UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES
COMME EXIGENCE
DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR
GINETTE MARTEL

ÉTUDE DU CONCEPT DE FRACTION ET ANALYSE DE GUIDES MÉTHODOLOGIQUES DESTINÉS AUX ENSEIGNANTS DE LA 4^{e} ANNÉE DU PRIMAIRE

JANVIER 1995

Tout au long de cet ouvrage, les génériques masculins sont utilisés, sans aucune discrimination et uniquement pour alléger le texte.

Derrière la nuit ... quelque part au loin
La vertigineuse blancheur d'un petit matin.

Rupert Brooke

Remerciements

Sans l'appui de plusieurs personnes, ce mémoire de maîtrise n'aurait pu voir le jour. Mes premiers remerciements vont à ma directrice de recherche, madame Elisabeth Mainguy, pour qui la tâche n'a pas toujours été facile. Elle a su, habilement, m'encourager et me soutenir dans mes nombreux moments de découragement. Je lui en suis très reconnaissante.

Je remercie particulièrement mon mari, René pour sa tolérance, mes enfants Marc et Isabelle pour leur appui, mes amies, Suzie, Claire, Lise et Ghyslaine pour leur soutien et pour leur amitié, mes parents pour leur fierté. Je remercie aussi mes amies, celles que je ne nomme pas de peur d'en oublier. Elles ont été nombreuses à m'encourager et à me convaincre que je pouvais atteindre mon but. Merci aussi à Chloé qui m'a incitée à terminer afin d'avoir du temps pour l'aimer encore davantage.

Merci à tous ceux et celles qui, par un mot ou un sourire, ont su m'entourer et m'accompagner tout au long de cette recherche.

<u>Table des matières</u>

Introduction

Le ministère de l'Éducation du Québec, depuis sa création, est responsable de la formation de milliers d'étudiants. Les programmes de formation ont connu, au fil des ans, plusieurs réformes pédagogiques. En effet, l'évolution sociale en Occident, a provoqué, entre autres, des réorganisations du curriculum scolaire. Celles-ci ont été la source de profondes remises en question dans le monde de l'enseignement. Chaque fois, le milieu scolaire, dans une large mesure, a tenté de s'adapter à cette évolution qui a eu un impact, entre autres, sur les disciplines qui le composent.

De toutes les disciplines, il y en a une qui nous questionne particulièrement: les mathématiques. Nous nous y intéressons davantage parce que son enseignement semble, depuis longtemps, présenter des difficultés d'adaptation face au changement. Malgré les nouvelles orientations pédagogiques, l'enseignement de cette discipline demeure traditionnel, entre autres, à cause de la rigueur qu'on lui attribue. Les concepts qu'elle véhicule paraissent complexes voire incompréhensibles. Comme Baruk (1973) le mentionne, on croit, dans bien des cas, qu'elle n'existe que pour les *«matheux»*, c'est-à-dire pour ceux qui auraient la bosse des mathématiques.

Ce préjugé est alimenté par certains manuels et certains programmes qui insistent sur les théorèmes et sur le symbolisme. L'enseignant, de par l'enseignement qu'il a lui-même reçu, n'en a souvent qu'une connaissance intuitive, une connaissance centrée sur la bonne réponse. La recherche de la réponse exacte est associée par Dionne (1988) à un conditionnement où *«la matière apparaît strictement comme un bagage de connaissances à transmettre (...)»*. Dans ce sens, l'enseignant peut difficilement expliciter les concepts mathématiques, ce qui semble augmenter le risque d'un enseignement basé sur les automatismes et sur le formalisme de cette discipline.

Mais où ce préjugé a-t-il pris sa source? Il faut retourner aux origines des mathématiques, avant les mathématiques des Grecs, pour y découvrir qu'elles n'ont pas toujours été perçues comme étant formelles et incompréhensibles. Au début, cette discipline était beaucoup plus intégrée au vécu. Elle avait un but utilitaire et était beaucoup plus accessible.

Caveing (1985) parle d'une préhistoire des mathématiques, c'est-à-dire d'une période précédant le calcul écrit où le berger utilisait de petits cailloux, du latin "calculi", pour compter ses moutons. Ce calcul prend aussi la forme de marquage comme des traces sur des bâtons ou des noeuds sur une corde.

De l'évolution des civilisations naît la nécessité du calcul écrit. Les Babyloniens et les Egyptiens n'utilisent aucun théorème mais essentiellement la résolution de problèmes. Par exemple, plutôt que d'enseigner les notions, on utilise les problèmes de finances, d'échanges, de partage ou de planification. Caveing nous spécifie que *«L'application pratique était un habillage au caractère sans doute pédagogique: il s'agissait de rendre attractif à l'élève l'effort qu'il devait fournir»*.

Les mathématiques sont alors à la portée des apprenants. On stimule ces derniers en les impliquant directement, en leur permettant de se questionner, d'émettre des hypothèses, d'analyser à partir d'actions concrètes et utiles. Cette méthodologie ravive les échanges et les discussions, permet l'appropriation par le sujet de l'objet de l'apprentissage. L'enseignant est l'agent, le motivateur qui fait naître les interactions. L'élève y voit une façon de se faciliter la tâche. Par exemple, le briqueleur apprend que le nombre Pi est:

> la valeur 3, ce qui est très approximatif et simple. Ils savent qu'elle est fausse,(...) Mais(...) Quand on calcule, de cette façon, le nombre de briques nécessaires pour construire la margelle d'un puits, on a de la place entre les briques pour mettre le ciment.

Au 6ième siècle av. J.-C., les Grecs instaurent une véritable pensée mathématique avec les théorèmes et la géométrie. La résolution de problèmes est remisée à mesure que le symbolisme prend place. Il devient de plus en plus difficile de concrétiser les notions à mesure qu'elles deviennent complexes et abstraites.

Au cours des siècles, le formalisme ne fait que s'accentuer. Les avantages ne font aucun doute puisque ainsi, on arrive à des calculs plus précis, plus complexes. Cependant, tout cela se fait au détriment d'une majorité d'apprenants qui, ne reconnaissant plus les calculs simples tirés des situations quotidiennes, délaisse cette discipline, la laissant entre les mains d'initiés. Un extrait d'un texte de Caveing nous indique que ces initiés ont créé intentionnellement cet état:

> (...) le plaisir qu'il y a à discuter entre initiés de choses qu'on est seuls à comprendre. Les scribes formaient une caste fermée dans l'administration (...) de cette manière on sélectionnait sans doute les meilleurs sujets.

Ce bref regard sur l'histoire nous laisse croire que notre vision contemporaine des mathématiques provient de ce courant né avec les Grecs et perpétué, par la suite, jusqu'à nos jours. Il nous apprend aussi qu'il est possible de relier les mathématiques aux situations quotidiennes et de les rendre utilitaires afin que tous puissent en profiter.

C'est cette possibilité que l'on tente d'exploiter de nos jours dans l'enseignement. Cependant, les enseignants se butent à leur méconnaissance des concepts mathématiques. Leur centration sur le formalisme et sur l'utilisation de règles qui assurent les résultats attendus, réduit l'efficacité de leurs stratégies pédagogiques et en limite la diversité. Ces stratégies réductrices se substituent aux stratégies variées qui favorisent l'appropriation des concepts mathématiques. Les outils qu'ils ont en main devraient leur faciliter la tâche. Entre autres, les guides méthodologiques leur proposent des démarches pédagogiques qui progressent selon des étapes définies en poursuivant l'atteinte des objectifs mathématiques.

Nous nous interrogeons particulièrement sur le soutien qu'apportent ces guides aux enseignants dans leur tâche tant au niveau du contenu soit la compréhension des concepts, qu'au niveau de la méthodologie soit les stratégies pédagogiques employées pour l'appropriation de ce contenu. Donnent-ils des pistes d'exploitation qui permettent d'allier le formalisme des mathématiques à leur utilisation dans la vie courante? Permettent-ils aux enseignants de prendre conscience de leurs difficultés et de remédier à leurs lacunes? Incitent-ils à promouvoir les situations qui enrichissent les étapes proposées de façon à s'engager dans un processus plutôt que de se limiter à faire valoir des techniques d'enseignement?

C'est à partir de ces questions que nous explorerons l'enseignement des concepts mathématiques. Puisque les mathématiques sont constituées, entre autres, de plusieurs concepts, nous nous intéresserons davantage à celui de fraction.

CHAPITRE I

L'enseignement des mathématiques au niveau primaire

Les mathématiques, depuis longtemps, ont fait l'objet de nombreuses recherches. Elles ont stimulé, exhorté, découragé, stupéfié, mais elles n'ont jamais suscité l'indifférence.

Socialement, leur importance ne fait aucun doute. Les mathématiques font bonne figure dans de nombreux domaines tels l'administration et l'informatique pour ne nommer que ceux-là; elles sont souvent utilisées comme un des plus importants critères de sélection pour l'accès à certains postes ou programmes d'études. Mentionnons seulement l'admission en technique de réadaptation, en métallurgie, en assurances générales ou en horticulture selon le SRAM[1]. Malgré cela, leur compréhension ne va pas de soi. Il faut les apprivoiser, les reconnaître dans nos actions ainsi que comprendre leur langage. Bref, il faut apprendre les mathématiques.

Cet apprentissage conscient débute dès la première année du primaire. Mais bien avant l'entrée scolaire, l'enfant qui fait des associations et des classements avec des objets familiers, qui partage ses fruits avec ses pairs, fait aussi des mathématiques. Ces jeux sont des expériences intuitives essentielles au développement progressif d'une pensée logique et

---

[1]SRAM (Service régional d'admission de Montréal métropolitain regroupant la majorité des cegeps de la province).

formelle. L'enseignement a pour rôle de rendre conscientes ces actions, de les identifier, de les mathématiser et de les symboliser (Piaget 1969).

Toute cette conscientisation des mathématiques, toute cette mathématisation des gestes quotidiens provoquent, chez une majorité d'enseignants, des malaises, des questionnements concernant leur pratique et leur méthodologie. Aucun enseignant ne met en doute que les mathématiques sont utilisées hors de l'école et que le contenu mathématique est enseigné à l'école. Ce qui crée les interrogations, c'est qu'ils ne savent pas toujours comment rendre les enfants conscients des mathématiques dans leur quotidien tout en gardant le symbolisme du contenu. C'est ce que Baruk (1992) appelle la praximétrie et que Cazenave (1970) explique en ces termes: *«Il faut bien faire sentir à l'enfant que les opérations se font sur les nombres, ceux-ci n'ayant de signification que par rapport à l'ensemble auquel ils sont attachés.»*

En d'autres mots, les mathématiques, en elles-mêmes, sont constituées, entre autres, d'opérations, de signes, d'axiomes, de théorèmes qu'il ne faut pas perdre de vue. Cependant, quotidiennement, nous les utilisons, nous les relions à des situations vécues dans notre environnement. Nous pouvons donc mathématiser cet environnement générant ainsi le sens et l'utilité de la discipline. C'est ainsi qu'une méconnaissance du contenu entrave la mathématisation des activités courantes, entrave qui se répercute sur l'élaboration des stratégies pédagogiques.

Avant d'élaborer sur ce sujet, nous considérons qu'il est important de situer brièvement le contexte pédagogique dans lequel tous les enseignants du Québec doivent travailler: le programme du ministère de l'Éducation du Québec (MEQ 1980). Ce programme a été crée au début des années 80 dans le but d'uniformiser l'enseignement des mathématiques au niveau de la province. De plus, l'évolution sociale a provoqué des changements qui nécessitait la venue d'un renouveau dans ce domaine.

1. Programme du MEQ

Ce programme obligatoire constitue un cadre de référence pour l'enseignement mathématique. Les concepts et les techniques à acquérir sont répartis en objectifs à atteindre à chaque niveau du primaire; ce sont les objectifs mathématiques. Les habiletés et les attitudes à développer sont aussi élaborées en termes d'objectifs à atteindre; ce sont les objectifs de la formation générale. Pour faciliter l'atteinte de tous ces objectifs, on propose des étapes à suivre qui vont de la manipulation à la symbolisation.

Concrètement, les enseignants préparent pour les concepts à enseigner, des démarches pédagogiques, c'est-à-dire qu'ils créent des situations qui tiennent compte du contenu et de la philosophie du programme. Ces démarches incluent l'utilisation de stratégies variées afin de favoriser l'apprentissage chez les élèves tout en suivant les étapes qui facilitent la formation des concepts mathématiques.

Dans ce sens, des guides pédagogiques ont été élaborés afin d'orienter, d'appuyer et d'alimenter les enseignants. On y retrouve des indications par rapport au contenu mathématique, comme des précisions sur une notion en particulier, ou des moyens pour faciliter la compréhension. On y suggère des pistes d'exploitation orientées sur la didactique et sur la planification de l'enseignement, qui tiennent compte des habiletés et des attitudes à développer chez les élèves.

Le contenu mathématique visé par le programme ainsi que les attitudes et les habiletés à développer chez les élèves, sont structurés en une hiérarchie d'objectifs mathématiques et d'objectifs de la formation générale. Cette structure, malgré une apparence linéaire, intègre les objectifs les uns aux autres prenant ainsi le modèle d'un processus. Le MEQ (1980) le précise:

> En pratique, un tel morcellement de programme en mini-objectifs peut facilement entraîner des apprentissages sous forme fragmentaire, alors qu'une saine pédagogie devrait s'articuler autour d'activités multiples et variées de nature à susciter l'intégration des connaissances.

Pour favoriser cette intégration, les pistes d'exploitation suggérées par le MEQ reposent sur les étapes du processus d'apprentissage telles que définies par Diènes (1970), soit l'exploration, l'abstraction, l'utilisation et la communication. Ces étapes sollicitent l'action et l'expression des élèves favorisant ainsi la maîtrise des notions mathématiques.

Pour faciliter l'atteinte de ces apprentissages, les enseignants, après avoir consulté les guides du MEQ, appliquent les pistes proposées. Ils favorisent ainsi, en plus, l'autonomie des élèves. Les enseignants s'attendent alors à ce que ceux-ci puissent expliquer dans leurs mots ce qu'ils comprennent, et reconnaissent ensuite les situations qui requièrent l'utilisation de telles ou telles connaissances.

2. La problématique

Il s'avère que l'utilisation, par les enseignants, des pistes suggérées par le MEQ, ne donnent pas toujours les résultats escomptés. Leur expérience, c'est-à-dire l'utilisation de ces pistes année après année, et l'observation des résultats des élèves, met en évidence un constat peu encourageant. La déception est bien grande, quand après plusieurs essais, les enseignants observent dans plusieurs cas, que les difficultés persistent. D'ailleurs, Lefebvre (1989) apporte un commentaire dans ce sens: *«Tout nécessaire qu'ils soient, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ne donnent pas les résultats désirés.»*.

En effet, les élèves n'arrivent toujours pas à reconnaître les notions afin de les utiliser dans une situation donnée. Ces élèves demeurent, pour la plupart, très dépendants des trucs d'utilisation et de l'aide du maître. Cette situation crée un malaise que les enseignants semblent incapables d'expliquer.

Convaincus qu'ils ont enseigné de façon à toucher les objectifs visés par le programme, ils ne peuvent cerner ce qui empêche certains élèves de reconnaître les notions dans un contexte particulier. Le MEQ, en suggérant des pistes d'exploitation, vise pourtant l'appropriation des notions par les élèves. Malgré tout, l'expérimentation de ces pistes semble déformée à cause d'une interprétation réductrice de la compréhension par les enseignants. Pour eux, si les élèves développent une bonne technique de calcul, ils comprennent. S'ils donnent une bonne réponse, ils comprennent.

Une majorité d'enseignants se tournent vers le perfectionnement afin d'atténuer le malaise ressenti face à leur pratique. Ceux-ci désirent s'y approprier des outils qui améliorent leur enseignement et qui permettent aux élèves d'utiliser leurs connaissances au besoin. Une équipe de chercheurs (Cormier et al.) du ministère de l'Éducation a démontré, dans une étude socio-pédagogique (1980) , que lors de ce perfectionnement, les enseignants exigent des programmes de formation plus pratiques, plus centrés sur leurs besoins.

Pour répondre à ce besoin, des programmes de perfectionnement ont été mis en place. Les enseignants y ont participé. À l'intérieur de ces programmes, ils ont concrétisé les objectifs à atteindre en les insérant dans des démarches pédagogiques. Ils les ont expérimentées dans leur classe, ils ont ensuite objectivé sur cette expérimentation. Finalement, ils ont évalué leur enseignement. Malgré ce perfectionnement auquel ils ont ajouté d'autres éléments tels que leurs essais successifs, les lectures de volumes ou de revues spécialisées, leur réflexion, rien n'y fait. Les mêmes difficultés reviennent ponctuellement chaque année.

À la suite de toutes ces tentatives, dans bien des cas, ne voyant plus l'utilité d'élaborer des stratégies nouvelles, de bâtir du matériel, de faire manipuler, de laisser explorer, de questionner. certains enseignants abandonnent. D'autres, incapables de se résigner, s'accrochent avec un sentiment d'incompréhension qui les laisse totalement démunis.

Dans les deux cas, il s'ensuit une remise en question inévitable de leur perfectionnement ainsi que des autres moyens qu'ils s'étaient donnés pour améliorer leurs gestes pédagogiques. Toujours selon ces mêmes chercheurs, les enseignants finissent par se convaincre que: *«(...) ce qui les aide dans leurs fonctions, c'est l'expérience qu'ils ont acquise (...) ce sont les efforts personnels (...) ce sont leurs aptitudes ou leurs talents (...) leurs dons naturels (...) les échanges avec d'autres (...)»*. Et que leurs difficultés d'enseignement confirment ce qu'ils croyaient depuis longtemps, à savoir que les mathématiques sont trop formelles pour permettre une manipulation effective des notions.

Ajoutons à cela leur méconnaissance persistante du contenu, il n'en faut pas plus pour qu'ils qualifient les difficultés rencontrées d'inévitables. Les pistes proposées par le MEQ ou par le perfectionnement apparaissent alors comme des séquences ludiques qui suscitent l'intérêt des élèves plus que leur compréhension. Aucun lien ne se crée entre l'action et le formalisme des mathématiques. Elles demeurent toujours inaccessibles.

Cette inaccessibilité se manifeste aussi dans la société en général et dans le milieu scolaire en particulier. Lamontagne (1989) relève ce point en ces termes:

> (...) la mathématique se voit souvent confinée au rôle d'une science se satisfaisant à elle-même, strictement hermétique (...) qu'elle manifeste certaines tendances inquiétantes: élitisme, rigueur, inaccessibilité... Ces symptômes suggèrent un diagnostic que la population étudiante n'hésite pas à poser: la mathématique est ardue, aride et sèche, elle n'intéresse que les «bolés»... (...) la société en général perpétue, (...) toutes ces demi-vérités (...).

Bien ancrées dans cette conviction, les remises en question des enseignants qui ne veulent pas abandonner, ne progressent que très lentement puisque les fondements du questionnement portent souvent sur une vision déformée, stéréotypée des mathématiques. Cette vision conduit à un enseignement qui néglige les liens entre les concepts et qui favorise l'utilisation des automatismes de calcul.

D'autres chercheurs tels Freudenthal (1977); Thompson (1984); Bassis (1984) ont constaté cette méconnaissance du contenu mathématique par les enseignants ainsi que ses répercussions au niveau de l'enseignement de cette discipline. Bassis (1984) affirme qu'ils ne voient pas les changements majeurs, voire fondamentaux qu'ils doivent apporter à leur action pédagogique:

> (...) les problèmes numériques classiques sont les plus fréquemment donnés par les maîtres à l'école élémentaire, et que ce qui est d'abord visé par eux, c'est de donner une bonne maîtrise du calcul numérique. On confond savoir élaborer une stratégie opératoire et savoir faire des opérations.

Les enseignants, en diversifiant leurs stratégies, en répétant les explications, en soutenant les élèves en difficulté, n'insistent trop souvent que sur les automatismes et sur le formalisme des mathématiques. Goutard (1963) dans ce sens, affirme que *«le plus souvent, on est trop obsédé par les réponses pour s'intéresser au comment et au pourquoi»*. Convaincus qu'enseigner cette discipline se limite à reproduire les symboles et à initier aux règles et aux algorithmes, les enseignants concentrent leurs efforts à cet aspect, biaisant ainsi toute recherche d'amélioration.

Dionne (1988) dans sa thèse de doctorat, se rallie à l'idée de Goutard (1963). Il croit, lui aussi, que les enseignants s'attardent davantage à transmettre des connaissances qu'à leur construction:

> Cette nécessité (la symbolisation) conduit souvent à une insistance trop vive et prématurée sur la notation mathématique, au point de bien souvent la priver de sens véritable. (...) Cette vision formaliste présente à l'élève la réflexion mathématique sous la forme statique de résultats achevés sans révéler les aspects dynamisants pourtant nécessaires à un apprentissage intelligent.

Ce chercheur soutient que cette vision de la discipline mathématique est directement reliée aux propres apprentissages des enseignants. N'ayant pas eux-mêmes donné du sens aux concepts mathématiques, ils les enseignent comme ils les conçoivent, des notions symboliques dépourvues de liens. Lorsque Dionne (1988) parle de leur formation mathématique, il mentionne:

> (...) que ce soit au niveau de la conception que ces personnes véhiculent de la discipline, de la vision philosophique qu'elles en ont, (...) ou de leur centration sur les réponses de leurs élèves, cette formation ne leur permet par d'échapper aux problèmes, allant jusqu'à les y plonger par ses insuffisances, dont le manque d'intégration des éléments qui la composent.

Dans ce sens, Baruk (1985) soutient elle aussi, que le seul fait de s'interroger ne suffit pas. Non seulement il faut questionner, mais encore faut-il savoir ce sur quoi doit porter ce questionnement. Les enseignants qui s'interrogent sur leur savoir, le font souvent d'une façon réductrice toujours à cause de leur vision stéréotypée de cette discipline. Baruk (1985) précise que:

> La difficulté majeure du professeur de mathématiques quand il est plein de bonnes intentions c'est, (...), qu'il ne comprend pas *pourquoi* on ne comprend pas, et ne comprend pas ce que l'on ne comprend pas. (...) il faut donc acquérir un savoir sur la nature de ce savoir. Et pour cela, le voir se *décomposer* comme le ferait à travers un prisme la lumière (...).

Or, pour décomposer le savoir, il faut comprendre soi-même. À ce niveau, dans bien des cas, les enseignants *«sont les affreux témoins de ce qu'ils ne savent pas bien expliquer.»* On y voit là la source d'un grand dilemme. Souvent, leur formation pédagogique leur a appris qu'ils devaient expliquer et que les élèves devaient comprendre. Malgré les différents courants pédagogiques présentés dans cette discipline, expliquer pour eux, consiste comme nous l'avons déjà mentionné, à démontrer les algorithmes et à développer les automatismes. Comprendre signifie reproduire les modèles donnés par l'enseignant.

Leur enseignement étant basé sur ce modèle, ils ne saisissent pas que, malgré les réponses exactes des élèves dans les exercices de calcul qui se composent d'algorithmes, ceux-ci éprouvent des difficultés à reconnaître l'utilisation de ces mêmes algorithmes dans des problèmes écrits. Les élèves ne peuvent, dans une large mesure, reconnaître le moment où ils doivent utiliser leurs connaissances mathématiques. Ils ne comprennent pas.

Alors, puisque *«les enseignants savent à quel point la compréhension est importante»* (Smith 1979), on conçoit leur malaise. Leur vision des mathématiques limite leur recherche de voies d'exploitation des concepts. Une vision élargie leur ferait voir que l'utilisation des connaissances est facilitée par le sens qu'on leur donne. Les enseignants doivent d'abord se questionner sur le sens qu'ils donnent à leurs propres apprentissages mathématiques et par la pratique, le sens qu'ils donnent à leur acte pédagogique. Comme Robillard (1987) le mentionne: *«On ne peut désormais poser des gestes inconscients et surtout ignorer le sens que prennent nos gestes»*.

Il faut donc que les enseignants cessent de se restreindre à une vision réductrice. Les moyens mis à leur disposition devraient les aider à se conscientiser à leur action pédagogique, à leurs gestes réels. Cette poursuite de sens sur les acquis et sur l'action pédagogique confèrera du sens aux notions mathématiques à enseigner. Elle les rendra plus signifiantes par l'élaboration de situations réelles avec lesquelles les élèves trouveront enfin des réponses à leurs pourquoi.

Ces situations réalistes et ces réponses aux pourquoi permettent de rendre concrètes les mathématiques tout en préservant leur formalisme. Cependant, le malaise que vivent les enseignants face à leur compréhension réelle des concepts, ne leur permet pas toujours d'y arriver.

C'est cette incompréhension qui, dans la pratique quotidienne, fausse l'utilisation des étapes de la formation de concepts telles que recommandée par le programme du MEQ. En effet, les enseignants qui croient à l'importance de ces étapes, les exploitent d'une façon beaucoup trop linéaire. Ils négligent le fait qu'il s'agit là d'étapes qui visent l'acquisition et l'appropriation de notions mathématiques. Ces étapes s'insèrent donc dans un processus et non seulement dans l'application d'une suite hiérarchisée où les retours sont impossibles.

Il s'ensuit qu'à mesure qu'il y a progression c'est-à-dire à mesure que l'on passe d'une étape à l'autre, les lacunes des enseignants compriment cette démarche à une succession plutôt que d'en faire ressortir le processus. On se distancie de l'essentiel, c'est-à-dire qu'on peut ne pas faire ressortir l'utilisation consciente des mathématiques dans le quotidien, ni l'intégration entre les différents usages d'un concept.

Dans ce sens, Taurisson (1988) nous confirme que lorsque les élèves réussissent un problème intégré à une situation réaliste, ils peuvent le faire par la recherche de trucs et non par une logique centrée sur leurs acquis. Au sujet d'une fillette qui vient de trouver un truc pour réussir une opération, il dit:

> On poursuit les calculs avec d'autres fractions, (...) qu'elle décompose. Elle travaille vite par analogie. Elle est heureuse d'appliquer une règle. (...). On donnera les noms à ces normes en les écrivant sur une belle fraction bien dessinée sur une feuille qu'elle emporte.

Dans un tel contexte, c'est l'impasse. Les enseignants veulent que leurs élèves comprennent. Les élèves veulent utiliser ce qu'ils apprennent. De part et d'autre, c'est l'échec. Le problème demeure et les enseignants se croient dans une situation irrémédiablement sans issue.

Dans cette impasse, *«Il y a l'idée, que les savoirs peuvent s'enseigner mais que la compréhension est à la charge de l'élève»*. Pourtant, la responsabilité est partagée. D'abord, la véritable compréhension nécessite l'apport d'habiletés qui ne peuvent se démontrer. Elles doivent donc s'exercer et ce sont les élèves qui doivent le faire afin d'acquérir un savoir-faire.

Et puis, les enseignants, dans la préparation de leurs démarches pédagogiques, doivent laisser la place à de la manipulation consciente, c'est-à-dire une manipulation accompagnée d'une verbalisation de l'action. Ils ne peuvent plus donner un enseignement magistral puisque les élèves doivent agir, doivent s'approprier leurs apprentissages. Ils doivent faciliter cette appropriation afin que les élèves puissent se responsabiliser dans ce sens.

Ce but doit être poursuivi dans l'ensemble de la démarche pédagogique. Il sera senti par le réalisme de la situation de départ, par le questionnement et les interventions du déroulement. Mais aussi par les règles énoncées et par la généralisation de l'utilisation du concept. Pour faire ressortir ces liens, les enseignants doivent les connaître eux-mêmes. Si ce n'est pas le cas, il est probable que ces enseignants ne possèdent pas suffisamment le contenu mathématique qu'ils ont à enseigner.

Il devient plus évident que leurs efforts sont effectivement infructueux face à leurs stratégies pédagogiques. Puisqu'ils ne sont pas conscients des liens qui unissent les concepts mathématiques, ils ne peuvent que répéter leurs explications dans les mêmes mots ou du moins dans un langage trop convergent, non basé sur le sens. Ils ne font ainsi qu'utiliser des stratégies qui ne font que perpétuer la méconnaissance des concepts. donc des préjugés défavorables qui les accompagnent, entraînant chez leurs élèves une appréhension face aux mathématiques.

De plus, l'enseignement réduit souvent les élèves au silence puisque leur questionnement apparaît, dans ces conditions, menaçant. Trop centrés sur la bonne réponse ou sur la réponse unique, les enseignants, grâce à ces stratégies à portée réductrice, se protègent. Leur méconnaissance des concepts ayant un effet paralysant face aux stratégies et aux outils utilisés, les voies sur lesquelles ils lancent les élèves ne sont que rarement divergentes. Lemoyne (1989) confirme que l'enseignant *«occupe fréquemment tout l'espace didactique, se substituant à l'élève»*. Ceux qui adoptent un tel comportement, le font souvent pour se protéger eux-mêmes. Craignant les imprévus avec lesquels ils composent difficilement, ils négligent le fait que leur enseignement devrait favoriser l'appropriation et non la répétition ou l'imitation. Nantais (1991) le souligne aussi:

> (...) il faut s'approprier sa mathématique, la construire à partir de ses propres moyens et surtout enseigner une mathématique qui ne fasse pas peur avec une montagne de symboles vides de sens pour l'élève ou pour le maître. Enfin, cesser de donner l'impression que la mathématique revêt une espèce d'autorité intrinsèque coiffée d'une pédagogie de la bonne et unique réponse.

Bref, des enseignants éprouvent des difficultés de compréhension des concepts mathématiques. Ces difficultés se répercutent sur le choix et l'application de leurs stratégies pédagogiques et sur la compréhension réelle des élèves.

Compte tenu de tout cela, nous énonçons notre problématique. Les enseignants, vu leur méconnaissance au niveau du contenu, s'appuient dans leur enseignement sur les outils qu'ils ont à leur disposition. L'outil le plus utilisé est le guide méthodologique. Ce guide aide-t-il les enseignants à se questionner sur les concepts? Aide-t-il à leur faire comprendre qu'ils n'ont peut-être pas intégré certains liens ou certaines notions? Donne-t-il des pistes pour qu'ils orientent leur questionnement, non pas à l'extérieur d'eux mais à l'intérieur, là où réside le problème?

3. L'importance de la recherche

Afin de mieux cerner l'importance de maîtriser le contenu mathématique, nous allons nous référer à la didactique. Ce schéma de Jonnaert (1988) montre bien le lien du maître au savoir et à l'apprenant.

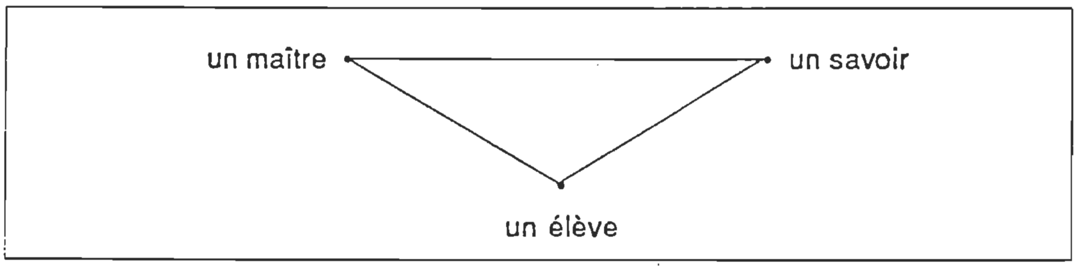


fig. 1 : les trois pôles fondamentaux de la relation didactique

Or, dans cette discipline qui fait l'objet de cette recherche, il y a interférence entre deux pôles à cause d'une méconnaissance par les enseignants, du contenu. Cette méconnaissance, ou la non-intégration d'un concept, peut engendrer des conséquences négatives pour les élèves puisque les enseignants ne jouent plus leur véritable rôle qui est de *«promouvoir l'apprentissage par l'enseigement»* (Gagné 1976). La relation est brisée; celle qui se lie au savoir mais aussi celle qui se lie à l'élève. L'enseignant ne peut plus, par son enseignement, *«initier, activer et supporter»* (Gagné 1976) l'enfant qui apprend.

La méconnaissance du contenu créant un malaise, une insécurité, c'est tout l'enseignement de la discipline qui est touché. Les cours sont souvent magistraux et les enseignants véhiculent davantage d'informations que de formation mathématique. Une étude de Meserve et Meserve (1987) sur l'enseignement des mathématiques, appuie l'importance de la recherche:

> Tout enseignant de mathématiques, à n'importe quel niveau, doit se sentir complètement à l'aise dans sa discipline. Cette aisance n'est possible que si l'enseignant connaît assez intimement la matière qu'il enseigne pour pouvoir: présenter chaque sujet de plusieurs façons différentes; montrer comment un sujet s'insère dans une structure existante ou conduit à une structure plus large.

Loin de ces habiletés, les enseignants verbalisent les mathématiques, donnent des quantités de formules et de trucs que les élèves doivent retenir sans repère, sans point d'ancrage. L'intégration est alors impossible, les données étant *«trop nombreuses et trop disparates pour qu'il puisse* (l'élève) *les intégrer et les retenir.»* (Reboul 1980). La mémoire est alors sollicitée beaucoup plus souvent que la construction du savoir.

À cause de cette méconnaissance des concepts de base, le perfectionnement en mathématique, nous l'avons déjà mentionné préalablement, s'avère souvent inefficace. Alors les enseignants ne profitent plus de cet enrichissement dont ils pourraient faire bénéficier les élèves. Ils se limiteront souvent à leur guide de base sans le remettre en question. Le Conseil supérieur de l'Éducation (1986) déplore cette réalité: *«Il va s'en* *dire que le meilleur programme du monde serait de peu d'utilité entre les mains d'enseignants dont les compétences mathématiques et didactiques seraient insuffisantes».*

Comme la non-intégration des notions touche des concepts-clé du programme de mathématiques, on constate facilement que l'enseignement se trouve défavorisé. Nous sommes bien conscients que le contenu seul ne porte pas toute la responsabilité d'un enseignement de qualité. Polya (1967) en fait état dans ce qu'il appelle *«les dix commendements du professeur».* Mais puisque nous nous intéressons particulièrement au contenu, nous allons démontrer l'importance de l'impact d'une méconnaissance à ce niveau et ressortir certains concepts-clé enseignés au primaire:

a) Des activités sur le sens de la numération, un concept préalable à tous les autres, ont été expérimentées à plusieurs reprises par Bassis (1984) auprès de plus d'une groupe d'enseignants. Elle en parle en ces termes:

> L'étonnement est toujours grand de voir des adultes lettrés-bacheliers-étudiants-enseignants fort peu au clair de cette notion. Pour avoir fait vivre (...) à des adultes une démarche sur la numération, j'ai constaté combien les constituants de cette notion étaient connus comme issus de règles à savoir (...) et non comme issus de nécessités internes.

Cette base, non solidifiée, conduit à des erreurs graves de compréhension ultérieure sur les notions de valeur numérique et/ou positionnelle, d'égalité, de nombre avant et après, de plus grand et de plus petit.

b) Les opérations posent, elles aussi, problème. La manipulation est souvent faussée par la mauvaise conception des enseignants. Ceux-ci ne voient qu'un seul concept où il y en a deux. Baruk (1973) explique:

> L'«interprétation naïve» est responsable de l'écrasement de deux cocnepts: celui d'*opération*, consistant par exemple à agir sur *deux* nombres par l'addition pour en obtenir *un* (sur 3 et 4 pour obtenir 3+4, sur *a* et *b* pour obtenir *(a+b)*), qui est leur somme; celui de *calcul*, qui est une technique de réduction, qu'il est possible ou non d'effectuer. 3+4 peut être calculé, *a+b* non.

Des erreurs d'algorithmes dans les opérations trouvent aussi leur origine dans cette méconnaissance. Les enseignants n'ont d'autre choix que de faire retenir la façon de faire. En multiplication, par exemple, ils ne font, bien souvent, que montrer ou démontrer la place de chaque chiffre dans cette opération, alors qu'ils devraient les situer en termes de valeur positionnelle. Par exemple, le 2 se place ainsi parce qu'il représente les dizaines, etc.

c) La fraction est un autre concept qui connaît bien des lacunes. Les enseignants, dans une large mesure, n'en favorisent pas la généralisation. La manipulation est réduite à quelques exemples simples et le manuel de l'élève, avec ses représentations colorées, occupe une grande place. On prend pour acquis que les stratégies d'enseignement, limitées à des modèles toujours assez semblabes, sont adéquates parce que les élèves nomment ou colorient correctement l'espace concernée. Des recherches (Graeber et Baker 1992; Pothier et Sawada 1990) ont démontré que ces élèves, confrontés à des questions portant sur des exemples non traditionnels, restent souvent perplexes et incapables de trouver des solutions.

De plus, les rôles du numérateur et du dénominateur s'associent difficilement aux opérations qui leur sont préalables soient la multiplication et la division. Tout cela a un impact négatif sur l'enseignement ultérieur des nombres à virgule tant au niveau de leur valeur que des opérations et surtout sur les rationnels en général.

Les difficultés rencontrées avec ces quelques concepts-clé du programme de mathématiques, sont un bon indice de l'impact d'une méconnaissance au niveau du contenu. Puisque le guide méthodologique demeure le principal outil des enseignants, il devrait permettre une conscientisation des enseignants à leurs difficultés, questionner sur des points précis en incitant à la recherche de la compréhension des notions et inclure des pistes pour les appuyer dans cette recherche afin que les erreurs cessent de se perpétuer. Nous ne le concevons pas comme une panacée. Nous le concevons seulement pour le rôle qu'il devrait jouer c'est-à-dire guider l'enseignant qui le consulte.

4. Objet de la recherche

Nous savons jusqu'à maintenant que les enseignants, dans une large mesure, ne maîtrisent pas les concepts mathématiques. Nous savons aussi que pour enseigner ces notions, ils utilisent les étapes de la formation de concepts. De plus, ils s'appuient sur des guides méthodologiques. Notre recherche va porter d'abord sur le contenu mathématique, puisque c'est ce contenu qui est exposé dans les guides.

Ensuite, nous analyserons des guides méthodologiques approuvés par le ministère de l'Éducation du Québec. Nous nous demanderons s'ils aident réellement les enseignants à se questionner par rapport au contenu qu'ils doivent enseigner.

5. Limites de la recherche

Dans cette recherche, nous ne pouvons pas explorer tous les concepts mathématiques du primaire, ni analyser tous les guides méthodologiques utilisés au primaire. Nous ne pouvons pas tenir compte de toutes les variables qui provoquent des difficultés au niveau de l'enseignement. Identifions entre autres, les attitudes des enseignants, leur expérience, leur capacité de réflexion, leur potentiel, etc.

Nous nous limiterons à la méconnaissance des concepts mathématiques sans regard à ses causes. De tous les concepts mathématiques enseignés au primaire, la notion de fraction retient notre attention puisqu'elle présente des difficultés majeures de compréhension et sa méconnaissance influence les apprentissages ultérieurs qui se fondent sur elle. Comme nous l'avons mentionné précédemment, une vision stéréotypée et étroite de la fraction entrave la compréhension des liens entre cette notion et le nombre à virgule et d'une façon plus élargie, le lien de ces deux notions aux nombres rationnels.

De tous les guides méthodologiques utilisés au primaire, nous nous limiterons aux deux guides les plus connus et les plus utilisés présentement sur le territoire québécois. Il s'agit du guide de quatrième année de la collection F.L.G. (Bardier 1988) et du guide de la quatrième année de la collection Défi mathématique (Lyons & Lyons 1987). C'est à ce niveau que la fraction est une notion nouvelle, c'est-à-dire qu'elle est vue pour la première fois par les élèves.

Les mathématiques, présentement enseignées au primaire, revêtent une importance certaine autant pour le développement d'une pensée formelle que pour l'accès à certains programmes de formation. Leur enseignement pose problème, malgré la mise en place de guides méthodologiques et d'un programme d'études qui présentent une hiérarchie d'objectifs de contenu et de formation ainsi que des pistes d'exploitation de ces objectifs. Il s'avère que les enseignants ne maîtrisent pas, dans une large mesure, les concepts de base en mathématiques. Cette méconnaissance du contenu crée des difficultés au niveau de l'enseignement. En effet, les stratégies utilisées sont centrées davantage sur le symbolisme des mathématiques et sur les automatismes que sur l'appropriation des concepts.

Les enseignants, malgré l'utilisation des pistes proposées par le MEQ et des étapes de la formation de concepts, ressentent un malaise face au contenu mathématique et sa didactique. Et ce malaise persiste malgré leur formation et leur perfectionnement. Dans une large mesure, ils se tournent vers le principal outil qu'ils ont en leur possession, soit le guide méthodologique. Leurs attentes sont à la mesure de leurs besoins. Reste à savoir si ces guides sont conçus de façon à répondre à ces exigences.

Puisque la formation de concepts est utilisée pour faire valoir les stratégies d'enseignement, nous allons d'abord décrire ces étapes. Puis, nous allons exploiter, puisque c'est le contenu mathématique qui pose problème, le concept de fraction en nous demandant ce qu'est ce concept et ce que l'on doit en comprendre.

Cette difficulté de contenu ayant un impact sur l'enseignement, nous allons, dans un deuxième temps, associer la fraction aux étapes de la formation de concepts. Ce jumelage mettra en évidence des stratégies d'enseignement favorables à l'enseignement de ce concept. Finalement, après avoir acquis une meilleure connaissance de la fraction et de son enseignement, nous anlyserons les deux guides méthodologiques choisis afin de vérifier si ceux-ci peuvent répondre aux attentes des enseignants tout en comblant leurs besoins.

CHAPITRE II

Le concept de fraction

L'enseignement des mathématiques, à l'instar des autres disciplines, requiert, de la part de l'enseignant, une maîtrise des concepts qui y sont reliés. Cette maîtrise assure un enseignement centré sur la compréhension. *«En effet, une transmission correcte du savoir mathématique peut conserver à celui-ci un sens et éviter les usages abusifs et absurdes auxquels peuvent donner lieu des pseudo-savoirs.»* (Jaulin-Mannoni. 1975). Notre analyse de la situation actuelle ayant fait état de la méconnaissance d'une majorité d'enseignants à ce niveau, nous allons étudier l'un de ces concepts, soit la fraction.

L'étude sera d'ordre conceptuel et d'ordre didactique c'est-à-dire qu'elle portera sur la notion elle-même, mais aussi sur son enseignement. L'outil de base sera le modèle synthèse des étapes de la formation de concepts de Lepage (1984). Compte tenu de l'importance qui est accordée à la formation de concepts par le M.E.Q., ce modèle s'avère intéressant puisqu'il propose un cheminement centré sur le contenu mathématique et sur les stratégies d'enseignement.

1. La formation de concepts

Condition sine qua non reliée à l'acte d'enseignement, «*la formation de concepts (...) est (...) fondamentale puisque tous les apprentissages reposent sur elle*». (Lepage 1984, monographie # 21). Le MEQ (1980) rejoint le propos de Lepage, tout en précisant qu'un concept est aussi un *«long processus»* qu'il décrit brièvement en ces termes:

> (...)L'esprit doit d'abord procéder à une exploration du concept dans un certain nombre de situations concrètes (...). Lorsque l'exploration d'un concept est devenue plus (...) systématique (...) l'esprit peut arriver à faire l'abstraction de ce concept, c'est-à-dire à en dégager les caractéristiques essentielles (...) il devient nécessaire de communiquer sa perception du concept à l'aide d'une forme de langage (...). On en vient alors à l'utilisation et à l'application du concept dans des situations nouvelles (...).

La succession de ces étapes, c'est-à-dire l'exploration, l'abstraction, la communication et l'utilisation d'un concept, permet une progression allant de la manipulation concrète à la symbolisation de la notion concernée. L'exploitation de ces étapes favorise l'enseignement des concepts mathématiques en facilitant l'appropriation des apprentissages par les élèves. Toutefois, le caractère linéaire qu'inspire ce modèle, ne convainc pas de son rôle réel. Mais son application est très différente de l'image première que l'on perçoit. Bruter (1973), dans une reformulation succinte de ces étapes, nous laisse voir la dynamique qui y est présente:

> (...) il n'est pas d'activité (...) de pensée sans présence d'objets. (...) la pensée ne prend (...) conscience de ces objets que dans la mesure où ceux-ci exercent une action qui leur donne forme dans le subconscient (...) l'esprit a tendance à vouloir systématiser, à généraliser.

Afin de mieux saisir cette dynamique, nous allons, dans ce chapitre, d'abord voir en quoi consistent les étapes de la formation de concepts, pour les concepts mathématiques en général. Ensuite, nous rechercherons le sens de la notion de fraction afin de mieux la comprendre comme concept. Finalement, nous réutiliserons les étapes de la formation de concepts mais spécifiquement pour la notion de fraction.

Nous avons choisi le modèle de Lepage (1985), modèle qui «*fait la synthèse des modèles de formation de concepts de WOODRUFF (1964); de PELLETIER (1968); de YANOFF (1972) et de GAGNÉ (1976)*». Puisque nous sommes préoccupés par les difficultés conceptuelles et didactiques des enseignants, nous croyons, qu'en proposant des pistes d'intervention, le modèle peut contribuer à promouvoir la didactique reliée à la notion concernée par l'apport de pistes de questionnement qui orientent les stratégies d'enseignement.

De plus, il peut contribuer à sensibliliser les enseignants qui éprouvent des difficultés d'ordre conceptuel, à leur méconnaissance. La nature des interventions proposées, sans directement pallier aux difficultés, peut leur faire réaliser qu'ils ne comprennent peut-être pas tout le contenu notionnel à enseigner. Lorsqu'il s'agit de faire explorer, observer ou vérifier, les enseignants, en préparant leur leçon, se demanderont d'abord eux-mêmes ce qu'il faut explorer, observer ou vérifier. Ce questionnement didactique, suscité par ce qui est proposé dans ce modèle, amène un questionnement au niveau conceptuel puisque c'est alors qu'ils pourront s'interroger sur ce qu'ils comprennent vraiment et sur ce qu'ils devraient savoir amorçant ainsi une recherche de sens.

Nous reprendrons encore ce modèle au troisième chapitre. Cette fois, il nous servira de grille de travail pour les guides méthodologiques que nous analyserons. Dans l'optique de notre recherche, notre analyse portera sur l'aide potentiel des guides méthodologiques. Or, ces étapes fournissent, selon nous, une grille de travail intéressante puisqu'elles favorisent l'enseignement des concepts. C'est dans la mesure où les guides étudiés correspondront aux critères de cette grille que nous pourrons évaluer la pertinence de l'aide proposée aux enseignants par cet outil.

Voici, en six étapes, le modèle de Lepage (1985).

Étape de formation de concepts	**Réactions d'enfants** **Expressions ou "output" entendues**	**Habiletés ou com-portements observés**	**Intervention du maître** **(Comportements, questions ou feed-back)**
Apports sensoriels ou d'expérience	Qu'est-ce que c'est? Que fais-tu Je veux voir, faire. . Je veux vérifier.	Toucher Regarder Écouter Multiplier, etc.	Formuler le problème ou fournir une situation. Disposer d'un matériel adéquat. Favoriser l'exploration. Eveiller la curiosité.
Perceptions sensorielles ou rappel d'expériences	Comment cela se nomme? Pourquoi faire? Je vois, remarque, observe que... Je vois mais ne comprends pas	Poser des questions. Identifier, selectionner Différencier ..	Favoriser la perception, que vois-tu? Que remarques-tu? Qu'observes-tu? As-tu regardé, vérifié,...? Stimuler le rappel d'expériences? Reformuler les questions des enfants
Images ou représentations mentales	Ça fait penser a .. Ça va ensemble. Voyons, il me semble que, l'autre fois, je...	Associer, grouper. Visualiser mentalement. Associer les expériences au problème. Réclamer des informations supplémentaires.	Favoriser les associations, les comparaisons... Relier les expériences rappelées au problème posé Comment peux-tu grouper? Mettre ensemble? A quoi cela te fait-il penser? Est-ce que c'est semblable...
Concepts intuitifs ou début d'abstraction	Je veux voir encore... Je pense que je comprends, mais je ne suis pas sûr. J'ai besoin de vérifier encore Je commence à saisir ne puis te le dire. Je pense que c'est.	Centrer son attention sur... Avoir des intuitions sans pouvoir verbaliser clairement ce qu'on comprend. Inférer.	Favoriser la verbalisation de ce qu'on a compris Veux-tu dire ce que tu penses, comprends... Explique ce que tu fais? Que veux-tu dire par...? Etablir un climat de détente. Favoriser de nouvelles explorations. Veux-tu essayer un autre problème semblable?
Concepts verbalisés ou abstraction	J'ai "catché" Je comprends, veux-tu que je te l'explique. C'est parce...que...ça s'écrit de même.	Comprendre et verbaliser. Expliquer ce qu'on a compris. Symboliser.	Se montrer attentif aux explications des enfants Qu'as-tu compris? Explique clairement. Peux-tu l'écrire au tableau, dans ton cahier... Favoriser la verbalisation entre apprenants. Peux-tu expliquer ce que tu as compris à X.
Concepts généralisés ou généralisation	On pourrait essayer de voir ce qui se passerait si . Ça se passe toujours comme ça, j'en suis sûr J'ai trouvé une loi, une technique, etc	Énoncer des hypothèses et les vérifier Déduire Formuler une règle ou une loi.	Inviter les enfants pour transfert et généralisation Crois-tu que ça se passe toujours comme ça? Qu'est-ce qui arriverait si... (autre situation différente). Est-ce toujours vrai? Peux-tu trouver une loi qui vaudrait dans tous les cas?

L'observation de ce modèle nous apprend que la didactique prend effectivement plus de place que le contenu mathématique. Cependant, comme nous l'avons dit précédemment, les comportements ou les feed-back proposés peuvent inciter les enseignants à rechercher pour eux-mêmes, des réponses. Ajoutons que lorsqu'ils encouragent les élèves à observer ou à vérifier, ils doivent savoir sur quoi doit porter cette observation ou cette vérification sous peine de nuire à l'utilisation de telles habiletés.

C'est à partir de là qu'il peut y avoir réorganisation des connaissances mathématiques dans le but d'une meilleure maîtrise. Et lorsque le contenu sera maîtrisé, il sera encore avantageux de suivre les étapes de la formation de concepts. Fort de la connaissance du contenu, l'attention se portera davantage sur les besoins et sur les difficultés des élèves, sur la qualité des stratégies et sur les liens qui mènent à l'apprentissage d'une notion. Montangero (1983), dans sa définition d'un concept, met en évidence ces liens qui mènent à la formalisation du contenu d'où l'importance d'arriver à une certaine maîtrise afin d'utiliser qualitativement les étapes de la formation de concepts:

> un concept est doublement lié à l'activité du sujet, car il repose, d'une part, sur des significations et des relations abstraites effectives des individus et, d'autre part, sur des activités mentales de mises en relation entre significations.

En d'autres mots, mentionnons que l'enseignant doit maîtriser le *savoir*, c'est-à-dire les concepts mathématiques, ce qui entraîne un *savoir-faire* au niveau du choix des stratégies d'enseignement. Or, puisque ce savoir n'est pas toujours maîtrisé, le savoir-faire ne met pas toujours en évidence les gestes, les actions qui facilitent l'apprentissage des élèves. Brousseau (1988) aborde la question du rôle des maîtres dans ce sens.

Selon lui, les étapes de la formation de concepts dans lesquelles le maître s'investit, ainsi que le respect de leur progression, sont essentiels à un enseignement centré sur l'appropriation par les élèves des apprentissages visés. Soutenu par l'enseignant, l'élève pourra faire sien le contenu et surtout, il pourra l'utiliser au moment opportun. Il nous met cependant en garde contre un danger réel et actuel: *«La tentation est grande pour le professeur de court-circuiter ces (...) phases et d'enseigner directement le savoir en tant qu'objet culturel (...). On présente le savoir et l'élève se l'approprie comme il peut».*

C'est un risque évident. S'il n'y a pas maîtrise, il peut se produire en effet un court-circuitage. Cependant, nous croyons que c'est majoritairement que les enseignants, conscients des responsabilités que leur incombe leur tâche, vont réfléchir au sens des interventions proposées par le modèle illustré précédemment.

Avant de nous questionner sur le concept mathématique qui fait l'objet de notre recherche, soit la fraction, nous allons définir succintement les étapes de la formation de concepts telles que décrites par Lepage (1985) dans son tableau synthèse. Malgré le fait que pour Lepage, chaque étape en est une distincte et importante, nous nous sommes permis certaines associations qui n'enlèvent pas ces caractères spécifiques mais qui nous permettent de rester concis.

Le terme «sensoriel» est à l'origine de notre première association concernant la première et la deuxième étapes. La première étape a pour fonction la saisie de l'information par les sens alors que la deuxième étape, grâce à cette saisie, permet la différenciation de ce qui a été perçu. Alors que la première étape favorise la manipulation, la deuxième stimule le questionnement des élèves et toujours à partir du sensoriel.

Pour l'auteur, le sensoriel est ce qui est susceptible *«d'apporter des informations dans le camp de la conscience»* qu'il s'agisse de situations concrètes ou d'expériences de vie présentes ou passées. Compte tenu que les élèves ont peu d'expériences vécues passées, les enseignants ont la tâche de créer des situations qui permettent l'exploration. Permettre l'exploration consiste non pas à laisser l'apprenant à lui seul pour favoriser la construction du concept; il s'agit plutôt *«de dosage entre guider l'enfant pour lui montrer la route, et savoir reconnaître l'acte mathématique authentique, là où justement il se situe dans une démarche personnelle.»* (Jaulin-Mannoni 1975).

L'association suivante concerne la troisième et la quatrième étapes. Maintenant que le lien est créé avec la réalité, que l'action a été engagée, il faut intérioriser. La pensée structure cette réalité et commence à la recréer en image. Même si les débuts sont intuitifs, il ne s'agit pas, pour l'apprenant, d'un simple rappel de l'objet, entendons objet mathématique, mais *«d'intégrer, dans la mesure de ses moyens, les relations qu'il a aperçues ou élaborées.»* (Jaulin-Mannoni 1975).

Au cours de ces étapes, les enseignants doivent permettre encore l'utilisation des outils qui ont été nécessaires lors des deux premières étapes. À ce moment-ci, il y a de fréquents va-et-vient entre la réalité et la pensée, entre l'action et l'image mentale. Lepage précise bien que ce passage de la réalité à l'image ne doit pas être forcé et qu'il est *«un mouvement naturel de la pensée»*. Ce mouvement naturel de la pensée, Jaulin-Mannoni (1975) le décrit vraiment comme un processus où on sent une dynamique:

> La dimension mathématique apparaît donc comme s'inscrivant dès ses origines dans la dynamique d'un sujet tentant de comprendre et de maîtriser le monde qui l'entoure, et qui pour ce faire tend à l'élaboration de systèmes cohérents (...).

Les enseignants doivent donc stimuler la pensée en permettant la création de liens c'est-à-dire en favorisant la discussion et la réflexion. Ils ne doivent pas oublier aussi que le temps est un élément nécessaire pour ajuster et consolider l'organisation des données recueillies.

La dernière association touche la cinquième et la sixième étapes. On touche vraiment ici à la symbolisation. Ces deux étapes conduisent non seulement à la compréhension du concept étudié mais aussi à son utilisation et ce dans différents exemples où il est applicable.

Bien sûr, l'abstraction et la généralisation seront étroitement reliées aux étapes précédentes. La compréhension sera réelle dans la mesure où ces étapes auront tenu compte des structures, des liens et des actions elles-mêmes plutôt que de l'objet et du simple rappel des gestes posés; dans la mesure où les enseignants auront favorisé la construction et l'appropriation du savoir mathématique plutôt que la mémoire et la répétition de modèles proposés d'avance.

Comme nous venons de la constater, notre regroupement des étapes de Lepage en trois sous-ensembles est relié au fait que les deux premières étapes mettent en évidence l'action, les deux suivantes axent sur l'image et les deux dernières sur la symbolisation. C'est à partir de cette répartition que nous allons maintenant définir les étapes.

A. Apports sensoriels ou d'expériences; perceptions sensorielles ou rappel d'expériences

Ces étapes favorisent l'exploration et éveillent la curiosité car c'est le moment où l'enseignant saisit les situations spontanées qui pourraient se présenter en classe afin de toucher les élèves dans leur vécu. Lepage (1985), lorsqu'elle recommande l'utilisation de situations connues des élèves, suggère d'utiliser les occasions quotidiennes de vie de classe. Par exemple, elle propose les causeries du matin. *«Au lieu de laisser sombrer ces multiples avenues conduisant aux champs de la mathématique, je décide de proposer (...) l'activité suivante»:*

Ma situation mathématique

Situation de vie: échange libre du matin.

1- J'identifie, j'écris le thème sur lequel je viens de m'exprimer.

2- J'élabore une carte d'exploration à partir de ce thème.

3- Je retiens par la suite, les idées, les éléments sur lesquels j'ai le goût de travailler.

4- Je bâtis mon activité mathématique.

5- Je tente de la solutionner, de la résoudre.

6- Je transpose cette activité sur une fiche qui sera déposée dans le coffret numéro 1 d'activités mathématiques, dans la classe.

Le fait de saisir ces situations nous montre bien l'intérêt des élèves à bâtir une activité à partir d'eux, à partir de situations familières. Il est important de tenir compte de cet aspect affectif puisqu'un concept est une construction personnelle. Plus les situations stimuleront le rappel d'expériences, plus les chances seront grandes de voir les élèves prendre part à la recherche de sens.

Notons que ce rappel d'expériences touche autant les expériences de son vécu que les expériences d'apprentissages scolaires, soit les préalables à la nouvelle notion. Les élèves feront ainsi appel à d'autres situations connues qui s'approchent de leur réalité, établiront des liens, accepteront les expériences nouvelles et variées. Tout cela ne fait pas que s'ajouter au bagage de l'apprenant. Puisque que l'on a déjà précisé qu'il s'agit d'un processus dynamique, les connaissances s'intègrent les unes aux autres en consolidant les acquis.

Une fois les préalables et les situations en place, les premières stratégies s'orientent vers une représentation du concept. Selon la situation de départ, les élèves sont incités à manipuler, à poser des questions, à se rappeler d'autres expériences. L'enseignant accompagne les élèves tout au long de ces activités en relançant les questions, en écoutant les réponses et en suscitant des doutes qui stimulent d'autres pistes. Le questionnement est centré davantage sur la compréhension de la notion dans la situation que sur la compréhension de la notion elle-même.

L'enseignant a ici un rôle beaucoup plus ouvert. Il facilite le cheminement des élèves car ceux-ci s'interrogent plus naturellement par rapport à une situation sécurisante. De ce fait, c'est avec confiance et intérêt qu'ils poursuivront leur démarche vers les étapes suivantes.

B. Images ou représentations mentales; concepts intuitifs ou début d'abstraction

L'activité d'enseignement jusqu'à maintenant était reliée à l'incitation aux manipulations et aux tâtonnements afin de mieux exploiter la situation de départ. Maintenant, l'enseignant doit, par ses stratégies, amener les élèves à créer, progressivement, une distance entre l'action concrète et sa représentation mentale. Ils ne doivent pas voir seulement l'image mais aussi les opérations qui ont agi sur cette image. C'est le moment des instabilités, des doutes, des remises en question. Il est important de comprendre que le tâtonnement et les expériences sensorielles favorisent l'abstraction du concept. Il faut que les stratégies respectent le rythme des apprenants leur laissant aussi longtemps que voulu la possibilité d'exploiter la manipulation.

L'enseignant doit donc favoriser les *«incessants retours entre le dedans et le dehors»* (Baruk 1973), c'est-à-dire qu'il doit inciter les élèves à verbaliser, à raconter ce qu'ils comprennent de leur action sur la représentation. Ce discours des élèves est souvent incomplet, voire même incompréhensible pour l'enseignant mais il est essentiel. Lorsqu'il s'arrête, c'est qu'il y a des éléments encore incompris ou manquants. C'est un indice qu'il y a encore du travail à faire. L'enseignant peut alors suivre la démarche des élèves et être plus en mesure d'apporter une aide adéquate.

À ce début d'abstraction s'intègrent les étapes suivantes. Celles-ci, l'abstraction du concept et sa généralisation, ne s'appliquent pas formellement à tous les concepts enseignés au primaire. L'appropriation de certaines notions se poursuit au secondaire. Elles ne sont toutefois pas négligeables puisque pour plusieurs d'entre elles, ces étapes sont amorcées à ce niveau.

C. Concepts verbalisés ou abstraction; concepts généralisés ou généralisation

À ces stades, le tâtonnement et la manipulation sont absents même comme soutien. L'enseignant s'assure de la maîtrise du concept en permettant aux élèves d'exprimer leur compréhension sous différentes formes: dessins, graphiques, énoncés. Afin de favoriser un début de généralisation, l'enseignant doit faire vivre aux élèves des situations variées et représentatives de la notion apprise. Ils reconnaissent ainsi ce qu'ils ont visualisé, dégagent des règles, avancent des hypothèses, analysent, synthétisent, choisissent dans quelles situations la notion s'applique le mieux.

À la fin de la séquence d'enseignement, les élèves doivent généraliser le concept. Ils doivent donc appliquer les règles apprises à d'autres situations et reconnaître eux-mêmes le moment où ces situations requièrent cette utilisation. Cependant, plusieurs enseignants ne réalisent pas l'importance de cette étape. Dès que les élèves ont compris la notion, ils passent à un autre concept sans le lier au concept précédent. Lepage (1985) souligne que cette situation est responsable du *«fait que les enfants oublient bien vite ce qu'on leur enseigne et sont si peu habiles à établir des liens entre les notions du programme»*.

L'exploitation des étapes de la formation de concepts est importante. Toutefois, l'enseignant doit avoir intégré la notion à enseigner afin d'avoir recours à des interventions pertinentes et à des stratégies appropriées. Puisqu'il y a, dans une large mesure, une méconnaissance des concepts mathématiques en général, et de la fraction en particulier, nous allons explorer cette notion afin de mieux la comprendre et ainsi, de mieux l'enseigner.

2. Le concept de fraction

La non-intégration du concept de fraction par les enseignants, pose problème au niveau de l'enseignement, en générant une conception souvent erronée des nombres rationnels, tant au niveau concret que formel. Cette conception se répercute sur l'apprentissage des élèves de la même façon. Une recherche de Behr (1983) souligne l'importance et la complexité de ce concept: *«Rational-number concepts are among the most complex and important mathematical ideas children encounter during their presecondary school years»*.

Cette complexité doublée des difficultés auxquelles se butent les enseignants n'aident en rien l'enseignement de cette notion. Les carences sont réelles et perpétuent un enseignement réducteur qui ne peut prévoir des stratégies orientées vers la généralisation de la fraction, se limitant plutôt à des trucs ou à des automatismes. Cette même recherche fait état des répercusions sur l'apprentissage chez les élèves: «*(...) the generally poor performance* (des élèves) *may be a direct result of the curricular emphasis on procedures rather than the careful development of important functional understandings*».

L'enseignant insiste alors sur les algorithmes même lorsqu'il se retrouve en situation d'aide avec des élèves en difficulté. Il s'attarde à «*la maîtrise des faits et des techniques*» plutôt qu'à «*l'enseignement et l'apprentissage de la structure*». (Bruner 1965).

Le MEQ (1980) constate lui-aussi que les difficultés sont plus grandes avec la notion de fraction qu'avec toutes les autres notions. Il note, dans son guide pédagogique sur la fraction, que l'enseignant est démuni face à cet enseignement:

> Le seul fait d'entendre le mot «fraction» suscite souvent de l'inquiétude chez de nombreux éducateurs soit parce qu'il leur rappelle leur propre apprentissage laborieux de cette notion, soit qu'il évoque les difficultés didactiques de cette partie du programme de l'enseignement mathématique.

D'autres chercheurs tels que Smyth (1983); Behr, Wachsmuth. Post, Lesh (1984); Picard (1983) ont étudié la fraction. Tous arrivent au même constat que cette notion est jugée difficile tant par les enseignants que par les élèves.

Cette difficulté se répercute sur l'ensemble du primaire puisque l'enseignement de la fraction commence plus tôt qu'on pourrait le croire, en fait, dès la maternelle. Bien sûr. il s'agit d'apprentissage exploratoire. Behr (1983) mentionne ce fait lui aussi: *«The part-whole interpretation is usually introduced very early in the school curriculum»*.

Les apprentissages plus systématiques ne commencent qu'au deuxième cycle, soit vers 9 ans, à l'âge où une majorité d'élèves a atteint le stade opératoire concret selon les stades du développement de l'intelligence de Piaget. Le MEQ (1980) a dressé un tableau de la répartition du programme.

Dans ce tableau, les cases pointillées indiquent les niveaux d'étude exploratoire de la fraction. On peut remarquer que, chez les «5 ans», on effleure à peine la notion de fraction. L'exploration se poursuit chez les «6, 7 et 8 ans». À mesure que la complexité de la notion augmente, on ne délaisse pas la phase exploratoire même chez les «11ans». Les cases marquées de x représentent une étude plus systématique. Cette étude se concentre davantage vers le deuxième cycle c'est-à-dire chez les «9, 10 et 11 ans». Le M.E.Q. précise toutefois que cette répartition est indicative. Ce qui est important, c'est le fait que la manipulation et l'exploration doivent précéder les apprentissages plus formels. Les enseignants doivent donc en tenir compte dans l'élaboration de leurs stratégies d'enseignement.

Voici ce tableau:

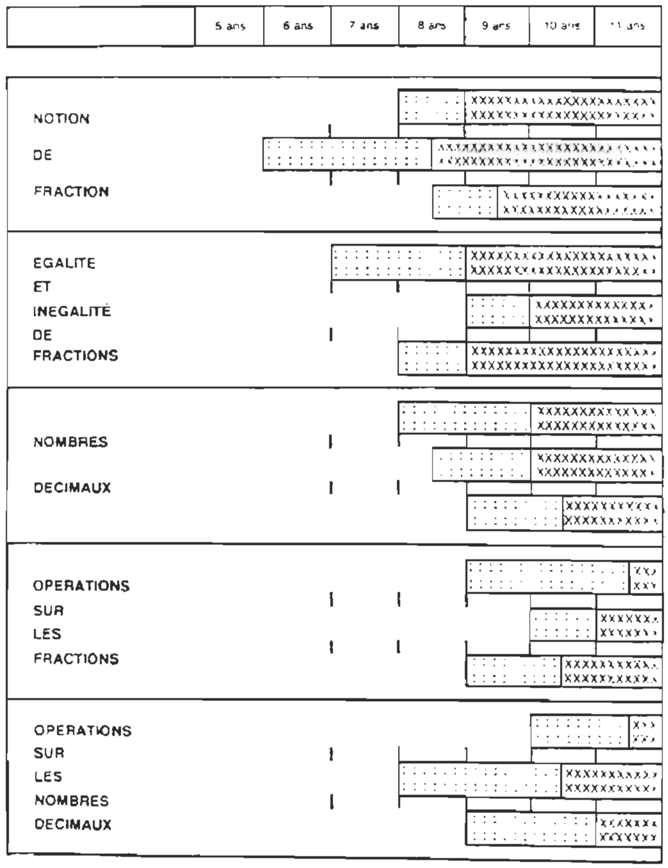


FIGURE 1

On voit l'importance pour tout enseignant de maîtriser cette notion, car même pour l'exploration chez les petits, la connaissance du concept guide les interventions. Si les pistes d'exploitation sont faussées dès le premier cycle du primaire, l'impact sur les apprentissages réalisés au deuxième cycle peut s'avérer déplorable. En effet, si le concept de la fraction ne s'appuie pas sur une base solide, ce sont, entre autres, les notions d'équivalence, de simplification, d'opérations, de nombre à virgule et de pourcentage qui sont compromises.

Afin d'éviter la perpétuation de ces malaises et de favoriser une utilisation juste des étapes de la formation de concepts, nous allons explorer la notion de fraction. Par la consultation d'auteurs (Baruk 1992; Desjardins et Hétu 1974; Behr 1983) qui se sont intéressés à l'enseignement des nombres rationnels, nous allons rechercher le sens de ce concept afin de mieux le comprendre pour mieux l'expliquer.

2.1 Qu'est-ce que le concept de fraction?

Compte tenu que les difficultés conceptuelles d'une majorité d'enseignants posent problème au niveau de la didactique, notre analyse du concept de fraction portera sur les éléments conceptuels essentiels à la compréhension de cette notion tout en tenant compte de son enseignement. Ces éléments essentiels consistent autant en notions préalables à la fraction , c'est-à-dire en notions qui doivent être acquises avant d'entreprendre l'étude de la fraction, qu'en notions constitutives de ce concept, c'est-à-dire en notions qui vont permettre une représentation imagée ou mentale du concept étudié.

Une définition de la notion de fraction de Baruk (1992) nous a permis d'établir spécifiquement quelles étaient ces notions. Nous expliciterons davantage mais d'abord voici cette définition:

> Une fraction *est* une des expressions possibles d'un rationnel, calculée par la langue numérale. (...) : une fraction est un nombre entier d'unités *rompues* ou *unités rationnelles*, (...). Le dividende du quotient (...) s'appelle alors le *numérateur*: il dit le *nombre* d'unités rompues. Le diviseur du quotient. (...) s'appelle alors le *dénominateur*: il dit le *nom* de l'unité rompue et , de ce fait, la façon dont elle a été obtenue par division du "1" en x parties égales.

Baruk (1992) n'est pas la seule à utiliser ces termes reliés à des notions mathématiques. D'autres chercheurs (Streefland 1991; Owens 1992; Picard 1983) l'ont fait. C'est en tenant compte de cette terminologie que nous amorçons notre quête de sens du concept de fraction.

D'abord les mots «nombre entier, dividende, quotient, unités, diviseur, division», et puis «unités rompues, numérateur, dénominateur, parties égales» nous plongent dans deux réalités conceptuelles: les entiers naturels et les nombres rationnels. Dans un premier temps, nous expliciterons ce qu'il est important de connaître par rapport à ces termes. Nous verrons chacun des concepts concernés en tant que préalables à l'étude de la fraction et en tant qu'élément constitutif de la fraction.

Dans un deuxième temps, à partir des étapes de la formation de concepts de Lepage, nous intégrerons ce contenu aux stratégies que l'enseignant devrait utiliser afin permettre un enseignement qui favorise un apprentissage réel du concept de fraction. Nous disons bien «devrait» puisque notre recherche souligne qu'une majorité d'enseignants ne maîtrise pas le contenu et les stratégies d'enseignement pour le concept de fraction. Ce n'est qu'au troisième chapitre que nous verrons dans quelle mesure les guides méthodologiques peuvent venir en aide aux enseignants à ces niveaux.

2.1.1 Élements préalables et éléments constitutifs

Comme nous l'avons déjà mentionné, la définition de Baruk (1992) nous renvoie à des termes utilisés dans les entiers naturels. Puisqu'ils font partie de la définition de la notion de fraction, nous constatons qu'ils sont réutilisés à ce niveau. Nous en déduisons alors que ces termes sont d'abord préalables à l'apprentissage de ce concept, c'est-à-dire qu'ils doivent être maîtrisés ou en voie de l'être avant d'être utilisés comme constitutifs de la notion.

Il est donc important de vérifier l'acquisition des préalables. Pour y arriver, il faut les connaître. Souvent, l'enseignant n'en a qu'une connaissance implicite ce qui a pour conséquence qu'ils demeurent implicites aussi dans l'enseignement. La notion de fraction apparaît alors comme une notion tout à fait nouvelle sans lien avec ce qui est déjà maîtrisé.

Baruk (1985) souligne ce silence au sujet de la présence des nombres entiers naturels comme préalables à l'enseignement de la notion de fraction lorsqu'elle parle de l'erreur en mathématique: «*Il y a cette magie qui consiste à "déduire" de ce que l'on voit faire des préceptes de conduite, et qui répond à la magie pédagogique de l'implicite*».

Cette non reconnaissance des préalables renvoie à une utilisation souvent abusive des automatismes ou des techniques. Comme on ne peut faire de lien entre les acquis, soit les préalables, et la notion nouvelle, soit la fraction, on a l'impression, dans bien des cas, que celle-ci est une notion isolée de ce que l'on connaît déjà et que la compréhension passe par la mémorisation de quelques techniques de coupage ou de partage.

Explicitement, examinons, à partir du vocabulaire utilisé dans la définition, quels sont ces préalables et comment ils sont ensuite constitutifs de la fraction.

2.1.1.1 Nombre entier et unité

D'abord «nombre entier» et «unité» réfèrent à la compréhension du concept de numération. Ce langage doit être associé tant à la valeur des nombres qu'à la règle qui détermine leur ordre. Et l'unité est la référence qui détermine cette valeur. Ermel (1982) retrace, à travers l'histoire des mathématiques, ce concept en faisant ressortir davantage l'unité de reférence par rapport à la fraction:

> (...) relation entre deux quantités, l'une étant une référence à laquelle l'autre est comparée ou «rapportée»; (...) trois quarts de tarte (...). La meilleure définition que l'on peut donner de ces «fractions-quantités» est (...) celle que donne Al Kashi, mathématicien arabe du XV^{e} siècle: une «quantité considérée dans son rapport à un tout pris pour unité.

Si aucune valeur n'est associée aux nombres, il ne peut être possible d'associer une valeur à la fraction. Si l'unité ne représente pas *«un choix de quantité comptant pour "un"»* (Baruk 1992), on ne pourra que difficilement effectuer des fractionnements sur des quantités tout en donnant une valeur juste à la fraction obtenue. Souvent, *«l'entier de référence (...) est donné arbitrairement»* (Desjardins, Hétu 1974), c'est-à-dire que l'unité est une notion implicite. Elle n'est pas nommée comme telle.

En fait, la fraction est constituée de nombres entiers, qui en agissant sur un tout, un autre entier qui est l'unité, le fractionnent en parties. Ces nombres entiers ne sont pas la fraction elle-même, mais servent à nommer ces parties par rapport à l'unité maintenant fractionnée. C'est alors que l'on reconnaît le terme «unité rompue».

Ces «unités rompues» deviennent une extension aux entiers naturels. Par analogie, on peut penser à la numération qui, limitée à dix symboles, arrive quand même à dénombrer jusqu'à l'infini. En effet, la numération utilise la valeur positionnelle, c'est-à-dire qu'elle donne une valeur différente aux symboles selon leur position dans un nombre afin de pouvoir continuer le dénombrement. Pour la notion de fraction, on constate par exemple que, pour 3/7, le 3 et le 7 sont les mêmes chiffres que dans les entiers naturels, mais pour enrichir l'utilisation du système de nombres, on les utilise différemment. Soit qu'on divise 3 par 7, soit qu'on multiplie par 3 et qu'on divise ensuite par 7 une unité donnée.

On se doit, à ce moment-ci, d'amener les opérations. Nous allons rechercher ce qu'il faut savoir à ce sujet et comment les utiliser à même le concept de fraction.

2.1.1.2 Les opérations

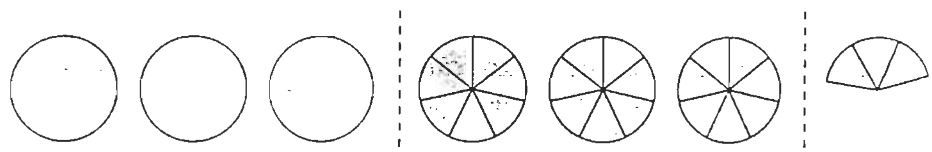
Dans la définition de Baruk (1992), nous reconnaissons les opérations par l'utilisation des termes «division, diviseur, dividende, quotient». Ces opérations font partie des entiers naturels. On n'y voit pas explicitement le rôle de la multiplication si ce n'est que par l'inverse de l'opération de division. En effet, le dividende est aussi un produit, le diviseur, un facteur et le quotient, un autre facteur. Pour $12 \div 3 = 4$ et $3 \times 4 = 12$, on remarque que le dividende est le produit de la multiplication, que le diviseur et le quotient en sont les facteurs.

Ce n'est pas vraiment relié au rôle du numérateur en tant que multiplicateur. Nous abordons donc la fraction par ses liens à la division dans les entiers naturels. Nous verrons plus loin le lien à la multiplication. Dans l'exemple ci-haut, on voit deux opérations ainsi que leur calcul. La distinction entre ces deux concepts ne va pas de soi.

En effet, le concept d'opération est souvent fusionné avec le concept de calcul. Baruk (1992) dans cet ordre d'idée, apporte une explication qui est reliée à la compréhension du sens de ce langage mathématique. Elle mentionne qu'il s'agit de deux concepts bien distincts. Dans les entiers naturels, pour l'opération 2+3, nous obtenons 5 lorsque nous en faisons le calcul. Il est fréquent que cet apprentissage demeure implicite.

En fait, un calcul est précédé d'une opération. Mais dans certains cas, le langage effectue le calcul pour nous. Par exemple, dans les entiers naturels, deux fois cent font deux cents, vingt et deux font vingt-deux, etc.

Pour la notion de fraction, le même phénomène se répète. Lorsqu'on lit 3/7 en disant "3 septièmes" au lieu de "3 sur 7", on a fait le calcul. Puisque 3 sur 7 veut dire 3 divisé par 7, l'illustration ci-dessous démontre le calcul qu'il faut faire pour arriver à 3/7.



On ne peut pas répartir 3 "uns" en 7 nombres égaux | Les 3 "uns", rompus en 21 septièmes, peuvent être répartis en 7 nombres égaux à 3 septièmes | 3 septièmes

L'explication que Baruk (1992) donne de cette illustration permet de voir le rôle de la division pour la notion de fraction:

> (...) si on a à 'partager' 3 "uns" en 7 quantités égales et qu'on est autorisé à rompre ces "uns" en les partageant chacun en 7, on obtient 21 *parts* appelées *septièmes*, qu'il est alors facile de répartir en 7 fois 3 septièmes.

On peut alors supposer que de connaître cette opération facilitera la compréhension de cette notion. Et pour l'enseignant au primaire, puisque le programme actuel explore l'opération de division avant le concept de fraction, il est très important de reconnaître ces liens. Il pourra ainsi être plus attentif à son enseignement.

L'enseignant qui n'est pas conscient des liens, ne pourra pas y être attentif. Desjardins et Hétu (1974), dans leur étude sur la fraction, font mention de cette tendance chez l'enseignant, à transposer ses propres apprentissages sur les apprentissages des élèves. Il développe ainsi chez l'enfant une mathématique d'adulte qui n'a de véritable sens que pour l'adulte. Les stratégies utilisées ne sont donc, par le fait même, que peu adaptées:

> (...) la stratégie traditionnelle d'enseignement induit le développement d'une pseudo-fraction sur laquelle se greffe un symbolisme qui n'a rien à voir avec la réalité mathématique dont traite l'enfant.

Ce symbolisme, on le retrouve avec les termes «dénominateur, numérateur» qui font partie de la définition de Baruk (1992). On sait qu'ils sont reliés respectivement à la division et à la multiplication. Pourtant, il est rare que ce soit exploité adéquatement. Dans bien des cas, on se limite à des exemples plutôt homogènes de partages d'objets, partages qui deviennent le prétexte pour associer les opérations au numérateur et au dénominateur.

Il n'est toutefois pas si évident que lorsque l'on parle de multiplication ou de division sur des objets, que le lien s'établit spontanément du seul fait de reconnaître les termes multiplication et division. Alors l'enseignant, croyant avoir lui-même fait ce lien puisqu'il reconnaît les opérations dans la fraction, passe trop rapidement à un autre aspect de la fraction sans insister croyant que ce qu'il y avait à comprendre est déjà maîtrisé.

Pour faire ressortir le lien de la fraction aux opérations, nous exploiterons donc la notion de fraction à la façon de Behr (1983) qui fait valoir la division, et puis à la façon de Gauthier (1981) qui fait valoir la multiplication et la division. Dans chacun des cas, nous allons d'abord nous centrer sur le formalisme, c'est-à-dire que nous verrons la fraction par rapport aux opérations qui la composent. Et puis, nous transposerons ces opérations sur des objets réels, ce que Gauthier appelle l'aspect perceptif du concept de fraction.

2.1.1.3 Représentations concrètes et formalisme

Pour Behr (1983), la fraction, représentée par le symbole a/b, est reliée aux opérations. Il en fait mention en ces termes: «*a b is sometimes used* *as a way of writing a÷b».* Dans cet exemple, la fraction a/b est interprétée comme le résultat de la division de a par b où a et b sont des nombres entiers. La fraction est ici un quotient.

Cette interprétation rassure en quelque sorte puisque la fraction n'est plus une notion détachée des connaissances préalablement acquises. Elle est reliée à la division. Le fait de connaître déjà cette opération permet de comprendre le rôle du signe ÷.

Cette fonction nous donne, par conséquent, le rôle du dénominateur. Dans les exemples suivants, on peut voir ce rôle:

$12 \div 6 = 12/6 \qquad 6 \div 4 = 6/4 \qquad 2 \div 3 = 2/3$

Lorsque Behr (1983) en fait la démonstration à partir d'exemples concrets, il obtient le même modèle que Baruk (1992) dans l'exemple donné précédemment. Donc, dans le dernier exemple ci-haut, c'est 2 "uns" ou 2 unités que l'on doit répartir en 3 nombres égaux. En les partageant en 6 tiers, on obtient trois nombres égaux à 2 tiers.

Cette approche de la notion de fraction ne se limite pas à l'utilisation de trucs et d'automatismes. Elle s'appuie sur le sens même de la division en partageant des unités. De plus, la division devient constitutive de la fraction puisqu'elle apporte une dimension plus large. Sans le rapprochement de la division et de la fraction, on serait porté à croire que *«division always makes smaller»* (Graeber, Baker 1992) .

Penser ainsi ouvre la porte, non seulement à des difficultés d'ordre conceptuel mais aussi à des difficultés d'ordre didactique. Graeber et Baker (1992) ont présenté à des enseignants du primaire, et aussi à des élèves du primaire, le problème suivant: *«Five pounds of trail mix was shared equally by fifteen friends. How many pounds of trail mix each friend get?»*.

La majorité des répondants, enseignants et élèves, ont donné la solution suivante: $15 \div 5 = 3$. Selon les auteurs, le sens de la division et le sens de la fraction ne sont pas mis en relation par leurs apprentissages scolaires. Donc, avant toute recherche de solutions, on pense *«little into big is the way it always is»*.

Dans cet exemple-ci, 15 doit se diviser par 5, il n'y a pas d'autres issues même si les répondants ont affirmé que la réponse à cette opération n'avait aucun sens avec la situation. Même en sachant que la réponse obtenue est dérisoire, aucun enseignant et aucun élève n'a pu mettre en évidence l'opération à faire et la réponse réelle soit ⅓. On ne conçoit pas que ⅓ et $5 \div 15$ (ou 5/15) soient une seule et même réponse. On ne voit pas, à la manière de Behr, que l'on doit partager 5, en fait 5 unités, en 15 nombres égaux.

Gauthier (1981) , par son approche, exploite non seulement la division mais aussi la multiplication:

> L'enfant possédant déjà la division qui traduit opératoirement l'idée de fractionnement ou de partage ainsi que la multiplication qui traduit opératoirement l'idée de réunion itérée, nous croyons que la fraction doit être abordée d'une façon opératoire (...), car la fraction est issue d'une opération de division puis d'une opération de multiplication (...).

Le numérateur n'est pas le "un" mais agit sur une unité en multipliant. Voici des exemples:

$6 \quad \times 2 \; \div 4 \quad = 3 \qquad\qquad 10 \quad \times 3 \; \div 5 \quad = 6$

Vue ainsi, la fraction est une suite d'opérateurs. À partir d'unités, unités de nombres entiers, on effectue une multiplication suivie d'une division pour obtenir un calcul. Ces opérations peuvent aussi s'exprimer en numérateur et en dénominateur, c'est la fraction.

On voit donc qu'ici aussi l'apprentissage est simplifié si on connaît d'abord comment ces deux opérations agissent sur les nombres entiers. Ensuite, on comprend mieux comment elles sont constitutives de la fraction.

Pour la didactique, Gauthier incite à l'utilisation d'une démarche d'abord uniquement centrée sur les opérations de multiplication et de division.

Cependant, il n'exclut pas la représentation concrète dans un deuxième temps: *«Quand l'enfant a compris la fraction sous l'aspect opératoire, il est facile d'appliquer ce concept aux objets continus ou discontinus.»*

Par objets continus et discontinus, il est entendu unité d'ensemble ou d'individu. Bideaud, Meljac, Fisher (1991), en se basant sur des travaux de Janet (1936), décrivent ce que sont ces objets ou unités:

> Un objet (totalité) peut, selon le point de vue, être considéré comme unité d'individu ou comme unité d'ensemble. La pomme (...) devient un individu quand, à propos d'elle, on comprend que c'est le terme de l'acte intellectuel de diviser un panier de pommes. Elle se transforme en unité d'ensemble lorsqu'on la regarde par rapport aux parties que la constituent.

Autant chez Behr que chez Gauthier, on reconnaît la nécessité de représenter concrètement les actions effectuées par les opérations sur les unités. On s'entend aussi sur le fait que l'enseignant doit maîtriser suffisamment la notion de fraction pour voir la nécessité de varier les exemples lors de ses interventions en classe. S'il veut amener les élèves à généraliser le concept, il doit diversifier, faire reconnaître sous diverses formes la fraction.

Une recherche de Pothier et Sawada (1990) présente des exemples variés d'unités continues et discontinues. Un premier exemple présente le modèle de Gauthier c'est-à-dire une multiplication suivie d'une division, sur une unité discontinue ou unité d'individu. Ce n'est pas l'oeuf que l'on doit diviser mais les oeufs qui constituent la quantité globale:

1. Discrete objects:
Sample task: Easter-egg-hunt problem (Hunting 1983)
a) Alan found 3/5 of eggs. How many did he find?
b) Two eggs are 2/3 of a set. How many eggs in the set

Le deuxième exemple touche plutôt au modèle de Behr. Les unités sont discontinues mais la difficulté réside dans le fait que les éléments pourraient se diviser. Comme avec les oeufs, on vise la globalité mais le biscuit, lui, peut se couper:

2. Discrete set of objects with the elements divisible:
Sample task: Cookie problem (Pothier 1981)
a) Four children share 16 cookies. What is each child's share?
b) Three children share 9 cookies. What is each child's share?

Le troisième exemple, toujours à la manière de Behr, touche aussi les unités discontinues. Cette fois, on divise l'ensemble des boîtes et le contenu des boîtes. On ne touche cependant pas aux éléments qui constituent la boîte même si ceux-ci sont divisibles:

3. Discrete set with subsets separable:
Sample task: Boxed-candy problem (Pothier 1981)
a) Four children share 9 boxes of caramels (12 candies in each box arranged in a 3x4 array). What is each child's share?

b) Four children share 6-boxes of caramels. What is each child's share?

Le quatrième exemple amène une unité continue ou unité d'ensemble. Comme Behr, il faut diviser 1 par 3. Ce 1 est constitué de 12 parties. On doit comprendre que l'unité est 1 et non 12. La réponse sera donc donnée en rapport avec l'unité donc en terme de portion de barre de chocolat et non en terme de morceaux. Pour a), c'est 1/3 et non 4 morceaux:

4. Continious quantity with subsets separable:

Sample task: Chocolate-bar problem (Kieren, Nelson, and Smith 1985; Pothier 1981)

a) Three children share a chocolat bar prepartitiones in 12 pieces (2x6 array). How much chocolate bar does each child get?

b) Four children share a 10-piece chocolate bar (2x5 array). What is each child's share?

Le dernier exemple porte aussi sur des objets continus. C'est le modèle le plus connu. On partage l'unité en portion égale. Cependant, on observe qu'avec l'exemple b), ce partage n'est pas toujours évident:

5. Continious quantity:

Sample tasks: Cake problem (Pothier and Sawada 1984a, 1984b) or pizza problem (Kieren, Nelson and Smith 1985)

a) Five children share a circle-shaped cake. How much cake does each child get?

b) Four children share a triangle-shaped cake? How much cake does each child get?

L'enseignement doit tenir compte d'exemples aussi variés afin de susciter des interrogations chez les élèves. Le fractionnement ne doit pas résulter d'un automatisme qui souvent est la cause de mauvaises interprétations. Owens (1992) nous en donne un exemple:

> A common misunderstanding at this level is that a "fair share" is an equal number of pieces, regardless of their size. (...) often because they use a correct procedure in inappropriate situations (such as cutting a circle into fourths with parallel vertical lines).

L'enseignant doit amener les élèves à prendre conscience de l'égalité des parties, non seulement en terme de nombre de parties mais aussi en terme de format. Un fractionnement adéquat dans un exemple donné, n'est pas toujours signe de compréhension. Pothier et Sawada (1990) précise que le partage des objets s'effectue souvent selon les acquis et les perceptions des élèves: «*each student's understanding is dominated by her or his particular circumtances both past and present.*»

Afin d'illustrer ce propos, les chercheurs Pothier et Sawada (1990) nous donnent l'exemple d'un élève qui devait partager un pentagone en cinq parties. Il a effectué ce partage correctement, non pas par compréhension des liens entre la figure et ses cinq côtés, mais comme il l'a expliqué lui-même, parce que «*I've seen this on my fathers's car*».

Donc, avec des exemples variés et un questionnement approprié c'est-à-dire portant sur les liens entre les parties et le tout, les activités pédagogiques préparées par l'enseignant ne limiteront pas l'apprentissage de la fraction à un simple réflexe de partage. Le sens du concept sera davantage mis en évidence.

C'est ce sens du concept qui est la base de l'enseignement de la fraction. Nous avons vu une approche centrée sur les opérations puis une autre centrée sur la manipulation , sur la représentation concrète de la notion. Les deux ne sont pas isolées. Elles se complètent.

Cependant, dans une large mesure, la fraction enseignée aux élèves du primaire en est une reliée davantage aux objets. Baruk (1992) l'appelle la fraction-quantité. Grâce à elle, la manipulation devient le prétexte à la réflexion. C'est par elle que les enseignants donnent du sens au concept. Mais puisque la pratique associe trop rapidement la fraction-quantité au symbolisme, elle se voit intégrer aux automatismes amenant des problèmes au niveau de la réflexion. Desjardins (1973) en souligne l'importance:

> (...) l'équivalence des relations n'est pas contenue dans cette fraction-quantité; plus tard, quand la fraction-relation devient possible grâce au développement du sujet, on ne note dans la stratégie traditionnelle aucun souci d'en tenir compte: les automatismes ont déjà pris la place du raisonnement.

Afin de permettre un enseignement basé sur la réflexion, sur le raisonnement, sur une manipulation réfléchie, il faut tenir compte du temps. Souvent, on néglige le questionnement parce qu'il occupe tout l'espace pédagogique. On présente alors des exemples plus simples qui s'approchent davantage des exerciceurs. Les élèves ne s'y investissent pas vraiment et ainsi ils croient, dans bien des cas, que la fraction n'est autre qu'une *«équivalence entre des quantités »* plutôt que de comprendre les *«transformations pratiquées sur ces quantités par l'action du sujet»*.

L'exploitation consciente de la fraction peut même transformer l'utilisation des exemples stéréotypés. En effet, lorsque l'enseignant prend le temps de laisser les élèves explorer intuitivement les représentations concrètes du concept, il constate qu'ils ont une logique qui leur permet de s'approprier du sens.

La recherche de Streefland (1991) nous fournit une piste intéressante dans ce sens. Un problème qui utilise des pizzas, soit un exemple dit stéréotypé, est présenté à des élèves du primaire: «*Divide 3 pizzas between 4 children*». Streefland rend cet exemple productif en l'exploitant davantage, en ne se limitant pas à approuver un simple partage en deux ou en quatre. Il laisse manipuler les élèves tout en les questionnant sur leur résultat. Même si les répartitions varient, on peut constater la justesse des raisonnements.

a. One by one:

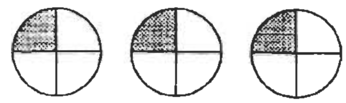


Figure 8: Everyone gets $\frac{1}{4}$ (pizza) + (..) $\frac{1}{4}$ + (..) $\frac{1}{4}$, which is $3 \times \frac{1}{4}$, or $\frac{3}{4}$.

b. First two, then one:

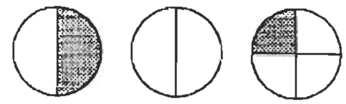


Figure 9: Everyone first gets $\frac{1}{2}$ (pizza), and later $\frac{1}{4}$ more: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

c. All three at once:

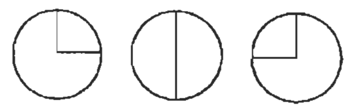


Figure 10: Two children get $1 - \frac{1}{4}$, and two get $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ etc.

Même si le problème posé réfère à un exemple traditionnel, l'activité libre des élèves permet la formation progressive d'une pensée mathématique. L'enseignant devrait augmenter le niveau de difficulté à mesure que l'habileté des élèves s'accroît. Plus les unités de référence exigeront que l'on se questionne sur leur fractionnement, plus la pensée mathématique va se parfaire.

Ces exemples doivent engager les élèves dans une recherche de solutions qui fait référence à leurs connaissances acquises. Ils doivent aussi leur permettre d'élaborer des hypothèses et d'en vérifier la justesse. En plus de ces exemples, les activités d'enseignement doivent aussi inciter les élèves à inventer eux-mêmes des modèles, à échanger, à utiliser ce qu'ils découvrent.

Finalement, les situations d'apprentissage devront aussi explorer tout le rationnel afin d'assurer la maîtrise du concept de fraction. L'enseignant doit amener les élèves à faire des liens, non seulement au niveau de la fraction et de ses préalables, mais aussi entre les différentes écritures de cette notion. Une recherche de Kieren (1976) insiste sur ce point. Il en ressort qu'il est essentiel de représenter la fraction à partir d'expériences diverses qui montrent ses différentes expressions:

> 1. Rational numbers are fractions which can be compared, added, substracted, etc.
> 2. Rational numbers are decimal fractions which form a natural extension (via numeration system) to the whole numbers.
> 3. Rational numbers are equivalence classes of fractions. (...)
> 4. Rational numbers are numbers of the form p/q, where p, q are integers and $q \neq 0$. (...)
> 5. Rational numbers are multiplicative operators (...)
> 6. Rational numbers are elements of an infinite ordered quotient field. (...)
> 7. Rational numbers are measures or points on a number line.

Ces expressions différentes d'un rationnel enrichissent la compréhension du concept et en assurent la généralisation. Notre but n'est pas de nous attarder à ces expressions mais seulement de souligner que la fraction fait partie des nombres rationnels et que sa maîtrise passe par une vision globale.

Maintenant que nous savons en quoi consistent les étapes de la formation de concepts, que nous maîtrisons mieux le concept de fraction, nous allons intégrer les étapes et le concept. Ce n'est pas avec *«un oeil neuf, mais (...) un oeil autrement informé de ce qu'il y a à voir»* (Baruk 1973).

Cette intégration permettra une meilleure emprise sur les stratégies d'enseignement de la fraction. C'est important puisque les difficultés des enseignants, dans la majorité des cas, sont d'ordre conceptuel et d'ordre didactique. Le but de cette action est donc d'associer les points importants du concept à un modèle d'enseignement des concepts.

3. Intégration: modèle et contenu

L'appropriation du sens de la fraction est importante pour son enseignement. Rieunaud (1989) en fait mention en comparant lui aussi la compréhension à un regard différent sur la notion: «(...) *un nouveau regard, celui de l'éducateur qui ne pourra désormais plus agir sans s'interroger - au moins un instant - sur le sens de sa pratique et sa validité.*» Une fois conscientisé aux points importants de la notion de fraction, on ne peut que les intégrer à son enseignement par les étapes de la formation de concepts. En prenant les étapes de Lepage (1985) en trois parties, c'est-à-dire deux à deux, pour les mêmes raisons déjà exposées précédemment à la page 35, nous allons d'abord en faire un résumé. Suite à ce résumé, nous y intègrerons la notion de fraction. Finalement, pour chaque partie, nous indiquerons l'impact de la méconnaissance du concept par l'enseignant sur le déroulement de ces étapes.

3.1 Première et deuxième étapes: apports sensoriels ou d'expériences, perceptions sensorielles ou rappel d'expériences

Ces deux premières étapes, comme le dit Lepage (1985) sont «*(...) la clé qui ouvre la porte à l'appropriation d'un concept*». C'est effectivement lors de ces étapes que l'enseignant met en place les conditions qui facilitent l'apprentissage de la notion concernée. Il favorise chez les élèves le contact avec leurs expériences antérieures afin de relier la nouvelle connaisssance à ce qu'ils savent déjà. Smith (1979) parle d'appropriation de sens, c'est-à-dire que la matière nouvelle cesse d'être un bruit ou un *«non-sens»*. C'est ainsi qu'à ces étapes, l'enseignant crée un intérêt qui pousse les élèves vers l'action sans angoisse. Le MEQ (1980) est animé de cette même ambition:

> (...) la nécessité de chercher à développer des attitudes saines capables de contrer l'apparition des anxiétés que l'application d'une certaine rigueur mathématique ne saurait manquer de provoquer.

Comme nous l'avons déjà mentionné, plusieurs préjugés sont reliés aux mathématiques en général et au concept de fraction en particulier. Ces préjugés des enseignants créent souvent de l'anxiété chez les élèves. Il faudra donc porter une attention spéciale à l'apport et au rappel d'expériences. Ils doivent porter sur des éléments sécurisants donc connus des élèves, soit des situations tirées du vécu et des apprentissages scolaires.

D'abord, au niveau des situations de vie quotidienne, l'enseignant doit rechercher, avant tout pour lui-même, les occasions où il utilise la fraction. Ces situations sont de moins en moins évidentes depuis l'avènement du système international (SI). Plus l'enseignant aura pris conscience de l'utilisation de la fraction dans le quotidien, plus il pourra présenter de situations variées aux élèves. De plus, il pourra mieux exploiter les occasions fortuites ou les exemples présentés par les élèves. En plus de les sécuriser, ces situations leur prouvent qu'ils utilisent déjà la fraction. Huard (1990) trouve ce point très important et cela pour tous les concepts à enseigner. Il le dit en ces mots: *«Ce n'est pas uniquement le fait de dire à quoi il sert qui nous incite à l'utiliser, c'est le fait d'en voir l'utilisation qui nous influence le plus».*

Maintenant, considérons les expériences reliées aux apprentissages scolaires. Notre recherche de compréhension de la fraction nous a permis d'identifier des notions préalables à ce concept. Il appartient à l'enseignant de vérifier le degré de maîtrise, chez ses élèves, du sens de la multiplication, de la division et de l'unité dans les entiers naturels. La compréhension de ces notions préalables assure une meilleure intégration de la fraction.

Dès qu'une situation est en place et que la vérification des préalables est faite, l'enseignant introduit les représentations concrètes et opératoires de la fraction. Les élèves identifient alors facilement les connaissances qu'ils ont déjà utilisées. Ils font les liens grâce au soutien de l'enseignant qui leur laisse le temps d'explorer la notion nouvelle.

La méconnaissance du concept de la fraction par les enseignants, entraîne pour eux, comme le mentionne Lepage (1985), une difficulté à répertorier des:

> situations significatives, c'est-à-dire des exemples de situations décrites par une structure mathématique donnée, afin qu'ils (les élèves) puissent parvenir à dégager cette structure mathématique et la généraliser par la suite.

Cette méconnaissance entraîne aussi une difficulté à encourager les élèves à varier les situations qu'ils doivent exploiter. De plus, cette exploitation peut ne pas être adéquate puisqu'il n'est pas certain que les préalables soient connus. De ce fait, les liens aux opérations, à l'unité et aux représentations de la fraction seront absents ou resteront implicites. Cette partie risque aussi d'être écourtée pour passer rapidement aux étapes suivantes. La compréhension sera davantage orientée vers la technique. L'enseignant insistera davantage sur la mémorisation de la place du numérateur et du dénominateur. Pourtant, Kayler (1988) affirme que l'apprentissage d'une notion n'est pas seulement la connaissance de la technique:

> (...), que ce soit directement issu des travaux de Piaget ou de ceux de l'intelligence artificielle comme ceux de Minsky, les didacticiens reconnaissent que l'enfant (et l'adulte) (sic) **construit** ses connaissances, et que celles-ci ne peuvent donc pas être simplement reçues comme des conventions transmises, ni pratiquées par la répétition d'exercices.

Donc, aux cours de ces deux premières étapes de la formation de concepts, l'enseignant met en place tous les éléments qui permettent aux élèves de saisir d'où ils doivent partir et où ils doivent aller. C'est d'un pas assuré qu'ils progresseront vers les étapes suivantes.

3.2 Troisième et quatrième étapes: images ou représentations mentales, concepts intuitifs ou début d'abstraction

Ces étapes poursuivent le cheminement entrepris précédemment. Le support concret soutient le travail de manipulation, et l'exploration de la notion se continue. Cependant, l'action est accompagnée d'un langage plus conscient, un langage qui coordonne progressivement la manipulation concrète et la manipulation mentale.

Pour la notion de fraction, ces étapes continuent l'exploitation de la manipulation, appelée mode enactif par Barth (1985)). L'enseignant doit activer cette manipulation en créant des situations qui vont permettre, à ce stade, de comparer, associer et échanger. Ces habiletés vont susciter un questionnement plus centré sur la compréhension même de la fraction. En effet, maintenant que la fraction est comprise dans la situation de départ, il faut la comprendre comme concept. Les élèves seront incités à s'exprimer sur ce qu'ils en comprennent à partir d'illustrations ou d'explications verbales.

Les représentations concrètes seront reliées aux unités continues et discontinues. De plus, l'enseignant devra tenir compte que le fractionnement ne va pas de soi. Il présentera aux élèves des modèles qu'ils devront eux-mêmes couper selon une consigne pré-établie.

Mais surtout, il devra laisser du temps pour manipuler et questionner les élèves sur leur action. En donnant des contre-exemples, en doutant lui-même de façon à ce que les élèves expliquent dans leurs mots leur cheminement, en leur demandant de trouver des exemples, l'enseignant permet une conscientisation de la fraction comme opérateur qui agit sur l'unité. Cette conscientisation facilite la compréhension du lien de la fraction aux nombres entiers naturels.

À mesure que les élèves démontreront une compréhension de la fraction, ils pourront travailler à partir d'exemples plus complexes. Les élèves devront alors réfléchir davantage sur le fractionnement qu'ils doivent effectuer. C'est le début d'un formalisme. Ils progressent en donnant un support aux images mentales qui se forment au fur et à mesure qu'ils s'investissent dans cette démarche. C'est le mode iconique où «*il s'agit de pouvoir se représenter quelque chose sans l'avoir devant les yeux*» (Barth 1985).

Ces deux étapes peuvent être perturbées par la méconnaissance de la fraction par les enseignants. La manipulation et l'exploitation qui occupent une place très importante à ce niveau, peuvent en souffrir. Il n'est pas assuré que l'enseignant puisse permettre aux élèves de se questionner ni même de présenter des exemples qui sont variés. La variété est alors souvent remplacée par la quantité. Il en est de même pour les explications. Il se limite souvent à ne redonner que les mêmes, formulées différemment.

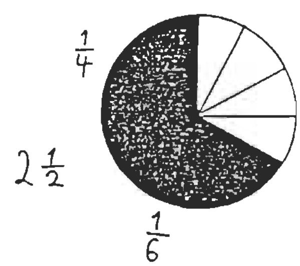
Toujours centré sur la technique, l'enseignant ne peut reconnaître les difficultés réelles des élèves. Un article de Hasemann (1986) nous fait voir des difficultés d'élèves. On y voit que malgré une bonne application des règles et des automatismes, lorsqu'il s'agit de représenter ou d'expliquer la notion, la compréhension n'est pas évidente.

Andree (aged 13)

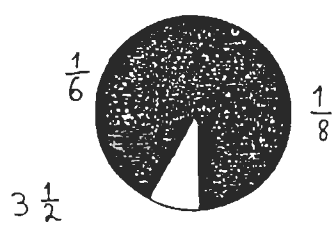
Andree solved all computational questions in items 3, 4 and 5 correctly, he had no problems at all wiht adding fractions by using a rule. The questions in his items 1 and 2 were a little bit different from those Yvonne was asked:

1. Shade in first $\frac{1}{4}$ of the circle and then $\frac{1}{6}$ of the circle as well. What fraction of the circle have you now shaded in altogether?

(Remark: The circle was divided into twelfths.)

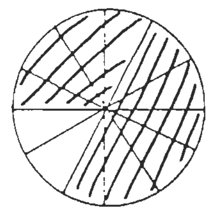


2. a) The same question with $\frac{1}{6}$ and $\frac{1}{8}$.



Ann (aged 13)

She solved item 1 (in the circle-version) like this:



Ann spontaneously shaded in 4 twelfths (for $\frac{1}{4}$), then 6 twelfths (for $\frac{1}{6}$), and her answer was «$\frac{1}{10}$». Asked to calculate $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$, she did without any problem:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}.$$

After this calculation, the interviewer (I.) asked Ann (A.):

I.: $\frac{5}{12}$, that's what you have calculated. And in the diagram, what answer did you get there?

A.: $\frac{1}{10}$.

I.: Well, but which answer is the correct one?

A.: ... (6 sec) ... Both are correct.

I.: Why?

A.: Yes, first $\frac{1}{10}$, I counted this; and $\frac{5}{12}$ I calculated.

Now asked again whether it was possible to get different results for one question she repeated that she had counted $\frac{1}{10}$ in the diagram and calculated $\frac{5}{12}$.

During the whole interview this girl was very good at adding fractions by using a rule, but she had a very personal idea of fractions when she worked out diagrammatical questions.

L'entrevue démontre qu'Ann arrive à opérer en appliquant un algorithme mais qu'elle n'a de la fraction qu'une compréhension naïve. Un enseignant doit se poser des questions face à un élève qui présente des difficultés d'ordre conceptuel. S'il ne fait que reformuler les mêmes explications sans changer ses méthodes d'intervention, il ne changera rien à la situation. S'il ne peut "voir" les causes de ces difficultés, s'il ne comprend pas ce qui ne va pas, il ne peut aider l'élève et les lacunes persistent.

Il s'agit donc, au cours de ces deux étapes, de favoriser la manipulation et l'expression des élèves afin qu'ils puissent comprendre la fraction à l'aide d'un support concret. Cette exploitation met en place les habiletés nécessaires à la généralisation.

3.3 Cinquième et sixième étapes: concepts verbalisés ou abstraction, concepts généralisés ou généralisation

Pour le concept de la fraction, la cinquième étape, soit l'abstraction du concept, n'est que rarement exploitée. On accepte, au niveau primaire, que les élèves conservent un support concret. Toutefois, l'absence d'abstraction de la notion n'empêche aucunement sa généralisation, qui n'en sera qu'à ses débuts.

La généralisation de la fraction est l'étape où l'enseignant vérifie si les élèves peuvent reconnaître, parmi plusieurs situations, lesquelles requièrent l'utilisation de cette notion. Les élèves savent qu'ils ont compris et qu'ils peuvent se faire confiance lors d'une éventuelle utilisation. Les étapes précédentes préparent ce moment. Polya (1967) nous dit: *«Cela signifie que le professeur (...) ne devrait pas se contenter de dispenser le savoir mais qu'il devrait tenter, également, de développer chez les étudiants la capacité d'utiliser ce savoir».*

Cette généralisation, Behr (1983) en parle aussi dans sa recherche sur le rationnel. Il ne suffit pas de faire des liens entre différents modèles concrets de la fraction. Il faut faire des liens entre les différentes écritures du rationnel. Lorsque toutes ces étapes auront été intégrées par les élèves, alors le formalisme de la fraction sera en évidence et pourra qualifier l'utilisation de la fraction jusque dans la structure algébrique.

Puisque nous savons que la formation de concepts est un long processus, l'abstraction et la généralisation seront complétées lors des études secondaires. La généralisation ne sera atteinte que lorsqu'elle touchera le nombre rationnel dans son ensemble et les liens entre les différents concepts mathématiques du programme.

Lorsqu'il y a méconnaissance de la notion de fraction, l'enseignant passe rapidement à cette étape. Cependant, puisque les premières étapes n'ont pas été exploitées adéquatement, il est inutile de vouloir généraliser. En effet, un enseignement qui ne permet pas aux élèves de manipuler suffisamment, de se questionner, ne tient pas compte du fait qu'il est important de faire prendre conscience de l'action réelle de la fraction sur l'unité.

L'enseignant devrait voir la nécessité de retarder le symbolisme de la fraction pour s'attarder à la manipulation et aux connaissances intuitives. Herscovics et Bergeron (1982) soulignent souvent «*le danger d'une symbolisation prématurée*». Ce qui peut sembler une perte de temps est pourtant nécessaire puisque pendant ce temps, les bases, les assises du concept se forment. L'élève se prépare à intégrer le formalisme. Comme le dit Reboul (1983):

> (...) la règle de Rousseau: «Savoir perdre du temps» n'a rien perdu de sa force; il faut renoncer à imposer un contenu tant que l'élève n'a pas acquis la structure mentale permettant de l'intégrer.

Ces dernières étapes clôturent le modèle de Lepage (1985). Même si le concret demeure un soutien, la pensée s'organise et s'oriente vers l'abstraction et la généralisation. Lors des études ultérieures, les élèves auront la base qui va leur permettre de clore le processus d'apprentissage de ce concept. Si déjà ils utilisent la notion et si elle est intégrée à leurs connaissances antérieures, le symbolisme constituera un apprentissage réel et non seulement basé sur des automatismes.

Les étapes de la formation de concepts selon le modèle de Lepage(1985), nous permettent de suivre la progression de l'enseignement d'une notion mathématique. Malgré la description de chacune des étapes, il n'est pas certain que leur application soit conforme à cette progression. Par exemple, l'utilisation de ce modèle pour l'enseignement de la fraction suppose d'abord une maîtrise de cette notion sinon l'exploitation risque d'être inadéquate.

L'enseignant, afin de maîtriser ce concept, doit se conscientiser aux notions préalables qui sont reliées aux nombres entiers naturels et aux notions constitutives de la notion de fraction. De plus, il doit savoir qu'une fraction est une des expressions possibles d'un nombre rationnel.

Mais encore, cette maîtrise seule n'assure pas la compréhension de la fraction. L'enseignant doit associer cette maîtrise aux étapes de la formation de concepts. Ainsi, il pourra exploiter ce qu'il sait tout en respectant la façon d'apprendre des élèves. D'une situation de départ, il fera prendre conscience des liens de la fraction aux nombres entiers naturels. Puis, progressivement, il guidera les élèves vers la généralisation en passant par des étapes qui favorisent la pensée logique et la représentation mentale de la fraction.

Cette maîtrise généralement absente chez les enseignants provoque, dans bien des cas, une mauvaise utilisation des moyens mis à leur disposition. Comme les guides méthodologiques font partie de ces moyens, nous allons poursuivre notre recherche par l'analyse de deux guides. Ainsi, nous allons vérifier dans quelle mesure ils peuvent aider les enseignants à se questionner par rapport à leur connaissance de la fraction. Ces guides mettent-ils en place des outils, donnent-ils des pistes pour amener les enseignants à prendre conscience de leurs lacunes?

CHAPITRE III

Les guides méthodologiques

Il ne fait aucun doute que la maîtrise des concepts en général et des concepts mathématiques en particulier, est une condition sine qua non à l'élaboration de stratégies d'enseignement. Compte tenu que les enseignants, dans une large mesure, éprouvent des difficultés de contenu mathématique et que ces difficultés ont un impact sur l'élaboration des stratégies d'enseignement de cette discipline; compte tenu que l'outil le plus fréquemment utilisé dans les classes du primaire par les enseignants est le guide méthodologique, nous estimons qu'il est important d'analyser cet outil.

Les balises sécurisantes que procure le guide dont l'encadrement, la structure, le déroulement, font en sorte que les enseignants le suivent, dans bien des cas, assez fidèlement. Cependant, il y a un danger à vouloir suivre un guide si aveuglément. L'utilisation des activités d'enseignement qui y sont proposées peut être réductrice à cause de la méconnaissance du concept par les enseignants. Incapables d'en saisir les subtilités et les habiletés qui s'en dégagent, l'enseignement demeure limité aux trucs d'utilisation.

Or, ces guides, comment sont-ils constitués? Permettent-ils aux enseignants de jouir d'une certaine latitude tout en palliant à leurs lacunes? À l'inverse, perpétuent-ils les faiblesses reliées à la méconnaissance de la fraction?

Un outil intéressant serait un guide conçu de façon à ce que les enseignants, de par les pistes suggérées, en arrivent à se questionner sur leurs propres apprentissages, les amenant ainsi à mesurer leur dégré de maîtrise des notions mathématiques de base. Cet outil proposerait même des activités de manipulation adaptées aux enseignants qui en auraient besoin. Il les inciterait à se questionner sur le sens de la fraction.

De plus, il mettrait en évidence la progression des étapes de la formation de concepts en recommandant, par des exemples, des moments propices au questionnement des élèves et en indiquant la nature de ce questionnement. Ces guides, répondent-ils à toutes ces attentes? Sont-ils indicatifs en proposant ou à l'inverse sont-ils trop explicites ou trop directifs en dictant ou en prenant tout l'espace au point où ils pourraient décourager toutes les initiatives personnelles des enseignants?

Puisque nous avons exploré le concept de fraction et que nous l'avons intégré aux étapes de la formation de concepts, nous avons fait ressortir les conditions qui en permettent l'enseignement. Nous analyserons donc deux guides méthodologiques choisis comme objet de notre recherche, c'est-à-dire le guide de la collection FLG (Bardier, 1986) et le guide de la collection Défi mathématique (Lyons et Lyons, 1987).

Nous procéderons à partir des étapes de la formation de concepts telles que décrites par Lepage (1985) en y jumelant les éléments constitutifs importants de la notion de fraction comme nous l'avons fait dans notre recherche de sens au chapitre 2. Ces étapes seront traitées deux à deux, donc en trois parties, pour les mêmes raisons énumérées dans ce même chapitre. Pour chaque partie, nous commencerons par la collection FLG pour enchaîner avec la collection Défi.

Nous utiliserons, pour le guide FLG le terme module, qui pour l'auteur signifie chapitre. Plusieurs sont consacrés à la fraction. Pour le guide Défi, le terme que nous utiliserons est unité d'apprentissage lequel regroupe toutes les activités sur la fraction. Dans les deux cas, plusieurs objectifs sont visés. Pour permettre l'atteinte de ces objectifs, on propose des activités en indiquant le déroulement le plus approprié. De plus, des remarques pédagogiques pour FLG et des notes pour Défi ciblent les points importants.

1. Première et deuxième étapes de la formation de concepts: apports sensoriels ou d'expériences, perceptions sensorielles ou rappel d'expériences.

Aux deux premières étapes de la formation de concepts, on se concentre sur les acquis des élèves. À partir de ce qu'ils connaissent déjà, c'est-à-dire à partir des notions préalables à la fraction, on fait un rappel de leurs propres expériences. De ces expériences, on amène les représentations opératoires c'est-à-dire les représentations reliées aux opérations de multiplication et de division, et les représentations concrètes de la fraction, c'est-à-dire les dessins ou les objets que l'on peut partager. C'est l'occasion, pour l'enseignant, de laisser le temps aux élèves d'explorer, de découvrir et de s'interroger sur le concept.

1.1 Guide méthodologique FLG

Le module 6 du guide méthodologique est le premier module qui traite de la fraction. Dans son introduction, les remarques pédagogiques ne font aucunement mention des notions préalables qui constituent le rappel d'expériences. Après l'énumération des objectifs visés dans ce module, on précise seulement que la fraction est une notion de départ. On est cependant conscient que les élèves en ont une connaissance intuitive. De plus, sans être explicitées, on mentionne que les représentations concrètes se feront sur des objets continus et discontinus. En effet, il est écrit que la fraction sera présentée *«en tant que partie d'objet et (...) en tant que partie d'un ensemble»*.

Rien n'est mis en place pour permettre à l'enseignant de se questionner sur ce qu'il doit faire au début de ce module. Rien ne l'incite à vérifier les préalables. Si l'enseignant est peu conscient de cette nécessité, il ne fera pas le lien de la fraction avec la division et avec la multiplication, opérations qui sont pourtant bien exploitées lors des modules précédents. Il se limitera à la compréhension de ces notions comme des éléments isolés.

Par exemple, pour ces deux opérations, il pourra mettre en évidence la compréhension des différentes étapes d'exécution. Il pourra aussi exploiter les réponses obtenues en questionnant sur le sens de ces concepts. Il pourra encore faire valoir les propriétés des opérations soit la commutativité, l'associativité et la distributivité pour la multiplication; soit la distributivité pour la division. Et ce, même s'il n'a pas intégré lui-même ces deux concepts puisque le guide F.L.G. est sensible à la compréhension de ces opérations. Cependant, il ne les relie pas explicitement au concept de la fraction.

Même si rien n'est prévu pour l'unité de référence, nous donnerons des exemples d'activités qui sont proposées pour vérifier le degré de maîtrise des opérations concernées. Ces exemples sont tirés du module 4, module qui précède celui de la fraction:

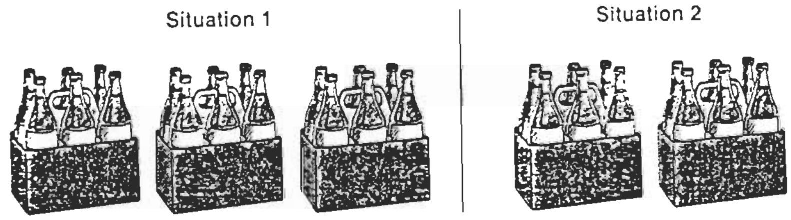
3 a Francis suit des cours de ballet jazz deux soirs par semaine: chaque cours dure trois heures et coûte 2 $ l'heure.
Quel est le prix des cours pour une semaine?

b Lisa suit aussi des cours de ballet jazz. Elle a trois cours de deux heures par semaine au prix de 2 $ l'heure.
Combien lui coûtent ses cours pour une semaine?

c Compare les frais de Francis et de Lisa. Sont-ils les mêmes?
Comment expliques-tu cela?

4 Ces situations sont-elles équivalentes?

Situation 1 | Situation 2



À deux reprises. | À trois reprises.

Au guide, des indications encouragent l'enseignant à utiliser certaines pistes. Par exemple, illustrer une opération ou de trouver l'opération qui répond à une illustration, ajouter une inconnue suite à résolution d'un problème qui requiert la multiplication, inciter l'élève à modifier le problème pour obtenir une division. L'associativité et la commutativité y sont aussi exploitées. Ces propriétés sont reliées à l'utilisation courante. Le numéro 4 en est un exemple. Les situations illustrées , tout en étant équivalentes, ne sont pas égales. On le voit bien à cause du contexte.

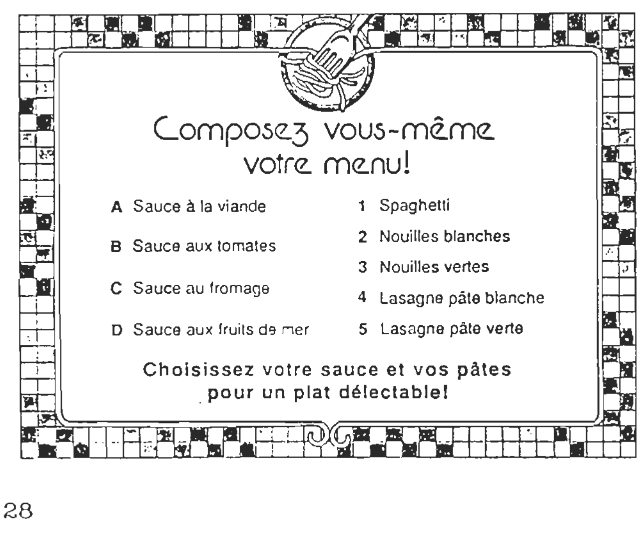
De plus, le guide attire l'attention de l'enseignant sur le fait que les élèves doivent justifier leurs réponses. Même s'il n'est pas essentiel de maîtriser les propriétés des opérations pour comprendre la fraction, nous croyons que c'est quand même un pas vers la compréhension de l'équivalence de deux fractions. Il n'est donc pas inutile de s'y attarder.

Avant d'aborder la fraction, les concepts de multiplication et de division devraient être suffisamment maîtrisés puisqu'ils sont des notions constitutives de la fraction. Afin de vérifier la généralisation de ces concepts, plusieurs situations différentes devraient être présentées aux élèves. Le guide FLG est conscient de cette nécessité et exploite une variété de situations exposées sous forme de problèmes. En voici un exemple:

1 Illustre chacune des situations-problèmes et résous-les.

- a Doreen dépose 32 balles de golf dans des boîtes pouvant en contenir 8 chacune. Combien de boîtes Doreen utilise-t-elle?
- b Pour ton anniversaire, tu prépares des sacs de surprises pour tes six amis; tu mets 9 surprises dans chaque sac. As-tu assez de 50 surprises pour préparer tes sacs?
- c Mélanie possède 72 photos de même grandeur. Elle en colle 8 par page dans son album. Combien de pages complète-t-elle de cette façon?
- d Pour une fête d'enfants, Véronique achète 42 ballons. Chaque enfant gonfle 6 ballons. Combien d'enfants ont participé à cette fête?
- e Dans quel cas en as-tu le plus: quand tu achètes 4 boîtes de 6 tablettes de chocolat chacune ou quand tu achètes 3 boîtes de 8 tablettes de chocolat chacune?

2 Une nouvelle chaîne de restaurants offre un menu spécial.
Énumère toutes les combinaisons de mets différents que cette chaîne offre à sa clientèle.



28

On sent bien que l'auteur est conscient de l'étape de la généralisation pour ces concepts. Dans le guide, il le mentionne brièvement afin de permettre une meilleure compréhension de la relation entre la multiplication et la division. Même si c'est fait, on ne sent pas toujours que c'est en considérant les difficultés d'ordre conceptuel des enseignants. On aurait pu, dans ce cas-ci, ajouter quelques pistes. Par exemple, au numéro 1c, on pourrait poser les questions suivantes:

a) si on ne te disait pas combien Mélanie colle de photos par page, que devrais-tu savoir pour solutionner ce problème?

b) si on exigeait que tu trouves la solution sans faire de division, que pourrais-tu faire?

Toutefois, on oriente l'exploitation de façon assez précise. Par exemple, le numéro 2 suggère l'utilisation du graphe sagittal ou du graphe cartésien qui ont amené les élèves à comprendre la multiplication par le produit cartésien. Le guide méthodologique propose aussi d'accepter et même d'encourager la créativité dans la représentation de ces menus. Toutefois, il ne donne aucune piste sur la façon de le faire.

Nous croyons, que malgré quelques manquements, ces modules permettent une généralisation de la multiplication et de la division ainsi que des liens entre elles. Malgré cela, il n'est pas certain que le tout soit fait en relation avec l'apprentissage de la fraction. L'enseignant peut ne pas insister suffisamment sur l'exploitation des situations présentées. Il peut ne pas extrapoler en ne donnant pas à ses interventions la voie des préalables, c'est-à-dire qu'il n'utilise pas le langage qui lie explicitement la multiplication et la division à la fraction. Par exemple, il n'insistera pas sur des représentations diverses du reste de la division (pour 12÷5=2 reste 2, on pourrait écrire 2 2/5) ou d'un nombre qui se divise par un autre (pour 20÷5 on peut écrire 20/5). Il n'insistera pas davantage sur les notations diverses des résultats d'une multiplication (pour 3x4=12, on peut écrire 3/1x4/1=12/1)

Pour le préalable de l'unité de référence, rien n'est prévu. Il est fort probable que cette notion serait négligée, elle aussi, par l'enseignant puisqu'aucune piste n'est donnée. Ainsi, la lacune majeure du début du module sur la fraction, est bien le fait de ne pas centrer l'attention de l'enseignant sur les préalables. Cette lacune est importante puisque c'est à cause d'elle que le lien entre les opérations et la fraction, ainsi que les liens avec l'unité, ne se font pas.

Cependant, il y a un souci, dans le module sur la fraction, de mettre les élèves en contact avec cette notion par une situation de départ, situation qui se veut un déclencheur. Elle devrait donc situer l'élève par rapport à l'objectif visé, centrer son attention et piquer sa curiosité. C'est aussi une façon de rechercher l'appropriation du sens dans ce qui est enseigné.

Une activité préparatoire est donc suggérée mais les indications en vue de réaliser cet objectif semblent inappropriées. On insiste que peu sur le sens de la fraction mais plutôt sur le fait que l'on doive trouver le plan qui correspond le mieux à la classe. Voici cette situation:

> **Consignes**
>
> Inviter les enfants, groupés en équipes de trois ou quatre, à concevoir un projet d'aménagement de la classe et d'horaire de travail.
>
> Dans un premier temps, vous animez une discussion pour permettre aux enfants de formuler les éléments dont ils devront tenir compte.
>
> *Exemples:*
> l'espace disponible;
> le nombre de pupitres ou de tables;
> les différents meubles: bibliothèque, étagères, bahut, etc.;
> la répartition du temps par période d'activités;
> les différents types d'activités: période de lecture,
> manipulation,
> travail libre,
> travail collectif,
> travail en équipe.
>
> Cette discussion permettra à toute la classe d'établir des consignes communes à partir desquelles chaque équipe pourra concevoir son projet. Vous devez inviter les enfants à formuler des consignes communes, claires et précises.

Cette situation pourrait être intéressante si elle était accompagnée de pistes d'intervention auprès des élèves. Selon l'exploitation qui en sera faite, elle peut être un apport important d'expériences puisque la classe, c'est leur milieu de vie. Mais, rien n'est prévu pour centrer l'attention sur la fraction. Les exemples donnés sur la fraction de temps, de classe ou de jour ne permettent pas, de façon précise, de sentir le lien entre la situation et son exploitation. On ne perçoit pas l'intention qui est donnée à ces exemples et ne met pas en évidence la notion d'unité de référence.

Afin de maximiser l'utilisation de la situation de départ, on pourrait d'abord profiter d'une situation réelle. Par exemple, pour un travail donné, l'enseignant peut insister sur la nécessité d'un arrangement différent de l'organisation physique de la classe.

De là, on peut y exploiter le nombre de pupitres, dans une équipe de 4, qui doivent être retournés, le nombre 4 étant l'unité de référence. On peut aussi trouver le nombre de pupitres, par rapport à l'ensemble de la classe, qui seront placés en dyade, etc.

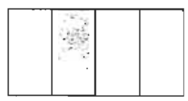
Ces exemples qui sensibilisent à l'unité de référence font appel à des unités discontinues. Pour toucher aussi les unités continues, on pourrait, à l'intérieur des équipes qui se sont formées, faire partager également un carton d'affichage afin que chacun puisse y placer son horaire. À partir de l'unité qui est le carton d'affichage, il suffit de demander quelle sera la part de chacun.

Nous doutons que cette mise en situation, telle qu'elle est présentée au guide, permette à l'enseignant d'en tirer profit. Nous doutons qu'il exploite adéquatement la situation, qu'il pense à orienter ses questions vers l'unité de référence, qu'il en fasse valoir le lien avec la fraction puisque celui-ci n'est pas évident du tout.

Une autre situation s'ajoute à celle-ci. En fait, il s'agit plutôt d'illustrations de situations connues des élèves. À partir d'elles, on reconnaît l'utilisation de la moitié. Aucune exploration libre n'est faite. On demande aux élèves de représenter chaque situation incluant la moitié d'unités continues ou discontinues. Au guide, on attire l'attention sur le fait que les parties doivent être congrues. Par un exemple, on donne une piste que s'avère intéressante mais on ne précise pas à quel moment l'utiliser. Il faut supposer qu'elle viendra avec les illustrations des élèves.

Aucun fractionnement n'est fait à partir des exemples des élèves et aucune mention de l'aspect opératoire et de l'aspect perceptif. Pour le rôle du numérateur, on ne fait pas de lien à la multiplication. On l'amène en terme de parties à considérer dans une unité. Pour le rôle du dénominateur, aucun lien à la division. C'est en terme de partage qu'on l'illustre comme dans cet exemple:

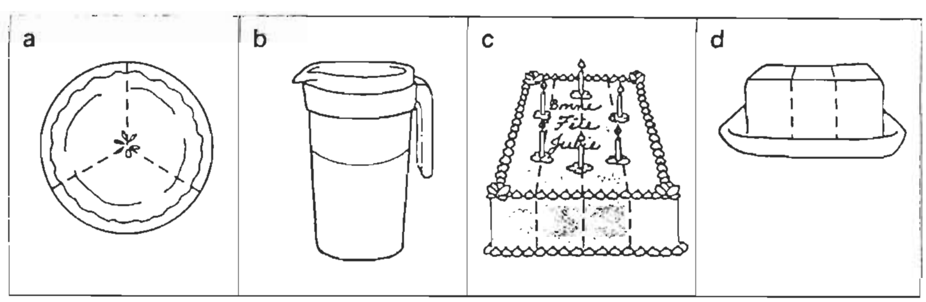
Observe bien l'exemple.



Les $\frac{3}{4}$ de cette bande sont colorés.
Le «4» signifie que nous avons partagé la bande en 4 parties **congrues**; le «3» indique que 3 parties seulement sont colorées.

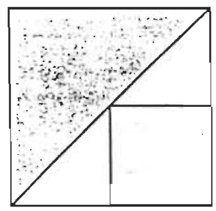
La leçon se poursuit avec différents fractionnements présentés au manuel de l'élève. Les exemples illustrés se rapprochent des modèles stéréotypés c'est-à-dire des modèles où le partage est de même nature comme la tarte ou le carré coupé en deux ou en quatre, de façon très traditionnelle:

5 Observe les illustrations ci-dessous. Peux-tu dire quelle fraction de chacune est représentée par la **partie coloriée**? Écris ces fractions.



À quelques reprises cependant, on prend des risques avec des exemples qui forcent l'élève à se questionner sur l'unité de référence et sur la valeur des fractionnements:

9 Observe bien le carré suivant.



Quelle fraction du carré:

a le triangle vert représente-t-il?
b le carré rose représente-t-il?
c un triangle bleu représente-t-il?

Malgré le fait que l'on attire l'attention de l'enseignant sur l'importance de prendre en considération les commentaires des élèves, de les laisser discuter en groupe, d'échanger, on ne donne pas de pistes de questions, d'objectivation. Pourtant, à ces étapes, le questionnement est essentiel puisque les élèves doivent comprendre la fraction dans la situation donnée.

De plus, on demande aux élèves de nommer les fractions représentées. Or, nous croyons qu'il est trop tôt. L'exploration n'est pas suffisamment encouragée et les liens qui sont faits avec les utilisations implicites de moitié ne permettent pas la compréhension des différents fractionnements comme les tiers, les cinquièmes. Il faut, avant de nommer la fraction, la comprendre.

Pour ces deux premières étapes de la formation de concepts, nous croyons que l'enseignant est peu soutenu dans son enseignement. Les pistes sont rares, l'exploitation est négligée pour faire place rapidement à des automatismes. Les exemples peu nombreux sont quand même orientés vers la notion d'unité. De plus, ces unités sont continues et discontinues. Les exercices sont nombreux et on encourage les représentations écrites plutôt que d'encourager la manipulation, le découpage, le pliage et le collage. Il y a un effort insuffisant au niveau de la manipulation et des activités du guide.

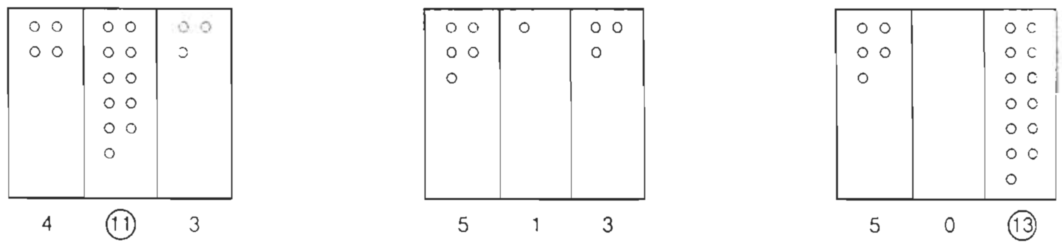
1.2. Guide méthodologique Défi

Dès le début du guide, sans préciser qu'il est nécessaire de vérifier les préalables, il est souligné que l'enseignement des fractions est depuis longtemps un problème parce que prématurément centré sur les symboles et les techniques. On privilégie la connaissance intuitive et la représentation concrète plutôt que le symbolique et les opérations. On suggère à l'enseignant de manipuler, de créer, de questionner. Mais surtout, on utilise un langage qui prépare à l'étude de la fraction.

Cette préparation a d'ailleurs commencé beaucoup plus tôt. En effet, au cours des unités d'apprentissage précédant l'unité sur la fraction, on apporte un soin particulier à la compréhension de la multiplication et de la division. De plus, on crée déjà un lien entre ces opérations et la fraction. On le fait intuitivement sans nommer vraiment le rationnel. Par exemple, on parle d'échanges et d'équivalences, de reste de division exprimé sous la forme a/b...

La notion d'équivalence au niveau de la fraction est difficile pour les élèves qui étudient la fraction sans jamais avoir pris conscience de ce terme. Dans le guide de Défi, on se sert des échanges que l'on fait dans les nombres naturels. En voici un exemple:

Équivalence
Un nombre peut être exprimé sous plusieurs formes arithmétiques équivalentes. Ainsi, l'expression 36 = 2 dizaines + 16 unités = 4 dizaines − 4 unités montre trois formes équivalentes du nombre trente-six. Pour un nombre représenté au moyen de la planche à calculer, tout échange correct entraîne une représentation différente mais équivalente du même nombre.



Ainsi, cet enseignement prend du sens et le même procédé peut ensuite être utilisé au niveau de la fraction. Puisqu'on parle ici des formes différentes sous lesquelles on peut exprimer un nombre, on pourra parler des différentes expressions de la fraction.

On définit aussi le terme égalité. Cette définition a un lien direct avec la compréhension de la distinction entre le concept d'opération et le concept de calcul. Voici l'explication qui est dans le guide:

Égalité
L'égalité est une phrase mathématique qui exprime l'identité de deux nombres. L'expression 4 + 6 = 10 signifie donc que 4 + 6 et 10 sont exactement le même nombre. De même, l'expression 8 − 5 = 2 + 1 exprime l'égalité du nombre 8 − 5 et du nombre 2 + 1. Le signe « = » n'a pas le sens de « la réponse, c'est... ». L'expression 9 − 4 = 5 n'est pas une question (9 − 4) suivie d'une réponse (5).

Pour plusieurs écoliers, l'expression 8 + 2 = 10 + 2 = 12 est juste. Elle est cependant **fausse** à cause du sens réel du signe « = ». Le signe « = » exprime, un peu comme l'équilibre des plateaux d'une balance, que les nombres placés à gauche et à droite sont un seul et même nombre.

On voit que dans le premier exemple, il y a d'un côté de l'égalité, une opération dont on n'a pas fait le calcul. De l'autre côté, on voit l'opération pour laquelle on a fait le calcul. On laisse bien entendre le rôle du signe égal. L'enseignant qui ne saisit pas tout à fait le sens de cette remarque cherchera à en savoir davantage. Il est alors sur une piste qui le questionne et qui lui fait comprendre que certains éléments lui manquent.

En plus de l'équivalence et de l'égalité, on prépare la compréhension de la fraction dès l'apprentissage de l'algorithme de la division en faisant représenter le reste sous la forme a ÷ b ou a/b. En effet, le reste devient une opération pour laquelle on ne fait pas le calcul. Ici, l'enseignant prend conscience des préalables à la compréhension de la fraction.

Sensibilisé à ces points importants, l'enseignant peut maintenant présenter la situation de départ. On aborde immédiatement la notion d'unité et le fractionnement, ce qui est mentionné dans le guide en terme de *«fractionnement d'unités»*. À partir de la situation d'un cuisinier sourd-muet, on fait voir l'utilité d'utiliser la fraction et par la même occasion, on la relie aux opérations. Puisque le cuisinier ne peut communiquer verbalement, les élèves doivent trouver un moyen de se faire comprendre, d'où le code « a ÷ b ».

Dans cette situation, c'est la représentation concrète qui est favorisée. Le symbolisme et la terminologie passent au second rang. On encourage aussi l'enseignant à utiliser les connaissances intuitives des élèves et à accorder de l'importance à leurs réponses. Des pistes sont données dans ce sens. En voici quelques-unes:

> **Note:** Laissez-les réflechir. Leurs solutions sont-elles réalistes? compliquées? Par exemple, le client peut
> — couper lui-même son morceau (propreté?);
> — faire un dessin (bonne idée!);
> — faire des signes (clarté?);
> — utiliser le langage gestuel des sourds-muets (les clients le connaissent-ils?);
> — écrire un code ou une expression mathématique comme $1 \div 3$ ou $\frac{1}{2}$ (bonne idée!)

Ces pistes tiennent compte de toutes les réponses sans brimer les élèves qui verront leurs solutions écartées. L'enseignant sait comment intervenir et lier la solution à la fraction et à ses préalables. Ceux-ci ne sont pas négligés car au guide, on insiste encore sur l'utilisation des connaissances intuitives des élèves, sur les opérations et sur l'unité de référence. Les élèves fractionnent, explorent, se questionnent sur la situation. Des notes, dans ce sens, soutiennent l'enseignant tout en suscitant une réflexion sur ses propres connaissances mathématiques. Cependant, jusqu'à ce qu'il ait clarifié la notion de fraction, des notes peuvent le confondre comme dans l'exemple ci-dessous:

> **Notes:** 1. Nous suggérons d'insister davantage sur le *sens de division* que renferme la fraction unitaire $\frac{1}{n}$ plutôt que sur le sens «un morceau sur n». En effet, dire que $\frac{a}{b}$ signifie *a morceau sur b* conduit à un *non-sens* dans le cas, par exemple, de la fraction $\frac{5}{4}$. Est-ce 5 morceaux sur 4? Il faut alors présenter une seconde définition pour ce genre de fraction, ce qui n'est pas souhaitable. Ce qui est vrai en quatrième année doit le demeurer en cinquième année. À titre de définition intuitive pour une fraction unitaire comme $\frac{1}{4}$ nous préférons: *une partie qui entre exactement quatre fois dans le tout.*
>
> 2. Nous avons adopté dans cette unité la séquence de développement suivante pour l'élaboration symbolique du sens de la fraction:
> 1° Fractions unitaires: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, etc. dont le sens est $1 \div 2$, $1 \div 5$, $1 \div 6$, $1 \div 4$, etc.
> 2° Somme de fractions unitaires: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.
> 3° Notation multiplicative: $4 \times \frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{6} \times 4$.
> 4° Notation sous forme de fraction unique: $\frac{4}{6}$ (fraction ordinaire).
>
> On remarquera enfin que le sens donné à $\frac{1}{4}$, par exemple $1 \div 4$, demeure parfaitement valide dans le cas $\frac{5}{4}$ qui peut très bien signifier $5 \div 4$, ce qui est la même chose que $5 \times \frac{1}{4}$. Il en est ainsi pour $\frac{2}{3} = 2 - 3$.

Ce qui peut présenter un problème est le sens de la phrase «*une partie qui entre exactement quatre fois dans le tout*». Cet énoncé fait référence à la fraction unitaire soit 1/n. Pour en voir la justesse avec les fractions non-unitaires, il faut comprendre le lien aux opérations. Par exemple, pour la fraction 2/3, on ne peut pas dire deux parties qui entrent exactement trois fois dans le tout. Toutefois, on peut prendre la fraction unitaire de 2/3 qui est 1/3. Ce 1/3 est une partie qui entre exactement trois fois dans le tout et il apparaît deux fois dans mon unité. Nous touchons ici directement aux opérations.

Malgré ces pistes, l'enseignant risque d'avoir du mal à saisir le sens des expressions utilisées dans cet encadré. Cet exemple montre très explicitement que malgré un guide méthodologique centré sur les apprentissages réels des élèves et sur l'action pédagogique des maîtres, l'enseignant qui a une méconnaissance de la notion de fraction ne peut relever toutes les subtilités des auteurs. Il peut lire les recommandations sans les comprendre vraiment, donc sans donner toute la valeur au guide et par conséquent à son enseignement.

Toutefois, dans l'ensemble de cette première partie, on voit que l'enseignant est appuyé dans sa démarche. Les deux premières étapes de la formation de concepts sont bien senties puisque l'apport d'expériences vient autant des situations que des connaissances connues des élèves. L'exploration et le questionnement sont bien orientés sur la compréhension de la situation et intuitivement sur la fraction par l'aspect opératoire et par l'aspect perceptif.

Les deux premières étapes de la formation de concepts permettent l'exploration de la fraction. Pour le guide FLG, cette exploration n'est pas suffisamment centrée sur les besoins des enseignants. Les liens entre les préalables et la fraction risquent de ne jamais être soulignés. Le guide Défi se préoccupe davantage d'informer les enseignants tout en étant soucieux de présenter une situation qui donne du sens au concept. Suite à ces étapes, l'importance est mise sur la représentation mentale de la fraction. L'enseignant doit inciter les élèves à observer, à se questionner, à exploiter la notion. C'est le rôle des deux étapes suivantes.

2. Troisième et quatrième étapes: images ou représentations mentales, concepts intuitifs ou début d'abstraction

À ces étapes, l'enseignant facilite l'exploitation de la fraction par les élèves en présentant une variété de situations ou d'exemples. Le questionnement qui accompagne cette exploitation a pour but d'en simplifier son abstraction. Toutefois, le concret demeure comme soutien.

2.1 Guide méthodologique FLG

Ces deux étapes commencent tôt dans le guide FLG. Dès la présentation des premiers exemples, les modèles sont variés mais demeurent au niveau semi-concret, c'est-à-dire qu'ils sont reliés aux dessins et non à la manipulation. Ces dessins sont représentatifs des apprentissages visés puisqu'ils questionnent directement les élèves sur le partage et sur les parties congrues.

Selon nous, la difficulté majeure au niveau de ces étapes, vient du fait que le guide méthodologique n'apporte pas ou peu d'indices pour donner de la valeur à ces exercices. On prend pour acquis que l'enseignant fera les liens, qu'il demandera aux élèves de représenter les différents exemples du manuel et qu'il les encouragera à manipuler et à se questionner.

Cependant, à quelques reprises, pour des problèmes tirés de situations connues des élèves, il est mentionné dans le guide que ces derniers peuvent utiliser la représentation concrète pour trouver leurs résultats. Malgré cela, les liens entre ces différentes situations ou problèmes ne sont pas évidents. Cette absence de liens nous laisse croire que l'on semble privilégier davantage les connaissances que les habiletés.

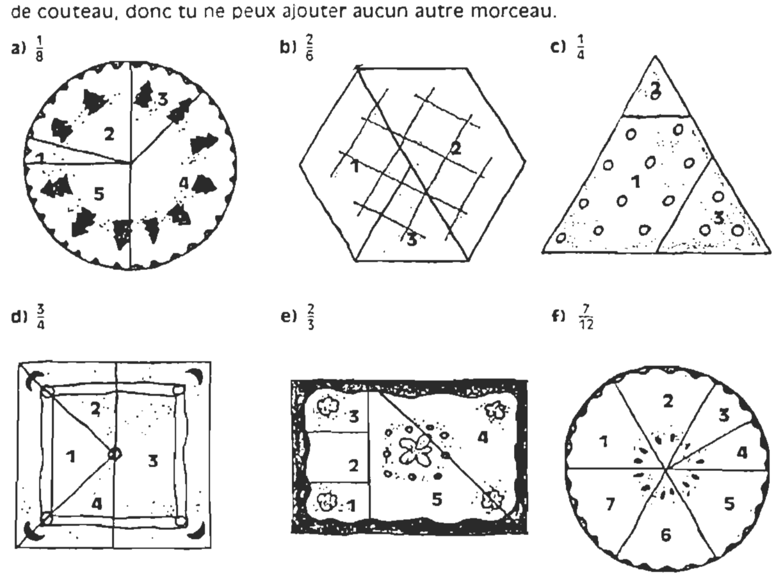
Au cours de ces deux étapes , les exercices et les problèmes pourraient amener les élèves à se représenter la fraction mentalement. Le problème réside dans le fait que les indications pour l'enseignant ne sont pas assez précises et que les premières étapes ont été négligées. Ainsi, les préalables, soit la multiplication et l'unité de référence, ne sont pas explicites et l'exploration, ayant été insuffisante, ne permet pas une compréhension réelle de la notion.

2.2 Guide méthodologique Défi

Dans le guide Défi, le début d'abstraction de la notion se fait en passant tour à tour du concret au symbolique puis du symbolique au concret. À plusieurs reprises, on exploite un *«va et vient»* entre le concret et le symbolique et entre le symbolique et le concret. Ce «va et vient», c'est selon Baruk (1973) l'expression, la verbalisation. L'enseignant laisse les élèves raconter, dire, nommer, expliquer. Cet aller-retour s'avère très formateur puisqu'il permet des réajustements immédiats dans la perception de la notion. L'insistance est cependant axée sur le concret plus que sur le symbolique. On y reconnaît une énergie dynamique qui est centrée sur la capacité d'apprendre des enfants.

L'action et le questionnement des élèves sont davantage sollicités à ces étapes puisque c'est la représentation mentale qui est visée. Les questions ne sont plus du même ordre. La situation de départ est mise en veille pour exploiter des modèles plus variés et plus complexes où le fractionnement n'est pas stéréotypé. Les exemples ci-dessous en sont la preuve:

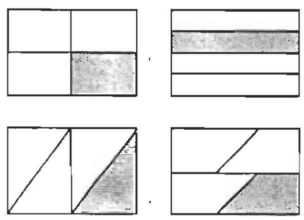
Pour chacun des desserts suivants, des morceaux sont déjà coupés. Lequel ou lesquels des morceaux numérotés dois-tu choisir pour obtenir la fraction indiquée? Tu n'as pas de couteau, donc tu ne peux ajouter aucun autre morceau.



En utilisant ces exemples, les élèves mettent en fonction des gestes mentaux qui assurent l'intégration de la notion. Ainsi, ils s'approprient le sens de la fraction et sont conscients des opérations qui agissent sur les objets. C'est donc, dans le sens où le veut Piaget (1964), un cheminement qui conduit éventuellement à l'abstraction du concept.

Tout au long de ce cheminement, le premier rôle est laissé à l'enseignant et à ses interventions puis à l'élève et à ses réflexions, tout en fournissant un soutien. Ce qui suit est un exemple de ce soutien qui est donné à l'enseignant dans le guide:

— Peux-tu découvrir plusieurs façons différentes de tailler la pizza pour avoir
a) 4 morceaux identiques?



, etc.

Notes: 1. Après une recherche personnelle, les écoliers présentent une solution au tableau. Ils en discutent entre eux: «Si le client reçoit ce morceau, EST-IL SATISFAIT?»

Ainsi, dans l'exemple suivant: 

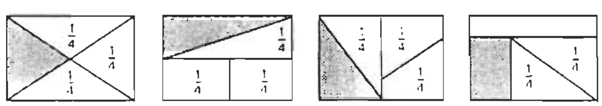
le client pourrait bien réclamer la part placée à droite. Exigez des mesures précises. Assurez-vous que les écoliers ne jettent pas des morceaux restants.

2. Au tableau, écrivez $\frac{1}{4}$ sur chacune des parties.

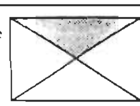
3. N'hésitez pas à suggérer vous-même des exemples qui vous semblent intéressants si les écoliers ne les mentionnent pas eux-mêmes.

b) 4 morceaux équivalents mais pas tous identiques? En découpant ou en procédant autrement, prouve que tous les morceaux sont équivalents.

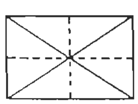
Par exemple,



Suggérez les exemples intéressants si les écoliers n'y pensent pas eux-mêmes.

Note: Le découpage  est particulièrement propice à la discussion.

L'équivalence des quatre morceaux peut se démontrer par découpage, soit



Ce soutien est important puisqu'on interpelle directement l'enseignant en lui offrant la possibilité de manipuler lui-même et de réfléchir sur le sens de la fraction. De plus, on lui propose d'ajouter ses propres exemples, ce qui lui permet d'approfondir sa compréhension du concept pour ainsi mieux guider les élèves.

Déjà, ceux-ci ont à résoudre des problèmes qui les amènent à faire des oérations sur les fractions. Or, on pourrait croire qu'il est beaucoup trop tôt pour résoudre de tels problèmes.

Ce qui surprend, c'est que le rôle de l'enseignant n'est pas de montrer ces opérations mais d'encourager la recherche de solutions et de rendre explicites les actions posées en questionnant sur la démarche utilisée. Les opérations vont alors de soi. Lorsque l'élève doit prendre 1/6 et 1/6 et encore 1/6, la phrase mathématique peut être représentée simplement en mathématisant la situation: 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3 x 1/6 = 3/6.

Au cours de ces étapes, l'action est orientée vers les habiletés et non seulement vers les connaissances. Les exemples et les problèmes entraînent une progression de l'intuitif et des connaissances antérieures vers le raisonnement et de nouveaux apprentissages et ce, d'une façon tout à fait naturelle pour les élèves. Tout au long de ce cheminement, l'enseignant est accompagné de façon à tirer le maximun de ce qui est proposé au guide méthodologique.

Les troisième et quatrième étapes de la formation de concepts présentent aux élèves la possibilité de se faire une image mentale de la fraction. Pour FLG, le semi-concret est très présent mais puisque rien n'est prévu pour guider l'enseignant dans cette démarche, il est facile d'affirmer que les élèves n'exploiteront pas adéquatement ces illustrations. On ne sent ni l'action des élèves ni leur questionnement.

Pour Défi, c'est beaucoup plus de l'exploitation que de l'exploration. Le questionnement est davantage centré sur la compréhension de la fraction comme concept. On perçoit davantage l'importance du soutien qui est accordé à l'enseignant. Après ces étapes qui constituent en fait un passage permettant au concret de devenir symbolique, nous allons vers la généralisation de la fraction.

3. Cinquième et sixième étapes: concepts verbalisés ou abstraction, concepts généralisés ou généralisation

Selon les objectifs du MEQ (1980), il n'y a pas d'apprentissage formel au primaire pour le notion de fraction. Le symbolisme ne viendra que plus tard au deuxième cycle. Toutefois, les pistes proposées peuvent s'orienter vers l'abstraction en revenant ponctuellement au concret. On peut énoncer des règles, émettre des hypothèses mais la manipulation ou les illustrations peuvent continuellement soutenir les élèves. C'est un processus circulaire qui permet la généralisation du concept, même si celle-ci ne sera complétée que beaucoup plus tard.

3.1 Le guide méthodologique FLG

Au guide, il n'est pas explicitement spécifié que c'est l'étape de la généralisation. Les règles s'énoncent mais elles ne sont pas appuyées par des exemples concrets. Ces règles découlent davantage de la mémorisation que de l'observation des exemples et de l'induction. Rien au guide n'informe l'enseignant sur l'importance de soumettre une variété d'exemples aux élèves en leur faisant observer les résultats. Rien aussi sur le fait que les règles doivent découler du résultat des observations.

Les activités se centrent davantage sur les jeux, les automatismes et l'écriture de la fraction. Elles n'ont pas de véritable lien entre elles-mêmes même si elles sont nombreuses et variées. La généralisation ne peut que s'amorcer difficilement à cause de l'absence d'unification mais aussi à cause du manque d'exploitation depuis la première étape de la formation de concepts.

Ces étapes, à l'image des autres, ne jouent pas leur rôle. Elles n'appuient pas les élèves dans leur apprentissage. Elles ne soutiennent pas plus l'enseignant dans sa tâche. Donc, l'enseignant et les élèves vont parcourir le guide et le manuel en croyant enseigner ou apprendre ce qu'est la fraction. Les deux risquent d'éprouver de grandes difficultés.

3.2 Le guide méthodologique Défi

Même si on peut, pour cette notion, passer outre à l'abstraction, on permet aux élèves qui le peuvent, de symboliser leurs apprentissages. Cette symbolisation arrive assez spontanément puisqu'elle découle des situations et de leur exploitation.

Par exemple, l'écriture et la lecture de la fraction découlent de l'action, c'est-à-dire des gestes qui permettent de solutionner les problèmes. Ces problèmes créent un besoin chez les élèves et l'enseignant n'a qu'à exploiter ce besoin. Des pistes sont d'ailleurs fournies dans ce sens.

C'est aussi ce besoin qui permet de chercher des équivalences, d'ordonner et d'opérer. La variété des exemples et des situations assure une bonne observation, qui à son tour assure la formulation de règles. Cette fois, ces règles sont appuyées sur la connaissance. Pour la majorité des problèmes, des pistes sécurisent l'enseignant et le guident vers les points importants de la démarche, points qui mènent à la généralisation.

Au guide, le terme généralisation apparaît explicitement vers la fin des apprentissages. Des exemples variés y sont présentés, exemples soumis aux élèves par l'entremise du manuel. On précise que l'enseignant doit unifier la séquence de problèmes aux étapes vues précédemment. Le guide offre des pistes d'exploitation qui permettent l'unification tout en précisant que la généralisation se fait de la *«représentation symbolique à d'autres représentations concrètes ou imagées».* Puisque cette étape va se poursuivre au secondaire et que les règles n'ont pas à s'énoncer explicitement et formellement pour tous, c'est une spécification très importante.

Lors de ces dernières étapes de la formation de concepts, l'enseignant se sent appuyé et malgré ses propres difficultés, il peut intervenir adéquatement puisqu'il fait les liens en prenant connaissance des pistes données par le guide. Il sait que c'est avec naturel, par l'évidence de la démarche que les élèves feront la majeure partie des apprentissages.

Les guides méthodologiques représentent un outil important dans l'enseignement des concepts en général et de la fraction en particulier. Puisque, dans une large mesure, les enseignants ne maîtrisent pas cette notion et qu'ils éprouvent des difficultés au niveau de son enseignement, on peut supposer qu'ils ont de grandes attentes face à leur guide. De là notre interrogation à savoir si ces guides soutiennent l'enseignant dans sa démarche. Pour trouver réponse à cette question, nous avons analysé le guide FLG et le guide Défi, deux guides méthodologiques fréquemment utilisés par les enseignants du primaire.

D'abord, les résultats nous sont apparus très différents selon le guide analysé. Pour le guide FLG, ce qui attire davantage notre attention, c'est le peu de soutien que l'on accorde à l'enseignant. Il est évident que l'on considère que celui-ci maîtrise déjà le contenu et les stratégies d'enseignement. On suppose alors qu'il pourra exploiter la démarche pédagogique sans qu'il soit nécessaire de fournir des pistes sur les stratégies à prendre. Par exemple, on n'indique pas quels sont les préalables, on n'insiste pas sur l'importance de laisser le temps nécessaire à la manipulation et au questionnement pendant les premières étapes de la formation de concepts. Les activités sont conçues pour l'enseignant qui maîtrise le concept et sa didactique et qui peut enrichir l'exploitation des activités présentées. Malgré cela, il nous semble que l'on passe trop rapidement à la symbolisation. Pour ce guide, l'enseignant qui a une méconnaissance de la notion de fraction, ne peut y trouver des éléments facilitants. Les difficultés demeurent tant au niveau du contenu que des stratégies.

Pour le guide méthodologique Défi, le premier souci de ces auteurs est d'assister l'enseignant dans sa tâche d'enseignement. Les interventions fréquentes se présentent sous forme d'exemples, de tableaux, de situations ou de questionnements. Ce soutien s'adresse autant à ceux qui éprouvent des difficultés avec la notion qu'à ceux qui la maîtrisent. De plus, dès le départ de l'unité d'apprentissage, on sent la cohérence de l'activité. Et cette cohérence, elle est sentie bien avant cette unité. On la sent déjà au niveau des unités d'apprentissage sur les opérations puisque le lien à la fraction y est fait implicitement. Ces préalables et toutes les étapes de la formation de concepts sont orientés vers l'action des élèves. Et cette action est spécifiquement centrée sur les habiletés tout au long de cette lente progression des étapes ce qui assure l'amorce d'une généralisation de la notion de fraction.

Suite à cette analyse, nous croyons que les guides méthodologiques utilisés par les enseignants ne sont pas tous adéquats au niveau du soutien qu'ils peuvent apporter à l'enseignant. Celui-ci devrait pouvoir en consulter plus d'un pour une même notion. Ainsi, il pourrait bénéficier du support des uns en plus de s'enrichir des idées des autres. Par exemple, l'enseignant qui utilise le guide FLG pour son enseignement et qui consulte le guide Défi, pourra y repérer les liens qu'il n'a pas faits jusque là. Grâce à cela, il enrichira la situation d'apprentissage de son guide et en fera une bonne exploitation. De même, pour celui qui utilise le guide Défi, le fait de consulter le guide FLG lui apportera d'autres idées, d'autres exemples et ainsi, il enrichira encore davantage sa leçon sur la fraction.

CONCLUSION

Les enseignants, en général et ceux du primaire en particulier, ressentent beaucoup de fierté au niveau de leur action pédagogique. Ils croient à l'apprentissage et sont consciencieux face au développement, chez les élèves, de connaissances, d'habiletés et d'attitudes. Cependant, les mathématiques représentent une discipline pour laquelle ils éprouvent, dans une large mesure, des difficultés d'ordre conceptuel et d'ordre didactique. Les causes de ces difficultés ne sont pas toujours explicitement formulées. Le malaise est ressenti sans que l'on puisse dire vraiment ce qui en est.

Des auteurs que nous avons consultés nous ont appris que ce malaise découlait, entre autres, d'une méconnaissance des concepts mathématiques par une majorité d'enseignants. Dans bien des cas, ces derniers ont développé une insécurité face à ce contenu, insécurité qui est née des préjugés véhiculés par la société en général et par le monde scolaire en particulier. En effet, ces préjugés laissent croire que les mathématiques sont formelles et que seuls les *«matheux»* ont le pouvoir de les comprendre.

Cette méconnaissance des concepts mathématiques et, pour notre recherche plus particulièrement la méconnaissance de la fraction, entraîne chez les enseignants des difficultés d'ordre didactique. En effet, ils éprouvent de la difficulté à venir en aide aux élèves pour qui il apparaît évident que certains concepts se montrent un obstacle majeur à l'apprentissage des mathématiques.

Attentifs aux besoins de ces élèves, les enseignants se sont perfectionnés mais ce perfectionnement n'a eu, dans bien des cas, que peu d'impact sur leur geste pédagogique. Ils éprouvent toujours les mêmes malaises à enseigner ce qu'ils ne comprennent toujours pas. Pourtant conscients de l'importance de la formation de concepts dans l'élaboration de leurs démarches pédagogiques, ils n'arrivent pas, pour la plupart, à utiliser des stratégies qui développent les habiletés. Ils ne sont centrés, dans une large mesure, que sur les connaissances et celles-ci sont enseignées beaucoup plus par automatismes que par compréhension réelle.

Les enseignants se sont alors tournés vers des outils qu'ils croient pouvoir leur être utiles. Les guides méthodologiques font partie de ces outils puisque leur utilisation est fortement encouragée par le milieu scolaire. Nous nous sommes interrogés sur eux. Nous savons qu'ils respectent les étapes de la formation de concepts puisqu'ils doivent être approuvés par le M.E.Q. avant d'être utilisés par les enseignants et que le M.E.Q. privilégie, dans son programme, ces étapes.

Nous avons donc vérifié, pour deux d'entre eux, leur capacité à aider l'enseignant dans sa tâche. L'aider non seulement par des indications, des pistes de cheminement ou des propositions d'activités, bien que cela soit davantage leur rôle, mais une aide centrée aussi sur ses besoins. Et ses besoins, dans la réalité pédagogique actuelle, sont reliés, bien des cas, à un malaise qui n'est pas toujours explicitement identifié. Des lacunes aux niveaux conceptuel et didactique entravent l'action de l'enseignant qui n'est pas toujours conscient de ses propres difficultés.

Nous avons donc analysé la capacité de ces guides à sensibiliser l'enseignant à ses difficultés conceptuelles afin d'améliorer la didactique. Nous croyons que dans le présent contexte, ils devraient lui permettre d'identifier ce manque de maîtrise du concept et lui donner des moyens d'y remédier même si ce mandat dépasse son rôle initial. En effet, l'auteur d'un guide méthodologique s'attend, dans la majorité des cas, à ce que l'utilisateur maîtrise en grande partie les concepts pour lesquels il crée des situations pédagogiques.

Avant tout, nous avons défini les étapes de la formation de concepts et après y avoir intégré les éléments essentiels à la compréhension de la fraction, nous avons analysé le contenu des deux guides. Notre analyse s'est intéressée à la présence de ces étapes ainsi qu'à leur déroulement. Nous voulions voir si les guides font ressortir le processus dynamique qui y est impliqué. De plus, nous nous sommes centrés sur le support accompagnant la situation pédagogique. D'abord, au niveau des pistes qui permettent de faire des liens entre les différents éléments du concept afin d'en faciliter la compréhension. Et ensuite, au niveau de la séquence même de l'activité afin de structurer la démarche en vue d'une progression de l'enseignement du concept visé.

La conclusion de cette analyse nous fait voir que l'utilisation d'un seul guide méthodologique peut avoir un effet réducteur sur l'enseignement de la fraction. Si le guide utilisé ne donne pas suffisamment de soutien, le malaise persiste et la méconnaissance se perpétue. C'est le cas, en particulier, pour le guide méthodologique

FLG. Il offre peu de notes explicatives pour l'enseignant et il ne centre pas davantage l'attention de ce dernier sur des points majeurs de compréhension. La démarche utilisée se veut, dans bien des cas, exclusivement narrative c'est-à-dire que l'on peut y lire des suggestions d'activités sans toutefois en faire ressortir la dynamique. L'enseignant qui consulte ce guide doit d'abord maîtriser le concept de fraction sinon, il risque de donner la priorité aux trucs et aux automatismes.

Si le guide appuie l'enseignant dans son cheminement et qu'il lui permet de combler ses lacunes, l'enseignement assure le développement de connaissances et d'habiletés. Le guide méthodologique Défi est orienté dans ce sens. La présentation des démarches pédagogiques est enrichie de notes, de questions, de tableaux qui, tous, mettent en évidence la compréhension réelle du concept. Ainsi, l'enseignant qui éprouve des difficultés conceptuelles, peut remédier à ces malaises et alors présenter une didactique adéquate.

Cependant, nous croyons que, même dans ce dernier cas, l'utilisation de plus d'un guide enrichit la banque d'exemples et de situations destinés aux élèves. L'enseignant qui sait diversifier ses recherches au niveau de la didactique reliée à son enseignement, maximise ses chances de trouver des pistes et des activités avec lesquelles il se rapprochera d'une pratique adaptée à lui. En prenant ce qui lui convient tantôt chez l'un, tantôt chez l'autre, il progressera en améliorant, à la fois la didactique et le conceptuel.

Malgré la conclusion de cette recherche, nous nous interrogeons toujours. Les enseignants qui utilisent déjà un guide, voient-ils la nécessité d'en consulter un autre? En plus des guides, en excluant ce qu'ils ont déjà essayé soit le perfectionnement et les lectures, existe-t-il d'autres outils qui pourraient sensibiliser les enseignants à leur méconnaissance et surtout y pallier? La formation des enseignants incite-elle à la consultation de différentes sources? Et ces sources, sont-elles suffisamment publicisées par les milieux d'éducation pour qu'elles soient connues? Et le milieu scolaire est-il suffisamment préoccupé par la formation des enseignants pour encourager la mise en place de moyens adéquats?

Références

Bardier, J.-C. Mathématique au primaire FLG 4, manuel de l'élève, Éditions HRW, Montréal, 1988.

Bardier, J.-C. Mathématique au primaire FLG 4, manuel de l'enseignant(e), Éditions HRW. Montréal, 1988.

Barth, B.H. Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. Communication et langage. Éditions Retz, 1985, no 66, p. 46-58.

Baruk, S. Échec et maths. Éditions Du Seuil, Paris, 1973.

Baruk, S. L'âge du capitaine. Éditions Du Seuil, Paris, 1985.

Baruk, S. Dictionnaire de mathémathiques élémentaires. Éditions Du Seuil, Paris, 1992.

Bassis, O. Mathématique: les enfants prennent le pouvoir. Éditions Fernand Nathan, 1984.

Behr, M. J.; Lesh, R.; Post, T.R.; Silver, E.A. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Dans Lesh & Landau, (EDS), Rational-Number Concepts. New York, Academic Press, p. 92-144, 1983.

Behr, M.; Wachsmuth, I.; Post, T.; Lesh, R. Order and Equivalence of Rational Numbers: a Clinical Teaching Experiment. Journal of Research in Mathematics Education, 1984. 15(2), 323-341.

Bideaud, J.; Meljac, C; Fisher, J.P. Les chemins du nombre. Éditions Presses Universitaires de Lille, 1991.

Brousseau, G. Les différents rôles du maître. Bulletin AMQ, mai 1988, p. 15-24.

Bruner, J.S. The Process of Education. The Harvard University Press, Mass., 1965.

Bruter, C. P. Sur la nature des mathématiques. Collection Discours de la méthode. Éditions Gauthier-Villars, 1973, p. 1-9.

Caron, J.; Lepage, E. Vers un apprentissage authentique de la mathématique. Éditions NHP, Collection «Outils pour une pédagogie», Cahier no 10, 1985.

Caveing, M. Le matin des Mathématiciens. Entretiens sur l'histoire des mathématiques. présentés par Émile Noël, Collection Regards sur la science, Éditions Belin, Paris, vol. 1, p. 7-40, 1985.

Cazenave, B. Incidences du retard de langage sur le calcul. Revue de Neuropsychiatrie infantile, 18, vol. 6, nos 1-2, 1970.

Champagne, G.; Bardier, J-C. Mathématique au primaire. Les Éditions HRW, Montréal, 3ième édition, 1986.

Conseil supérieur de l'éducation du Québec. Comment évoluent les mathématiques au primaire? Conseil-Éducation, vol. 10, no 1, p. 1-4, janvier 1986.

Cormier, R.A.; Lessard, C.; Valois, P.; Toupin, L. Les enseignantes et enseignants du Québec. La formation et le perfectionnement. Gouvernement du Québec, Service de la recherche, vol. 6, 1980.

Desjardins, M.; Hétu, J.-C. L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions. Éditions Les Presses de l'Université du Québec, Montréal, 1974.

Desrosiers-Sabbath, R. Comment enseigner les concepts. Éditions Les Presses de l'Université du Québec, Montréal, 1984.

Diènes, Z.P. Les six étapes du processus d'apprentissage. 2e édition, Éditions OCDL, Paris,1970.

Dionne, Jean-J. Vers le renouvellement de la formation et du perfectionnement des maîtres du primaire: Le problème de la didactique des mathématiques. Publication de l'Université de Montréal, Faculté des sciences de l'Éducation, 1988.

Ermel, INRP. Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. C.M. tome 2, ÉditionsSermap-Hatier, p. 23-31, 1982.

Freudenthal, H. Mathematics as an Educational Task. Reidel Press, Dordrecht., 1973.

Freudenthal, H. Teacher Training: An Experimental Philosophy. Paper presented at the Conference on the Problems of Teachers of Mathematics, Pécs Press, Hungary, 1977.

Freudenthal, H. Erreurs du professeur. Analvse didactique de soi-même. C.I.E.A.E.M. 39, 1987.

Gagné, R. M. Les principes fondamentaux de l'apprentissage. Traduit par R. Paquin et R. Brien, Éditions HRW, 1976.

Gauthier, R. Apprentissage de la pensée mathémathique. Guide méthologique, Éditions Lidec, 1981.

Goutard, M. Les mathématiques et les enfants. Éditions Delachaux et Niestlé, Neuchatel, Gouvernement du Québec. Programme d'études, primaire, mathématique. 1980.

Gouvernement du Québec. Guide pédagogique, primaire, fascicule E. Les fractions. 1980.

Gouvernement du Québec. Guide pédagogique, primaire, mathématique, fascicule A. Guide général. 1981.

Graeber, A.O.; Baker, K. Little into Big is the Way it Always is. Arithmetic Teacher, April 1992.

Hasemann, Klaus. Analysis of Fraction Errors by a Model of Cognitive Science. European Journal of Psychology of Education, vol. 1, no 2, p. 57-66, 1986.

Hercovics, N.; Bergeron, J.C. Pourquoi et comment décrire la compréhension de la mathématique. Bulletin AMQ, p. 9-17, 1982.

Huard, C. Entre les lignes. Vie pédagogique 69, novembre-décembre 1990.

Jaulin-Mannoni, F. Le pourquoi en mathématique. Éditions ESF, Paris, 1975

Jonnaert, P. Conflits de savoirs et didactique. Éditions UNIVERSITAIRES, Paris, 1988.

Kayler, H. L'AMQ en action. Conférence d'ouverture du 30e congrès. Bulletin AMQ, mars, 1988, p. 21-23.

Kieran, C. Une approche aidante pour faire la transition avec l'algèbre. Bulletin AMQ, mai 1991, p. 25-28.

Kieren, T.E. On Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In Lesh, R. (Ed.). Number and Measurement; Paper from a research Workshop. Columbus: Eric/SMEAC, 1976.

Lacasse, R.; Gattuso, L. Quelques aspects de l'enseignement des mathématiques. Le vécu des mathophobes. Bulletin AMQ, mars 1988, p. 9-13.

Lamontagne, D. Mathématique et société: réflexions et critique. Bulletin AMQ, décembre 1989, p. 5-10.

Lefebvre, J. Aspects sociaux des mathémathiques et de l'enseignement des mathématiques: une perspective générale. Bulletin AMQ, décembre 1989, p. 11-12.

Lemoyne, G. La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Repère no 12, 1989.

Lepage, E. La formation des concepts mathématiques, de la théorie à la pratique.Monographie no 21. Département des sciences de l'Éducation, UQAR, Éditions GREME, 1984.

Lepage, E. Dans Caron, J. et Lepage, E. Vers un apprentissage authentique de la mathématique. Les Éditions NHP, Collection «Outils pour une pédagogie», Cahier no 10, Victoriaville, 1985.

Lyons, M., Lyons, R. Défi mathématique 4. Guide d'enseignement et d'activités, Éditions Études vivantes, Montréal, 1987.

Lyons, M., Lyons, R. Défi mathématique 4. Manuel de l'élève, Éditions Études vivantes, Montréal, 1987.

Meserve, B. E.; Meserve, D.T. La formation des enseignants et l'enseignement de la géométrie. Dans Morriss, R. Étude sur l'enseignement des mathématiques: l'enseignement de la géométrie. Éditions Unesco, 1987, p. 171-184.

Montangero, J. Apports et limites des conceptions de Piaget en vue de l'étude des concepts. Publication de l'Université de Rouen, 1983, p. 23-33.

Nantais, N. Entrevue avec Nicole Nantais. Par J. M. Labrie. Bulletin AMQ, mai 1991, p. 33-34.

Owens, D.T. Research Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

Piaget, J. Psychologie et pédagogie. Éditions Denoël, Paris,, 1969.

Piaget, J. La pensée du jeune enfant, in Six études de Psychologie. Editions Gonthier, 1964.

Picard, C. Différences entre les performances concernant la notion de fractions et le nombre naturel. Étude exploratoire inédite. Université de Sherbrooke, 1983.

Picard, C. Élaboration et évaluation d'un matériel didactique portant sur la notion de fraction en cinquième année du primaire. Revue des sciences de l'éducation, vol. XVIII, no 1, 1992, p. 29-41.

Polya, G. La découverte des mathématiques. Traduit par Didier M.; Praderie M. Tome 2, Éditions Dunod, Paris, 1967.

Pothier, Y., Sawada, D. Some Geometrical Aspects of Early Fraction Experiences. Recherches en didactique des Mathématiques, vol. 5, no 2, p. 215-226, 1984.

Pothier, Y., Sawada, D. Partitioning, an Approach to Fractions. Arithmetic Teacher, 1990, p. 12-16.

Reboul, Olivier. Qu'est-ce qu'apprendre ? Éditions Presses universitaires de France, 2e édition, Paris, 1980.

Research into Practice. The Problem of Fractions in the Elementary School. Prepared by Leslie P. Steffe and John Olive. Edited by Michael T. Battista. Arithmetic Teacher, p. 22-24.

Research into Practice. Conctructivist Learning and Teaching. Prepared by Constance Kamil and Barbara A. Lewis. Edited by Douglas H. Clements. Arithmetic Teacher, p. 24-25.

Rieunaud, J. L'approche du nombre par le jeune enfant. Éditions PUF, Paris, 1989.

Robillard, Richard. Comment faire de l'évaluation un processus de respect et de croissance. 10e session d'étude de l'ADME, octobre 1987.

Smith, F. La compréhension et l'apprentissage. Les Éditions HRW, Montréal, 1979.

Smyth, M. Mathematics Around the World. Arithmetic Teacher, 30 (8), p. 18-20

Streefland, L. Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developemental Research. Kluwer Academic Publishers, 1991.

Taurisson, A. Les gestes de la réussite en mathématique à l'élémentaire. Éditions Agence d'Arc, Montréal, 1988.

Thompson, A. The Relationship of Teachers'conception of Mathematics teaching to Instructional practice. Educational Studies in Mathematics, 15, p. 105-127, 1984.

Wood, T.; Cobb, P. & Yackel, E. The Contextual Nature of Teaching: Mathematics and Reading Instruction in One Second-Grade Classroom. The Elementary School Journal, vol. 90, no. 5, 1990, p. 497-510.

Wood, T.; Cobb, P. & Yackel, E. Change in Teaching Mathematics: A Case Study. American Educational Research Journal, Fall 1991, vol. 28, no. 3. p. 587-616.