition de la force relativiste f^α qui constitue un quadrivecteur, soit un tenseur d'ordre 1, sous les transformations de Poincaré. En fait,

$$f'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu f^\mu \ . \tag{3.2.9}$$

---

* Voir Weinberg [11] au chapitre 2.

Il est facile de vérifier qu'une particule libre se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniforme dans un système de coordonnées le fait aussi de façon uniforme dans un autre système de coordonnées obtenu du premier à partir des transformations de Lorentz.

Introduisant les processus électromagnétiques, nous avons les deux autres lois physiques suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} F^{\alpha\beta} = -J^{\beta} \qquad (3.2.10)$$

et

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} F_{\gamma\delta} = 0 \ . \qquad (3.2.11)$$

Ces dernières expressions sont les équations de Maxwell, écrites à l'aide des tenseurs $F^{\alpha\beta}$, $F_{\gamma\delta}$, J^{β} et $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Le tenseur $F^{\alpha\beta}$ est un tenseur du second ordre comprenant les composantes des champs magnétique et électrique. Nous avons par contraction:

$$F_{\gamma\delta} = \eta_{\gamma\mu}\ \eta_{\delta\nu} F^{\mu\nu} . \qquad (3.2.12)$$

$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur de quatrième ordre, appelé le tenseur de Levi-Civita, défini par:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, \text{ si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation paire de } 1234, \\ -1, \text{ si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation impaire de } 1234, \\ 0, \text{ autrement.} \end{cases} \tag{3.2.13}$$

J^β est le tenseur de premier ordre représentant les densités de charge et de courant.

Finalement, nous avons les lois

$$f^\alpha = e\, F^\alpha{}_\gamma \; \frac{dx^\gamma}{d\tau} \tag{3.2.14}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\, T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.2.15}$$

L'expression (3.2.14) donne la force relativiste sur une particule de charge électrique e. L'expression (3.2.15), elle,exprime la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Le tenseur $T^{\alpha\beta}$ est appelé tenseur d'énergie-impulsion* .

Les équations (3.2.7), (3.2.10), (3.2.11), (3.2.14) et (3.2.15) sont les principales équations de la théorie de la relativité restreinte. Elles sont invariantes sous les transformations de Poincaré.

Il est intéressant ici de faire un bref rappel historique. Avant l'arrivée d'Einstein, la mécanique était décrite par les lois de Newton. Dans sa théorie,

---

* Les composantes sont données dans Weinberg[11].

les équations de la mécanique étaient invariantes sous les transformations galiléennes, soit

$$x'^i = R^i{}_j x^j + v^i t + a^i, \qquad i = 1,2,3, \tag{3.2.16a}$$

et

$$t' = t + \tau . \tag{3.2.16b}$$

Ici, $R^i{}_j$ est la matrice d'une rotation spatiale. Les transformations (3.2.16) constituent un groupe de dix paramètres, soit le groupe des rotations de trois paramètres, les trois composantes de la vitesse, et les quatre translations dans l'espace-temps.

Par ailleurs, les équations de l'électrodynamique, soit les équations de Maxwell, ne sont pas invariantes sous les transformations galiléennes. H.A. Lorentz démontra que les équations de Maxwell étaient invariantes sous un groupe, soit le groupe de Poincaré, également constitué de dix paramètres.

Devant ce fait, Einstein reformula les lois de la mécanique, telles que nous les avons écrites précédemment. En fait, Einstein a formulé une nouvelle mécanique qui est celle connue de nos jours sous le nom de mécanique relativiste.

(b) Détermination de la linéarité ou de la non-linéarité.

Soit les éléments $g \in ISO(3,1) = G$, $h \in SO(3,1) = H$ et $c \in G/H$:

$$g = \begin{array}{cc} \begin{matrix} 4 & 1 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \end{array} ; \quad h = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad c = \begin{bmatrix} I_4 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \tag{3.2.18}$$

avec $\Lambda^T I_{3,1} \Lambda = I_{3,1}$, $\bar{\Lambda}^T I_{3,1} \bar{\Lambda} = I_{3,1}$. a et X sont des quadrivecteurs arbitraires.

Nous pouvons écrire la décomposition de l'algèbre $iso(3,1)$ de $ISO(3,1)$ comme suit,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \quad \mathcal{H} \quad +) \quad \mathcal{M} \\ &= so(3,1) \quad +) \quad [\, iso(3,1)/so(3,1) \,] \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \quad +) \quad \begin{array}{cc} \begin{matrix} 4 & 1 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \end{array} , \tag{3.2.20}$$

où $a = -a^T$ et c est arbitraire.

De ceci on peut vérifier aisément que la propriété (3.1.6), soit $hmh^{-1} = m'$, est vérifiée. Alors, nous pouvons écrire l'application d'un élément quelconque $h \in H$ sur un élément quelconque $c \in G/H$ comme en (3.1.8), soit:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_4 & X' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad (3.2.21)$$

où nous déduisons que:

$$\bar{\Lambda}\, X = X' \ . \qquad (3.2.22)$$

En vertu de la définition de la linéarité que nous avons donnée à la section précédente, nous concluons que l'application du groupe cinématique SO(3,1) sur l'espace plat de Minkowski, homéomorphe à G/H, est linéaire. Il y a donc ici homogénéité de l'espace et linéarité de la transformation cinématique.*

3.3 Exemple où homogénéité et linéarité ne coexistent pas

Soit G = SO(4,2) le groupe conforme. Avant de vérifier que l'application du sous-groupe parabolique τ_4 x) SO(1,1) x SO(3,1)** sur la variété G/H est non linéaire, analysons ce groupe un peu plus en détail.

(a) Discussion

SO(4,2) est le groupe de Lie de toutes les matrices réelles d'ordre 6 satisfaisant

---

* Les notions d'homogénéité et de groupe cinématique pour cet exemple, on se rappelle, ont été introduites à la section 2.2.

** x) dénote le produit semi-direct de groupes et x dénote le produit direct. Voir Barut et Raczka[4] au chapitre 3.

$$M^T \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & I_{1,1} \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & I_{1,1} \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

et

$$\text{dét } \|M\| = 1 . \tag{3.3.2}$$

Développons la première propriété au voisinage de l'identité, soit

$$\begin{aligned} (I_6+\delta M)^T \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & I_{1,1} \end{bmatrix} (I_6+\delta M) &= \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & I_{1,1} \end{bmatrix} \\ \delta M^T \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & I_{1,1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} I_{3,1} & 0 \\ 0 & I_{1,1} \end{bmatrix} \delta M . \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Si nous écrivons les paramètres infinitésimaux caractérisant δM comme

$$\delta M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d^T & e & f \\ g^T & h & i \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{array} , \tag{3.3.4}$$

la relation (3.3.3) donne

$$h = f, \quad e=i=0, \quad a^T I_{3,1} = -I_{3,1} a, \tag{3.3.5a}$$

$$d^T = -b^T I_{3,1}, \quad g^T = c^T I_{3,1} \quad . \tag{3.3.5b}$$

Remplaçant $a \to \lambda$, $b \to a+b$, $c \to a-b$, $f \to d$, nous obtenons

$$\delta M = \begin{bmatrix} \lambda & a+b & a-b \\ -(a+b)^T I_{3,1} & 0 & d \\ (a-b)^T I_{3,1} & d & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3.6}$$

L'algèbre représentée par l'élément (3.3.6) est l'algèbre so(4,2) du groupe SO(4,2). Nous pouvons alors décomposer so(4,2) dans les quatre espaces vectoriels suivants:

$$\begin{aligned} so(4,2) = {} & t_4 \;{+\!\!)}\; so(1,1) \oplus so(3,1) \\ & + \{ so(4,2)/[t_4 \;{+\!\!)}\; so(1,1) \oplus so(3,1)]\} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

$$\begin{aligned} = {} & \begin{bmatrix} 0 & b & -b \\ -b^T I_{3,1} & 0 & 0 \\ -b^T I_{3,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} {+\!\!)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix} \\ & \oplus \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ -a^T I_{3,1} & 0 & 0 \\ a^T I_{3,1} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Avant d'aller plus loin, nous aimerions spécifier que lorsque nous construisons des algèbres dans ce mémoire, il est sous-entendu, bien sûr, que nous le faisons au voisinage de l'identité. Alors, les paramètres représentant une algèbre donnée sont infinitésimaux. Comme nous fabriquons ici les éléments d'un groupe à partir de leur algèbre et d'une paramétrisation exponentielle, les paramètres des algèbres deviennent finis sous ce processus. Nous avons donc choisi, comme c'était le cas au chapitre précédent, de conserver la même notation pour les paramètres représentant les éléments des algèbres que pour les groupes correspondants.

1° Exponentiation des espaces vectoriels:

(i) Transformations de Lorentz

$$\exp \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \text{ où } \Lambda^T I_{3,1} \Lambda = I_{3,1} \,. \tag{3.3.9}$$

(ii) Translations

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & a & a \\ -a^T I_{3,1} & 0 & 0 \\ a^T I_{3,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_4 & a & a \\ -a^T I_{3,1} & 1+a^2/2 & a^2/2 \\ a^T I_{3,1} & -a^2/2 & 1-a^2/2 \end{bmatrix}, \tag{3.3.10}$$

où

$$a^2 \equiv -a^T I_{3,1} a \quad , \tag{3.3.11}$$

c'est-à-dire un produit pseudo-scalaire.

(iii) Accélérations

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & b & -b \\ -b^T I_{3,1} & 0 & 0 \\ -b^T I_{3,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_4 & b & -b \\ -b^T I_{3,1} & 1+b^2/2 & -b^2/2 \\ -b^T I_{3,1} & b^2/2 & 1-b^2/2 \end{bmatrix}, \tag{3.3.12}$$

où

$$b^2 \equiv - b^T I_{3,1} b \quad . \tag{3.3.13}$$

(iv) Dilatations

$$\exp\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_4 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh d & \sinh d \\ 0 & \sinh d & \cosh d \end{bmatrix}. \qquad (3.3.14)$$

2° <u>Application de SO(4,2) sur un espace quadridimensionnel</u>

Soit

$$X^\mu \equiv \frac{\xi^\mu}{\xi^5+\xi^6}, \qquad \text{avec } \mu = 1,2,3,4, \qquad (3.3.15)$$

où ξ^a, avec a = 1,2,3,4,5,6, sont les composantes de l'espace vectoriel à six dimensions sur lequel agit le groupe conforme. Une transformation conforme est telle que $\xi' = M\xi$, où $M \in SO(4,2)$. Elle induit une transformation des X^μ, donnés en (3.3.15), que nous allons maintenant investiguer.

(i) Transformations de Lorentz

$$\begin{bmatrix} \xi'^1 \\ \xi'^2 \\ \xi'^3 \\ \xi'^4 \\ \xi'^5 \\ \xi'^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \\ \xi^5 \\ \xi^6 \end{bmatrix}. \qquad (3.3.16)$$

Nous obtenons

$$\xi'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu} \tag{3.3.17a}$$

et

$$\xi'^{5} = \xi^{5}, \quad \xi'^{6} = \xi^{6} \quad . \tag{3.3.17b}$$

De (3.3.15) et (3.3.17a) nous obtenons

$$X'^{\mu} = \frac{\xi'^{\mu}}{\xi'^{5}+\xi'^{6}} = \frac{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu}}{\xi^{5}+\xi^{6}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} \tag{3.3.18}$$

et

$$X'_{\mu}X'^{\mu} = X_{\mu}X^{\mu} , \tag{3.3.19}$$

où

$$X_{\mu} = \eta_{\mu\nu}X^{\nu} . \tag{3.3.20}$$

En fait, la dernière expression s'écrit dans la notation matricielle comme:

$$X'^{T}I_{3,1}X' = X^{T}I_{3,1}X \tag{3.3.21}$$

avec

$$X^{T} = [\, X^{1}, X^{2}, X^{3}, X^{4} \,] \tag{3.3.22}$$

Donc, le sous-groupe de Lorentz appliqué sur **X** se comporte comme sur un espace minkowskien.

(ii) Translations

A partir de l'expression (3.3.10), nous voyons que

$$\xi'^{\mu} = \xi^{\mu} + a^{\mu}(\xi^5+\xi^6), \tag{3.3.23a}$$

$$\xi'^{5} = -a^{\mu}\eta_{\mu\nu}\xi^{\nu} + \xi^5 + \frac{\mathbf{a}^2}{2}(\xi^5+\xi^6), \tag{3.3.23b}$$

$$\xi'^{6} = a^{\mu}\eta_{\mu\nu}\xi^{\nu} + \xi^6 - \frac{\mathbf{a}^2}{2}(\xi^5+\xi^6), \tag{3.3.23c}$$

où

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \circ \mathbf{a} \equiv -a^{\mu}\eta_{\mu\nu}a^{\nu} = -a_{\nu}a^{\nu} \quad . \tag{3.3.23d}$$

Nous obtenons alors

$$\xi'^5+\xi'^6 = \xi^5+\xi^6. \tag{3.3.24}$$

De (3.3.23a) et (3.3.15), nous avons

$$(\xi'^5+\xi'^6)X'^{\mu} = (\xi^5+\xi^6)X^{\mu} + a^{\mu}(\xi^5+\xi^6) ,$$

et finalement,

$$X'^{\mu} = X^{\mu} + a^{\mu} \quad . \tag{3.3.25}$$

(iii) Accélérations

A partir de l'expression (3.3.12), nous voyons que

$$\xi'^{\mu} = \xi^{\mu} + b^{\mu}(\xi^5 - \xi^6) , \tag{3.3.26a}$$

$$\xi'^5 = -b^{\mu}\eta_{\mu\nu}\xi^{\nu} + \xi^5 + \frac{\mathbf{b}^2}{2}(\xi^5 - \xi^6), \tag{3.3.26b}$$

$$\xi'^6 = -b^{\mu}\eta_{\mu\nu}\xi^{\nu} + \xi^6 + \frac{\mathbf{b}^2}{2}(\xi^5 - \xi^6) , \tag{3.3.26c}$$

où

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \equiv -b^{\mu}\eta_{\mu\nu}b^{\nu} = -b_{\nu}b^{\nu} . \tag{3.3.26d}$$

Nous obtenons

$$\xi'^5 - \xi'^6 = \xi^5 - \xi^6 \tag{3.3.27a}$$

et

$$\xi'^5 + \xi'^6 = -2b^{\mu}\eta_{\mu\nu}\xi^{\nu} + (\xi^5 + \xi^6) + \mathbf{b}^2(\xi^5 - \xi^6). \tag{3.3.27b}$$

De (3.3.26a) et (3.3.15), nous avons

$$(\xi'^5 + \xi'^6)\, X'^{\mu} = (\xi^5 + \xi^6)X^{\mu} + b^{\mu}(\xi^5 - \xi^6) .$$

De (3.3.27b), nous déduisons que

$$X'^{\mu} = \frac{(\xi^5 + \xi^6)X^{\mu} + b^{\mu}(\xi^5 - \xi^6)}{(\xi^5 + \xi^6) - 2b^{\mu}\eta_{\mu\nu}\xi^{\nu} + (\mathbf{b}^2)(\xi^5 - \xi^6)} \tag{3.3.28a}$$

ou

$$X'^{\mu} = \frac{X^{\mu} + b^{\mu}(\xi^5-\xi^6)/(\xi^5+\xi^6)}{1 + 2\mathbf{b}\circ\mathbf{X} + (\mathbf{b}\circ\mathbf{b})(\xi^5-\xi^6)/(\xi^5+\xi^6)} \tag{3.3.28b}$$

Pour obtenir la forme usuelle de la transformation conforme* , nous allons définir l'hypersurface

$$(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2-(\xi^4)^2+(\xi^5)^2-(\xi^6)^2 = 0, \tag{3.3.29}$$

dans l'espace à six dimensions. Alors,

$$\begin{aligned}(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2-(\xi^4)^2 \\ &= (\xi^5+\xi^6)^2\,[(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2-(X^4)^2] \\ &= (\xi^5+\xi^6)^2\,(-\mathbf{X}\circ\mathbf{X}) \\ &= (\xi^6)^2-(\xi^5)^2 .\end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}\circ\mathbf{X} &\equiv -X^{\mu}\eta_{\mu\nu}X^{\nu} = -X_{\nu}X^{\nu} \\ &= \frac{(\xi^5)^2-(\xi^6)^2}{(\xi^5+\xi^6)^2} = \frac{\xi^5-\xi^6}{\xi^5+\xi^6} .\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Finalement,

$$X'^{\mu} = \frac{X^{\mu} + b^{\mu}(\mathbf{X}\circ\mathbf{X})}{1 + 2(\mathbf{b}\circ\mathbf{X}) + (\mathbf{b}\circ\mathbf{b})(\mathbf{X}\circ\mathbf{X})} \tag{3.3.31}$$

---

* Barut et Raczka[4], p. 409.

(iv) Dilatations

A partir de l'expression (3.3.14), nous voyons que

$$\xi'^{\mu} = \xi^{\mu} , \tag{3.3.32a}$$

$$\xi'^{5} = (\cosh d)\xi^{5} + (\sinh d)\xi^{6}, \tag{3.3.32b}$$

$$\xi'^{6} = (\sinh d)\xi^{5} + (\cosh d)\xi^{6}. \tag{3.3.32c}$$

Nous avons

$$\xi'^{5}+\xi'^{6}= e^{d}(\xi^{5}+\xi^{6}) \tag{3.3.33}$$

et

$$X'^{\mu} = e^{-d}X^{\mu} \quad . \tag{3.3.34}$$

En conclusion, nous avons montré dans cette section que les variables X^{μ} définies en (3.3.15) se transforment comme les coordonnées de l'espace de Minkowski.

3° Invariance des équations de Maxwell

Nous avons construit précédemment les éléments du groupe conforme SO(4,2) qui est constitué de quinze paramètres. Parmi ses sous-groupes, on retrouve le groupe de Lorentz à six paramètres, les translations et les accélérations à quatre paramètres chacun, et finalement, les dilatations à un paramètre.

Nous pouvons écrire des équations analogues à celles de la théorie de la relativité restreinte en termes d'un espace à six dimensions. Si nous reprenons les cinq principales, citées au début de la section 3.2, nous aurons

$$f^a = m\,\frac{d^2\xi^a}{d\bar{\tau}^2}, \qquad a = 1,2,3,4,5,6, \tag{3.3.35a}$$

avec

$$d\bar{\tau}^2 = -g_{ab}\,d\xi^a d\xi^b \qquad , \tag{3.3.35b}$$

où

$$[g_{ab}] = \mathrm{diag}\,(1,1,1,-1,1,-1)\,. \tag{3.3.35c}$$

Les équations analogues à celles de Maxwell deviennent

$$\frac{\partial}{\partial x^a} F^{ab} = -J^b \tag{3.3.36}$$

et

$$\varepsilon^{abcdef}\,\frac{\partial}{\partial x^d} F_{ef} = 0 \tag{3.3.37}$$

Les équations (3.2.14) et (3.2.15) deviennent

$$f^a = e\, F^a{}_b \frac{dx^b}{d\bar{\tau}} \tag{3.3.38}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x^b}\, T^{ab} = 0\,. \tag{3.3.39}$$

Nous avons ici des tenseurs comme en relativité mais, dans un espace à six dimensions au lieu de quatre. Les équations précédentes sont invariantes sous le groupe conforme.

Nous allons montrer maintenant que la vitesse de la lumière est invariante sous le sous-groupe des accélérations. Comme la vitesse de la lumière découle des équations de Maxwell, ce calcul illustrera que ces dernières sont invariantes sous les accélérations. L'invariance des équations de Maxwell sous les accélérations pourrait, bien sûr, être démontrée directement.

Soit

$$d\bar{\tau}^2 = -g_{ab}d\xi^a d\xi^b \quad ,$$

ou

$$d\bar{\tau}^2 = -\eta_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu - (d\xi^5)^2 + (d\xi^6)^2 \,. \tag{3.3.40}$$

En prenant

$$\rho = \xi^5 + \xi^6 \tag{3.3.40a}$$

et

$$\eta = \xi^5 - \xi^6 \quad , \tag{3.3.40b}$$

nous obtenons

$$d\bar{\tau}^2 = -\eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu - d\rho d\eta \quad . \tag{3.3.40c}$$

De l'équation (3.3.30) pour l'hypersphère, soit

$$x_\mu x^\mu = -\eta/\rho \quad , \tag{3.3.40d}$$

nous obtenons

$$d\bar{\tau}^2 = -\rho^2 dx_\mu dx^\mu \quad , \tag{3.3.41a}$$

ou

$$d\bar{\tau}^2 = \rho^2 d\tau^2 \quad , \tag{3.3.41b}$$

avec

$$d\tau^2 = -dx_\mu dx^\mu \; , \tag{3.3.41c}$$

l'invariant métrique en relativité restreinte.

Comme la vitesse de la lumière est obtenue à partir de $d\tau = 0$ et que $d\bar{\tau}^2$ est un invariant sous les accélérations, alors la vitesse de la lumière est conservée sous ces transformations. Ceci illustre le fait que les équations de

Maxwell sont invariantes sous les accélérations. On montrerait facilement qu'il en est de même pour le sous-groupe des dilatations. Pour ce qui est du groupe de Poincaré, cela va de soi. Donc, les équations de Maxwell sont invariantes sous le groupe conforme. Par contre, les équations de la mécanique relativiste, elles, ne sont pas invariantes sous ce groupe.

Le groupe conforme est le plus vaste groupe continu laissant invariants les phénomènes électrodynamiques.

4° Sous-groupe τ_4 x) SO(1,1) X SO (3,1) = H.

Ici, τ_4 correspond aux accélérations, SO(1,1) aux dilatations et SO(3,1) au groupe de Lorentz. Les éléments peuvent s'écrire respectivement à partir de (3.3.12), (3.3.14) et (3.3.9), soit

$$\tau_4 \rightarrow \begin{bmatrix} I_4 & \mathcal{B} \\ \bar{\mathcal{B}} & \mathcal{B}^* \end{bmatrix}, \quad SO(1,1) \rightarrow \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & \mathcal{D} \end{bmatrix}$$

et

$$SO(3,1) \rightarrow \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \tag{3.3.42}$$

où

$$\mathcal{B} = [\, b, -b \,], \quad \bar{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -b^T I_{3,1} \\ -b^T I_{3,1} \end{bmatrix}, \tag{3.3.43}$$

$$\mathcal{B}^* = \begin{bmatrix} 1+b^2/2 & -b^2/2 \\ b^2/2 & 1-b^2/2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} \cosh d & \sinh d \\ \sinh d & \cosh d \end{bmatrix}. \tag{3.3.44}$$

Un élément du sous-groupe H s'écrira alors

$$\begin{bmatrix} \Lambda & B\ D \\ \bar{B}\ \Lambda & B^{*}D \end{bmatrix} . \qquad (3.3.45)$$

Nous formons un élément de la variété G/H à partir des translations (3.3.10), soit

$$\begin{bmatrix} I_4 & X \\ \bar{X} & X^{*} \end{bmatrix} , \qquad (3.3.46)$$

où

$$X = [a,a], \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} -a^{T}I_{3,1} \\ a^{T}I_{3,1} \end{bmatrix}, \qquad (3.3.47)$$

$$X^{*} = \begin{bmatrix} 1+a^2/2 & a^2/2 \\ -a^2/2 & 1-a^2/2 \end{bmatrix} . \qquad (3.3.48)$$

Cette variété est homogène au sens de la définition que nous avons donnée à la section 2.2. En effet, pour n'importe quelle paire de points c_1, c_2 de la variété,

$$c_2 = (c_2 c_1^{-1}) c_1 \quad . \qquad (3.3.49)$$

En fait, comme les points c appartiennent à un groupe, nous pouvons écrire l'expression (3.3.49).

Soit X^{μ} défini comme en (3.3.15). Il est aisé de voir que H laisse le point $X^{\mu} = 0$ invariant, alors que toutes les translations déplacent ce point. Selon la terminologie de la section 2.2, H constitue le groupe cinématique.

(b) Détermination de la linéarité ou de la non-linéarité

Les éléments de la variété G/H donnés par la relation (3.3.46) soit

$$\begin{bmatrix} I_4 & X \\ \bar{X} & X^* \end{bmatrix} ,$$

sont en correspondance biunivoque avec les variables X^μ définies par l'équation (3.3.15), soit

$$X^\mu \equiv \frac{\xi^\mu}{\xi^5+\xi^6} .$$

En effet, d'un point X^μ donné on rejoint n'importe quel autre point X^μ à partir de la relation (3.3.25), soit

$$X'^\mu = X^\mu + a^\mu \quad ,$$

avec un a^μ approprié. Les a^μ sont justement les paramètres qui, exponentiés comme en (3.3.10), donnent les éléments (3.3.46)

Regardons maintenant comment se transforme X^μ sous le sous-groupe H du groupe conforme.

On vérifie que X^μ se transforme linéairement sous les transformations de Lorentz et les dilatations; ce qui apparaît clairement dans les relations (3.3.18) et (3.3.34), soit respectivement

$$X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu$$

et

$$X'^\mu = e^{-d} X^\mu$$

Par contre, X^μ se transforme non linéairement sous les accélérations, transformations qui sont données dans (3.3.31), soit

$$X'^\mu = \frac{X^\mu + b^\mu(\mathbf{X}\circ\mathbf{X})}{1 + 2(\mathbf{b}\circ\mathbf{X}) + (\mathbf{b}\circ\mathbf{b})(\mathbf{X}\circ\mathbf{X})}$$

Donc, l'action du sous-groupe H = τ_4 x) SO(1,1) X SO(3,1) sur la variété G/H, où G = SO(4,2), n'est pas linéaire.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons tenté de donner des définitions de la propriété d'homogénéité que l'on veut attribuer à l'espace-temps, de la manière la plus naturelle ou intuitive possible. En cela, nous avons utilisé une voie différente de celle empruntée par plusieurs auteurs. En effet, comme nous l'avons noté au début de cette étude, plusieurs d'entre eux ont qualifié d'homogène une propriété de l'espace-temps qui leur permettait de conclure que les transformations reliant des systèmes équivalents étaient linéaires et correspondaient à celles de Lorentz. Nous entendons par systèmes équivalents des systèmes dans lesquels les lois de la physique sont les mêmes.

Dans la littérature, on peut retrouver plusieurs démonstrations des transformations de Lorentz où l'homogénéité n'est pas invoquée. Dans ce sens, une des plus belles démonstrations est effectuée dans le volume de V. Fock[21], où les transformations de Lorentz sont déduites à partir des deux seules hypothèses suivantes, soit: la conservation du mouvement inertiel et l'invariance des équations de Maxwell. L'auteur réunit ces deux hypothèses sous une seule, par une interprétation appropriée du principe de relativité. Il est intéressant de noter, entre autres, que le principe de réciprocité et la linéarité des équations de transformation sont alors déduits tout à fait naturellement. On rencontre un autre très bel exemple de démonstration des transformations de Lorentz n'invoquant pas l'homogénéité, dans un article de

E.C. Zeeman[22]. Ce dernier démontre que le groupe de tous les automorphismes qui préservent l'ordre partiel que constitue la causalité génère le groupe de Poincaré et les dilatations.

Donc, le principe d'homogénéité de l'espace-temps ne constitue pas une hypothèse nécessaire à la déduction des transformations de Lorentz ou de la linéarité de ces dernières. D'ailleurs, à partir de notre définition d'homogénéité donnée dans un espace-temps plat, nous démontrons que l'homogénéité n'implique pas nécessairement la linéarité. A travers les deux exemples que nous avons utilisés pour prouver cette dernière assertion, il est intéressant de noter que les mathématiques correspondantes, soit celles de la théorie des groupes continus, donnent un support très solide à la définition même. A partir de la théorie des groupes continus (ou de Lie), on peut construire plusieurs autres espaces satisfaisant à la définition donnée dans un espace-temps plat, du moins du point de vue mathématique. Dans ce sens, nous pouvons soulever la question suivante: est-il possible de construire tous les complexes associés de dimension quatre de la théorie des groupes de Lie?

Nous pouvons souligner aussi le fait que nous donnons une définition explicite de groupe cinématique, ce qui à notre connaissance n'est pas fait de manière systématique dans la littérature.

A titre de remarque finale, insistons sur le fait que nos trois définitions d'homogénéité de l'espace-temps données dans le cadre des théories métriques, ont leurs assises dans la réalité physique elle-même. Si nous regardons la définition avancée lorsqu'à la limite l'espace-temps est plat, nous voyons que la vérification de la propriété d'homogénéité dépend de la connaissance du groupe de symétrie des lois physiques, et donc des lois elles-mêmes. Dans les deux autres définitions, il faut vérifier si le principe d'équivalence d'Einstein ou le principe d'équivalence élargi sont valides. Ceci illustre de nouveau que les définitions que nous avons présentées se rapprochent de l'intuition physique.

ANNEXE A

ESPACE VECTORIEL ET ESPACE EUCLIDIEN

Nous allons donner dans cette annexe quelques définitions et propriétés d'un espace vectoriel linéaire et d'un espace euclidien réel, qu'on retrouve en algèbre linéaire. La première de ces définitions a été prise dans le volume de Gilmore[5] et la seconde dans celui de Gel'fand[6].

Définition 1

Un <u>espace vectoriel</u> linéaire $\mathbf{V}$ est constitué par

(a) un ensemble d'éléments $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,... ε $\mathbf{V}$, appelés vecteurs,

(b) un ensemble d'éléments f_1, f_2,... ε F, où F est appelé un corps,

munis des deux opérations suivantes, soit

(α) l'addition vectorielle, notée +,

(β) la multiplication par un scalaire, notée $\circ$,

et qui satisfont les postulats suivants:

<u>Postulat A</u>

1. $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \; \varepsilon \; \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j \; \varepsilon \; \mathbf{V}$ (fermeture)

2. $\mathbf{v}_i+(\mathbf{v}_j+\mathbf{v}_k) = (\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j)+\mathbf{v}_k$ (associativité)

3. $\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i+\mathbf{v}_0$ (existence de l'identité)

4. $\mathbf{v}_i+(-\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_0 = (-\mathbf{v}_i) + \mathbf{v}_i$ (existence d'un inverse)

5. $\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j+\mathbf{v}_i$ (commutativité)

<u>Postulat B</u>

1. $f_i \in F, \mathbf{v}_j \in \mathbf{V} \Rightarrow f_i \circ \mathbf{v}_j \in \mathbf{V}$ (fermeture)

2. $f_i \circ (f_j \circ \mathbf{v}_k) = (f_i f_j) \circ \mathbf{v}_k$ (associativité)

3. $1 \circ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ (existence de l'identité)

4. $f_i \circ (\mathbf{v}_k + \mathbf{v}_l) = f_i \circ \mathbf{v}_k + f_i \circ \mathbf{v}_l$

   $(f_i + f_j) \circ \mathbf{v}_k = f_i \circ \mathbf{v}_k + f_j \circ \mathbf{v}_k$ (distributivité)

Définition 2

Si, à chaque paire de vecteurs **x**,**y** d'un espace vectoriel **V** réel, nous pouvons associer un nombre réel, noté (**x**,**y**), et satisfaisant les propriétés suivantes

1. $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$

2. $(\lambda \mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$

3. $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1,\mathbf{y})+(\mathbf{x}_2,\mathbf{y})$

4. $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$ et $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

où λ est un nombre réel quelconque, alors nous dirons qu'un produit, que nous appellerons "produit scalaire"*, est défini dans l'espace vectoriel **V**.

Un espace vectoriel dans lequel un produit scalaire est défini est dit être un <u>espace euclidien</u>.

<u>N.B.</u> Il est intéressant de noter que dans plusieurs applications, comme c'est le cas en théorie de la relativité restreinte, on définit un produit, que nous appellerons produit "pseudo-scalaire", qui satisfait les propriétés 1 à 3 mais pas la propriété 4.

Nous pouvons ajouter aux définitions d'un espace vectoriel et d'un espace euclidien les deux théorèmes suivants:

Théorème 1

Tous les espaces vectoriels réels de dimension n sont isomorphes.

---

* Dans la traduction anglaise du volume de Gel'fand, on utilise l'expression "inner product".

Théorème 2

Tous les espaces euclidiens réels de dimension n sont isomorphes.

Pour conclure, cherchons une représentation "standard" pour un espace vectoriel (ou euclidien). Si nous définissons un vecteur par la suite de n nombres réels, comme suit:

$$\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

la somme vectorielle de deux vecteurs par

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n),$$

et le produit par un scalaire comme

$$\lambda \circ \mathbf{x} = (\lambda\xi_1,\ \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n),$$

nous avons construit un espace vectoriel linéaire de dimension n sur le corps des réels et muni ce dernier de coordonnées rectilignes. Tous les autres espaces vectoriels de dimension n sur le corps des réels lui sont isomorphes.

Si le produit scalaire est défini par

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n$$

et que l'on choisisse les vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ comme suit,

$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,...,0)$

$\mathbf{e}_2 = (0,1,0,...,0)$

. . . .

$\mathbf{e}_n = (0,0,0,...,1)$

alors

$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 \text{ pour } i=j \\ 0 \text{ pour } i\neq j \end{cases}.$$

Nous avons construit un espace euclidien réel de dimension n et muni ce dernier d'un système de coordonnées rectangulaires ou cartésiennes. Tous les autres espaces euclidiens réels de dimension n sont isomorphes à ce dernier. Il est à noter que pour un système de coordonnées rectilignes, i.e. non nécessairement orthogonales, le produit scalaire s'écrirait comme:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{1,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

avec certaines contraintes sur les a_{ik} qui sont constants.

Il est intéressant aussi de rappeler les trois définitions suivantes :

Définition 3

La <u>longueur</u> d'un vecteur ou sa norme notée $|\mathbf{x}|$, est donnée par

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})} .$$

Définition 4

L'<u>angle</u> entre deux vecteurs est donné par

$$\varphi = \text{arc cos} \left\{ \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|} \right\} .$$

Définition 5

La <u>distance</u>* entre deux vecteurs est donnée par

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Toute la géométrie euclidienne peut être construite à partir de la notion d'espace vectoriel linéaire et de produit scalaire. En fait, nous pouvons définir les concepts de ligne, plan, dimension, lignes parallèles, etc., à partir des définitions d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire dans un espace vectoriel linéaire. D'autres concepts comme la longueur d'un vecteur, l'angle entre deux vecteurs, etc., peuvent être définis à partir du produit scalaire.

---

* Dans le cas où on utilise la définition du produit pseudo-scalaire on parlera alors de <u>pseudo-distance.</u>

ANNEXE B

VARIETE

1° Nous définirons tout d'abord une "variété topologique"*, concept que l'on retrouve entre autres dans le volume de Barut et Raczka[4].

Définitions préalables

- Nous dirons que le couple (X,τ), où X est un ensemble arbitraire et τ une famille de sous-ensembles $\tau_i \subset X$, est un espace topologique si τ satisfait les conditions suivantes:

1° L'ensemble vide $\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$

2° Si $U_1 \in \tau$ et $U_2 \in \tau$, alors $U_1 \cap U_2 \in \tau$

3° Si $U_s \in \tau$ pour chaque $s \in S$, où s est un ensemble d'indices arbitraires, alors

$$\bigcup_{s\in S} U_s \in \tau$$

Chaque sous-ensemble $U \subset X$ appartenant à la famille τ est appelé un ensemble ouvert (ou ouvert) et la famille τ une topologie sur X.

Un voisinage d'un élément $x \in X$ est un ensemble arbitraire qui contient un ensemble ouvert contenant x.

---

* Connue sous l'expression anglaise de "topological manifold".

- Nous dirons qu'un espace topologique est un espace de Hausdorff (ou un espace T_2) si pour chaque paire de points distincts x_1 et x_2 il existe des voisinages U_1 et U_2 tels que $x_1 \varepsilon U_1$, $x_2 \varepsilon U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

-Soit M un espace de Hausdorff. Une carte* sur M est un couple (U,φ), où U est un sous-ensemble ouvert de M et φ est un homéomorphisme de U sur un sous-ensemble ouvert de l'espace euclidien réel à n dimensions, soit R^n. En d'autres mots, une carte est un système de coordonnées local dans M par rapport à φ.

Il est à noter que deux espaces topologiques X et Y sont homéomorphes si chaque ensemble ouvert de X a un ensemble ouvert de Y comme image et chaque ensemble ouvert de Y est l'image d'un ensemble ouvert de X.

-Un espace de Hausdorff est dit être localement euclidien si à chaque point p ε M il existe une carte (U,φ)sur un voisinage U de p de dimension n.

Définition 1

Un espace de Hausdorff qui est localement euclidien à chaque point est appelé une <u>variété topologique</u>.

Il est à noter que l'espace euclidien R^n, la sphère S^{n-1} dans R^n, etc., sont des exemples de variétés topologiques.

---

* Du mot anglais "chart".

2° Nous allons maintenant donner les définitions de ce que l'on entend par variété différentielle et variété analytique. On retrouve ces définitions dans le volume de Barut et Raczka.

Autres définitions préalables

- Soit S et S′ des sous-ensembles ouverts de R^n et soit ψ une application de S dans S′. L'application ψ est dite différentiable si les coordonnées $y^j(\psi(p))$, $j=1,2,\ldots,n$, sont des fonctions infiniment différentiables des coordonnées $x^i(p)$, $i= 1,2, \ldots, n$, avec p quelconque dans S. Nous dirons alors que ψ appartient à la classe $C^\infty(S)$.

- L'application $\psi: S \rightarrow S'$ est dite analytique (ou de classe C^ω) si pour chaque point $p \in S$ il existe un voisinage U de p, tel que pour $q \in U$ chacune des coordonnées $y^j(\psi(q))$, $j = 1,2, \ldots,n$, peut être développée en série de puissances convergente de $x^i(q) - x^i(p)$, $i=1,2, \ldots,n$.

- Une structure différentielle de dimension n (appelée aussi un atlas de classe ∞) sur un espace de Hausdorff M est une famille de cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\alpha \in A$ sur M, qui satisfait les deux conditions suivantes:

A) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, c'est-à-dire que le domaine des cartes couvre tout l'espace M.

B) Pour chaque paire $\alpha,\beta \in A$, l'application $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est une application différentiable de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sur $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

La notation $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ signifie que l'application φ_α^{-1} est suivie de l'application φ_β.

- Une structure analytique de dimension n sur un espace de Hausdorff a la même définition que celle d'une structure différentielle; il s'agit de remplacer la condition de différentiabilité par celle d'analyticité.

Définition 2

Une variété différentielle (analytique) de dimension n est un espace de Hausdorff M avec une structure différentielle (analytique) de dimension n.

ANNEXE C

GROUPE ET COMPLEXE ASSOCIE A UN SOUS-GROUPE

Nous allons ici donner quelques définitions et propriétés se rapportant aux groupes et aux complexes associés.

Définition 1

Un groupe G est:

(a) un ensemble d'éléments $g_1, g_2, ..., g_n \in G$

avec

(b) une opération, appelée multiplication de groupe et notée $\circ$, telle que les quatre propriétés suivantes sont satisfaites

1. $g_i \in G, g_j \in G \Rightarrow g_i \circ g_j \in G$ (fermeture)

2. $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ (associativité)

3. $g_1 \circ g_i = g_i = g_i \circ g_1$ (existence de l'identité)

4. $g_k \circ g_l = g_l \circ g_k = g_1$ (existence d'un inverse $g_l = g_k^{-1}$)

L'ensemble d'éléments contenus dans le groupe peut être fini ou infini, discret ou continu.

On retrouve cette définition ainsi que celles des groupes continus et des groupes de Lie dans le volume de Gilmore(5).

Définition 2

Soit un groupe G et un sous-groupe H de G. Un complexe associé à H par la droite* est un sous-ensemble de la forme $Hg = \{ x \mid x=hg, h \in H\}$ avec $g \in G$. Un complexe associé à H par la gauche est un sous-ensemble de la forme $gH = \{ x \mid x= gh, h \in H\}$ avec $g \in G$.

Théorème 1

Soit un sous-groupe H d'un groupe G. Les complexes associés à H par la droite (ou par la gauche) forment une partition de G, i.e. l'union de tous les complexes associés à H par la droite (ou par la gauche) donne G, et l'intersection de deux complexes distincts est le vide.

Définition 3

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit normal (ou invariant) dans G si $g^{-1} h g \in H$, quels que soient $g \in G$ et $h \in H$.

On peut montrer alors que $Hg = gH$ pour tout $g \in G$.

---

* En anglais, "right coset of H in G".

Notation

Soit un sous-groupe H d'un groupe G. Soit {Hg}, pour tout $g \in G$, l'ensemble de tous les complexes associés à H par la droite. De la propriété de partition, nous pouvons construire un ensemble de complexes distincts, soit:

$$Hg_0, Hg_1, Hg_2, \ldots$$

tels que

$$Hg_0 \cup Hg_1 \cup Hg_2 \cup \ldots = G$$

et

$$Hg_i \cap Hg_j = \emptyset \text{ pour tout i et j.}$$

Alors, l'ensemble de tous les complexes {Hg} est spécifié par la donnée de l'ensemble des g multipliant H, soit $\{g\} = \{g_0, g_1, g_2, \ldots\}$. Nous pouvons toujours choisir g_0 égal à l'identité. Lorsque nous utiliserons la notation G/H, nous parlerons de cet ensemble {g} qui spécifie l'ensemble de tous les complexes associés à H par la droite.

Nous pouvons effectuer un raisonnement similaire lorsque nous prenons l'ensemble de tous les complexes associés à H par la gauche, et noterons alors G\H l'ensemble des {g} spécifiant l'ensemble de tous les complexes associés à H par la gauche.

Si nous écrivons un ensemble de complexes distincts comme suit:

$$\{ Hc_0, Hc_1, Hc_2, ...\} = \{G\},$$

nous avons le théorème suivant:

Théorème 2

Si H est un sous-groupe invariant de G, alors les éléments $c_0, c_1, c_2, ...$ peuvent être choisis de façon à ce qu'ils soient fermés sous la multiplication et forment un groupe.

Les définitions 2 et 3 ainsi que le théorème 1 proviennent du volume de B. Baumslag et B. Chandler[18]. La définition 1, le théorème 2, et la notation nous proviennent du volume de Gilmore[5].

Nous noterons finalement une façon simple de construire un ensemble de complexes associés distincts. C'est ce qu'on retrouve dans le volume de L. Landau et E. Lifchitz[19].

Prenons comme premier complexe le sous-groupe H lui-même, que nous pouvons considérer comme multiplié par l'identité. Ensuite, prenons comme second complexe Hg_1 avec $g_1 \notin H$. Il est facile de prouver que $Hg_1 \notin H$. Prenons un élément $g_2 \notin \{Hg_1 \cup H\}$. Continuons le processus jusqu'à épuisement de notre réserve d'éléments de G.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Einstein, 1905, "On the electrodynamics of moving bodies", réimprimé dans *The principle of relativity*, (Dover, New York, 1952).

2. M.V. Lalan, 1937, "Sur les postulats qui sont à la base des cinématiques", Bull. Soc. Math. Fr., 65, 83.

3. V. Berzi et V. Gorini, 1969, "Reciprocity principle and the Lorentz transformations", J. Math. Phys., 10, 1518.

4. A.O. Barut et R. Raczka, 1986, *Theory of group representations and applications*, (World Scientific, Singapore).

5. R. Gilmore, 1974, *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*, (Wiley, New York).

6. I. M. Gel'fand, 1961, *Lectures on linear algebra*, no. 9, (Interscience Publishers Inc., New York).

7. E. Drake, 1966, "Deductions from a kinematic principle of relativity", Am. J. Phys., 34, 899.

8. L.A. Lugiato et V. Gorini, 1972, "On the structure of relativity groups", J. Math. Phys., 13 , 665.

9. J.M. Lévy-Leblond, 1976, "On more derivation of the Lorentz transformation", Am. J. Phys., 44 , 271.

10. T. Sjödin, 1982, "On the linearity of certain coordinate transformations including the Lorentz transformation", Zeitschrift fur Naturforschung, 37 A, 671.

11. S. Weinberg, 1972, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, (Wiley, New York).

12. J. Gauthier, 1986, *Contraintes sur les extensions non linéaires du groupe de Lorentz*, Mémoire de maîtrise présenté à l'Université du Québec à Trois-Rivières.

13. C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler, 1973, *Gravitation*, (Freeman, San Francisco).

14. C.M. Will, 1981, *Theory and experiment in gravitational physics*, (Cambridge University Press.).

15. P.A.M. Dirac, 1975, *General theory of relativity*, (Wiley, New York).

16. R. Adler, M. Bazin et M. Schiffer, 1965, *Introduction to general relativity*, (Mc Graw-Hill, New York).

17. R. Tremblay et L. Marchildon, 1990, "Remarques sur la notion d'homogénéité de l'espace-temps", Congrès de l'ACFAS, Université Laval, 14-18 mai.

18. B. Baumslag et B. Chandler, 1968, *Group theory*, (Schaum Publishing, New York).

19. L. Landau et E. Lifchitz, 1966, *Mécanique quantique*, (Mir Moscou).

20. F. Ayres jr., 1973, *Matrices*, (Schaum Publishing, New York).

21. V. Fock, 1964, *The theory of space, time and gravitation*, (Pergamon Press, Oxford).

22. E.C. Zeeman, 1964, "Causality implies the Lorentz group", J. Math. Phys., 5, 490.