UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
FADLI JAMAL

LES GUIDES D'ONDES ET CAVITÉS RÉSONNANTES ELLIPTIQUES

SEPTEMBRE 1995

RÉSUMÉ

La propagation des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes elliptiques suivant les 36 premiers modes est étudiée dans ce mémoire de façon systématique et cohérente. Les fréquences de coupure exactes des modes de propagation sont calculées numériquement. Des expressions simples sont également développées pour le calcul rapide de ces fréquences en fonction de l'excentricité avec une erreur relative maximale inférieure à 0,13%. La succession exacte des différents modes de propagation rend possible la comparaison de la largeur de bande du guide d'ondes elliptique avec celle des guides rectangulaire et circulaire. La configuration des lignes de champ du mode elliptique TE_{c01} présentée dans la littérature est corrigée.

La méthode de perturbation au premier ordre est ulilisée dans le calcul des pertes dans le guide et la cavité elliptiques pour obtenir le coefficient d'atténuation et le facteur de qualité des modes TE et TM.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES SYMBOLES

$2a$	Axe majeur de la section transversale du guide d'ondes elliptique
a_m	Valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu paires, Ce_m
$\mathbf{B}$	Vecteur densité de flux magnétique
$2b$	Axe mineur de la section transversale du guide d'ondes elliptique
b_m	Valeurs caractéristiques des fonctions de Mathieu impaires, Se_m
Ce_m	Fonction de Mathieu modifiée paire d'ordre m
ce_m	Fonction de Mathieu paire d'ordre m
$\mathbf{D}$	Vecteur densité de flux électrique
d	Longueur de la cavité elliptique
dS	Élément de surface
dV	Élément de volume
$\mathbf{E}$	Vecteur champ électrique
e	Excentricité du guide d'ondes elliptique
f	Fréquence d'opération
f_{mn}^c	Fréquence de coupure du guide d'ondes
f_{mnl}^c	Fréquence de résonnance de la cavité

H	Vecteur champ magnétique
J	Vecteur densité de courant électrique
J_m	Fonction de Bessel d'ordre m
k	Constante de propagation
N_m	Fonction de Neumann d'ordre m
P_t	Puissance transmise
P_c	Puissance dissipée dans la paroi métallique
P_d	Puissance dissipée dans le diélectrique
Q	Facteur de qualité de la cavité résonnante
q_{mn}	Le $n^{ième}$ zéro de la fonction de Mathieu modifiée d'ordre m, Ce_m ou Se_m
q'_{mn}	Le $n^{ième}$ zéro de la dérivée de la fonction de Mathieu modifiée d'ordre m, Ce_m ou Se_m
R_s	Résistance surfacique
S	Vecteur de Poynting
U_e	Énergie électrique par unité de volume
U_m	Énergie magnétique par unité de volume
u_{mn}	Le $n^{ième}$ zéro de la fonction de Bessel J_m
u'_{mn}	Le $n^{ième}$ zéro de la dérivée de la fonction de Bessel J_m
v_p	Vitesse de phase
v_g	Vitesse de groupe

Z_s	Impédance surfacique intrinsèque
2ρ	Distance entre les foyers de la section elliptique du guide d'ondes
δ_c	Distance de pénétration dans la paroi métallique
β	Facteur de phase
λ	Longueur d'onde
λ^c_{mn}	Longueur d'onde de coupure dans le guide d'ondes
α_c	Coefficient d'atténuation due à la paroi métallique
α_d	Coefficient d'atténuation due au diélectrique
ε	Permitivité du diélectrique
μ	Perméabilité du diélectrique
σ_c	Conductivité de la paroi métallique
σ_d	Conductivité du diélectrique
ξ	Coordonnée elliptique radiale
η	Coordonnée elliptique angulaire
∇	Gradient
∇^2	Laplacien

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de recherche, M. Elie Boridy, directeur du département de physique de l'UQAM, qui m'a initié au sujet et qui m'a accordé, tout au long de ma scolarité de maîtrise, une très grande disponibilité, un excellent support et une grande patience.

Je suis particulièrement reconnaissant à mes parents et à mon frère Abdellah qui, depuis des annés, n'ont pas hésité à m'appuyer financièrement et à m'encourager pour atteindre mes objectifs, à mon amie Johanne Landry pour son support moral et sa présence généreuse, ainsi qu'à tous les professeurs qui ont contribué à ma formation.

INTRODUCTION

La plupart des applications des guides d'ondes ont été mises au point durant la dernière guerre mondiale en vue de leur utilisation dans les radars (production, transmission et réception des ondes centimétriques ou micro-ondes).

Depuis lors, la technique des guides d'ondes a reçu de nombreuses applications extrêmement importantes dans la spectroscopie microhertzienne†. Celle-ci permet d'explorer la structure des atomes et des molécules (effet Lamb-Rutherford, inversion de l'ammoniac) et de déterminer les propriétés statiques des noyaux atomiques telles que le spin. La même technique est à la base des accélérateurs linéaires produisant des particules chargées de très grande vitesse. L'utilisation de cette technique ne cesse de s'étendre, en particulier dans le domaine du rayonnement radioélectrique (antennes à fentes par exemple), dans l'étude de la propagation des ondes (structure de l'atmosphère) et dans les réseaux de télécommunication.

Les guides d'ondes jouissent de propriétés intéressantes qui les distinguent des autres systèmes de transmision micro-onde:

- étant fermés, les guides ne perdent pas d'énergie par rayonnement parasite;
- ils sont capables de transmettre de grandes puissances à haute fréquence;
- les pertes ohmiques sont réduites en raison de l'absence de conducteur central, comme c'est le cas du câble coaxial par exemple;
- ils sont exempts de pertes diélectriques et produisent par conséquent une

† Voir, par exemple, Argence, E. et Kahan, Th. 1964. *Théorie des guides et cavités électromagnétiques.*

très faible atténuation de la puissance transmise.

Ainsi, à une fréquence de $3\,GHz$, correspondant à une longueur d'onde $\lambda = 10\,cm$, un bon câble coaxial présente une atténuation de l'ordre de $0,5\,dB/m$, qui peut atteindre $0,025\,dB/m$ dans un guide d'ondes, c'est-à-dire 20 fois moindre. L'un des principaux inconvénients des guides d'ondes est qu'ils sont incapables de transmettre des fréquences inférieures à une certaine fréquence, appelée *fréquence de coupure.* Comme la longueur d'onde de coupure correspondante est de l'ordre de grandeur des dimensions transversales du guide, il en résulte que, pour des raisons d'encombrement, les guides d'ondes n'offrent d'intérêt pratique que dans la gamme des ondes centimétriques et millimétriques. Toutefois, cet inconvénient peut parfois être exploité en notant que le guide d'ondes agit comme un filtre passe-haut.

Lorsqu'on utilise un guide d'ondes pour transmettre de la puissance entre un émetteur et un récepteur, il importe pour plusieurs raisons que seul le mode de propagation dominant (i.e., celui dont la fréquence de coupure est la plus basse) soit propagé, et que les autres modes soient évanescents, autrement il est impossible de garantir la même configuration du champ électromagnétique tout le long du guide ainsi qu'à son extrémité réceptrice. Ces modes d'ordres supérieurs s'excitent lorsque le mode dominant rencontre des irrégularités ou des discontinuités géométriques. On est ainsi amené à utiliser dans les guides des méthodes employées dans les lignes de transmission afin d'éliminer les composantes réfléchies du mode dominant.

Il s'ensuit que dans les guides les plus simples et les plus communément utilisés, ceux de formes rectangulaire et circulaire, les dimensions de la section droite doivent être telles que seul le mode dominant se propage. Dans un guide rectangulaire par exemple, les dimensions transversales sont choisies de telle façon que seul le mode TE_{10} ayant le vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ parallèle à la plus petite dimension soit transmis. Dans le guide circulaire, c'est le mode TE_{11} qui est le mode dominant. Il est essentiel que la polarisation (définie comme étant l'orientation de **E**) de l'onde transmise ne change pas le long du guide et, à cet égard, le guide circulaire ne convient pas en pratique. En effet, si la section droite s'écarte de la forme circulaire, l'onde TE_{11} se décompose en deux modes elliptiques TE_{c11} et TE_{s11} de vitesses de propagation différentes qui se combinent pour redonner le mode TE_{11} aux points où le tube reprend sa forme circulaire. Toutefois, le mode TE_{11} ainsi reformé aura une polarisation différente de celle de l'onde initiale. La polarisation n'est donc pas stable vis-à-vis de faibles déformations du guide. C'est pourquoi, les guides circulaires que ne sont employés sous forme de tronçons courts et dans des dispositifs particuliers tels que les joints rotatifs.

En 1938, Chu [1] fut le premier à étudier la transmission des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes de section elliptique et à représenter des résultats numériques pour la fréquence de coupure, l'atténuation des six modes qu'il jugeait les plus fondamentaux ainsi que leurs configurations. Quoique beaucoup de travaux et de manuels de référence se sont basés sur les résultats de Chu, il s'est averé plus tard que ses calculs n'étaient pas exempts d'erreurs importantes. Ces erreurs sont imputables en partie à la complexité de l'étude théorique de la propagation des ondes électromagétiques dans les guides elliptiques qui implique les fonctions de Mathieu, peu aisées à manipuler, ainsi qu'à la faible précision avec laquelle ces fonctions étaient calculées à l'époque.

Effectivement, en 1965, Krank [2] a appliqué pour la première fois une méthode perturbative de premier ordre dans son analyse des guides elliptiques. Mais l'utilisation de séries hyperboliques pour le calcul numérique des fonctions de Mathieu a limité la précision de ses résultats, en particulier pour les modes d'ordres supérieurs, à cause du faible taux de convergence de ces séries. Par ailleurs, il a proposé une nouvelle configuration des lignes de champ pour le mode TM_{c01} différente de celle de Chu, mais qui concorde avec celle du mode TM_{01} du guide circulaire.

Depuis, un intérêt particulier s'est porté sur la justification théorique et expérimentale de cette configuration, et sur la détermination précise des paramètres de propagation dans les guides d'ondes elliptiques. Kretzschmar [3 - 5], par exemple, a étudié plus en détail la propagation des ondes dans ces guides en se basant sur une expansion des fonctions de Mathieu en séries de produits de fonctions de Bessel qui présente un taux de convergence beaucoup plus grand. Il a obtenu des résultats plus précis des longueurs d'onde de coupure des 19 premiers modes de propagation, ce qui lui a permis d'établir une classification plus exacte de ces modes. Son étude sur l'atténuation de certains modes et la justification théorique de la configuration proposée par Krank ont par ailleurs mis en évidence l'inexactitude des résultats de Chu. De plus, il a réussi à paramétriser la longueur d'onde de coupure des 8 premiers modes en fonction de l'excentricité du guide. Cette paramétrisation présente cependant des anomalies aux limites et au milieu de l'intervalle de variation de l'excentricité où l'erreur relative diverge.

L'impédance surfacique a également constitué un sujet de controverse mais intéressant en raison de son importance dans le calcul de la puissance dissipée dans la paroi conductrice du guide. En effet, en 1971, Falciasecca *et al* [6] ont calculé cette impédance et ont suggéré une dépendance vis-à-vis la variable angulaire elliptique pour obtenir des résultats plus précis. Mais Rengarajan et Lewis [7] ont plus tard calculé cette impédance aux quatre points du contour elliptique du guide où le rayon de courbure présente un extrêmum. Ils ont trouvé que l'impédance surfacique est indépendante de la variable angulaire en autant que le rayon de courbure soit très grand comparé à la distance de pénétration de l'onde électromagnétique dans le métal constituant le guide. En fait, leurs calculs indiquent que, dans ces conditions, l'impédance surfacique est égale, en tout point du contour elliptique, à l'impédance intrinsèque du métal.

L'un des avantages des guides d'ondes elliptiques réside dans la longue continuité des lignes de champ qui les rend faciles à manufacturer. De plus, les plans de polarisation des différents modes de propagation ne subissent aucune rotation lors de petites déformations de la section elliptique. Par conséquent, ils sont faciles à adapter aux guides d'ondes rectangulaires et circulaires. Toutefois, même si les guides d'ondes elliptiques sont déjà commercialisés et utilisés dans la communication multicanaux et l'alimentation des radars, leur étude théorique et expérimentale n'est pas encore complète.

Ce travail présente une étude systématique et unifiée des propriétés et caractéristiques des guides d'ondes et des cavités résonnantes elliptiques. Plus particulièrement, nous présentons le résultat, à partir d'équations exactes, du calcul numérique précis de la longueur d'onde de coupure et du coefficient d'atténuation des 36 premiers modes de propagation du guide, et du facteur de qualité de la cavité de section elliptique. Le calcul est basé sur une expansion des fonctions de Mathieu en séries de produits de fonctions de Bessel.

Nous présentons également une expression algébrique pour le calcul approximatif de la longueur d'onde et la fréquence de coupure qui est commune aux 36 premiers modes de propagation et qui est valide sur toute la plage de l'excentricité. L'erreur relative qui en résulte est beaucoup plus faible que celle découlant des formules données par Kretzschmar [3]. Cette expression algébrique est d'une grande utilité dans la conception des guides elliptiques et permet d'éviter les calculs longs et complexes. De plus, la détermination du coefficient d'atténuation pour plusieurs modes d'ordres supérieurs non considérés dans la littérature met en évidence certaines caractéristiques intéressantes.

D'autre part, la succession exacte des modes de propagation que nous établissons nous permet de comparer la largeur de bande du guide d'ondes elliptique avec celle des guides circulaire et rectangulaire. De plus, la configuration erronée des lignes de champ du mode TE_{c01} présentée par Chu est corrigée. La configuration corrigée concorde parfaitement avec celle du mode TE_{01} du guide d'ondes circulaire.

En dernier lieu, nous étudions les modes de résonnance d'une cavité elliptique et nous calculons leurs fréquences exactes. Des expressions algébriques approximatives mais suffisamment précises de ces fréquences de résonnance sont proposées et le facteur de qualité de 24 modes sont également analysés.

CHAPITRE I

L'ÉQUATION D'ONDE DANS UN GUIDE D'ONDES ELLIPTIQUE ET LES FONCTIONS DE MATHIEU†

1.1 L'équation d'onde

Considérons un tube droit métallique de section elliptique dont l'axe coïncide avec l'axe z, et supposons pour le moment que le conducteur qui forme le tube soit parfait (conductivité $\sigma_c = \infty$). En pratique, ce conducteur est effectivement de haute qualité: sa conductivité est très élevée. Supposons aussi que le guide d'ondes soit rempli d'une substance diélectrique isotrope, linéaire et homogène, de perméabilité μ, de permittivité ε et de conductivité σ_d nulle. Le cas plus réaliste où σ_c est fini et σ_d est non nul sera étudié au chapitre III.

Sans perte de généralité, on considère des champs sinusoïdaux oscillant à la fréquence angulaire ω. Les champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{H}$ à l'intérieur du guide sont alors écrits sous leur forme complexe, en coordonnées elliptiques $(\xi,\, \eta,\, z)$, comme [8]:

$$\mathbf{E}\,(\xi,\, \eta,\, z,\, t) \;=\; \mathbf{E}\,(\xi,\, \eta,\, z)\, e^{\,i\,\omega\,t} \tag{1.1.1a}$$

$$\mathbf{H}\,(\xi,\, \eta,\, z,\, t) \;=\; \mathbf{H}\,(\xi,\, \eta,\, z)\, e^{\,i\,\omega\,t} \tag{1.1.1b}$$

Les coordonnées transversales ξ et η jouent les mêmes rôles que les coordonnées polaires habituelles r et φ dans un guide d'ondes de section circulaire. La coordonnée ξ est la coordonnée radiale et la coordonnée η est la coordonnée angulaire (fig. 1.1).

† Le système international d'unités (SI) est utilisé dans ce travail.

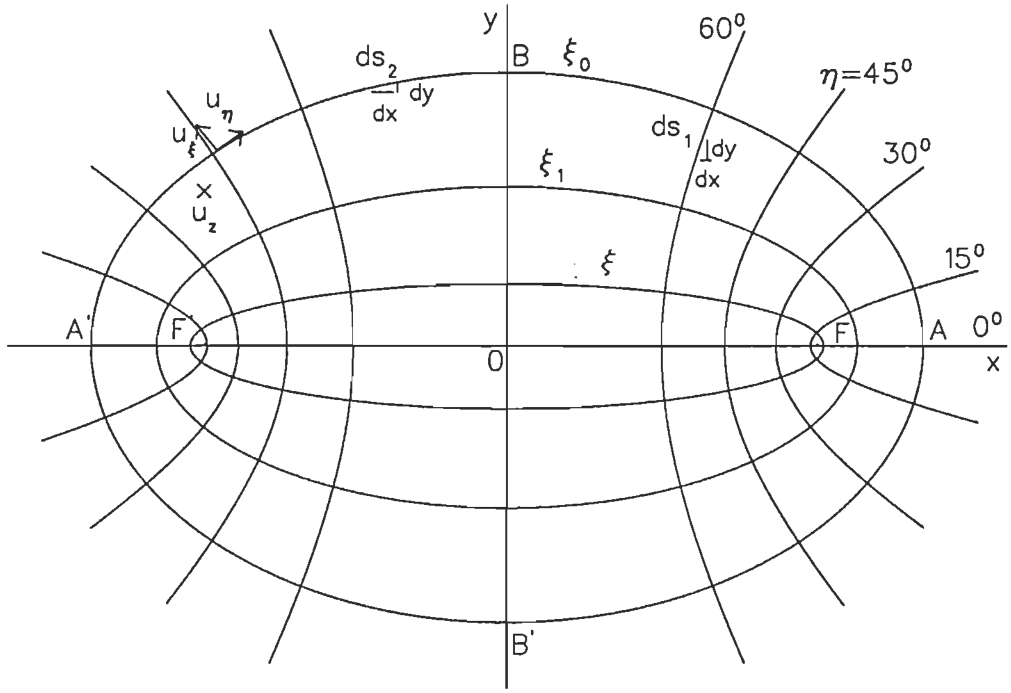


Figure 1.1 Système orthogonal de coordonnées elliptiques.

Les relations entre les coordonnées elliptiques (ξ, η, z) et les coordonnées cartésiennes sont [8]:

$$x = \rho \cosh \xi \cos \eta \tag{1.1.2a}$$

$$y = \rho \sinh \xi \sin \eta \tag{1.1.2b}$$

$$z = z \tag{1.1.2c}$$

où 2ρ est la distance entre les foyers de l'ellipse. Les champs **E** et **H** doivent satisfaire à l'équation d'onde:

$$\left(\nabla^2 + \varepsilon \mu \omega^2\right) \left\{ \begin{matrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{matrix} \right\} = 0 \tag{1.1.3}$$

où $\nabla^2 = \nabla_t^2 + \partial^2/\partial z^2$. Le laplacien transversal ∇_t^2 en coordonnées elliptiques est calculé à l'appendice A:

$$\nabla_t^2 = \frac{2}{\rho^2 \left(\cosh 2\xi - \cos 2\eta\right)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \tag{1.1.4}$$

Les axes majeur (AA') et mineur (BB') sont, respectivement:

$$2\,a \;=\; 2\,\rho\,cosh\,\xi_0 \tag{1.1.5a}$$

$$2\,b \;=\; 2\,\rho\,sinh\,\xi_0 \tag{1.1.5b}$$

Ainsi, les contours de ξ constant sont des surfaces cylindriques elliptiques confocales, alors que les contours de η constant sont des surfaces cylindriques hyperboliques confocales. Le cylindre elliptique confocal $\xi = \xi_0$ correspond à la paroi du guide d'ondes. L'excentricité de sa section elliptique est donnée par:

$$e \;=\; \frac{1}{cosh\,\xi_0} \tag{1.1.6}$$

Supposons de plus que le guide d'ondes soit de longueur infinie pour éviter toute réflexion de l'onde qui s'y propage. En tout point de l'espace à l'intérieur du guide, il y aura donc toujours une onde qui se propage suivant une seule direction que nous choisissons celle des z positifs. Dans ce cas, la dépendance en z des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ se sépare des deux autres coordonnées ξ et η et ces champs s'écrivent alors:

$$\mathbf{E}\,(\xi,\,\eta,\,z,\,t) \;=\; \mathbf{E^0}\,(\xi,\,\eta)\,e^{\,i\,(\omega\,t\,-\,\beta\,z)} \tag{1.1.7a}$$

$$\mathbf{H}\,(\xi,\,\eta,\,z,\,t) \;=\; \mathbf{H^0}\,(\xi,\,\eta)\,e^{\,i\,(\omega\,t\,-\,\beta\,z)} \tag{1.1.7b}$$

où β est le *facteur de phase* qui sera déterminé par les conditions aux frontières imposées à la paroi du guide. Notons que les vecteurs $\mathbf{E^0}$ et $\mathbf{H^0}$ ne dépendent que des coordonnées transversales ξ et η, mais ils peuvent avoir des composantes suivant ξ, η et z:

$$\mathbf{E^0}\,(\xi,\,\eta) \;=\; \mathbf{u}_\xi\,E^0_\xi\,(\xi,\,\eta) \,+\, \mathbf{u}_\eta\,E^0_\eta\,(\xi,\,\eta) \,+\, \mathbf{u_z}\,E^0_z\,(\xi,\,\eta) \tag{1.1.8a}$$

$$\mathbf{H^0}\,(\xi,\,\eta) \;=\; \mathbf{u}_\xi\,H^0_\xi\,(\xi,\,\eta) \,+\, \mathbf{u}_\eta\,H^0_\eta\,(\xi,\,\eta) \,+\, \mathbf{u_z}\,H^0_z\,(\xi,\,\eta) \tag{1.1.8b}$$

où $\mathbf{u}_\xi$, $\mathbf{u}_\eta$ et $\mathbf{u_z}$ sont les vecteurs unitaires en coodonnées elliptiques (fig. 1.1). Comme

$$\frac{\partial^2\,\mathbf{E}}{\partial\,z^2} \;=\; -\,\beta^2\,\mathbf{E} \tag{1.1.9a}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = -\beta^2 \mathbf{H} \tag{1.1.9b}$$

l'équation d'onde (1.1.3) devient:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \rho^2 \frac{\varepsilon \mu \omega^2 - \beta^2}{2} (cosh\, 2\xi - cos\, 2\eta)\right) \left\{ \begin{matrix} \mathbf{E^0} \\ \mathbf{H^0} \end{matrix} \right\} = 0 \tag{1.1.10}$$

Ces deux équations différentielles vectorielles peuvent être décomposées en un système de six équations différentielles scalaires correspondant à chacune des composantes des champs **E** et **H**. Or, **E** et **H** ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Ils sont reliés par les équations de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{H} \tag{1.1.11a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon \mathbf{E} \tag{1.1.11b}$$

Comme nous le verrons au prochain chapitre, la seule connaissance de E_z pour les modes TM (*transversal magnétique*, $H_z = 0$) permet de calculer toutes les autres composantes des champs **E** et **H**. De même, pour les modes TE (*transversal électrique*, $E_z = 0$), la connaissance de H_z suffit. Nous devons donc chercher la solution de l'équation d'onde pour une seule composante (E_z ou H_z) sujette à certaines conditions aux frontières imposées à la paroi du guide ($\xi = \xi_0$). Introduisons le paramètre q défini comme suit:

$$4q \equiv \rho^2 k^2 \tag{1.1.12}$$

avec

$$k^2 \equiv \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2 \tag{1.1.13a}$$

et

$$\rho = a\, e \tag{1.1.13b}$$

Cette dernière équation découle de (1.1.5a) et (1.1.6). L'équation d'onde (1.1.10) dans le guide d'ondes elliptique devient donc:

$$\frac{\partial^2 \Psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2q(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)\Psi(\xi, \eta) = 0 \qquad (1.1.14)$$

où $\Psi(\xi, \eta)$ représente la composante $E_z^0\,(H_z^0)$ pour le mode TM (TE).

1.2 Résolution de l'équation d'onde

L'équation différentielle aux dérivées partielles (1.1.14) est résolue par la méthode de séparation des variables ξ et η. On pose:

$$\Psi(\xi, \eta) = \psi(\xi, q)\,\phi(\eta, q) \qquad (1.2.1)$$

où $\psi(\xi, q)$ et $\phi(\eta, q)$ sont deux fonctions des coordonnées indépendantes radiale ξ et angulaire η ainsi que du paramètre q. En remplaçant $\Psi(\xi, \eta)$ dans l'équation (1.1.14), on obtient:

$$\phi(\eta, q)\frac{d^2\psi(\xi, q)}{d\xi^2} + \psi(\xi, q)\frac{d^2\phi(\eta, q)}{d\eta^2}$$

$$+ 2q(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)\psi(\xi, q)\phi(\eta, q) = 0 \qquad (1.2.2)$$

La division par le produit $\psi(\xi)\,\phi(\eta)$ donne:

$$\left\{\frac{1}{\psi(\xi, q)}\frac{d^2\psi(\xi, q)}{d\xi^2} + 2q\cosh 2\xi\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{\phi(\eta, q)}\frac{d^2\phi(\eta, q)}{d\eta^2} - 2q\cos 2\eta\right\} = 0 \qquad (1.2.3)$$

On est donc en présence de deux fonctions des coordonnées indépendantes ξ et η dont la somme est égale à zéro, quels que soient ξ et η. Chacune de ces fonctions doit nécessairement être égale à une constante. Posons:

$$\frac{1}{\phi(\eta, q)}\frac{d^2\phi(\eta, q)}{d\eta^2} - 2q\cos 2\eta = -a \qquad (1.2.4)$$

$$\frac{1}{\psi(\xi,\, q)}\, \frac{d^2\, \psi(\xi,\, q)}{d\,\xi^2} + 2\, q \, cosh\, 2\, \xi \; = \; a \tag{1.2.5}$$

que nous écrivons:

$$\frac{d^2\, \phi(\eta,\, q)}{d\,\eta^2} + (a \; - \; 2\, q \, cos\, 2\, \eta)\, \phi(\eta,\, q) \; = \; 0 \tag{1.2.6}$$

$$\frac{d^2\, \psi(\xi,\, q)}{d\,\xi^2} - (a \; - \; 2\, q \; cosh\, 2\, \xi)\, \psi(\xi,\, q) \; = \; 0 \tag{1.2.7}$$

où a est une constante à déterminer (à ne pas confondre avec le demi-axe majeur de l'équation 1.1.5a). Notons qu'on peut passer de l'équation (1.2.6) à l'équation (1.2.7) à l'aide du changement de variable $\eta \; = \; i\, \xi$. L'équation différentielle du second ordre (1.2.6) satisfaite par la fonction angulaire $\phi(\eta,\, q)$ est appelée *équation canonique de Mathieu* dont les deux solutions indépendantes sont des combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales [9]:

$$ce_m(\eta, q) \; = \; \sum_{j=0}^{\infty} A_j^m \, cos\, (j\, \eta) \tag{1.2.8a}$$

et

$$se_m(\eta, q) \; = \; \sum_{j=0}^{\infty} B_j^m \, sin\, (j\, \eta) \tag{1.2.8b}$$

appelées *fonctions de Mathieu angulaires paire* $ce_m(\eta, q)$ et *impaire* $se_m(\eta, q)$ d'ordre m.

L'équation différentielle du second ordre (1.2.7) satisfaite par la fonction radiale $\psi(\xi,\, q)$ est appelée *équation de Mathieu modifiée* dont les deux solutions indépendantes sont des combinaisons linéaires de fonctions hyperboliques [9]:

$$Ce_m(\xi, q) \; = \; \sum_{j=0}^{\infty} A_j^m \, cosh\, (j\, \xi) \tag{1.2.9a}$$

et

$$Se_m(\xi, q) \; = \; \sum_{j=0}^{\infty} B_j^m \, sinh\, (j\, \xi) \tag{1.2.9b}$$

appelées *fonctions de Mathieu radiales* (ou *modifiées*) *paire* $Ce_m(\xi, q)$ et *impaire* $Se_m(\xi, q)$ d'ordre m. La valeur que prend la constante a pour un ordre m donné est appelée *valeur caractéristique* de l'équation différentielle de Mathieu (1.2.6) ou (1.2.7), et est dénotée par a_m ou b_m, selon qu'il s'agisse des fonctions paires (ce_m et Ce_m) ou impaires (se_m et Se_m).

La détermination des coefficients A_j^m et B_j^m exige la connaissance des valeurs caractéristiques a_m et b_m et du paramètre q défini par la relation (1.1.12). La principale difficulté de l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes elliptiques vient du fait que les équations différentielles (1.2.6) et (1.2.7) des fonctions angulaires $\phi(\eta,\, q)$ et radiale $\psi(\xi,\, q)$ contiennent à la fois les deux constantes de séparation a et q: la constante a découle de la séparation des deux variables ξ et η et le paramètre q, défini en (1.1.12), (1.1.13a) et (1.1.13b), est relié au facteur de phase β qui résulte de la séparation de la variable z (éqs. 1.1.7a et b). De plus, les deux constantes a et q sont interdépendantes comme nous le verrons plus loin. Dans le cas d'un guide d'ondes de section circulaire, les fonctions angulaire, $\phi(\varphi)$, et radiale, $\psi(r)$, des coordonnées transversales polaires $(r,\, \varphi)$ sont solutions des équations différentielles suivantes [10]:

$$\frac{d^2\,\phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\,\phi(\varphi) = 0 \tag{1.2.10a}$$

$$\frac{d^2\,\psi(r)}{d\,r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\,\psi(r)}{d\,r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\psi(r) = 0 \tag{1.2.10b}$$

où m est un nombre entier (0, 1, 2, ...). L'équation (1.2.10b) est l'équation de Bessel. Les fonctions $\phi(\varphi)$ et $\psi(r)$ sont donc:

$$\phi(\varphi) \sim cos\, m\,\varphi \quad \text{et} \quad sin\, m\,\varphi \tag{1.2.11a}$$

$$\psi(r) \sim J_m(k\,r) \quad \text{et} \quad N_m(k\,r) \tag{1.2.11b}$$

où J_m et N_m sont les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre m, respectivement. En fait, $N_m(k\,r)$ n'est pas une solution acceptable dans le guide, les champs devant y garder des valeurs finies.

Les solutions de l'équation d'onde dans le cas du guide d'ondes elliptique doivent évidement tendre vers les solutions ci-dessus lorsque l'excentricité e du guide, et par conséquent le paramètre q, tendent vers 0. Autrement dit, les solutions radiales paire et impaire, $Ce_m\,(\xi,\,q)$ et $Se_m\,(\xi,\,q)$, doivent tendre vers $J_m\,(k\,r)$, et les solutions angulaires paire et impaire, $ce_m\,(\eta,\,q)$ et $se_m\,(\eta,\,q)$, doivent tendre toutes deux vers $cos\,m\,\varphi$ ou $sin\,m\,\varphi$. Dans le guide circulaire, toute distinction entre solutions paire et impaire disparaît donc et les valeurs caractéristiques correspondantes a_m et b_m deviennent tout simplement m^2.

Kretzschmar [3] a été le premier à proposer une méthode de solution numérique exacte de l'équation d'onde dans les guides elliptiques. Dans le travail pionnier de Chu, la forme en série de fonctions de Bessel des fonctions de Mathieu fut utilisée. Mais la précision des coefficients de la série et la troncature prématurée de celle-ci ont introduit des erreurs que la capacité des ordinateurs actuels permet d'éviter.

La méthode Kretzschmar fait appel aux fractions continues générées à partir des relations de recurrence des coefficients de chacune des séries (1.2.8a et b) ou (1.2.9a et b). Dans ce travail, nous utilisons une méthode qui diffère légèrement de celle de Kretzschmar et qui fait aussi appel aux relations de recurrence des coefficients A_j^m et B_j^m (données à l'appendice B). Selon la parité de m, nous devons envisager deux cas pour chacune des fonctions $ce_m\,(Ce_m)$ et $se_m\,(Se_m)$, correspondant à la périodicité de ces fonctions [8]:

- période $\pi\,(i\,\pi)$ de $ce_m\,(Ce_m)$ et $se_m\,(Se_m)$; dans ce cas $m = 0,\,2,\,4,...$ pour $ce_m\,(Ce_m)$ et $m = 2,\,4,\,6,...$ pour $se_m\,(Se_m)$;

- période $2\,\pi\,(2\,i\,\pi)$ de $ce_m\,(Ce_m)$ et $se_m\,(Se_m)$; dans ce cas $m = 1,\,3,\,5,...$

Considérons d'abord le cas des fonctions paires $ce_{2\,r}\,(Ce_{2\,r})$ de période $\pi\,(i\,\pi)$ (éqs. 1.2.8a et 1.2.9a):

$$ce_{2\,r}\,(\eta,\,q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2\,j}^{2\,r}\,cos\,(2\,j\,\eta) \qquad r = 0,\,1,\,2,... \qquad (1.2.12a)$$

$$Ce_{2\,r}(\xi,\, q) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} A_{2\,j}^{2\,r}\, cosh\,(2\,j\,\xi) \qquad r = 0,\, 1,\, 2, ... \qquad (1.2.12b)$$

Les relations (B.4.1a), (B.4.1b) et (B.4.1c) donnent:

$$\frac{a_{2\,r}}{q} \;=\; \frac{-\,2\,q}{4 - a_{2\,r} + q\,v_2} \qquad (1.2.13a)$$

$$v_{2\,j} \;=\; \frac{-\,q}{(2\,j+2)^2 - a_{2\,r} + q\,v_{2\,j+2}} \qquad j \geq 1 \qquad (1.2.13b)$$

$$v_0 \;=\; \frac{-\,2\,q}{4 - a_{2\,r} + q\,v_2} \qquad (1.2.13c)$$

avec

$$v_{2\,j} \;=\; A_{2\,j+2}^{2\,r} / A_{2\,j}^{2\,r} \qquad j \geq 0 \qquad (1.2.13d)$$

Les équations ci-dessus montrent bien que les valeurs caractéristiques a_m dépendent du paramètre q et que cette dépendance n'est pas simple. De même, les fonctions paires $ce_{2\,r+1}\,(Ce_{2\,r+1})$ de période $2\,\pi\,(2\,i\,\pi)$ sont réécrites:

$$ce_{2\,r+1}\,(\eta,\, q) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} A_{2\,j+1}^{2\,r+1}\, cos\,(2\,j+1)\eta \qquad r = 0,\, 1,\, 2, ... \qquad (1.2.14a)$$

$$Ce_{2\,r+1}\,(\xi,\, q) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} A_{2\,j+1}^{2\,r+1}\, cosh\,(2\,j+1)\xi \qquad r = 0,\, 1,\, 2, ... \qquad (1.2.14b)$$

Les relations (B.4.2a) et (B.4.2b) donnent:

$$\frac{a_{2\,r+1} - 1 - q}{q} \;=\; \frac{-\,q}{9 - a_{2\,r+1} + q\,v_3} \qquad (1.2.15a)$$

$$v_{2\,j+1} \;=\; \frac{-\,q}{(2\,i+3)^2 - a_{2\,r+1} + q\,v_{2\,j+3}} \qquad j \geq 0 \qquad (1.2.15b)$$

avec

$$v_{2\,j+1} \;=\; A_{2\,j+3}^{2\,r+1} / A_{2\,j+1}^{2\,r+1} \qquad j \geq 0 \qquad (1.2.15c)$$

La méthode revient à déterminer $a_{2\,r}$, $a_{2\,r+1}$ et les valeurs correspondantes du paramètre q qui permettent de vérifier respectivement les relations (1.2.13a) et (1.2.15a). On doit donc calculer v_2 et v_3. En effet, la convergence uniforme et absolue des séries de ce_m et Ce_m est garantie pour tout η et ξ réels [8]. Pour $j = n$ très grand, les coefficients des séries (1.2.12a et b) et (1.2.14a et b) tendent vers zéro (i.e., $A^{2\,r}_{2\,n+2} = A^{2\,r+1}_{2\,n+3} \simeq 0$). Dans ce cas, $v_{2\,n}$ et $v_{2\,n+1}$ sont nuls. Les équations (1.2.13b) et (1.2.15b) permettent alors de calculer v_2 et v_3 par récursion descendante. En prenant n le plus grand possible, nous pouvons déterminer $a_{2\,r}$, $a_{2\,r+1}$ et les q correspondants avec une très bonne précision. Les coefficients $A^{2\,r}_{2\,j}$ et $A^{2\,r+1}_{2\,j+1}$ des séries $ce_{2\,r}$ et $ce_{2\,r+1}$ ($C_{2\,r}$ et $Ce_{2\,r+1}$) sont alors déterminés respectivement à partir des relations (1.2.13d) et (1.2.15c).

Considérons maintenant le cas des fonctions impaires $se_{2\,r+2}\,(Se_{2\,r+2})$ de période $\pi\,(i\,\pi)$:

$$se_{2\,r+2}\,(\eta,\, q) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} B^{2\,r+2}_{2\,j+2}\, sin\,(2\,j+2)\eta \qquad r = 0,\, 1,\, 2, \ldots \quad (1.2.16a)$$

$$Se_{2\,r+2}\,(\xi,\, q) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} B^{2\,r+2}_{2\,j+2}\, sinh\,(2\,j+2)\xi \qquad r = 0,\, 1,\, 2, \ldots \quad (1.2.16b)$$

À partir des relations (B.4.4a) et (B.4.4b), on obtient:

$$\frac{b_{2\,r+2} - 4}{q} \;=\; \frac{-\,q}{16 - b_{2\,r+1} + q\,w_4} \qquad (1.2.17a)$$

$$w_{2\,j} \;=\; \frac{-\,q}{(2\,j+2)^2 - b_{2\,r+1} + q\,w_{2\,j+2}} \qquad j \geq 1 \qquad (1.2.17b)$$

avec

$$w_{2\,j} \;=\; B^{2\,r+2}_{2\,j+2} / B^{2\,r+2}_{2\,j} \qquad j \geq 1 \qquad (1.2.17c)$$

De même, les fonctions impaires $se_{2\,r+1}\,(Se_{2\,r+1})$ de période $2\,\pi\,(2\,i\,\pi)$ s'écrivent:

$$se_{2\,r+1}\,(\eta,\, q) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} B^{2\,r+1}_{2\,j+1}\, sin\,(2\,j+1)\eta \qquad r = 0,\, 1,\, 0, \ldots \quad (1.2.18a)$$

$$Se_{2\,r+1}\,(\xi,\, q) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} B^{2\,r+1}_{2\,j+1}\, sinh\,(2\,j+1)\xi \qquad r = 0,\, 1,\, 2, \ldots \quad (1.2.18b)$$

Les relations (B.4.3a) et (B.4.3b) donnent:

$$\frac{b_{2\,r+1} - 1 + q}{q} = \frac{-q}{9 - b_{2\,r+1} + q\, w_3} \tag{1.2.19a}$$

$$w_{2\,j+1} = \frac{-q}{(2j+3)^2 - b_{2\,r+1} + q\, w_{2\,j+3}} \qquad j \geq 0 \tag{1.2.19b}$$

avec

$$w_{2\,j+1} = B_{2\,j+3}^{2\,r+1} / B_{2\,j+1}^{2\,r+1} \qquad j \geq 0 \tag{1.2.19c}$$

Tout comme dans le cas des fonctions paires, la détermination des valeurs caractéristiques $b_{2\,r+2}$ et $b_{2\,r+1}$ ainsi que les valeurs de q correspondantes qui vérifient respectivement les relations (1.2.17a) et (1.2.19a) nécessite la connaissance des rapports w_3 et w_4. Là encore, la convergence uniforme et absolue des séries se_m et Se_m est garantie pour tout η et ξ réels [8]. Pour $j = n$ très grand, les coefficients des séries (1.2.16a et b) et (1.2.18a et b) tendent vers zéro (i.e., $B_{2\,n+2}^{2\,r+2} = B_{2\,n+3}^{2\,r+1} \simeq 0$), de sorte que $w_{2\,n}$ et $w_{2\,n+1}$ peuvent être négligés. Les équations (1.2.19b) et (1.2.17b) permettent alors de calculer w_3 et w_4 par récursion descendante. En prenant n le plus grand possible, nous pouvons déterminer $b_{2\,r+2}$, $b_{2\,r+1}$ et les q correspondants avec une grande précision. Les coefficients $B_{2\,j+2}^{2\,r+2}$ et $B_{2\,j+1}^{2\,r+1}$ des séries $se_{2\,r+2}$ et $se_{2\,r+1}$ ($Se_{2\,r+2}$ et $Se_{2\,r+1}$) sont calculés respectivement à partir des relations (1.2.17c) et (1.2.19c).

Pour pouvoir couvrir toute la gamme des modes TE et TM qui nous intéresse, nous avons appliqué cette procédure numérique pour un ordre m allant de 0 à 6 (1 à 6) pour le cas pair (impair), quoique le calcul peut être effectué pour tout m entier. À titre d'exemple, nous présentons à l'appendice C le programme FORTRAN que nous avons conçu pour le calcul de la valeur caractéristique a_0 en fonction de q. La figure 1.2 montre les premières valeurs caractéristiques a_m (b_m) en fonction du paramètre q. Les résultats indiquent que lorsque q tend vers zéro (excentricité nulle), les valeurs caractéristiques a_m et b_m se confondent comme prévu et deviennent égales à m^2. À l'autre extrême, lorsque q devient grand, $a_m \approx b_{m+1}$. Ce comportement aura d'importantes conséquences sur la longueur d'onde et la fréquence de coupure des modes de propagation dans le guide d'ondes elliptique et, par conséquent, sur leur classification, comme nous le verrons au prochain chapitre. Nous présentons à l'appendice D les tableaux donnant les valeurs caractéristiques a_m et b_m pour une gamme de valeurs très étendue du paramètre q qui est beaucoup plus complète que ce que l'on trouve dans la littérature [9].

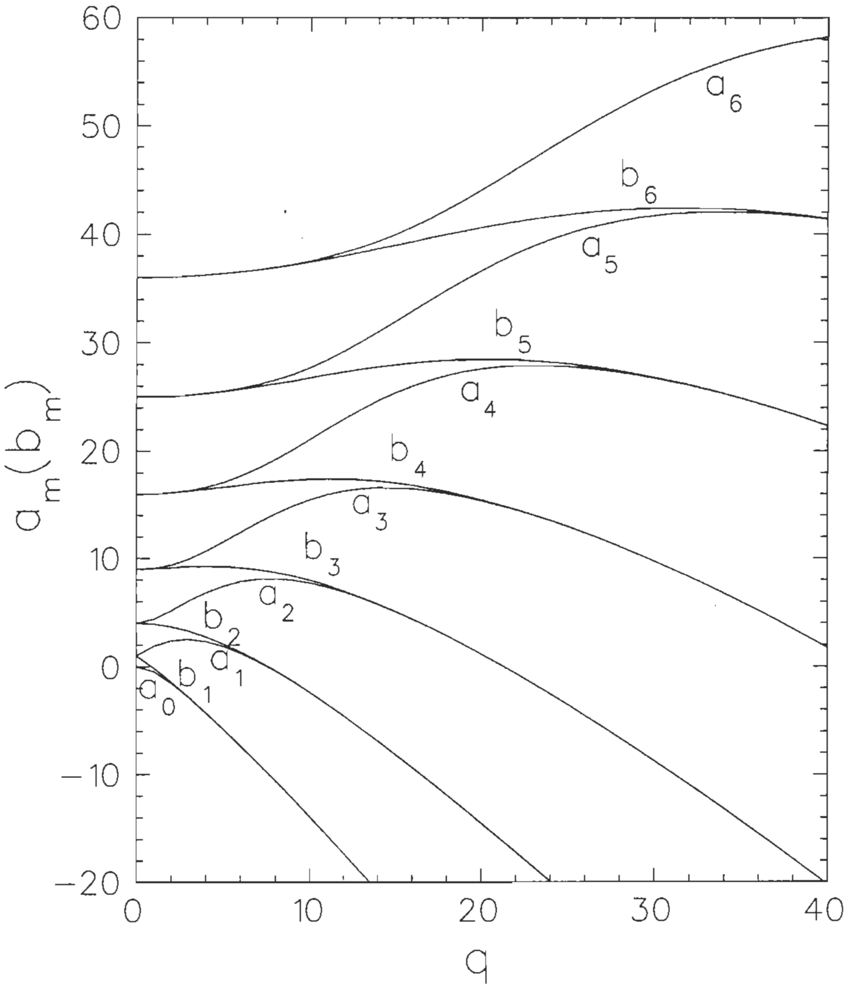


Figure 1.2 Les valeurs caractéristiques a_m (b_m) des fonctions de Mathieu d'ordre $m \leq 6$.

Maintenant que nous avons déterminé les valeurs caractéristiques a_m et b_m ainsi que les coefficients A_j^m et B_j^m des séries représentant les fonctions de Mathieu, celles-ci peuvent être calculées. Nous reviendrons sur ce point à la section 1.4.

1.3 Considérations physiques et choix des solutions de l'équation d'onde

Comme nous avons deux solutions linéairement indépendantes pour chacune des équations différentielles du second ordre (1.2.6) et (1.2.7), ceci donne lieu à quatre solutions linéairement indépendantes pour l'équation d'ondes (1.1.14). Considérons de nouveau la figure 1.1 et déplacons-nous dans le sens des aiguilles d'une montre sur le cylindre elliptique confocal $\xi = \xi_1 < \xi_0$, en partant de $\eta = 0$. La solution de (1.1.14) s'écrit alors:

$$\Psi_m(\xi_1, \eta) = \psi_m(\xi_1, q)\, \phi_m(\eta, q) \tag{1.3.1}$$

où $\psi_m(\xi_1, q)$ (représentant $Ce_m(\xi_1, q)$ ou $Se_m(\xi_1, q)$) est une constante, et $\phi_m(\eta, q) = ce_m(\eta, q)$ ou $se_m(\eta, q)$. La fonction $\Psi_m(\xi_1, \eta)$ peut se répéter entre $\eta = \pi$ et $\eta = 2\pi$, alors qu'elle se répète forcément après $\eta = 2\pi$. Donc $\Psi_m(\xi_1, \eta)$ prend des valeurs périodiques en η, avec une période de π ou 2π. Autrement dit:

$$\Psi_m(\xi_1, \eta) = \Psi_m(\xi_1, \eta + \pi) \quad \text{ou} \quad \Psi_m(\xi_1, \eta + 2\pi) \tag{1.3.2}$$

La périodicité par rapport à η aux points $(0, -\eta)$ et $(0, +\eta)$, à travers la ligne interfocale ($\xi = 0$), exige que la fonction $\Psi_m(\xi, \eta)$ ainsi que sa dérivée partielle par rapport à ξ soient continues [8]:

$$\Psi_m(0, +\eta) = \Psi_m(0, -\eta) \tag{1.3.3}$$

$$\left.\frac{\partial \Psi_m(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right|_{\xi = 0} = -\left.\frac{\partial \Psi_m(\xi, -\eta)}{\partial \xi}\right|_{\xi = 0} \tag{1.3.4}$$

Les seules combinaisons des solutions des équations différentielles (1.2.6) et (1.2.7) qui vérifient ces deux conditions sont:

$$\Psi_m(\xi, \eta) \sim Ce_m(\xi, q)\, ce_m(\eta, q) \tag{1.3.5}$$

qui représente le cas pair que nous identifierons par la lettre c, et

$$\Psi_m(\xi, \eta) \sim Se_m(\xi, q)\, se_m(\eta, q) \tag{1.3.6}$$

qui représente le cas impair que nous identifierons par la lettre s.

1.4 Calcul numérique des fonctions de Mathieu

Les fonctions de Mathieu angulaires et radiales sont représentées par des séries trigonométriques et hyperboliques, respectivement (éqs. 1.2.8 et 1.2.9). Nous verrons au prochain chapitre que l'imposition des conditions aux frontières à la paroi du guide d'ondes ($\xi = \xi_0$) mène à des équations de la forme:

$$f_m(\xi_0, q) = 0 \tag{1.4.1}$$

où f_m représente les fonctions de Mathieu modifiées ou radiales, Ce_m et Se_m, ou leurs dérivées.

L'équation (1.4.1) revient donc à trouver, pour un ordre m et un contour elliptique $\xi = \xi_0$ donnés, les valeurs du paramètre q qui annulent la fonction $f_m(\xi_0, q)$. Il est évident que la détermination précise de ces différentes *racines* de l'équation (1.4.1) requiert idéalement la connaissance exacte des fonctions de Mathieu modifiées et leurs dérivées. Du point de vue numérique, les séries hyperboliques (1.2.9a) et (1.2.9b) convergent très lentement, ce qui présente un sérieux handicap dans la résolution du problème aux limites (1.4.1).

Cette difficulté a été contournée partiellement par Chu [1] qui a développé $Ce_m(\xi, q)$ et $Se_m(\xi, q)$ en séries de fonctions de Bessel. Ces séries convergent en effet plus rapidement que les séries hyperboliques, mais pas suffisamment pour garantir un calcul précis des fonctions de Mathieu modifiées. C'est d'ailleurs pour cette raison que les résultats originaux de Chu étaient entachés d'erreurs qui ont mené à des configurations erronées des champs électrique et magnétique à l'intérieur du guide d'ondes.

Kretzschmar [11, 12] a montré que la meilleure représentation des fonctions de Mathieu modifiées, du point de vue de la convergence, était celle en séries de produits de fonctions de Bessel. Dans cette représentation, les fonctions de Mathieu modifiées sont données par [8]:

$$Ce_{2r}(\xi, q) = \frac{ce_{2n}(0, q)\, ce_{2r}(\pi/2, q)}{[A_0^{2r}]^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{2j}^{2r} J_j(v_1)\, J_j(v_2) \qquad (1.4.2)$$

$$Ce_{2r+1}(\xi, q) = \frac{ce_{2r+1}(0, q)\, ce'_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q}\,[A_1^{2r+1}]^2} \times$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} A_{2j+1}^{2r+1} [J_j(v_1)\, J_{j+1}(v_2) + J_{j+1}(v_1)\, J_j(v_2)] \qquad (1.4.3)$$

$$Se_{2r+2}(\xi, q) = \frac{se'_{2r+2}(0, q)\, se'_{2r+2}(\pi/2, q)}{q\,[B_2^{2r+2}]^2} \times$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} B_{2j+2}^{2r+2} [J_j(v_1)\, J_{j+2}(v_2) - J_{j+2}(v_1)\, J_j(v_2)] \qquad (1.4.4)$$

$$Se_{2r+1}(\xi, q) = \frac{se'_{2r+1}(0, q)\, se_{2r+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q}\,[B_1^{2r+1}]^2} \times$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j} B_{2j+1}^{2r+1} [J_j(v_1)\, J_{j+1}(v_2) - J_{j+1}(v_1)\, J_j(v_2)] \qquad (1.4.5)$$

où

$$v_1 = \sqrt{q}\, e^{-\xi} \quad , \quad v_2 = \sqrt{q}\, e^{+\xi} \qquad (1.4.6)$$

les coefficients A_j^m et B_j^m sont ceux des équations (1.2.8) et (1.2.9). Nous adoptons cette dernière représentation pour le calcul des fonctions de Mathieu modifiées et de leurs dérivées. Quand aux fonctions de Mathieu angulaires $ce_m(\eta, q)$ et $se_m(\eta, q)$, le développement en séries de fonctions sinusoïdales (1.2.8a et b) suffit, ces fonctions n'étant soumises à aucune équation équivalente à (1.4.1).

Nous avons mis au point un programme FORTRAN pour le calcul des différentes fonctions de Mathieu et leurs dérivées, jumelé à celui servant au calcul numérique des valeurs caractéristiques a_m et b_m discuté à la section 1.2.

À titre d'exemple, les figures 1.3 et 1.4 montrent la variation de quelques fonctions angulaires et radiales pour différentes valeurs du paramètre q.

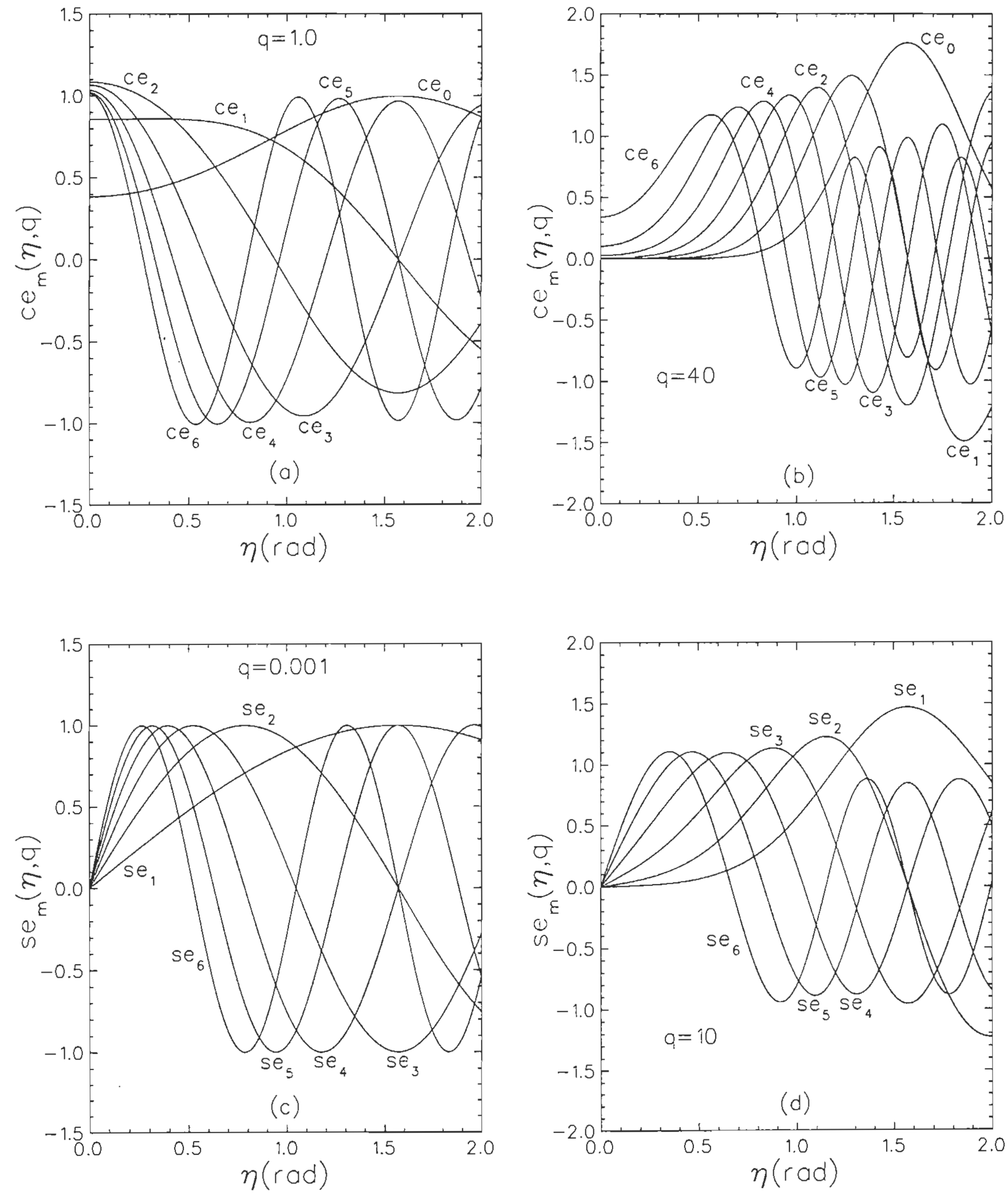


Figure 1.3 Les fonctions de Mathieu ce_m (se_m) d'ordre m allant de 0 à 6 (1 à 6).

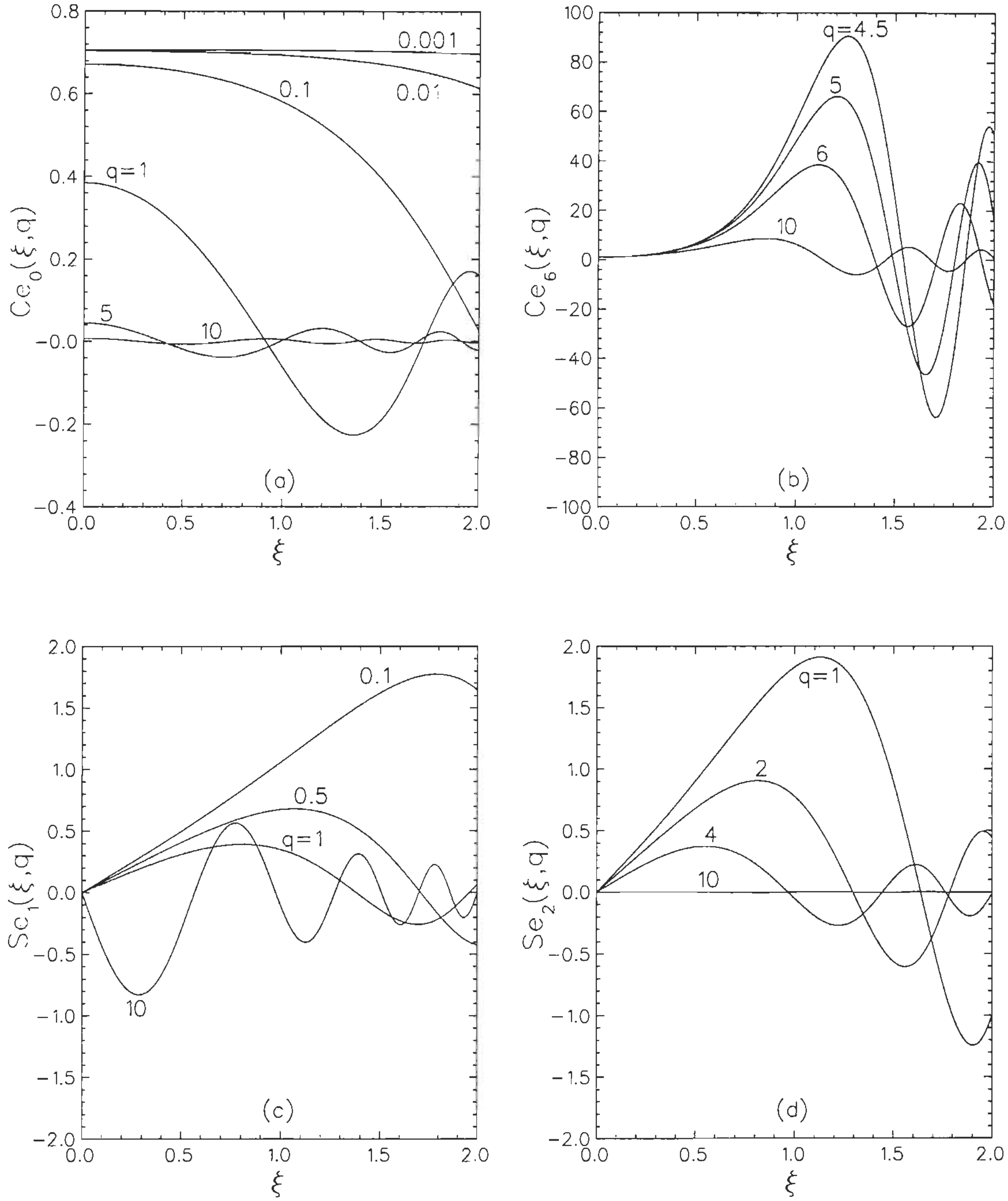


Figure 1.4 Les fonctions de Mathieu modifiées Ce_0, Ce_6, Se_1 et Se_2.

1.5 Conclusion

Les propriétés particulières des fonctions de Mathieu et leur manipulation beaucoup moins aisée que celle des fonctions familières rencontrées dans le cas des guides rectangulaire et circulaire, explique la complexité de l'étude des guides d'ondes elliptiques. Le traitement exact de ces guides ne peut se faire que numériquement. Nous verrons plus loin comment les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être utilisés pour calculer les différentes caractéristiques des guides et cavités elliptiques: fréquence de coupure, vitesse de propagation, atténuation, facteur de qualité, etc.

CHAPITRE II

LES MODES DE PROPAGATION DANS LE GUIDE D'ONDES ELLIPTIQUE

2.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que chaque mode de propagation TE et TM du guide d'ondes circulaire donne naissance, dans le cas du guide elliptique, à deux types de modes, l'un pair (TE_c et TM_c), l'autre impair (TE_s et TM_s), selon la parité des fonctions de Mathieu qui y sont impliquées, comme l'indiquent les équations (1.3.5) et (1.3.6). La composante E_z des modes TM_c et TM_s et la composante H_z des modes TE_c et TE_s ont la forme commune:

$$\Psi_m\,(\xi,\,\eta)\; e^{i\,(\omega\,t\,-\,\beta\,z)} \tag{2.1.1}$$

où $\Psi_m\,(\xi,\,\eta) \;=\; \psi_m\,(\xi,\,q)\,\phi_m\,(\eta,\,q)$ (éqs. 1.1.14, et 1.2.1). Les composantes transversales $\mathbf{E_t}$ et $\mathbf{H_t}$ des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ se déduisent directement des relations (1.1.11a) et (1.1.11b) qui, moyennant de simples manipulations mathématiques, donnent [10]:

$$\mathbf{H_t} \;=\; -\,\frac{1}{Z}\,\mathbf{u_z}\,\times\,\mathbf{E_t} \tag{2.1.2}$$

$$Z \;=\; \frac{\beta}{\varepsilon\,\omega} \qquad\qquad (TM) \tag{2.1.3a}$$

$$\;=\; \frac{\mu\,\omega}{\beta} \qquad\qquad (TE) \tag{2.1.3b}$$

$$\mathbf{E_t} = -i\,\frac{\beta}{k^2}\,\nabla_\mathbf{t}\,E_z \qquad (TM) \tag{2.1.4a}$$

$$\mathbf{H_t} = -i\,\frac{\beta}{k^2}\,\nabla_\mathbf{t}\,H_z \qquad (TE) \tag{2.1.4b}$$

où Z est l'impédance caractéristique du guide d'ondes et

$$\nabla_\mathbf{t} = \frac{1}{\rho_1}\left(\mathbf{u}_\xi\,\frac{\partial}{\partial\,\xi} + \mathbf{u}_\eta\frac{\partial}{\partial\,\eta}\right) \tag{2.1.5}$$

est le gradient transversal en coordonnées elliptiques (app. A) où

$$\rho_1 \equiv \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{cosh\,2\,\xi - cos\,2\,\eta} \tag{2.1.6}$$

2.2 Les modes de propagation

2.2.1 Les modes TM

Les modes TM sont caractérisés par:

$$H_z = 0 \tag{2.2.1a}$$

$$E_z = E^m\,\psi_m\,(\xi,\,q)\,\phi_m\,(\eta,\,q)\,e^{i\,(\omega\,t\,-\,\beta\,z)} \tag{2.2.1b}$$

où E^m est une constante représentant l'amplitude de E_z. Les autres composantes E_ξ, E_η, H_ξ et H_η peuvent être déterminées à partir de E_z. En effet, en utilisant les relations (2.1.2), (2.1.3a) et (2.1.4a), on obtient:

$$H_\xi = -\frac{\omega\,\varepsilon}{\beta}\,E_\eta = -\frac{\omega\,\varepsilon}{i\,\rho_1\,k^2}\,E^m\,\psi_m\,(\xi,\,q)\,\phi'_m\,(\eta,\,q)\,e^{i\,(\omega\,t\,-\,\beta\,z)} \tag{2.2.2a}$$

$$H_\eta = \frac{\omega\,\varepsilon}{\beta}\,E_\xi = \frac{\omega\,\varepsilon}{i\,\rho_1\,k^2}\,E^m\,\psi'_m\,(\xi,\,q)\,\phi_m\,(\eta,\,q)\,e^{i\,(\omega\,t\,-\,\beta\,z)} \tag{2.2.2b}$$

où

$$\psi'_m\,(\xi,\,q) \equiv \frac{d\,\psi_m\,(\xi,\,q)}{d\,\xi} \quad , \quad \phi'_m\,(\eta,\,q) \equiv \frac{d\,\phi_m\,(\eta,\,q)}{d\,\eta} \tag{2.2.3}$$

Rappellons que selon les relations (1.3.5) et (1.3.6), les fonctions ψ_m et ϕ_m représentent respectivement $Ce_m\,(Se_m)$ et $ce_m\,(se_m)$ pour le cas pair (impair).

Calculons maintenant la constante de propagation k en imposant les conditions aux frontières à la paroi métallique du guide. La composante tangentielle du champ électrique à la surface du guide est continue. Comme dans la paroi métallique le champ $\mathbf{E}$ est nul, on en déduit qu'à la surface du guide ($\xi = \xi_0$):

$$E_z\,(\xi_0,\,\eta) \,=\, 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \psi_m\,(\xi_0,\,q) \,=\, 0 \tag{2.2.4}$$

D'où

$$Ce_m\,(\xi_0,\,q) \,=\, 0 \qquad\qquad \text{(cas pair)} \tag{2.2.5a}$$

$$Se_m\,(\xi_0,\,q) \,=\, 0 \qquad\qquad \text{(cas impair)} \tag{2.2.5b}$$

Donc, pour un ξ_0 donné, les valeurs possibles du paramètre q correspondent aux zéros de $\psi_m\,(\xi_0,\,q)$, la fonction de Mathieu modifiée paire $Ce_m\,(\xi_0,\,q)$, ou impaire $Se_m\,(\xi_0,\,q)$. Si l'on repère ces zéros par l'indice $n\,(n\,=\,1,\,2,\,3,...)$, ils sont alors dénotés q_{mn}. Donc, pour m et n donnés, q_{mn} représente le $n^{i\grave{e}me}$ zéro de la fonction de Mathieu modifiée d'ordre m, $Ce_m\,(\xi_0,\,q)$ ou $Se_m\,(\xi_0,\,q)$. Le paramètre q est donc quantifié. Il en est de même de la constante de propagation k donnée en (1.1.12):

$$k_{mn} \,=\, \frac{2}{a\,e}\,\sqrt{q_{mn}} \tag{2.2.6}$$

où a est le demi-axe majeur et e l'excentricité du guide. On voit donc que k ainsi que toutes les composantes des champs électrique et magnétique dépendent de deux nombres entiers: m l'ordre des fonctions de Mathieu $Ce_m\,(m = 0,\,1,\,2,...)$ ou $Se_m\,(m\,=\,1,\,2,\,3,...)$, et n, le numéro du zéro de ces fonctions. L'ensemble des deux nombres $(m,\,n)$ définit ce que l'on appelle un *mode de propagation* dans le guide. Un mode de propagation quelconque pour une onde TM est alors écrit TM_{cmn} pour le cas pair et TM_{smn} pour le cas impair qui deviennent tous les deux TM_{mn} dans un guide circulaire.

Les équations (1.1.13a) et (2.2.6) montrent que la propagation n'est possible que si le facteur de phase

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \, \mu \, \varepsilon - \frac{4 \, q_{mn}}{(a \, e)^2}} \tag{2.2.7}$$

est réel. La fréquence ω doit donc être supérieure à une certaine *fréquence de coupure* $\omega^c_{mn} = 2 \, \pi \, f^c_{mn}$ telle que:

$$f^c_{mn} = \frac{1}{a \, e \, \pi \, \sqrt{\mu \, \varepsilon}} \sqrt{q_{mn}} \tag{2.2.8}$$

La longueur d'onde de coupure est:

$$\lambda^c_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu \, \varepsilon}} \frac{1}{f^c_{mn}} = \frac{\pi \, a \, e}{\sqrt{q_{mn}}} \tag{2.2.9}$$

Ainsi, en écrivant:

$$\omega^2 \, \mu \, \varepsilon = \frac{2 \, \pi}{\lambda_0} \tag{2.2.10}$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le milieu infini, sans frontières, la longueur d'onde dans le guide est donc:

$$\lambda = \frac{2 \, \pi}{k} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(f^c_{mn} / f \right)^2}} \tag{2.2.11}$$

La vitesse de phase dans le guide d'ondes est:

$$v_p = \frac{f \, \lambda_0}{\sqrt{1 - \left(f^c_{mn} / f \right)^2}} = \frac{v^0_p}{\sqrt{1 - \left(f^c_{mn} / f \right)^2}} \tag{2.2.12}$$

où $v^0_p = 1 / \sqrt{\mu \, \varepsilon}$ est la vitesse de phase dans le milieu diélectrique infini. La vitesse de groupe est donnée par:

$$v_g = \frac{{v^0_p}^2}{v_p} = v^0_p \sqrt{1 - \left(\frac{f^c_{mn}}{f} \right)^2} \tag{2.2.13}$$

2.2.2 Les modes TE

Les modes TE sont tels que:

$$E_z = 0 \tag{2.2.14a}$$

$$H_z = H^m \, \psi_m(\xi, q) \, \phi_m(\eta, q) \, e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{2.2.14b}$$

En vertu des relations (2.1.2), (2.1.3b) et (2.1.4b), on obtient:

$$H_\xi = -\frac{\beta}{\mu \omega} E_\eta = \frac{\beta}{i \rho_1 k^2} H^m \, \psi_m^{'}(\xi, q) \, \phi_m(\eta, q) \, e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{2.2.15a}$$

$$H_\eta = \frac{\beta}{\mu \omega} E_\xi = \frac{\beta}{i \rho_1 k^2} H^m \, \psi_m(\xi, q) \, \phi_m^{'}(\eta, q) \, e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{2.2.15b}$$

où la constante H^m représente l'amplitude de H_z.

Déterminons la constante de propagation k en notant que la composante tangentielle E_η du champ électrique s'annule à la surface du guide d'ondes ($\xi = \xi_0$). D'où

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right|_{\xi = \xi_0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \psi_m^{'}(\xi_0, q) = 0 \tag{2.2.16}$$

Cela donne:

$$Ce_m^{'}(\xi_0, q) = 0 \qquad \text{(cas pair)} \tag{2.2.17a}$$

$$Se_m^{'}(\xi_0, q) = 0 \qquad \text{(cas impair)} \tag{2.2.17b}$$

Pour un ξ_0 donné, les différentes valeurs de q correspondent aux zéros de la dérivée de la fonction de Mathieu modifiée paire, $Ce_m^{'}(\xi_0, q)$, ou impaire, $Se_m^{'}(\xi_0, q)$. Si l'on dénote ces zéros par $q_{mn}^{'}$ (pour les différentier des q_{mn} de la section précédente), on obtient:

$$k_{mn} = \frac{2}{a\, e} \sqrt{q_{mn}^{'}} \tag{2.2.18}$$

On voit donc ici aussi que k ainsi que toutes les composantes des champs électrique et magnétique dépendent de deux nombres entiers: m, l'ordre des fonctions de Mathieu modifiées $Ce_m(\xi_0, q)\,(m = 0, 1, 2, ...)$ et $Se_m(\xi_0, q)\,(m = 1, 2, 3, ...)$, et n, le numéro du zéro de la dérivée de ces fonctions. L'ensemble des deux nombres (m, n) définit un mode de propagation que l'on écrit TE_{cmn} pour le cas pair, et TE_{smn} pour le cas impair.

Le facteur de phase β défini en (2.2.7) doit être réel pour qu'il y ait propagation. Dans ce cas, on trouve les mêmes expressions de la fréquence de coupure (2.2.8), de la longueur d'onde de coupure (2.2.9), de la longueur d'onde dans le guide (2.2.11), de la vitesse de phase (2.2.12) et de la vitesse de groupe (2.2.13), que pour les modes TM de la section précédente. Il suffit de remplacer dans toutes ces expressions les q_{mn} par q'_{mn} qui représentent maintenant les zéros de la dérivée des fonctions de Mathieu radiales.

2.3 Calcul exact de $\mathbf{q_{mn}}$ et $\mathbf{q'_{mn}}$ en fonction de l'excentricité

Selon le mode qui se propage dans le guide d'ondes, les conditons aux limites imposées à la paroi du guide sont:

$$\psi_m(\xi_0, q_{mn}) = 0 \qquad \text{(modes } TM) \tag{2.3.1}$$

$$\psi'_m(\xi_0, q'_{mn}) = 0 \qquad \text{(modes } TE) \tag{2.3.2}$$

où $\psi_m(\xi_0, q_{mn})$ est la fonction de Mathieu modifiée paire $Ce_m(\xi_0, q_{mn})$, ou impaire $Se_m(\xi_0, q_{mn})$, et $\psi'_m(\xi_0, q'_{mn})$ correspond à la dérivée de ces fonctions. La valeur ξ_0 de la variable radiale ξ délimite le contour elliptique du guide; elle est reliée à l'excentricité par l'équation (1.1.6). On doit donc déterminer q_{mn} ou q'_{mn}, les zéros des fonctions de Mathieu modifiées ou de leurs dérivées, pour une excentricité e donnée. Rappelons que ces fonctions sont représentées par des séries de produits de fonctions de Bessel données à la section 1.4.

Pour une excentricité donnée, ξ_0 est déterminé à partir de la relation (1.1.6). Les coefficients A_j^m et B_j^m des séries (1.4.2) à (1.4.5), qui sont également ceux des séries trigonométriques et hyperboliques (1.2.8) et (1.2.9), sont obtenus en utilisant la procédure numérique exposée à la section 1.2, qui a servi au calcul des valeurs caractéristiques a_m et b_m. Cette procédure se résume ainsi. Pour chaque mode (m, n) et une excentricité e donnés, et donc un contour elliptique ξ_0 déterminé, on varie par incréments le paramètre q de 0 à une certaine valeur maximale suffisante pour couvrir tous les cas d'intérêt. Pour chaque valeur de q, on calcule la valeur caractéristique a_m (ou b_m) ainsi que tous les coefficients A_j^m et B_j^m supérieurs (en valeur absolue) à une certaine valeur assez petite pour garantir le degré de précision désiré des séries (1.4.2) à (1.4.5). Les fonctions de Mathieu angulaires et radiales, et leurs dérivées, sont ainsi déterminées. Seules les valeurs du paramètre q qui vérifient les relations (2.3.1) et (2.3.2) sont alors retenues. Ces valeurs sont alors les zéros q_{mn} ou q'_{mn} recherchés.

Une fois les zéros q_{mn} ou q'_{mn} calculés, la longueur d'onde (éq. 2.2.9) et la fréquence (éq. 2.2.8) de coupure, la vitesse de phase (éq. 2.2.12) ou de groupe (éq. 2.2.13) sont déterminées. Les expressions des composantes des champs **E** et **H** (éqs. 2.2.1b, 2.2.2, 2.2.14b et 2.2.15) sont maintenant connues à un facteur E^m ou H^m près. Cela nous permettra de calculer aux chapitres III et IV l'atténuation dans le guide et le facteur de qualité de la cavité elliptique.

La procédure utilisée ici est quelque peu différente de celle de Kretzschmar [3 - 5]. Elle est toutefois plus réaliste et plus pratique. L'approche de Kretzschmar consiste à faire les calculs en partant d'un paramètre q donné et en ajustant l'excentricité e pour satisfaire aux conditions aux limites (2.3.1) ou (2.3.2). Sachant qu'en pratique, c'est l'excentricité qui est donnée, cette approche devient de plus en plus ardue à mesure que la précision exigée augmente.

Nous avons appliqué notre procédure au calcul des zéros q_{mn} et q'_{mn} des 36 premiers modes elliptiques en fonction de l'excentricité e (figs. 2.1 et 2.2). La classification de ces modes sera considérée à la section 2.5. Les figures 2.3 et 2.4 montrent la variation de la longueur d'onde de coupure normalisée en fonction de l'excentricité.

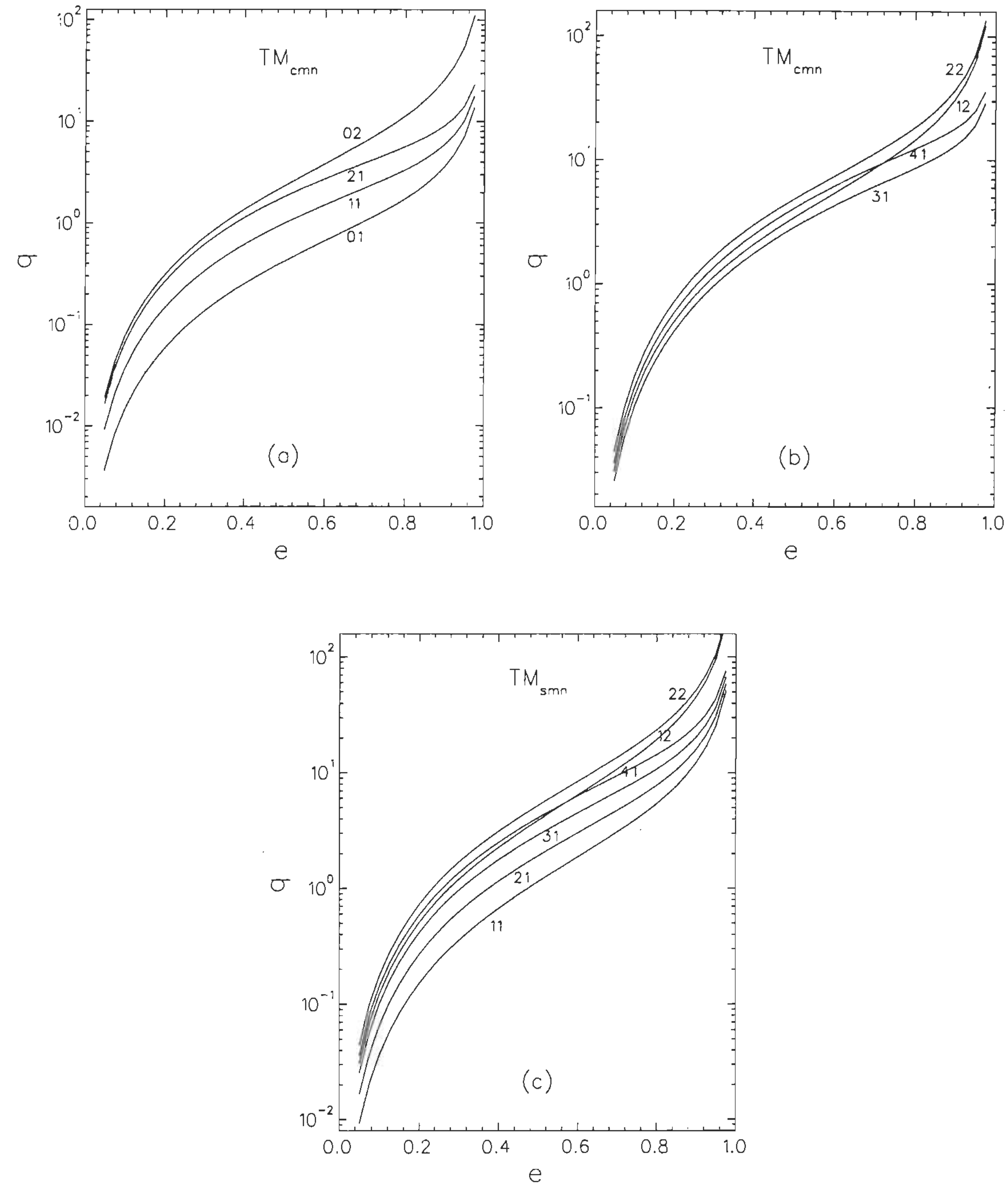


Figure 2.1 Les zéros q_{mn} de l'équation (2.3.1) en fonction de l'excentricité e, pour les modes TM_{cmn} et TM_{smn}.

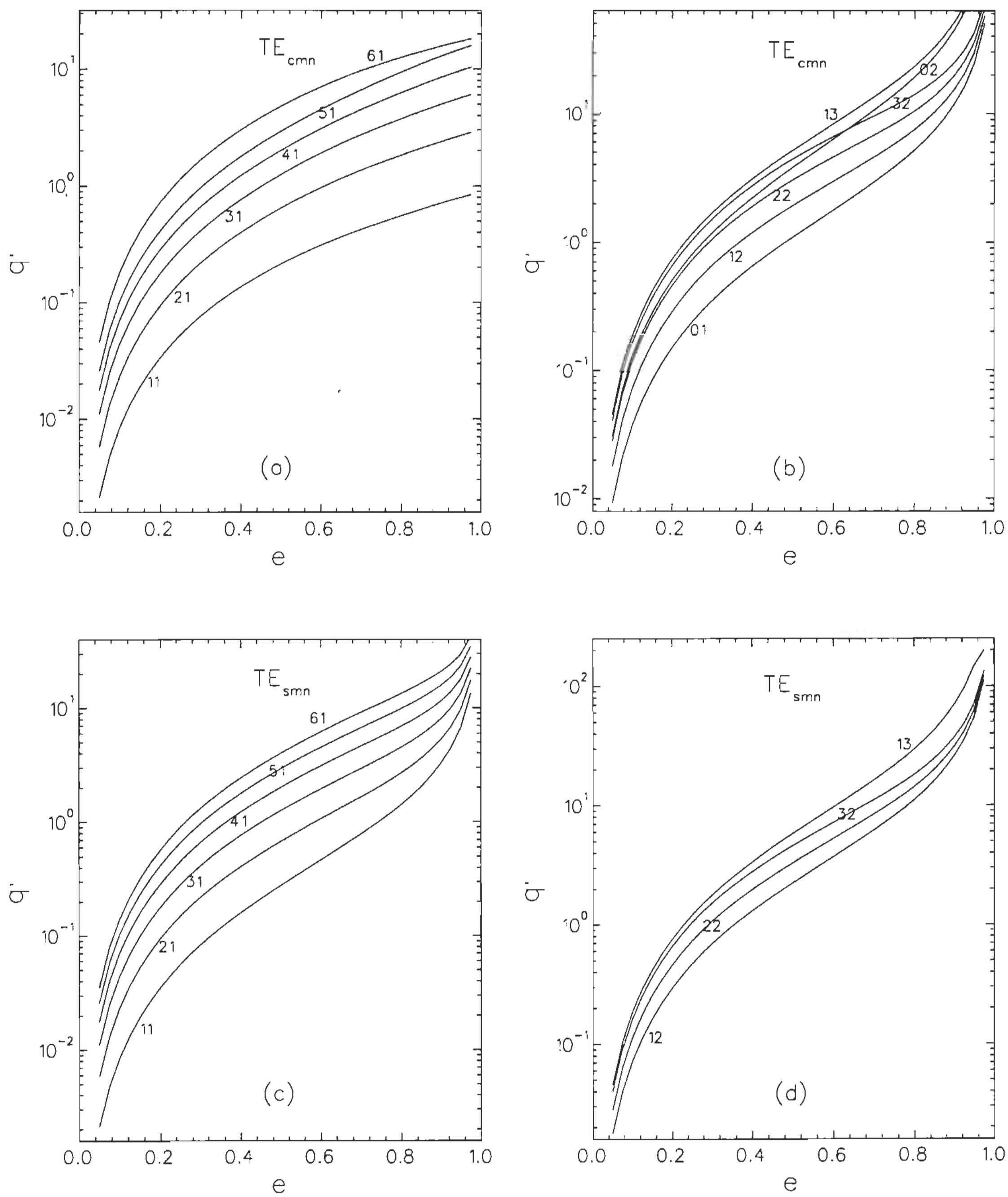


Figure 2.2 Les zéros q'_{mn} de l'équation (2.3.2) en fonction de l'excentricité e, pour les modes TE_{cmn} et TE_{smn}.

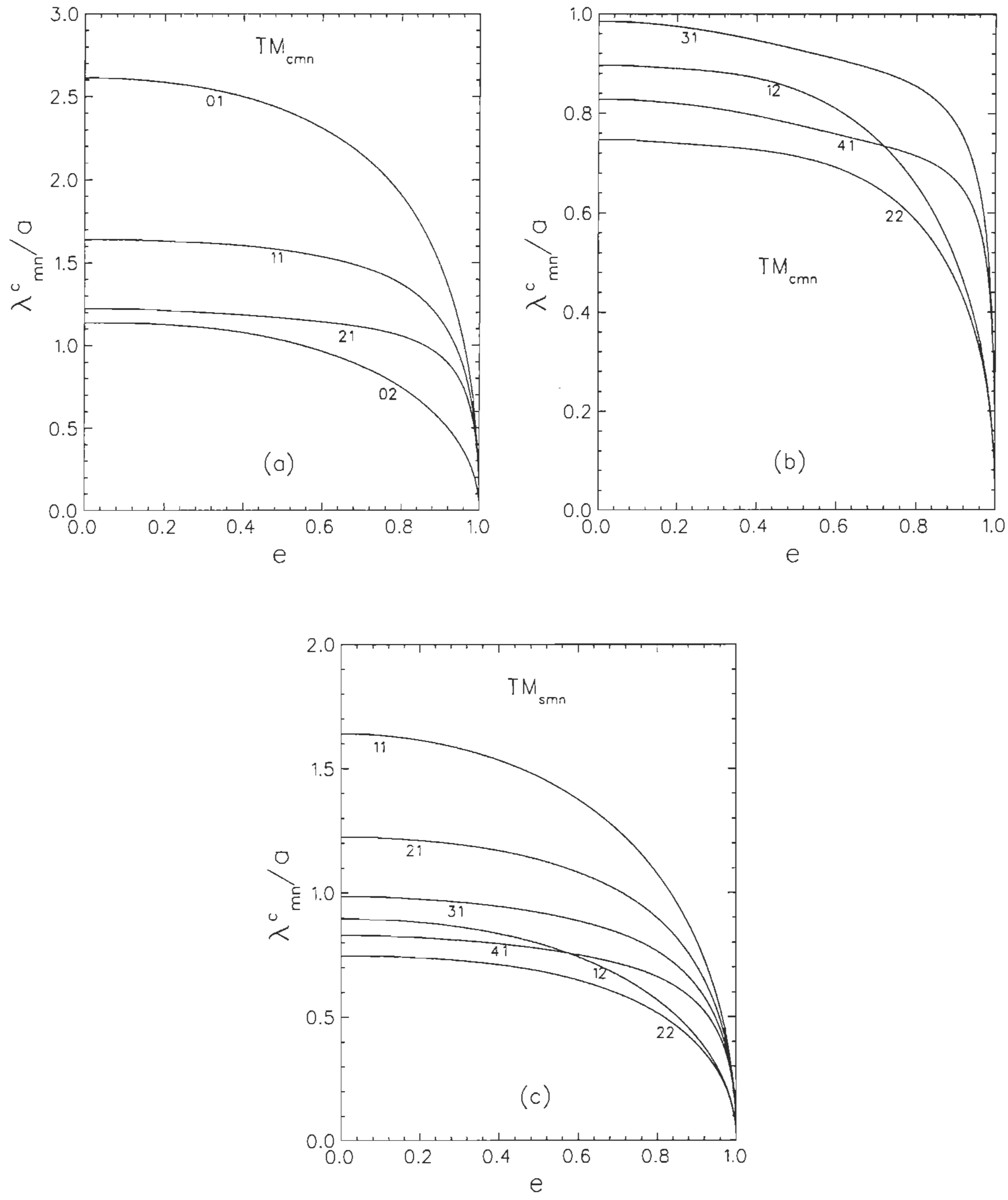


Figure 2.3 Longueur d'onde de coupure normalisée λ^c_{mn}/a en fonction de l'excentricité, pour les modes TM_{cmn} et TM_{smn}.

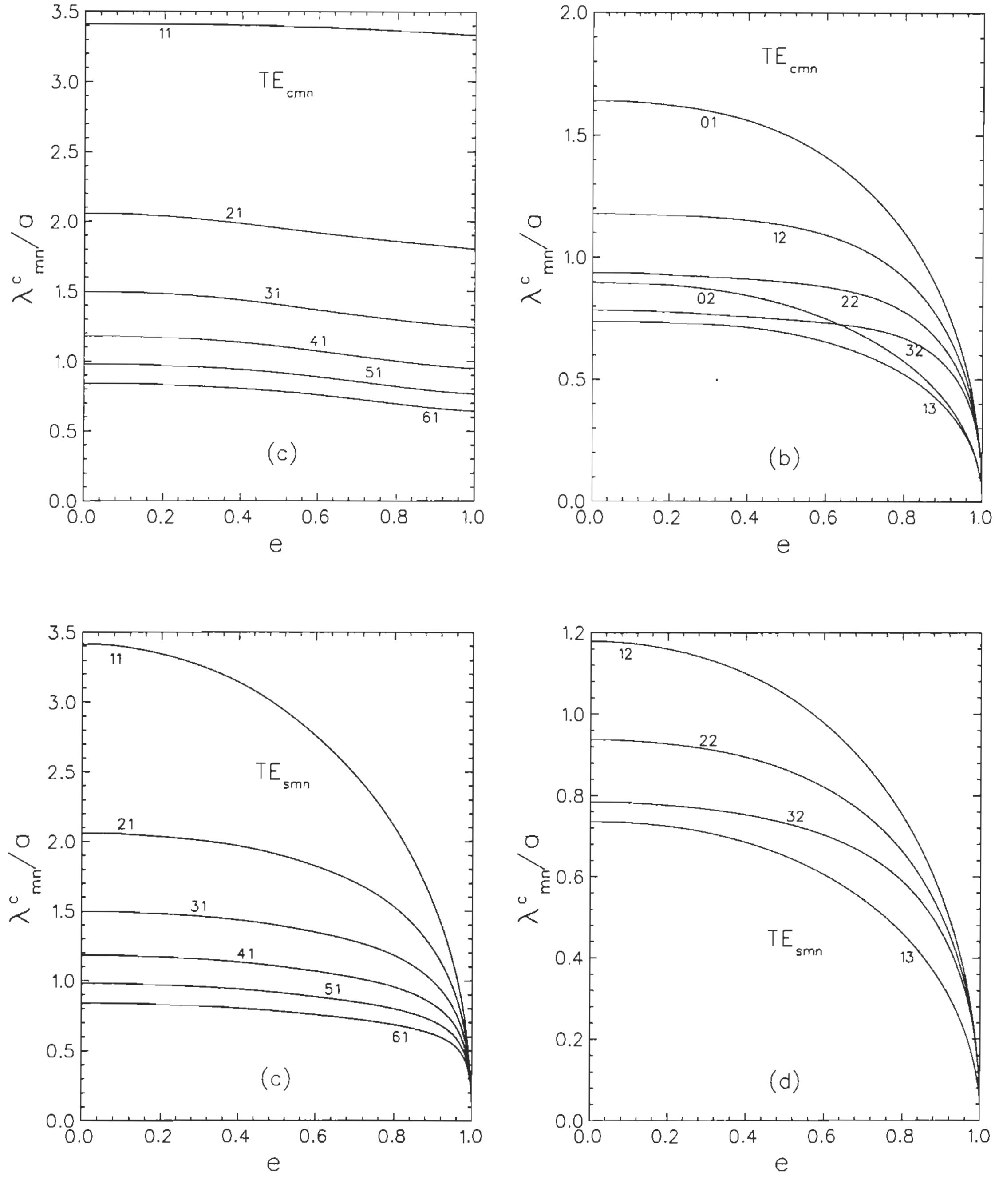


Figure 2.4 Longueur d'onde de coupure normalisée λ^c_{mn}/a en fonction de l'excentricité, pour les modes TE_{cmn} et TE_{smn}.

2.4 Paramétrisation de q_{mn}/e^2 et q'_{mn}/e^2

Le calcul exact des zéros de la fonction de Mathieu modifiée et de sa dérivée à $\xi = \xi_0$, pour une excentricité e donnée du guide, est un processus long et complexe, comme nous l'avons vu à la section précédente. Le calcul ne peut être effectué que numériquement. Il serait donc utile, du point de vue pratique, de trouver une expression approximative donnant rapidement les q_{mn} et q'_{mn} en fonction de e, avec une erreur raisonnable. Une telle expression serait effectivement intéressante car elle permet d'en déduire la fréquence de coupure d'un mode de propagation ainsi que les autres paramètres de propagation.

Nous avons utilisé une paramétrisation polynômiale de la forme suivante:

$$\frac{q_{mn}}{e^2} = A_0 + A_1\,e + A_2\,e^2 + A_3\,e^3 + A_4\,e^4 + A_5\,e^5 + A_6\,e^6 + A_7\,\frac{e}{1-e} \quad (2.4.1)$$

où les A_i sont des coefficients à déterminer (la même paramétrisation s'applique également à q'_{mn}/e^2). Le choix d'une telle paramétrisation est dicté par les observations suivantes. Nous savons que lorsque $e = 0$, le guide devient circulaire et que les fonctions de Mathieu modifiées $Ce_m(\xi,\,q)$ et $Se_m(\xi,\,q)$ tendent vers les fonctions de Bessel $J_m(k\,r)$, ξ devenant la coordonnée radiale polaire r, et le demi-axe majeur a devenant le rayon du guide. De plus, le paramètre q devient nul à cette limite (éqs. 1.1.12 et 1.1.13b):

$$\left.\begin{matrix} Ce_m(\xi,\,q) \\ Se_m(\xi,\,q) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{e=0} J_m(k\,r) \quad (2.4.2)$$

Les zéros de $Ce_m(\xi,\,q)$ ou $Se_m(\xi,\,q)$ à $\xi = \xi_0$ deviennent donc les zéros de $J_m(k\,r)$ à $r = a$. Si l'on désigne les zéros de $J_m(k\,a)$ par u_{mn},

$$u_{mn} = k_{mn}\,a \qquad n = 1,\,2,\,3,\ldots \quad (2.4.3)$$

on obtient donc, en utilisant l'équation (2.2.6):

$$k_{mn}\,a = \frac{2}{e}\,\sqrt{q_{mn}} \xrightarrow{e=0} u_{mn} \quad (2.4.4)$$

On voit donc que lorsque l'excentricité tend vers zéro, q_{mn} tend aussi vers zéro mais le rapport $\sqrt{q_{mn}}/e$ tend vers une constante bien définie:

$$\left(\frac{q_{mn}}{e^2}\right) \xrightarrow{e=0} \left(\frac{u_{mn}}{2}\right)^2 \qquad (2.4.5)$$

En comparant l'équation ci-dessus et (2.4.1), on déduit que, pour les modes TM,

$$A_0 = \left(\frac{u_{mn}}{2}\right)^2 \qquad (2.4.6)$$

Pour les modes TE, le même raisonnement donne:

$$A_0 = \left(\frac{u'_{mn}}{2}\right)^2 \qquad (2.4.7)$$

où u'_{mn} est le $n^{ième}$ zéro de la dérivée de la fonction de Bessel $J_m\,(k\,a)$.

Les coefficents A_0 de la paramétrisation (2.4.1) sont donc connus. La forme du dernier terme de l'expression de q_{mn}/e^2 a été choisie en notant que la longueur d'onde de coupure dans le guide doit s'annuler pour $e = 1$, sauf pour les modes TE_{cm1} pour lesquels on posera $A_7 = 0$.

Nous avons trouvé que la forme (2.4.1) de la paramétrisation de q_{mn}/e^2 et de q'_{mn}/e^2 est celle qui reproduit le mieux les résultats exacts, suite à une étude de régression polynômiale pour déterminer les coefficients A_i correspondant à chacun des 36 premiers modes elliptiques. L'erreur maximale introduite par cette paramétrisation, quels que soient le mode et l'excentricité e dans l'intervalle [0, 0,975], est inférieure à 0,2%. Le tableau II.1 donne les coefficients A_i ainsi que l'erreur relative maximale sur q_{mn}/e^2 (modes TM) ou q'_{mn}/e^2 (modes TE) pour chaque mode de propagation.

L'avantage de la paramétrisation (2.4.1) est qu'elle est représentée par une seule forme polynômiale pour l'ensemble des 36 modes et qu'elle introduit une très faible erreur. Kretzschmar [3] a suggéré une autre paramétrisation pour les 8 premiers modes de propagation qui diffère d'un mode à l'autre. Pour minimiser l'erreur, il a toutefois été contraint de diviser l'intervalle [0, 1] de l'excentricité en deux parties et de les traiter séparément, causant une divergen-

Tableau II.1 Les coefficients A_i de l'expression (2.4.1) de q_{mn}/ϵ^2 et q'_{mn}/ϵ^2 des 36 premiers modes elliptiques. $|\epsilon|_{max}(\%)$ est l'erreur relative maximale résultante.

Mode	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$\lvert\epsilon\rvert_{max}(\%)$
TE_{c11}	0,847486	0,000256	0.032406	0.006927	-0,003683	0,006427	0,000000	0,000000	0,003
TE_{s11}	0,847486	-0,429987	2.130303	-9.483530	23,111159	-26,114251	11,386350	0,329671	0,229
TM_{c01}	1,445796	-0,419727	1,865239	-8.454162	20,320517	-22,760483	9,730647	0,329560	0,122
TE_{c21}	2,332095	0,017522	0.893324	1.371661	-2,896634	1,321524	0,000000	0,000000	0,090
TE_{s21}	2,332095	-0.686616	5.951311	-29.019980	71,599672	-81,170532	35,319403	0,372053	0,258
TE_{c01}	3,670493	-1,477710	3.839318	-19,269851	45,300984	-48,638368	20,472084	1,276247	0,105
TM_{c11}	3,670500	-0,625593	4,684358	-23,173626	56,387419	-63,241351	26,968913	0,371500	0,145
TM_{s11}	3,670500	-1,464559	4,556240	-18,298509	43,282384	-48,378899	20,808114	1,276017	0,098
TE_{c31}	4,412499	0,193767	0,063289	7,188891	-7,447044	1,993021	0,000000	0,000000	0,130
TE_{s31}	4,412499	-0,953700	10,629687	-49,450978	121,808517	-138,428084	60,020268	0,414239	0,233
TM_{c21}	6,593648	-0,798551	8.976149	-32.235461	68,942639	-76,100256	33,098349	0,412517	0,163
TM_{s21}	6,593648	-1,926136	11.175522	-52.459659	127,594894	-143,607599	61,842464	1,360596	0,164
TE_{c41}	7,069085	0,056820	3.398119	-2.236919	10,387585	-7,697354	0.000000	0,000000	0,209
TE_{s41}	7,069085	-1,221622	15.621024	-70.047299	173.220589	-195,880052	83.870084	0,456121	0,225
TE_{c12}	7,106063	-1,824376	7.759872	-42,154475	100,623121	-114,225030	51,626979	1.360717	0,127
TE_{s12}	7,106063	-3,123660	7.261344	-28.470473	66,299052	-73,100331	31,311014	2,839451	0,077
TM_{c02}	7,617816	-3,108005	5,571165	-30.032502	79,441157	-89,523923	37,607232	2,838969	0,065
TM_{c31}	10,176610	-0,605162	7.175235	-15.767753	47,611579	-72,699110	37.490394	0,449558	0,124

Tableau II.1 (Suite)

Mode	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$\|\epsilon\|_{max}(\%)$
TM_{s31}	10,176610	-2,374047	18.785631	-84,869640	204,299563	-230,608143	99,634272	1,444957	0,175
TE_{c51}	10,290045	-0,556325	12.208545	-29,322433	51,218746	-27,037105	0,000000	0.000000	0,146
TE_{s51}	10,290045	-1,658782	22.623255	-96,638587	232,964013	-255,824109	106,419943	0.497140	0,219
TE_{c22}	11,243045	-2,366037	19.544023	-86.565159	189,922680	-214,280714	97,374283	1,442704	0,153
TE_{s22}	11,243045	-3,800021	16.258185	-78,062371	188,113770	-210,784050	91,445576	2.966530	0,142
TE_{c02}	12,304614	-5,193992	3.950919	-22,389972	75,539944	-96,114834	43,523257	5.019064	0,030
TM_{c12}	12,304626	-4,108971	18.720554	-104,328255	243,186745	-253,401623	102,274458	2,967308	0,177
TM_{s12}	12,304626	-5,398669	10.431185	-39.655380	93,380053	-102,784535	43,575893	5.019462	0,059
TE_{c61}	14,067263	-4,239657	44.102983	-115,524848	155.821987	-70,368056	0,000000	0,000000	0,120
TE_{s61}	14,067263	-1,816317	26.307711	-105,954998	253,710703	-273,615047	111,988405	0,537566	0,209
TM_{c41}	14,395726	-0,949195	15.523018	-57,312547	165,263771	-209,831129	92,445128	0,481300	0,071
TM_{s41}	14,395726	-2,754355	25.662894	-112,103065	274,581132	-315,025097	136,976917	1.528378	0,163
TE_{c32}	16,061018	-2,521248	22.073278	-84,440953	206,193663	-271,888591	136,236565	1.523728	0,142
TE_{s32}	16,061018	-4,480391	27.578424	-127,913507	302,480594	-340,989775	149,614105	3.093084	0,165
TM_{c22}	17,712482	-4,874989	34.731975	-159,670841	320,292625	-309,834485	123,996049	3.097719	0,191
TM_{s22}	17,712482	-5,628563	10.108116	-42,644963	102,300526	112,002850	50.445115	5.246637	0,039
TE_{c13}	18,217190	-6.650043	24.598020	-153,525004	384,646107	-414,994866	168,672449	5.187261	0,143
TE_{s13}	18,217190	-7.957829	8.010941	-20.337366	49,741709	-57,067333	25,491218	7.839448	0,012

ce de l'erreur relative pour des excentricités $e \approx 0,5$. Ses calculs mènent par ailleurs à des erreurs relatives sur q_{mn}/e^2 et q'_{mn}/e^2 appréciablement plus élevées que les nôtres. Cela est illustré à la figure 2.5 où nous comparons les résultats de Kretzschmar à ceux obtenus à partir de l'expression (2.4.1) pour le mode TM_{c11}. La figure 2.6 présente nos résultats pour deux autres modes (TM_{s11} et TE_{s31}). Notons que d'après les équations (2.2.8) et (2.2.9), l'erreur relative sur les fréquences de coupure et les longueurs d'onde de coupure est la moitié de celle commise sur q_{mn}/e^2 (q'_{mn}/e^2).

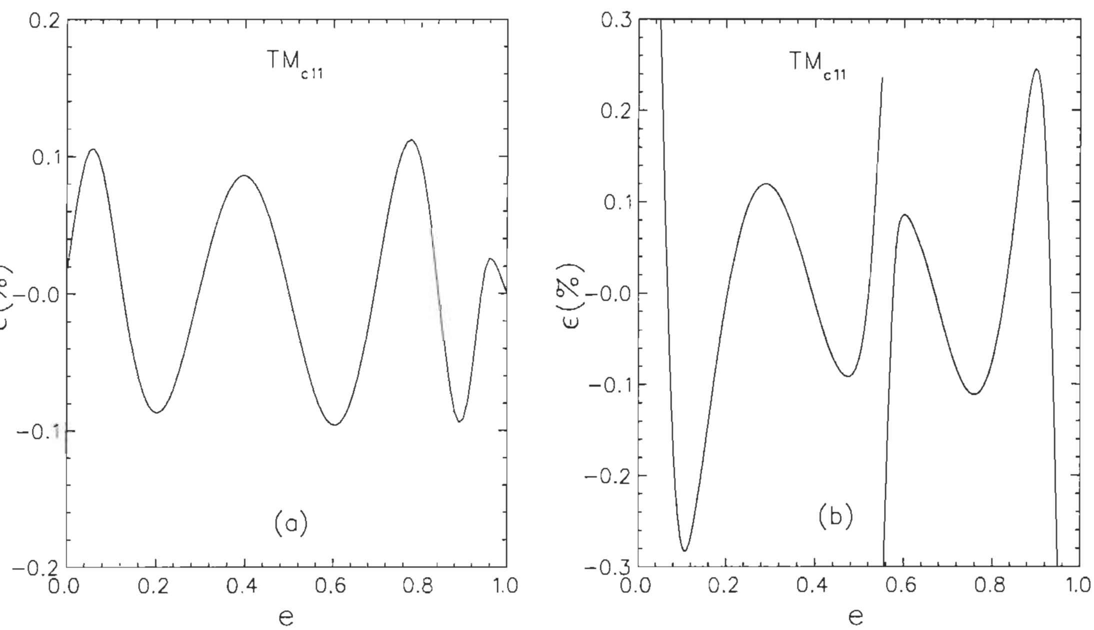


Figure 2.5 a) Erreur relative ϵ (%) entre les valeurs numériques exactes et celles données par l'expression (2.4.1) en fonction de l'excentricité, pour le mode TM_{c11}.
b) Résultats de Kretzschmar [3].

La figure 2.7 montre la longueur d'onde de coupure normalisée λ^c_{mn}/a (le rapport de la longueur d'onde de coupure au demi-axe majeur) pour les 36 premiers modes elliptiques en fonction de l'excentricité. Les modes pour lesquels λ^c_{mn}/a ne tombe pas à zéro pour $e = 1$ sont les modes TE_{cm1} ($m = 1, 2, 3, ...$), les seuls qui survivent dans le guide lorsque celui-ci prend une forme très applatie.

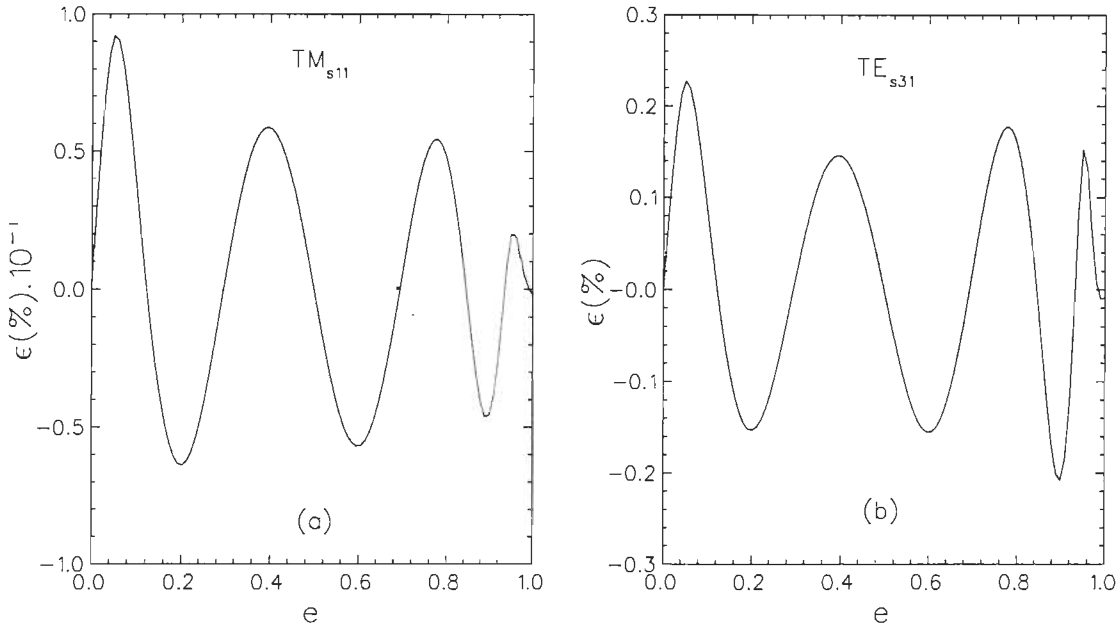


Figure 2.6 Erreur relative $\epsilon(\%)$ entre les valeurs numériques exactes de q_{mn}/e^2 (mode TM_{s11}) et q'_{mn}/e^2 (mode TE_{s31}) et celles données par l'expression (2.4.1), en fonction de l'excentricité.

2.5 Classification des 36 premiers modes du guide d'ondes elliptique

La figure 2.7 indique clairement que l'ordre des modes de propagation dans le guide d'ondes elliptique varie avec l'excentricité. Le tableau II.2 montre la classification selon la fréquence de coupure des 20 premiers modes de propagation dans un guide d'ondes circulaire ($e = 0$) desquels sont issus les 36 premiers modes elliptiques considérés dans ce travail. Le tableau II.3 indique comment cette classification est modifiée par un changement d'excentricité.

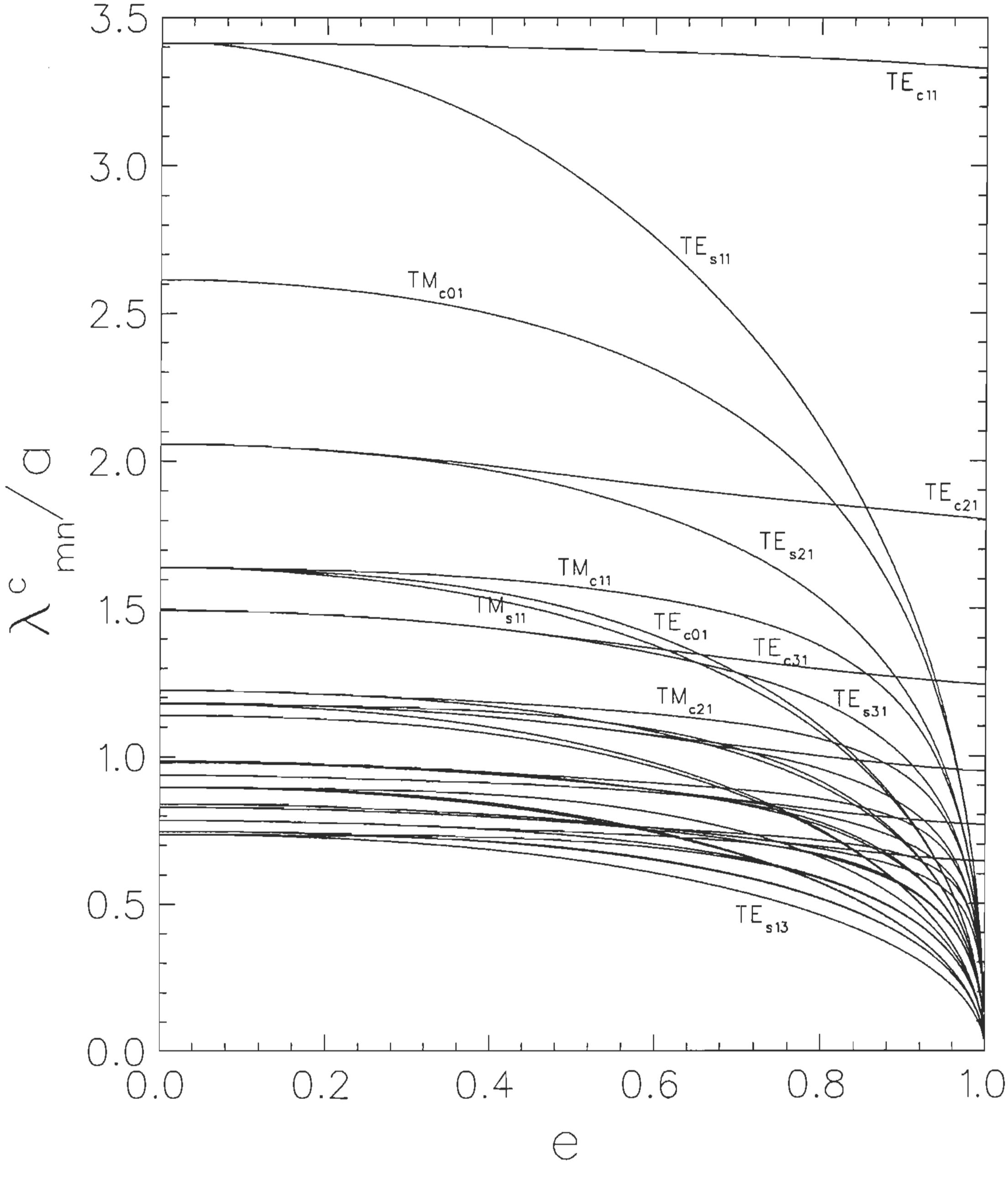


Figure 2.7 Longueur d'onde de coupure normalisée λ^c_{mn}/a des 36 premiers modes elliptiques, en fonction de l'excentricité e.

Tableau II.2 Classification des 20 premiers modes de propagation dans un guide d'ondes circulaire.

Mode	$(a/v_p^0)f_{mn}^c$
TE_{11}	0,293032898
TM_{01}	0,382739875
TE_{21}	0,486097393
TE_{01}	0,609834946
TM_{11}	0,609835587
TE_{31}	0,668635381
TM_{21}	0,817359309
TE_{41}	0,846314368
TE_{12}	0,848525030
TM_{02}	0,878547718
TM_{31}	1,015434002
TE_{51}	1,021077636
TE_{22}	1,067313739
TE_{02}	1,116565297
TM_{12}	1,116565827
TE_{61}	1,193864200
TM_{41}	1,207721821
TE_{32}	1,275665066
TM_{22}	1,339645353
TE_{13}	1,358597524

f_{mn}^c est la fréquence de coupure en (Hz), a le rayon en (m),
v_p^0 la vitesse de la lumière dans le milieu sans frontières en (m/s).

Tableau II.3 Classification des 36 premiers modes de propagation dans un guide d'ondes elliptique pour différentes excentricités.

e=0.35		e=0.65		e=0.975	
Mode	$(a/v_p^0)f_{mn}^c$	**Mode**	$(a/v_p^0)f_{mn}^c$	**Mode**	$(a/v_p^0)f_{mn}^c$
TE_{c11}	0,293781710	TE_{c11}	0,295760055	TE_{c11}	0,299836518
TE_{s11}	0,311950099	TE_{s11}	0,380508699	TE_{c21}	0,552839515
TM_{c01}	0,395849400	TM_{c01}	0,446840025	TE_{c31}	0,802694168
TE_{c21}	0,500241452	TE_{c21}	0,526380598	TE_{c41}	1,051355222
TE_{s21}	0,502593250	TM_{s11}	0,757821044	TE_{s11}	1,198516430
TM_{c11}	0,620329990	TE_{s21}	0,564469523	TM_{c01}	1,211838226
TE_{c01}	0,632517886	TM_{c11}	0,662166176	TE_{c51}	1,299368189
TM_{s11}	0,640910026	TE_{c01}	0,739349267	TE_{s21}	1,367445487
TE_{c31}	0,689857505	TE_{c31}	0,742697640	TM_{c11}	1,384664144
TE_{s31}	0,690091807	TE_{s31}	0,758286782	TE_{s31}	1,545417798
TM_{c21}	0,839359630	TM_{c21}	0,886065284	TE_{c61}	1,546957157
TM_{s21}	0,845268385	TE_{c12}	0,941277897	TM_{c21}	1,567091750
TE_{c12}	0,863131036	TE_{c41}	0,948925722	TE_{s41}	1,731234470
TE_{c41}	0,873447006	TM_{s21}	0,952529995	TM_{c31}	1,757875513
TE_{s41}	0,873452733	TE_{s41}	0,954678523	TE_{s51}	1,923810176
TE_{s12}	0,893644902	TE_{s12}	1,070457328	TM_{c41}	1,955867660
TM_{c02}	0,914097098	TM_{c02}	1,084248667	TE_{s61}	2,122191684
TM_{c31}	1,046641780	TM_{c31}	1,112004222	TE_{c01}	2,327362214
TM_{s31}	1,047674338	TE_{c51}	1,148853616	TM_{s11}	2,333425297
TE_{c51}	1,053880341	TE_{s51}	1,150819382	TE_{c12}	2,492861079
TE_{s51}	1,053882030	TM_{s31}	1,154791639	TM_{s21}	2,499759129
TE_{c22}	1,092824604	TE_{c22}	1,158433070	TE_{c22}	2,663481854
TE_{s22}	1,104825010	TE_{s22}	1,262163580	TM_{s31}	2,671269089
TM_{c12}	1,138961304	TM_{c12}	1,277834460	TE_{c32}	2,838906704
TE_{c02}	1,166234239	TM_{c41}	1,336041573	TM_{s41}	2,847632822
TM_{s12}	1,175624036	TE_{c61}	1,345171452	TE_{s12}	3,453530693
TE_{c61}	1,232271826	TE_{s61}	1,345809568	TM_{c02}	3,457467384
TE_{s61}	1,232271975	TM_{s41}	1,360870897	TE_{s22}	3,617507139
TM_{c41}	1,245811673	TE_{c32}	1,384247375	TM_{c12}	3,621802388
TM_{s41}	1,245948686	TE_{c02}	1,401285420	TE_{s32}	3,785015262
TE_{c32}	1,312848244	TM_{s12}	1,411346145	TM_{c22}	3,789685110
TE_{s32}	1,315866150	TE_{s32}	1,462648970	TE_{c02}	4,579134609

Tableau II.3 (Suite)

e=0.35		e=0.65		e=0.975	
Mode	$(a/v_p^0)f_{mn}^c$	**Mode**	$(a/v_p^0)f_{mn}^c$	**Mode**	$(a/v_p^0)f_{mn}^c$
TM_{c22}	1,369337685	TM_{c22}	1,481980697	TM_{s12}	4,582050298
TM_{s22}	1,388062923	TE_{c13}	1,590910795	TE_{s13}	4,634036291
TE_{c13}	1,388528849	TM_{s22}	1,601389407	TE_{c13}	4,742292985
TE_{s13}	1,432654267	TE_{s13}	1,731285665	TM_{s22}	4,745407299

2.6 Largeur de bande du guide d'ondes elliptique

L'examen de la figure 2.7 montre que la différence entre la longueur d'onde de coupure du mode dominant (TE_{c11}) et le premier mode d'ordre supérieur, que nous appelons *largeur de bande*, augmente avec l'excentricité jusqu'à $e \approx 0,82$ où les deux modes d'ordres supérieurs TE_{s11} et TE_{c21} se croisent. À $e \approx 0,82$, le rapport b/a des axes mineur et majeur est de l'ordre de 0,5. Au delà de $e \approx 0,82$, la largeur de bande garde pratiquement la même valeur. La largeur de bande du guide d'ondes elliptique d'axes $2\,a$ et $2\,b$ est comparée à celles des guides d'ondes rectangulaire de dimensions $2\,a$ et $2\,b$ et circulaire de diamètre $2\,a$. Le résultat est donné dans le tableau II.4, pour $a = 2\,b$, i.e., $e = 0,866$.

La longueur d'onde de coupure du mode dominant TE_{c11} est plus petite que la longueur d'onde de coupure des modes dominants des guides d'ondes circulaire et rectangulaire. La largeur de bande du guide d'ondes elliptique avec $a = 2\,b$ est 25% plus petite que celle du guide d'ondes rectangulaire, mais presque le double de celle du guide d'ondes circulaire.

Tableau II.4 Largeur de bande des guides d'ondes elliptique ($a = 2\,b$), circulaire ($r = a$) et rectangulaire ($a = 2\,b$).

type	Mode dominant	λ_{mn}^c	premier mode d'ordre supérieur	λ_{mn}^c	largeur de bande
Rectangulaire	TE_{10}	$4,00\,a$	TE_{01}, TE_{20}	$2,00\,a$	$2,00\,a$
Circulaire	TE_{11}	$3,41\,a$	TM_{01}	$2,61\,a$	$0,80\,a$
Elliptique	TE_{c11}	$3,35\,a$	TE_{c21}	$1,84\,a$	$1,51\,a$

2.7 Configuration des lignes de champ

Nous savons aujourd'hui que la configuration des lignes de champ du mode elliptique TM_{c01} donnée par Chu [1] est erronée. Cette configuration, donnée à la figure 2.8a, montre des lignes du champ électrique émanant des deux foyers du contour elliptique, un résultat incompatible avec la configuration du mode TM_{01} circulaire (fig. 2.8b). On se serait attendu, en effet, à ce que les lignes de champ dans le cas de faible excentricité ne soient pas trop différentes de celles correspondant au cas d'excentricité nulle.

La configuration des lignes de champ du mode TM_{c01} a été corrigé par Kretzschmar [13] (fig. 2.8c). Celle-ci est bien conforme au résultat obtenu à $e = 0$. Nous donnons ci-après la démonstration de l'erreur [14] dans les résultats de Chu car la même démonstration s'applique à la configuration également fausse des lignes de champ du mode TE_{c01} suggérée par Chu mais qui, à notre connaissance, n'a pas été relevée dans la littérature.

Les relations (2.2.2a) et (2.2.2b) donnent les composantes transversales du champ électrique pour le mode TM_{c01}:

$$E_\xi = \frac{\beta_{01}^c}{i\,\rho_1\,k_{01}^{c\,2}}\,E^m\,Ce_0'(\xi,\,q_{01}^c)\,ce_0(\eta,\,q_{01}^c)\,e^{i\,(\omega t\,-\,\beta_{01}^c\,z)} \tag{2.7.1a}$$

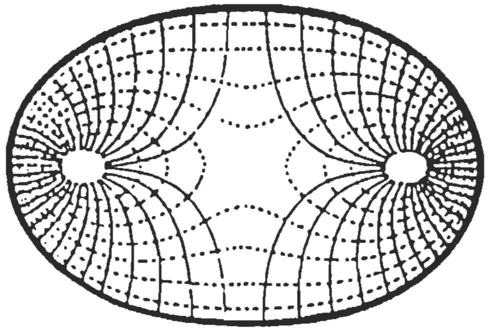
$$E_\eta = \frac{\beta_{01}^c}{i\,\rho_1\,k_{01}^{c\,2}}\,E^m\,Ce_0(\xi,\,q_{01}^c)\,ce_m'(\eta,\,q_{01}^c)\,e^{i\,(\omega t\,-\,\beta_{01}^c\,z)} \tag{2.7.1b}$$

Notons que pour les points de l'axe des x situés à droite de $x = \rho$, on a: $E_x = E_\xi$ et $\eta = 0$ (voir fig. 2.8a). Donc:

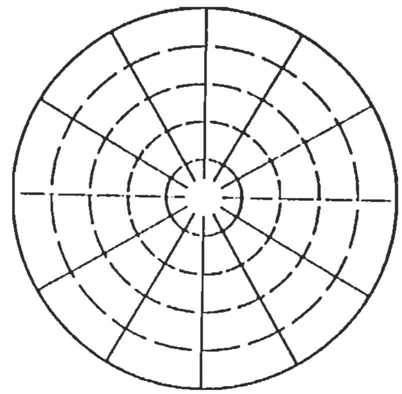
$$E_x(\xi,\,0) = \frac{\beta_{01}^c}{i\,k_{c01}^{c\,2}\,\rho\,sinh\,\xi}\,E^m\,Ce_0'(\xi,\,q_{01}^c)\,ce_0(0,\,q_{01}^c)\,e^{i\,(\omega t\,-\,\beta_{01}^c\,z)} \tag{2.7.2}$$

De même, pour les points de l'axe des x situés à gauche de $x = \rho$, on a: $E_x = -E_\eta$ et $\xi = 0$. Dans ce cas:

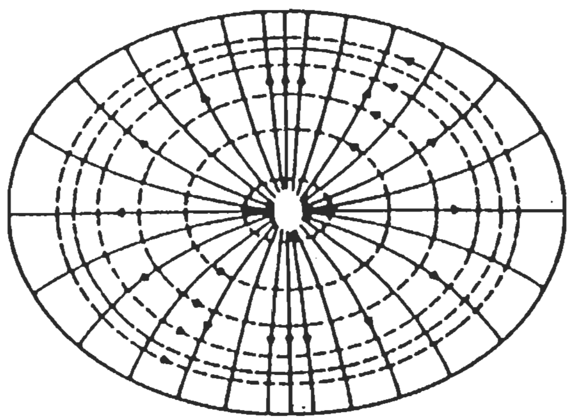
$$E_x(0,\,\eta) = -\frac{\beta_{01}^c}{i\,k_{01}^{c\,2}\,\rho\,sin\,\eta}\,E^m\,Ce_0(0,\,q_{01}^c)\,ce_0'(\eta,\,q_{01}^c)\,e^{i\,(\omega t\,-\,\beta_{01}^c\,z)} \tag{2.7.3}$$



(a)



(b)



(c)

Figure 2.8 a) Configuration érronée des lignes de champ du mode TM_{c01} donnée par Chu [1].
b) Configuration des lignes de champ du mode TM_{01} du guide d'onde circulaire.
c) Configuration correcte des lignes de champ du mode TM_{c01} [13].
--- Lignes du champ magnétique.
— Lignes du champ électrique.

Nous constatons que le signe de E_x de part et d'autre du foyer de l'ellipse dépend du signe de $Ce_0^{'}(\xi,\, q_{01}^c)$ et $ce_0^{'}(\eta,\, q_{01}^c)$. Ainsi, pour une ellipse d'excentricité $e\ =\ 0,75$ et $q_{01}^c\ =\ 1,33$ correspondant à la fréquence de coupure du mode TM_{c01}, $Ce_0^{'}(\xi,\, q_{01}^c)$ est négatif (fig. 2.9b); $ce_0^{'}(\eta,\, q_{01})$ est positif dans la région

$0 \leq \eta \leq \pi/2$ (fig. 2.9a). Par conséquent, le signe de E_x est le même de part et d'autre du foyer de l'ellipse, un résultat qui est également vrai pour l'autre foyer de l'ellipse. Cela contredit la configuration des lignes de champ du mode TM_{c01} donné par Chu (fig. 2.8a).

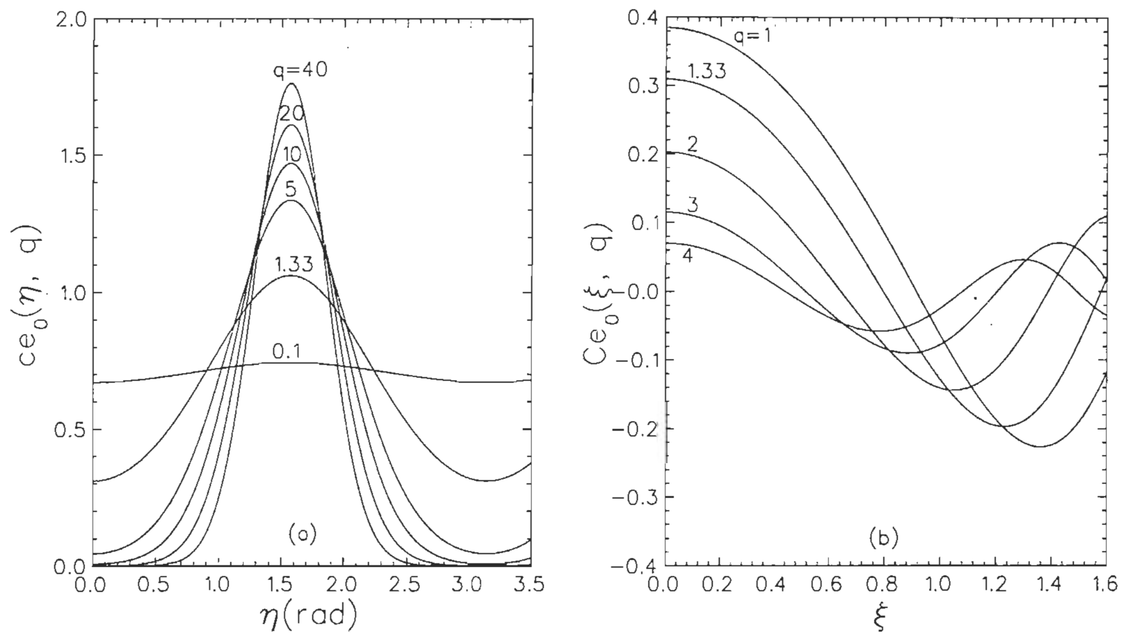


Figure 2.9 a) Fonction de Mathieu paire d'ordre 0.
b) Fonction de Mathieu modifiée paire d'ordre 0.

Les lignes du champ magnétique sont déduites de l'équation différentielle

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{H_\eta}{H_\xi} \tag{2.7.4}$$

En utilisant les relations (2.2.2a) et (2.2.2b), les composantes transversales du champ magnétique pour le mode TM_{c01} sont:

$$H_\xi = -\frac{\omega\,\varepsilon}{i\,\rho_1\,k_{01}^{c\,2}}\,E^m\,Ce_0\,(\xi,\,q_{01}^c)\,ce_0'\,(\eta,\,q_{01}^c)\,e^{i\,(\omega\,t\,-\,\beta_{01}^c\,z)} \tag{2.7.5a}$$

$$H_\eta = \frac{\omega\,\varepsilon}{i\,\rho_1\,k_{01}^{c\,2}}\,E^m\,Ce_0'\,(\xi,\,q_{01}^c)\,ce_0\,(\eta,\,q_{01}^c)\,e^{i\,(\omega\,t\,-\,\beta_{01}^c\,z)} \tag{2.7.5b}$$

D'où:

$$\frac{H_\eta}{H_\xi} = -\frac{Ce_0'(\xi,\, q_{01}^c)\, ce_0(\eta,\, q_{01}^c)}{Ce_0(\xi,\, q_{01}^c)\, ce_0'(\eta,\, q_{01}^c)} \tag{2.7.6}$$

L'intégration de l'équation (2.7.4) donne l'équation des lignes du champ magnétique:

$$Ce_0(\xi,\, q_{01}^c)\, ce_0(\eta,\, q_{01}^c) = \text{constante} \tag{2.7.7}$$

En comparant l'équation ci-dessus à celle donnant la composante E_z du champ électrique (éq. 2.2.1b):

$$E_z = H^m\, Ce_0(\xi,\, q_{01}^c)\, ce_0(\eta,\, q_{01}^c)\, e^{i(\omega t - \beta_{01}^c z)} \tag{2.7.8}$$

on en déduit que pour une section donnée du guide, les lignes du champ magnétique correspondent à:

$$E_z(\xi,\, \eta,\, z) = \text{constante} \tag{2.7.9}$$

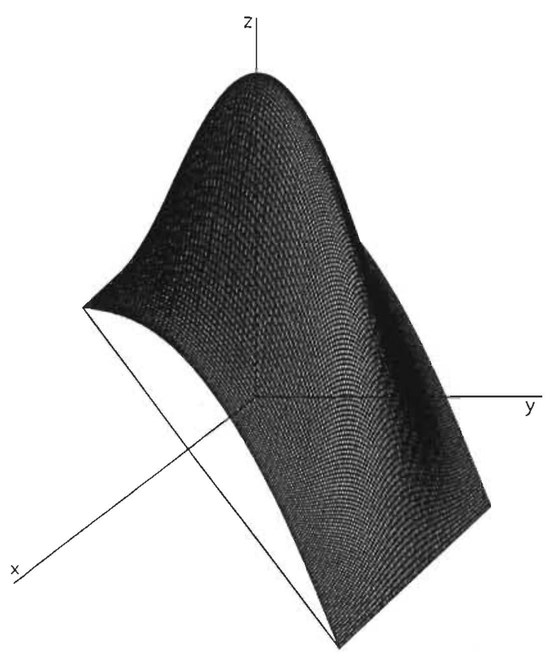
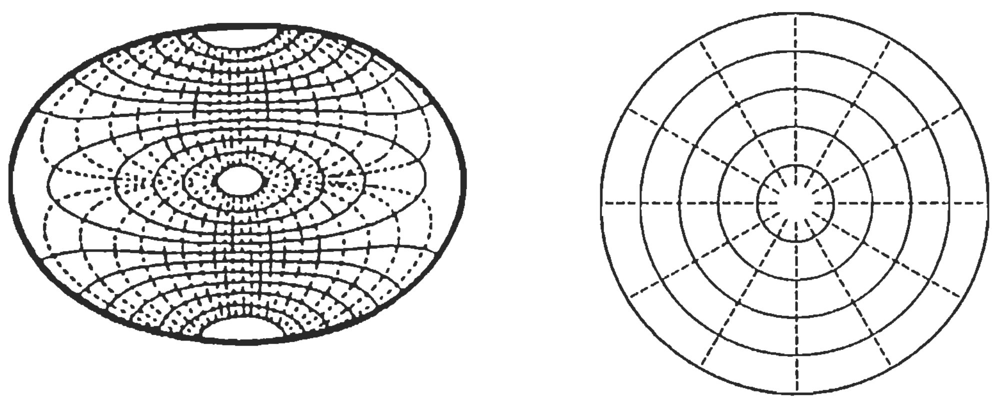


Figure 2.10 La fonction tridimentionnelle $E_z(\xi,\, \eta,\, z)$.

La figure 2.10 montre la fonction tridimensionnelle $E_z(\xi, \eta, z)$ dont l'intersection avec les plans z = constante donne des ellipses concentriques qui représentent les lignes elliptiques du champ magnétique (fig. 2.8c). Les lignes du champ électrique sont normales aux lignes du champ magnétique (fig. 2.8c).

Comme nous l'avons déjà signalé, la configuration des lignes de champ du mode TE_{c01} donnée par Chu (fig. 2.11a) est également fausse. Là aussi, elle est incompatible avec celle du mode circulaire TE_{01} (fig. 2.11b). La même démonstration que celle donnée plus haut pour le mode TM_{c01} peut être faite. Notons toutefois, en observant les résultats des modes TM_{01} et TE_{01} circulaires (fig. 2.8b et 2.11b), que le mode TE_{c01} est le dual du mode TM_{c01}: les lignes des champs électrique et magnétique sont interchangées.



(a) (b)

Figure 2.11 a) Configuration érronée des lignes de champ du mode TE_{c01} donnée par Chu [1].
b) Configuration des lignes de champ du mode TE_{01} du guide d'onde circulaire.
--- Lignes du champ magnétique.
— Lignes du champ électrique.

Les composantes des champs E et H pour le mode TE_{c01} sont obtenues à partir des équations (2.2.14b), (2.2.15a) et (2.2.15b):

$$H_z = H^m \, Ce_0(\xi, q'^c_{01}) \, ce_0(\eta, q'^c_{01}) \, e^{i(\omega t - \beta^c_{01} z)} \tag{2.7.10a}$$

$$H_\xi = -\frac{\beta^c_{01}}{\mu\,\omega}\,E_\eta = \frac{\beta^c_{01}}{i\,\rho_1\,k^{c2}_{01}}\,H^m\,Ce_0'(\xi,\,q'^c_{01})\,ce_0(\eta,\,q'^c_{01})\,e^{i\,(\omega\,t - \beta^c_{01}\,z)} \tag{2.7.10b}$$

$$H_\eta = \frac{\beta^c_{01}}{\mu\,\omega}\,E_\xi = \frac{\beta^c_{01}}{i\,\rho_1\,k^{c2}_{01}}\,H^m\,Ce_0(\xi,\,q'^c_{01})\,ce_0'(\eta,\,q'^c_{01})\,e^{i\,(\omega\,t - \beta^c_{01}\,z)} \tag{2.7.10c}$$

L'équation des lignes du champ électrique est donnée par:

$$\frac{d\,\eta}{d\,\xi} = \frac{E_\eta}{E_\xi} \tag{2.7.11}$$

qui donne, après integration:

$$Ce_0(\xi,\,q'^c_{01})\,ce_0(\eta,\,q'^c_{01}) = \text{constante} \tag{2.7.12}$$

L'équation ci-dessus définit une famille de courbes elliptiques analogues à celles représentant les lignes du champ magnétique du mode TM_{c01} (éq. 2.7.7). En comparant l'expression ci-dessus à celle de H_z (éq. 2.7.10a), on en déduit que les lignes de **E** sont en fait les contours de la surface

$$H_z(\xi, \eta,\, z) = \text{constante}, \tag{2.7.13}$$

l'analogue de l'équation (2.7.9) pour E_z (fig. 2.10). Les lignes du champ électrique du mode TE_{c01} correspondent donc aux lignes du champ magnétique du mode TM_{c01} et vice-versa (fig. 2.8c).

La configuration des champs électrique et magnétique des autres modes se traite de la même façon, quoique sa détermination se complique rapidement à mesure que l'ordre augmente.

2.8 Conclusion

Nous avons vu que chaque mode de propagation dans un guide circulaire se dédouble en deux modes elliptiques lorsque l'excentricité est différente de zéro: un mode pair et un mode impair. De plus, l'ordre des modes dans le guide elliptique est différent de celui du guide circulaire et varie avec l'excentricité.

Nous avons calculé les valeurs exactes des fréquences et longueurs d'onde de coupure et présenté des expressions analytiques assez précises de ces paramètres. Nous avons enfin examiné la configuration du champ électromagnétique des modes TM_{c01} et TE_{c01} qui présentent un intérêt particulier du fait que les premiers calculs effectués par Chu se sont avérés erronés.

CHAPITRE III

LES PERTES DANS UN GUIDE D'ONDES ELLIPTIQUE

3.1 Introduction

Jusqu'ici, nous avons considéré des guides d'ondes sans pertes dans lesquels le conducteur et le diélectrique sont parfaits. Les ondes transmises, qu'elles soient du type $TE_c\,(TE_s)$ ou $TM_c\,(TM_s)$, varient comme $e^{j(\omega t - \beta z)}$. Pour des fréquences d'opération ω au-dessus des fréquences de coupure, le facteur de phase β est réel, alors que pour des fréquences plus petites que les fréquences de coupure des différents modes, β est purement imaginaire, ce qui correspond à une onde évanescente qui s'atténue à mesure qu'elle se propage. Mais en pratique, ni le conducteur ni le diélectrique ne sont parfaits quoique, avec les guides d'ondes de très haute qualité, on tend vers cette situation. Ceci réduit l'amplitude de l'onde transmise à mesure qu'elle se propage. Ce qui veut dire que β possède une faible partie imaginaire.

Dans ce qui suit, on donne une méthode approximative pour calculer l'atténuation. On dit approximative car le problème, traité de façon exacte, est très compliqué. Par exemple, on ne peut plus utiliser le fait que dans la paroi du guide, le champ électromagnétique est nul, ce qui complique grandement les conditions imposées aux champs **E** et **H** à la paroi. Mais l'atténuation est très faible en pratique, et la méthode suffit.

3.2 Les pertes dans le diélectrique

Considérons d'abord les pertes dans le diélectrique qui remplit le guide d'ondes. Dans ce milieu, la loi de Maxwell-Ampère s'écrit, pour des champs sinusoïdaux:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma_d \, \mathbf{E} + i \, \varepsilon \, \omega \, \mathbf{E} \tag{3.2.1}$$

Si le diélectrique est parfait, $\sigma_d = 0$. Dans ce cas:

$$\nabla \times \mathbf{H} = i \, \varepsilon \, \omega \, \mathbf{E} \tag{3.2.2}$$

C'est l'équation que nous avons utilisée jusqu'ici. Mais le diélectrique n'est pas parfait: la conductivité σ_d est très faible, mais non nulle. Dans ce cas, on peut écrire:

$$\nabla \times \mathbf{H} = i \, \omega \left(\varepsilon - i \, \frac{\sigma_d}{\omega} \right) \mathbf{E} \tag{3.2.3}$$

Introduisons la permitivité *effective* du milieu diélectrique,

$$\varepsilon_{eff} \equiv \varepsilon - i \, \frac{\sigma_d}{\omega} \tag{3.2.4}$$

qui est complexe. On peut l'écrire sous la forme:

$$\varepsilon_{eff} = |\varepsilon_{eff}| \, e^{i \, \delta_d} \tag{3.2.5}$$

où

$$|\varepsilon_{eff}| = \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma_d}{\omega} \right)^2} \quad , \quad tan \, |\delta_d| = \frac{\sigma_d}{\omega \, \varepsilon} \tag{3.2.6}$$

Le facteur $tan|\delta_d|$ dépend de la conductivité du diélectrique et donne une mesure de son imperfection ou des pertes par effet Joule qui y ont lieu. Notons que σ_d dépend, en principe, de la fréquence ω et que les pertes dans le diélectrique sont faibles aux fréquences micro-ondes et pour de bonnes substances diélectriques.

Considérons le cas des modes TM dans le guide d'ondes elliptique. Le cas des modes TE se traite de la même façon. Le facteur de phase pour un diélectrique parfait est donné par la relation (2.2.7). Pour un diélectrique imparfait, on doit remplacer ε par ε_{eff}. Dans ce cas:

$$\beta_{eff} = \beta \sqrt{1 - i \frac{\sigma_d \, \omega \, \mu}{\beta^2}} \tag{3.2.7}$$

où β est le facteur de phase dans le guide sans pertes. Pour les diélectriques utilisés en pratique, les pertes sont faibles et

$$\left| \frac{\sigma_d \, \omega \, \mu}{\beta^2} \right| << 1 \tag{3.2.8}$$

Par conséquent,

$$\beta_{eff} \simeq \beta - i \frac{\sigma_d \, \omega \, \mu}{2 \beta} \tag{3.2.9}$$

Le facteur de propagation $e^{i(\omega t - \beta z)}$ qui apparaissait dans les expressions des champs **E** et **H** dans le cas d'un guide d'ondes sans pertes, est maintenant remplacé par:

$$e^{i(\omega t - \beta_{eff} z)} = e^{-\frac{\sigma_d \omega \mu}{2 \beta} z} \, e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{3.2.10}$$

On voit donc apparaître une exponentielle décroissante qui reflète le fait que les champs diminuent à mesure que z augmente: il y a atténuation. Soit:

$$\alpha_d = \frac{\sigma_d \, \omega \, \mu}{2 \beta} \tag{3.2.11}$$

le coefficient d'atténuation due à l'imperfection du diélectrique. Comme (éqs. 2.2.7 et 2.2.8)

$$\beta = \omega \, \mu \, \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{f^c_{mn}}{f} \right)^2} \tag{3.2.12}$$

on a alors:

$$\alpha_d = \frac{\sigma_d}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(f^c_{mn}/f \right)^2}} \tag{3.2.13}$$

où f^c_{mn} et f sont, respectivement, la fréquence de coupure du mode de propagation et la fréquence d'opération.

L'atténuation due aux pertes dans le diélectrique est très faible comparée à celle produite par les pertes dans la paroi du guide d'ondes, et souvent elle est négligée.

3.3 Calcul des pertes dans la paroi du guide d'ondes elliptique

Considérons maintenant un guide d'ondes dont la paroi elliptique a une conductivité finie. En guidant les ondes électromagnétiques, les conducteurs dissipent une partie de l'énergie de l'onde par effet Joule. Les ondes induisent, en effet, des courants électriques qui circulent sur la paroi du guide.

Le calcul rigoureux du champ pour un guide de conductivité finie est difficile, mais heureusement inutile. Nous utiliserons une méthode perturbative [15] qui consiste à considérer le conducteur presque parfait. En pratique, en effet, le métal constituant le guide est de très bonne qualité: sa conductivité est très grande. On s'attend donc à ce que les champs **E** et **H** dans la paroi soient pratiquement nuls, comme c'est le cas pour un conducteur parfait. L'existence de tels champs dans le conducteur ne peut donc représenter qu'une très faible perturbation des champs à l'intérieur du guide qui gardent la configuration qu'ils auraient si le conducteur était parfait. Dans ce cas, sur la paroi interne du guide, le champ magnétique est presque tangentiel et le champ électrique est presque normal. La continuité de la composante tangentielle de **H** indique qu'à la surface interne du guide, circule une densité de courant surfacique:

$$\mathbf{J_s} \approx \mathbf{n} \times \mathbf{H} \tag{3.3.1}$$

où **n** est le vecteur unitaire normal à la paroi et orienté vers l'intérieur du guide, et **H** est le champ magnétique à la surface interne du guide. Or, puisque $\mathbf{J_s} = \sigma_c \mathbf{E}$, un champ électrique tangentiel **E** existe à la surface interne du guide (ce champ est nul dans un conducteur parfait). Les deux vecteurs **E** et **H** sont donc mutuellement perpendiculaires. Il en résulte un vecteur de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ orienté vers *l'intérieur* du métal. Il y a donc de l'énergie qui se propage à l'intérieur du conducteur et cette énergie se dissipe par effet Joule. Nous savons qu'à mesure que les champs **E** et **H** pénètrent dans le conducteur, ils s'atténuent rapidement à cause de la très grande conductivité du métal [15]. En fait, aux fréquences micro-ondes, ces champs ne survivent pas au delà de quelques microns.

Au fur et à mesure que l'onde se propage dans le guide (suivant l'axe z), l'énergie qu'elle transporte diminue à cause des pertes dans la paroi (elliptique) du guide. Cela se traduit par un facteur de phase effectif β_{eff} complexe que l'on peut écrire, comme dans le cas des pertes dans le diélectrique (section 3.2):

$$\beta_{eff} = \beta - i\,\alpha_c \tag{3.3.2}$$

où α_c est le coefficient d'atténuation dû à la conductivité finie de la paroi conductrice. Les champs **E** et **H** seront donc atténués suivant z par un facteur $e^{-\alpha_c z}$. La puissance transmise P_t dans le guide étant proportionnelle au vecteur de Poynting moyen, celle-ci s'écrit:

$$P_t \sim e^{-2\,\alpha_c\,z} \tag{3.3.3}$$

D'où

$$\alpha_c = -\frac{1}{2\,P_t}\,\frac{d\,P_t}{d\,z} \tag{3.3.4}$$

L'expression ci-dessus nous permettra d'évaluer le coefficient d'attenuation α_c connaissant la puissance P_t et son taux de variation dP_t/dz.

3.3.1 La puissance transmise dans le guide d'ondes elliptique

3.3.1.1 Les modes TM

Pour calculer la puissance transmise P_t, négligeons les pertes ohmiques puisqu'en pratique, elles sont très faibles. Le vecteur de Poynting moyen est [14]:

$$< \mathbf{S} > = \frac{1}{2}\,Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \tag{3.3.5}$$

En coordonnées elliptiques, cette expression devient:

$$
\begin{aligned}
< \mathbf{S} > &= \frac{1}{2}\, Re\,[(E_\xi\,\mathbf{u}_\xi \,+\, E_\eta\,\mathbf{u}_\eta \,+\, E_z\,\mathbf{u_z}) \,\times\, (H_\xi^*\,\mathbf{u}_\xi \,+\, H_\eta^*\,\mathbf{u}_\eta)] \\
&= \frac{1}{2}\, Re\,[(E_\xi\, H_\eta^* \,-\, E_\eta\, H_\xi^*)\,\mathbf{u_z} \,+\, E_z\,(H_\xi^*\,\mathbf{u}_\eta \,-\, H_\eta^*\,\mathbf{u}_\xi)] \\
&= \frac{1}{2}\,(E_\xi\, H_\eta^* \,-\, E_\eta\, H_\xi^*)\,\mathbf{u_z} \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

car le terme $E_z\,(H_\xi^*\,\mathbf{u}_\eta - H_\eta^*\,\mathbf{u}_\xi)$ est purement imaginaire. En vertu des relations (2.2.2a) et (2.2.2b), on obtient:

$$
\begin{aligned}
< \mathbf{S} > &= \frac{\beta}{2\,\omega\,\varepsilon}\,[|H_\xi|^2 \,+\, |H_\eta|^2]\,\mathbf{u_z} \\
&= \frac{\beta\,\omega\,\varepsilon}{2\,\rho_1^2\,k^4}\,|E^m|^2\,[\psi_m^2\,(\xi,\,q)\,\phi_m^{'2}\,(\eta,\,q) \,+\, \psi_m^{'2}\,(\xi,\,q)\,\phi_m^2\,(\eta,\,q)]\,\mathbf{u_z} \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

La puissance moyenne transmise est obtenue en intégrant le vecteur de Poynting sur une section du guide d'élément de surface $d\,S$ (app. A.3):

$$
\begin{aligned}
P_t \,&=\, \int\!\!\int_S < \mathbf{S} > d\,S \\
&= \frac{\beta\,\omega\,\varepsilon}{2\,\rho_1^2\,k^4}\,|E^m|^2\,\times \\
&\int\!\!\int_S [\psi_m^2\,(\xi,\,q)\,\phi_m^{'2}\,(\eta,\,q) \,+\, \psi_m{'}2\,(\xi,\,q)\,\phi_m^2\,(\eta,\,q)]\,d\,s_1\,d\,s_2 \qquad (3.3.8)
\end{aligned}
$$

où $d\,s_1$ et $d\,s_2$ (voir fig. 1.1) sont les élements de longueurs curvillignes correspondant aux variables elliptique ξ et η respectivement (app. A.3):

$$
d\,s_1\,d\,s_2 \,=\, \rho_1^2\,d\,\xi\,d\,\eta \qquad (3.3.9)
$$

Par conséquent:

$$
\begin{aligned}
P_t \,&= \frac{\beta\,\omega\,\varepsilon}{2\,k^4}\,|E^m|^2\,\times \\
&\int_0^{\xi 0}\int_0^{2\,\pi} [\psi_m^2\,(\xi,\,q)\,\phi_m^{'2}\,(\eta,\,q) + \psi_m^{'2}(\xi,\,q)\,\phi_m^2\,(\eta,\,)]\,d\,\xi\,d\,\eta \qquad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

Posons:

$$\Lambda_m = \int_0^{\xi 0} \int_0^{2\pi} [\psi_m^2 (\xi,\, q)\, \phi_m^{'2} (\eta,\, q) + \psi_m^{'2}(\xi,\, q)\, \phi_m^2 (\eta,\,)]\, d\xi\, d\eta \tag{3.3.11}$$

La puissance transmise s'écrit alors:

$$P_t = \frac{\beta\, \omega\, \varepsilon}{2\, k^4}\, |E^m|^2\, \Lambda_m \tag{3.3.12}$$

3.3.1.2 Les modes TE

Dans ce cas, le calcul du vecteur de Poynting moyen donne:

$$< \mathbf{S} > = \frac{1}{2}\, (E_\xi\, H_\eta^* \, - \, E_\eta\, H_\xi^*)\, \mathbf{u_z} \tag{3.3.13}$$

qui devient, en utilisant les relations (2.2.15a) et (2.2.15b):

$$< \mathbf{S} > = \frac{\beta\, \omega\, \mu}{2\, \rho_1^2\, k^4}\, |H^m|^2\, [\psi^2\, (\xi,\, q)\, \phi^{'2}\, (\eta,\, q) \, + \, \psi^{'2}\, (\xi,\, q)\, \phi^2\, (\eta,\, q)]\, \mathbf{u_z} \tag{3.3.14}$$

La puissance moyenne transmise se calcule comme en (3.3.8). On obtient:

$$P_t = \frac{\beta\, \omega\, \mu}{2\, k^4}\, |H^m|^2\, \Lambda_m \tag{3.3.15}$$

3.3.2 Calcul de $\mathbf{d\, P_t / d\, z}$

3.3.2.1 Les modes TM

La densité de courant surfacique s'écrit (éq. 3.3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{J_s} &= \mathbf{n} \times (\, H_\xi\, \mathbf{u}_\xi \, + \, H_\eta\, \mathbf{u}_\eta \,) \\ &= -\, H_\eta\, \mathbf{u_z} \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Or (éq. 2.2.2b),

$$H_\eta = \frac{\omega\, \varepsilon}{i\, \rho_1\, k^2}\, E^m\, \psi_m^{'}\, (\xi,\, q)\, \phi_m\, (\eta,\, q)\, e^{i\, (\omega\, t \, - \, \beta\, z)} \tag{3.3.17}$$

ce qui donne:

$$\mathbf{J_s} \;=\; -\,\frac{\omega\,\varepsilon}{i\,\rho_1\,k^2}\,E^m\,\psi_m^{'}(\xi,\,q)\,\phi_m(\eta,\,q)\,e^{i\,(\omega\,t\,-\,\beta\,z)}\,\mathbf{u_z} \tag{3.3.18}$$

et

$$|\mathbf{J_s}|^2 \;=\; \mathbf{J_s}\,\cdot\,\mathbf{J_s}^* \;=\; \frac{\omega^2\,\varepsilon^2}{\rho_1^2\,k^4}\,|E^m|^2\,\psi_m^{'2}(\xi,\,q)\,\phi_m^2(\eta,\,q) \tag{3.3.19}$$

L'impédance surfacique *intrinsèque* d'un très bon conducteur *plan infini*, à la fréquence ω, est [15]:

$$Z_s \;=\; R_s\,(1\,+\,i) \tag{3.3.20}$$

où R_s est la résistance surfacique:

$$R_s \;=\; \frac{1}{\sigma_c\,\delta_c} \tag{3.3.21}$$

Dans l'expression ci-dessus, δ_c est la *distance de pénétration* de l'onde électromagnétique dans le milieu conducteur:

$$\delta_c \;=\; \sqrt{\frac{2}{\omega\,\sigma_c\,\mu}} \tag{3.3.22}$$

Lorsque le milieu est *borné*, comme par exemple celui délimité par un guide d'ondes, l'impédance surfacique n'est pas nécessairement celle donnée par l'expression (3.3.20). On peut toutefois montrer [7] que l'impédance surfacique d'un guide d'ondes circulaire ou rectangulaire est égale à l'impédance intrinsèque du conducteur infini plan (éq. 3.3.20). Le cas du guide d'ondes elliptique n'est pas aussi clair car il a été suggéré [6] que l'impédance surfacique d'un tel guide dépend de la courbure de la section du guide, donc de la variable elliptique angulaire η. Les calculs sont compliqués et l'expression obtenue de l'impédance ne se met pas sous forme analytique simple. Cette dépendance vis-à-vis la variable η a provoqué une polémique dans la littérature [7, 16 - 18] car les calculs exacts, devant obligatoirement faire intervenir les conditions de passage des champs à la paroi elliptique du guide, sont extrêmement difficiles. On sait cependant que lorsque la courbure de la section elliptique n'est pas très prononcée, i.e. lorsque le rayon de courbure du contour elliptique est très grand comparé à la distance de pénétration δ_c, l'impédance surfacique du guide elliptique est, à toutes fins pratiques, indépendante de la variable η. Elle est de plus égale à l'impédance intrinsèque du métal composant le guide (éq. 3.3.20). Cette assertion a été partiellement démontrée par Rengarajan et Lewis [7] qui ont calculé l'impédance surfacique du guide en quatre points du contour elliptique auxquels le rayon de courbure est soit maximum, soit mimimum, i.e. à $\eta = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\,\pi/2$. Il se trouve qu'en ces quatre points, l'impédance surfacique du guide est constante et est donnée par l'expression (3.3.20). Dans ce qui suit, nous supposerons donc que l'impédance surfacique du guide elliptique est bien représentée par cette expression. La puissance dissipée dans un élement de longueur $d\,z$ du guide s'écrit donc:

$$\begin{aligned} -\,d\,P_t &= \frac{R_s}{2} \int_S \Big[\mathbf{J_s} \cdot \mathbf{J_s}^* \Big]_{\xi\,=\,\xi_0} d\,s_2\,d\,z \\ &= \frac{R_s}{2} \int_0^{2\,\pi} \Big| \mathbf{J_s} \Big|^2_{\xi\,=\,\xi_0} \rho_1\,d\eta\,d\,z \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

En remplaçant $|\mathbf{J_s}|^2$ par son expression (3.3.19), on obtient:

$$-\,\frac{d\,P_t}{d\,z} = \frac{R_s\,\omega^2\,\varepsilon^2}{2\,k^4} \,|E^m|^2\,\psi'^2\,(\xi_0,\,q) \int_0^{2\,\pi} \frac{\phi^2\,(\eta,\,q)}{\rho_1}\,d\,\eta \tag{3.3.24}$$

D'autre part, pour $\xi = \xi_0$, on a (éqs. 1.1.13b et 2.1.6):

$$\rho_1 = a\,\sqrt{1 - e^2\,cos^2\,\eta} \tag{3.3.25}$$

Dans ce cas, l'équation (3.3.24) devient:

$$-\,\frac{d\,P_t}{d\,z} = \frac{R_s\,\omega^2\,\varepsilon^2}{2\,a\,k^4}\,|E^m|^2\,\psi'^2\,(\xi_0,\,q)\,\Phi_m \tag{3.3.26}$$

où

$$\Phi_m = \int_0^{2\,\pi} \frac{\phi_m^2\,(\eta,\,q)}{\sqrt{1 - e^2\,cos^2\,\eta}}\,d\,\eta \tag{3.3.27}$$

Les relations (3.3.4), (3.3.12) et (3.3.26) donnent pour le coefficient d'atténuation due à la paroi du guide:

$$\alpha_c = \frac{R_s\,\omega\,\varepsilon}{a\,\beta}\,\frac{\Phi_m}{2\,\Lambda_m}\,\psi'^2\,(\xi_0,\,q) \tag{3.3.28}$$

D'après les relations (3.3.21) et (3.3.22), la résistance surfacique est donnée par:

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\,\mu}{2\,\sigma_c}} \tag{3.3.29}$$

Comme (éq. 3.2.12)

$$\beta = \omega\,\mu\,\varepsilon\sqrt{1 - \left(\frac{f^c_{mn}}{f}\right)^2} \tag{3.3.30}$$

on a donc, en posant $\omega = 2\,\pi\,f$:

$$\frac{R_s\,\omega\,\varepsilon}{a\,\beta} = \frac{1}{\sqrt{a^3\,\sigma_c}}\sqrt{\frac{\pi\,\varepsilon\,a\,f}{1 - \left(f^c_{mn}/f\right)^2}} \tag{3.3.31}$$

Le coefficient d'atténuation α_c pour les modes TM s'écrit en définitive:

$$\alpha_c = \frac{1}{\sqrt{a^3\,\sigma_c}}\sqrt{\frac{\pi\,\varepsilon\,a\,f}{1 - \left(f^c_{mn}/f\right)^2}}\,\frac{\Phi_m}{2\,\Lambda_m}\,\psi'^2\,(\xi_0,\,q) \tag{3.3.32}$$

où q représente q_{mn}. L'expression ci-dessus est valide autant pour le cas pair où

$$\psi_m\,(\xi,\,q)\,\phi_m\,(\eta,\,q) = Ce_m\,(\xi,\,q)\,ce_m\,(\eta,\,q) \tag{3.3.33}$$

que pour le cas impair où

$$\psi_m\,(\xi,\,q)\,\phi_m\,(\eta,\,q) = Se_m\,(\xi,\,q)\,se_m\,(\eta,\,q) \tag{3.3.34}$$

Le coefficient d'atténuation normalisé $\alpha_c\,\sqrt{a^3\,\sigma_c}$ est représenté aux figures 3.1 et 3.2 pour quelques modes TM_{cmn} et TM_{smn}. L'atténuation minimale est obtenue pour une excentricité nulle, qui correspond au guide d'ondes circulaire, alors qu'elle croît avec l'excentricité pour un axe majeur et une fréquence d'opération fixes. L'atténuation du mode TM_{s11} (fig. 3.2a) et plus grande que celle du mode TM_{c11} (fig. 3.1b). Ceci est vrai pour tous les modes TM_{cmn} et TM_{smn}: pour des valeurs de m et n données, le mode transversal magnétique impair présente une atténuation plus élevée que le mode transversal magnétique pair. Par ailleurs, les différentes courbes d'atténuation présentent certains aspects communs aux modes TM_c et TM_s, comme le déplacement du minimum de l'atténuation vers la droite, i.e. vers les fréquences élevées, lorsque l'excentricité croît.

3.3.2.2 Les modes TE

La densité de courant surfacique (3.3.1) est, dans ce cas:

$$\mathbf{J_s} = -H_\eta \, \mathbf{u_z} + H_z \, \mathbf{u_\xi} \tag{3.3.35}$$

Les relations (2.2.14b) et (2.2.15b) donnent :

$$|\mathbf{J_s}|^2 = |H^m|^2 \, \psi_m^2(\xi, q) \, [\frac{\beta^2}{\rho_1^2 \, k^4} \, \phi_m'^2 (\eta, q) + \phi_m^2 (\eta, q)] \tag{3.3.36}$$

La puissance dissipée sur une longueur $d\,z$ du guide s'écrit:

$$-d \, P_t = \frac{R_s}{2} \int_S |\mathbf{J_s}|^2_{\xi = \xi_0} \, d\,s_2 \, d\,z \tag{3.3.37}$$

de sorte que:

$$\begin{aligned} - \frac{d \, P_t}{d\,z} &= \frac{R_s}{2} \int_0^{2\pi} |\mathbf{J_s}|^2_{\xi = \xi_0} \, \rho_1 \, d\,\eta \\ &= \frac{R_s}{2} \, |H^m|^2 \, \psi_m^2 \, (\xi_0, q) \times \\ & \quad \Big[\frac{\beta^2}{k^4} \int_0^{2\pi} \frac{\phi_m'^2 (\eta, q)}{\rho_1} \, d\,\eta + \int_0^{2\pi} \phi_m^2 \, (\eta, q) \, \rho_1 \, d\,\eta\Big] \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

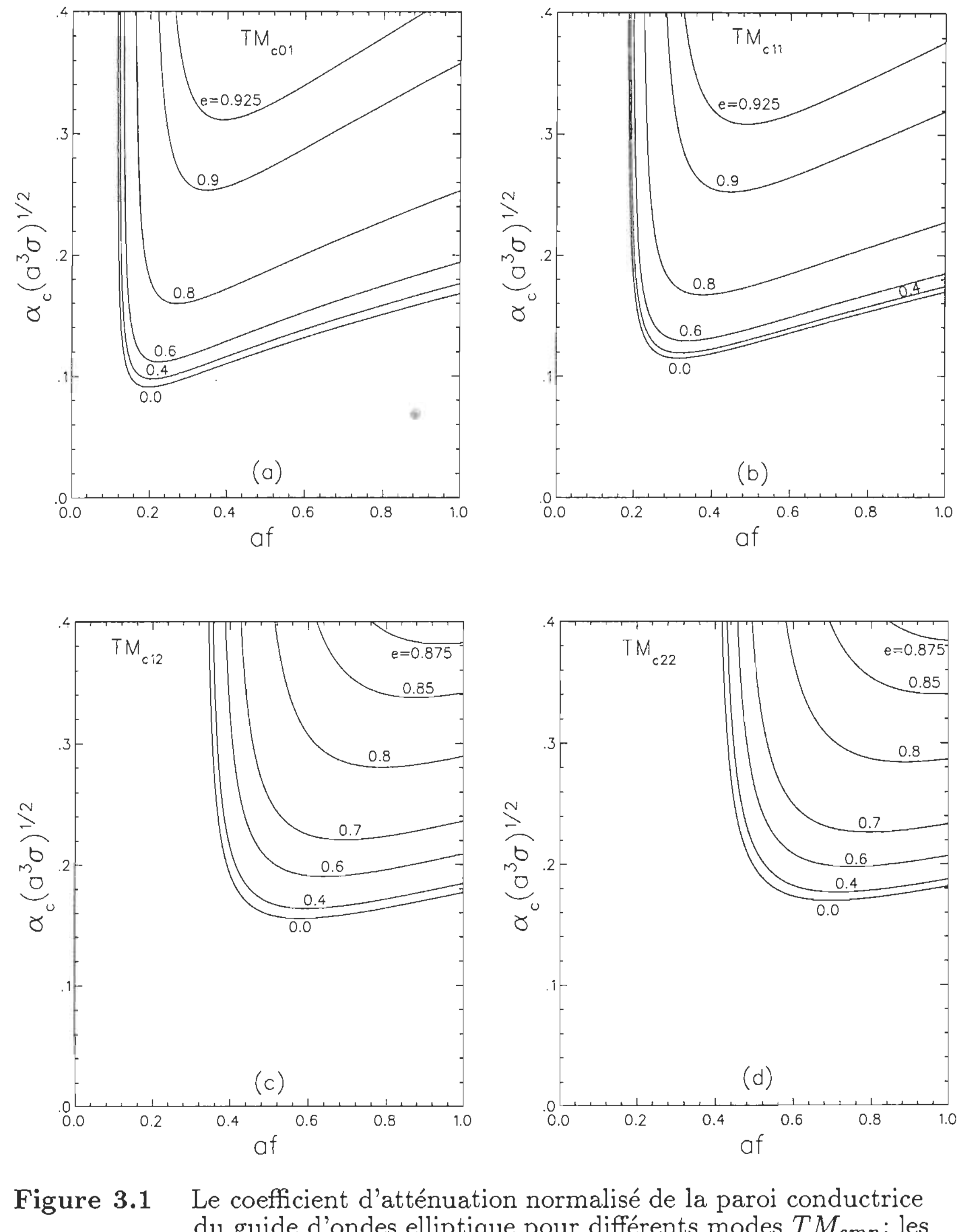


Figure 3.1 Le coefficient d'atténuation normalisé de la paroi conductrice du guide d'ondes elliptique pour différents modes TM_{cmn}; les fréquences f sont en GHz et a le demi-axe majeur en m.

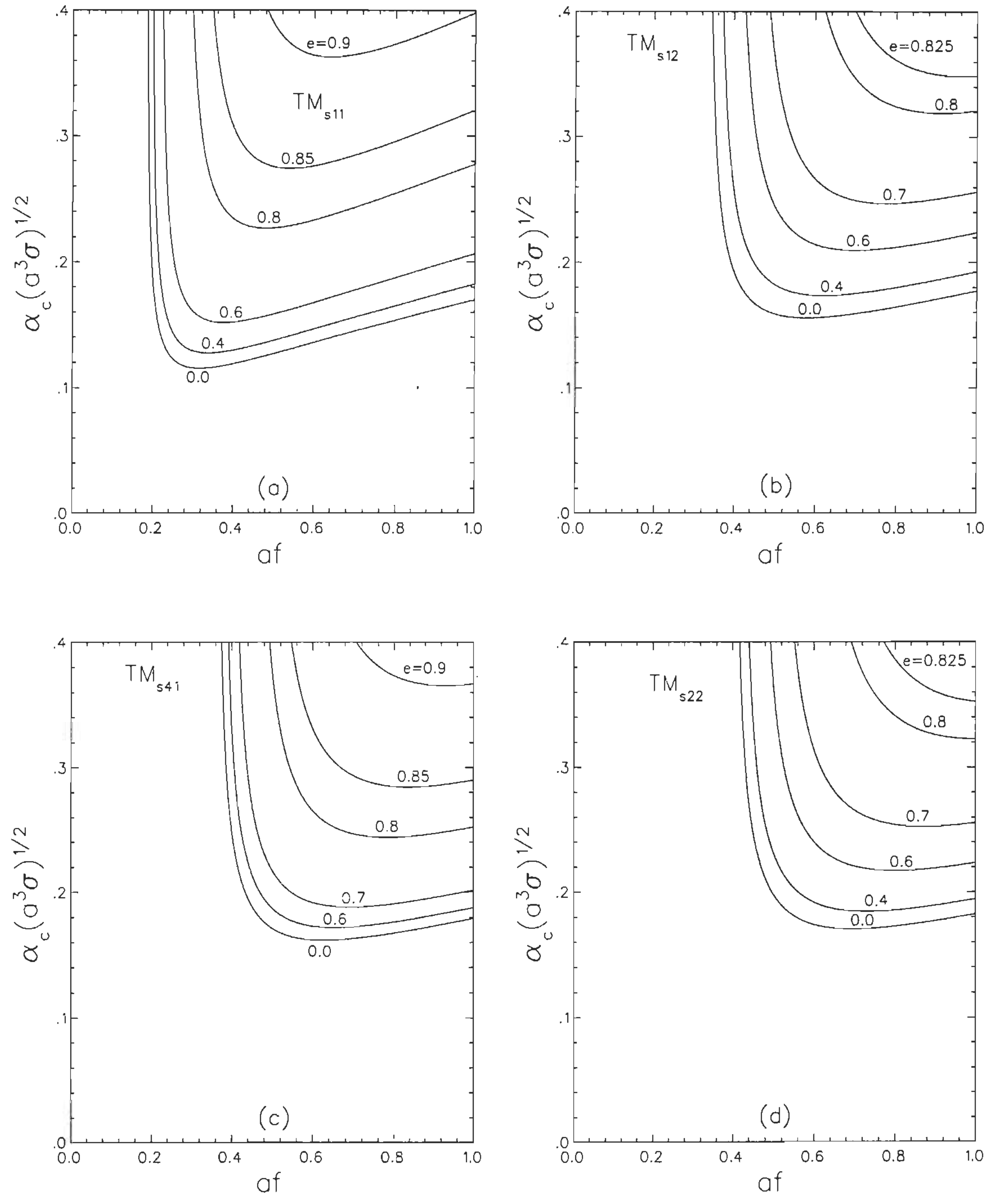


Figure 3.2 Le coefficient d'atténuation normalisé de la paroi conductrice du guide d'ondes elliptique pour différents modes TM_{smn}; les fréquences f sont en GHz et a le demi-axe majeur en m.

Posons:

$$\Phi_m' = \int_0^{2\pi} \frac{\phi_m'^2(\eta, q)}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta}} \, d\eta \tag{3.3.39a}$$

$$\widetilde{\Phi}_m = \int_0^{2\pi} \phi_m^2(\eta, q) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \eta} \, d\eta \tag{3.3.39b}$$

D'où:

$$-\frac{d P_t}{d z} = \frac{R_s \, \omega^2 \mu \varepsilon}{2 a k^4} |H^m|^2 \psi_m^2(\xi_0, q) \left[\frac{\beta^2}{\omega^2 \mu \varepsilon} \Phi_m' + \frac{a k^4}{\omega^2 \mu \varepsilon} \widetilde{\Phi}_m \right] \tag{3.3.40}$$

Or, puisque (éq. 3.2.12),

$$\frac{\beta^2}{\omega^2 \mu \varepsilon} = 1 - \frac{f_{mn}^c}{f} \tag{3.3.41}$$

et (éqs. 2.2.8 et 2.2.18)

$$\frac{a k^4}{\omega^2 \mu \varepsilon} = \frac{4 q}{e^2} \left(\frac{f_{mn}^c}{f} \right)^2 \tag{3.3.42}$$

où q représente q_{mn}', le coefficient d'atténuation α_c s'écrit alors, en utilisant les équations (3.3.4), (3.3.15) et (3.3.40):

$$\alpha_c = \frac{R_s \, \omega \, \varepsilon}{2 a \beta \Lambda_m} \left\{ \left[1 - \left(\frac{f_{mn}^c}{f} \right)^2 \right] \Phi_m' + \frac{4 q}{e^2} \left(\frac{f_{mn}^c}{f} \right)^2 \widetilde{\Phi}_m \right\} \psi_m^2(\xi_0, q) \tag{3.3.43}$$

En remplaçant le terme $R_s \, \omega \, \varepsilon / a \beta$ par son expression (3.3.31), on obtient en définitive pour le coefficient d'atténuation des modes TE:

$$\alpha_c = \frac{1}{2 \Lambda_m \sqrt{a^3 \sigma_c}} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon a f}{1 - \left(f_{mn}^c / f \right)^2}} \, \psi_m^2(\xi_0, q) \times$$

$$\left\{ \left[1 - \left(\frac{f_{mn}^c}{f} \right)^2 \right] \Phi_m' + \frac{4 q}{e^2} \left(\frac{f_{mn}^c}{f} \right)^2 \widetilde{\Phi}_m \right\} \tag{3.3.44}$$

expression valide autant pour le cas pair où

$$\psi_m(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q) = Ce_m(\xi, q)\,ce_m(\eta, q) \tag{3.3.45}$$

que pour le cas impair où

$$\psi_m(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q) = Se_m(\xi, q)\,se_m(\eta, q) \tag{3.3.46}$$

Le coefficient d'atténuation normalisé $\alpha_c \sqrt{a^3 \sigma_c}$ est représenté pour quelques modes TE_{cmn} et TE_{smn} aux figures 3.3 et 3.4.

La dépendance de l'atténuation vis-à-vis la fréquence est similaire au cas circulaire pour une excentricité donnée. On observe par ailleurs que pour m et n données, l'atténuation dans le guide d'ondes elliptique d'axe majeur $2\,a$ est toujours plus grande que celle dans le guide d'ondes circulaire de diamètre $2\,a$, quoique la différence est très faible pour de petites excentricités. À première vue, les résultats pour le mode TE_{c01} (fig. 3.3c) suggèrent que les modes TE_{c0n} présentent la même anomalie que les modes TE_{0n} du guide circulaire, pour lesquels l'atténuation décroît quand la fréquence augmente. Mais ceci n'est vrai que sur une plage assez large, mais limitée, de fréquences qui dépend de l'excentricité du guide. Au delà d'une certaine fréquence, les courbes de la figure 3.3.c commencent en effet à croître. Cela est dû à la présence du terme $\Phi_m^{'}$ dans l'expression (3.3.44) du coefficient d'atténuation qui ne s'annule que pour $e = 0$. Ce résultat est illustré aux figures 3.5a et 3.5b où nous représentons le coefficient d'atténuation normalisé des modes TE_{01} et TE_{02} circulaires ainsi que des modes TE_{c01} et TE_{c02} elliptiques sur une très grande plage de fréquences, avec comme paramètre l'excentricité e. L'atténuation du mode TE_{c21} donnée à la figure 3.3b est également importante, car ce mode devient le premier mode d'ordre supérieur lorsque l'excentricité dépasse $e \approx 0,82$.

La figure 3.4a donne le coefficient d'atténuation normalisé du mode TE_{s11}. Pour des valeurs très élevées de la variable $a\,f$, le coefficient d'atténuation de ce mode tend de façon indépendante de l'excentricité vers celui du mode TE_{11}

circulaire. Aux fréquences élevées et jusqu'à des excentricités de l'ordre de 0,9, l'atténuation du mode TE_{s11} est plus faible que celle du mode dominant TE_{c11} (fig. 3.3a).

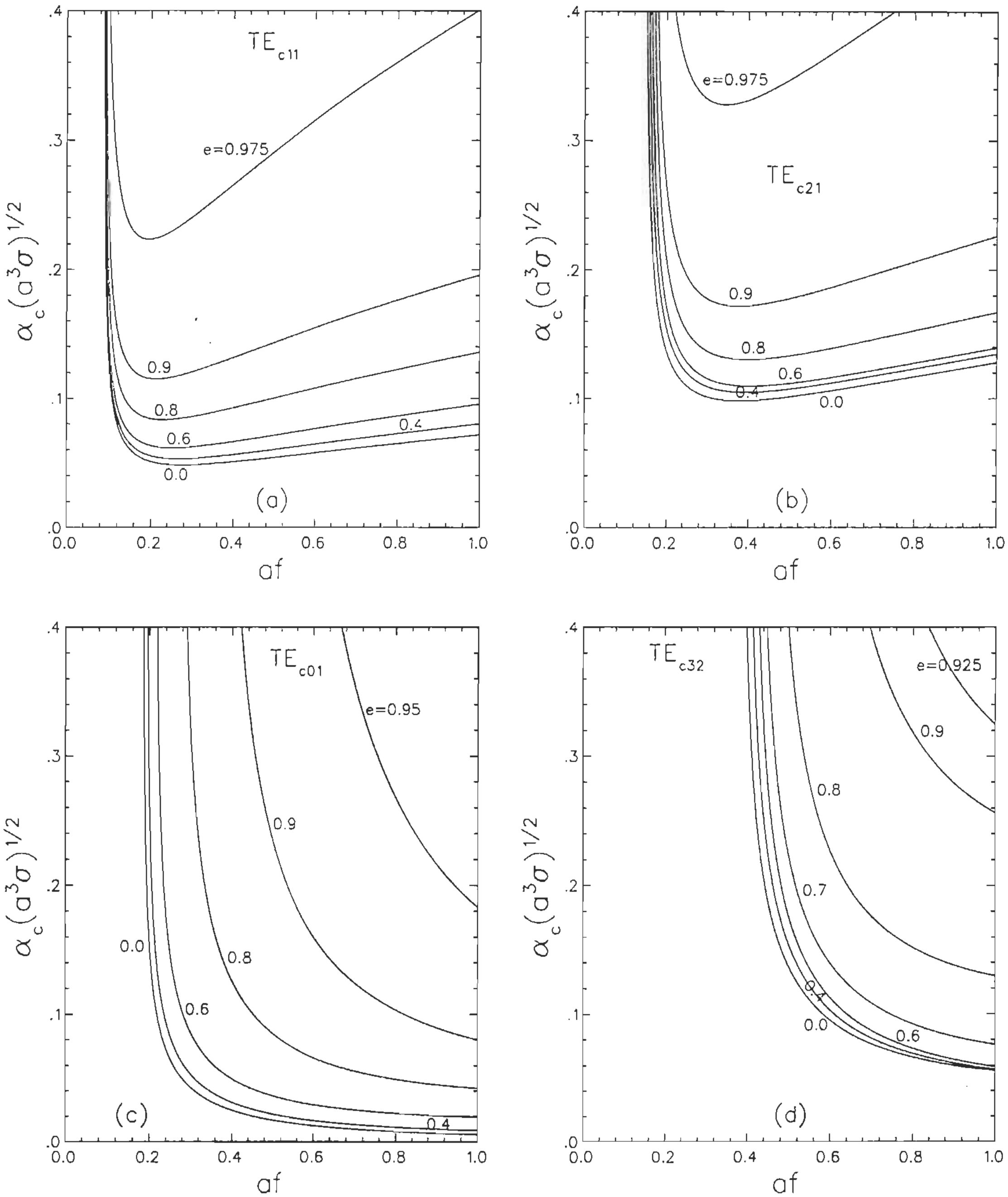


Figure 3.3 Le coefficient d'atténuation normalisé de la paroi conductrice du guide d'ondes elliptique pour différents modes TE_{cmn}; les fréquences f sont en GHz et a le demi-axe majeur en m.

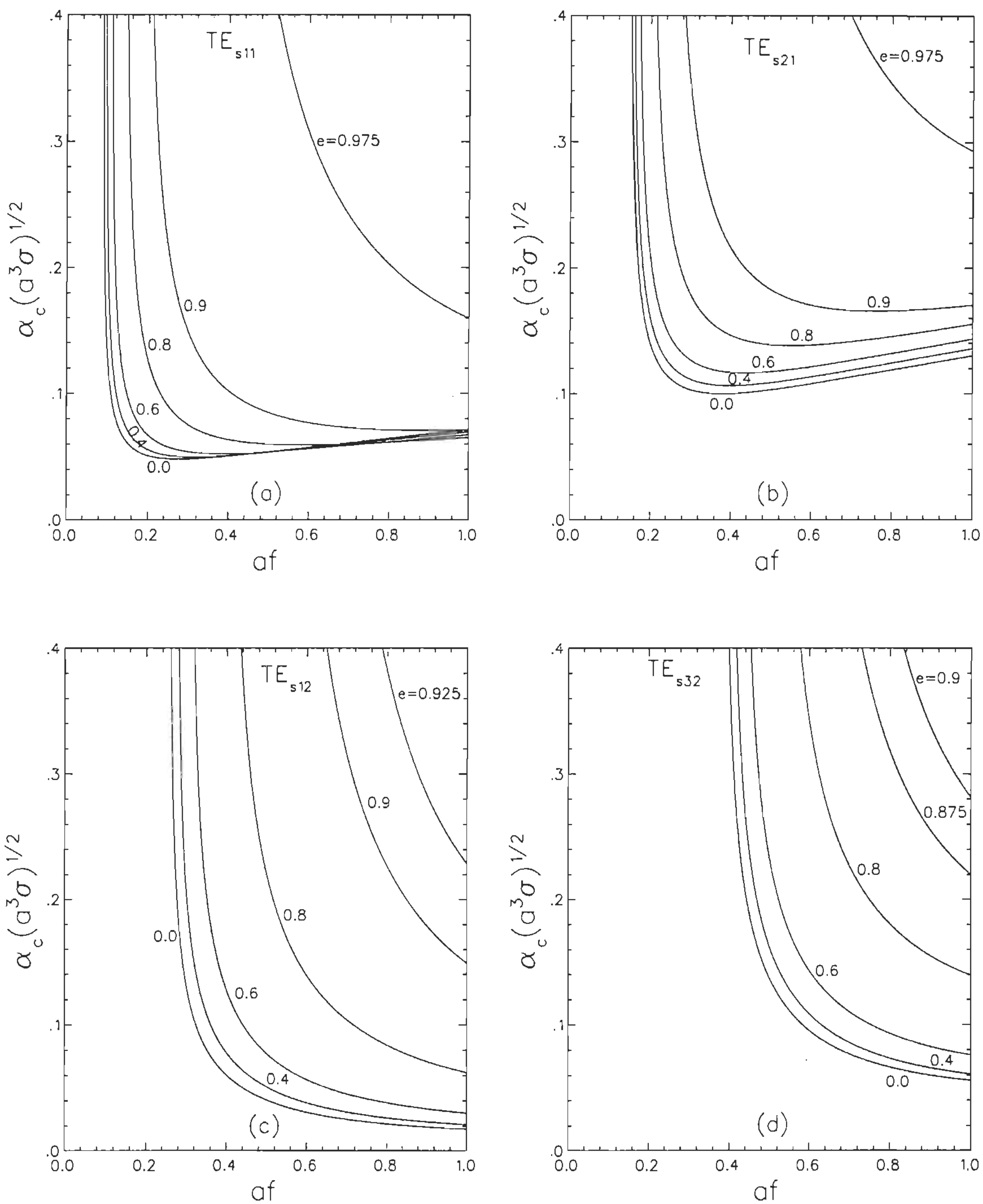


Figure 3.4 Le coefficient d'atténuation normalisé de la paroi conductrice du guide d'ondes elliptique pour différents modes TE_{smn}; les fréquences f sont en GHz et a le demi-axe majeur en m.

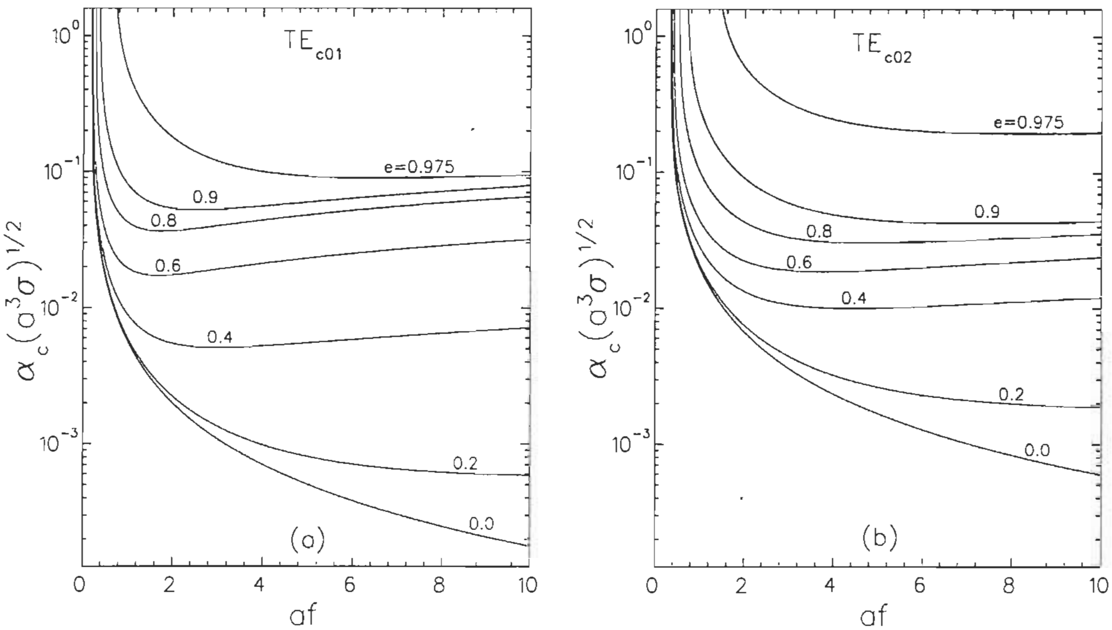


Figure 3.5 a) Le coefficient d'atténuation normalisé du mode TE_{c01}.
b) Le coeficient d'atténuation normalisé du mode TE_{c02}; les fréquences f sont en GHz.

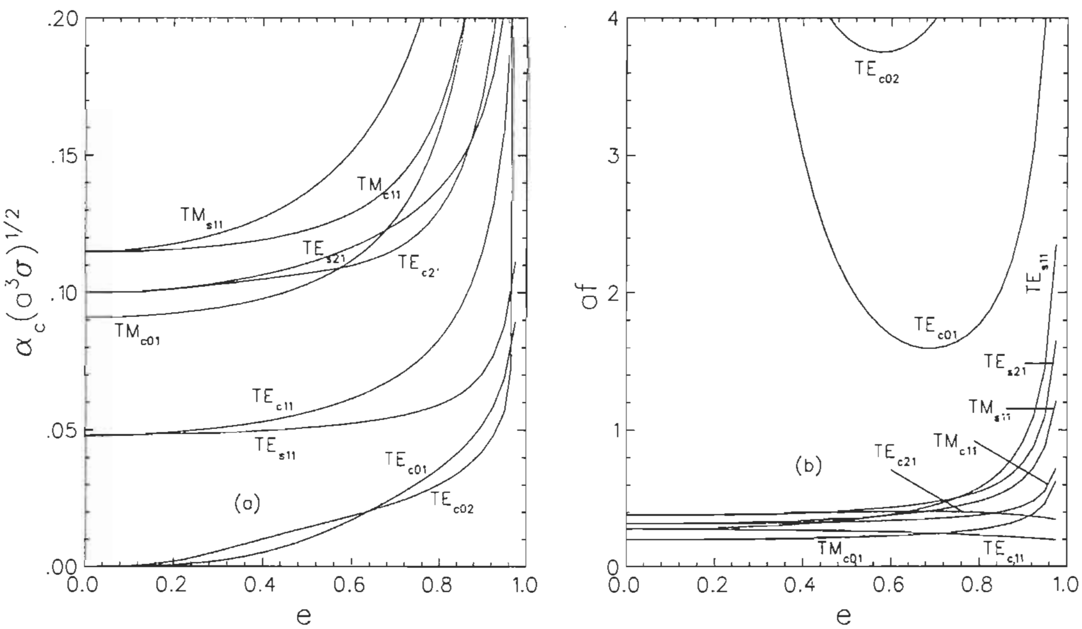


Figure 3.6 a) L'atténuation minimum en fonction de l'excentricité.
b) La position du minimum de l'atténuation en fonction de l'excentricité; les fréquences f sont en GHz.

D'autre part, on représente à la figure 3.6a la valeur minimale du coefficient d'atténuation normalisé en fonction de l'excentricité. Autour de $e = 0,4$, c'est le mode TE_{c01} qui possède la plus petite valeur minimale de ce coefficient. La figure 3.6b donne la position du minimum d'atténuation (la fréquence à laquelle ce minimum a lieu) en fonction de l'excentricité, pour plusieurs modes de propagation. On observe que ces modes peuvent être groupés en trois catégories: les modes $TE_{cm1}\,(m \neq 0)$ dont le minimum d'atténuation se déplace vers des fréquences plus petites lorsque l'excentricité augmente, les modes $TE_{cmn}\,(m \neq 0,\, n \neq 1)$, TE_{smn}, TM_{cmn} et TM_{smn} dont le minimum d'atténuation se déplace vers des fréquences plus élevées et, enfin, les modes TE_{c0n} qui présentent à cet effet un caractère hybride. Ces derniers modes ont en effet un minimum d'atténuation qui se déplace vers les plus petites fréquences jusqu'à une certaine excentricité, mais qui rebrousse chemin au delà de cette excentricité.

3.4 Comparaison entre les guides d'ondes elliptique, circulaire et rectangulaire de même fréquence de coupure

Considérons un guide rectangulaire, un guide circulaire et un guide elliptique de même fréquence de coupure, et faits d'aluminum. Les guides rectangulaires et elliptique ont le même rapport b/a (tableau III.1).

Tableau III.1 Compraison entre les guides d'ondes elliptique, circulaire et rectangulaire de même fréquence de coupure.

type	Dimension ($10^{-2}\,m$)	Mode Dominant	f^c (Ghz)	premier mode d'ordre supérieur	f^c (Ghz)
Rectangulaire	$2a = 2,2860$ $2b = 1,0160$	TE_{10}	$6,557$	TE_{20}	$13,114$
Elliptique	$2a = 2,7304$ $2b = 1,2134$	TE_{c11}	$6,557$	TE_{c21}	$12,000$
Circulaire	$2a = 2,6790$	TE_{11}	$6,557$	TM_{01}	$8,566$

L'atténuation dans le guide d'ondes elliptique est approximativement 13% plus faible que celle dans le guide rectangulaire, alors que l'atténuation dans le guide d'ondes circulaire est de 40% à 50% plus faible que celle dans le guide d'ondes elliptique. En général, l'atténuation du mode dominant dans le guide elliptique est de 12% à 15% plus basse que celle du mode dominant du guide d'ondes rectangulaire pour le même type de paroi, la même fréquence de coupure et des rapports b/a égaux. Par contre, le guide d'ondes circulaires a toujours l'atténuation la plus faible.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le calcul de l'atténuation dans le guide d'ondes elliptique en utilisant une méthode perturbative dont la validité est assurée par le fait que le guide est constitué d'un très bon conducteur. Dans ce cas, la configuration du champ électromagnétique à l'intérieur du guide n'est pas changée par la conductivité finie du guide d'ondes.

Nous avons présenté les résultats numériques du coefficient d'atténuation pour 16 modes de propagation TE et TM. Nos résultats concordent avec ceux donnés dans la littérature, en particulier ceux (au nombre de 7) donnés par Kretzschmar [19]. Les résultats de certains modes que nous avons traités sont donc présentés pour la première fois. Nous avons enfin discuté des caractéristiques générales du coefficient d'atténuation en fonction des principaux paramètres tels que l'excentricité et la fréquence. Ces caractéristiques trouvent leur utilité dans la conception pratique des guides d'ondes elliptiques.

CHAPITRE IV

LA CAVITÉ RÉSONNANTE ELLIPTIQUE

4.1 Introduction

Une cavité résonnante opère à certaines fréquences discrètes, chacune correspondant à un mode particulier d'oscillation associé à sa configuration propre des champs électrique et magnétique. Comme la longueur d'onde qui correspond au mode associé à la fréquence la plus basse est de l'ordre de grandeur de la plus grande dimension linéaire de la cavité, il s'ensuit que, pour les ondes centimétriques, une cavité résonnante possède un faible encombrement qui la rend propre à l'utilisation en radioélectricité et à être incorporée dans des équipements micro-ondes (radar, etc.). L'utilisation des cavités résonnantes est utile:

- pour réaliser des ondemètres précis;
- pour construire des 'circuits' accordés dans les oscillateurs à la place des circuits RLC classiques qui ne conviennent pas dans la gamme des micro-ondes étant donné l'impossibilité de construire des inductances L et des capacités C suffisamment petites tout en assurant un facteur de qualité assez élevé;
- pour l'étude de l'absorption des ondes centimétriques dans les solides, les liquides et les gaz (mesure de la constante diélectrique, par exemple).

Toutes les cavités résonnantes ont la propriété de 'piéger' les champs électromagnétiques dans l'espace qu'elles occupent. Une cavité elliptique peut être obtenue en court-circuitant les deux bouts d'un guide d'ondes elliptique à l'aide de deux conducteurs plans transversaux distants de 'd'. La cavité est remplie d'un diélecrique de perméabilité μ et de permitivité ε.

4.2 Les modes de résonnance

Supposons qu'il existe à l'intérieur de la cavité un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{H}$ sinusoïdaux. Ces champs satisfont à l'équation d'onde qui découle des équations de Maxwell. Donc, en principe, il faut résoudre le problème à partir de l'équation d'onde sujette aux conditions aux frontières habituelles. Nous allons cependant profiter du fait que la cavité est un guide d'ondes court-circuité aux deux bouts et éviter ainsi de répéter les mêmes calculs.

En effet, dans l'étude des guides d'ondes nous avons toujours supposé que l'onde se propage dans une seule direction. Dans une cavité, à cause des court-circuits aux deux bouts, il y aura des réflexions produisant des ondes se propageant vers les z positifs et des ondes se propageant vers les z négatifs.

4.2.1 Les modes TE

Considérons d'abord les modes TE. Dans ce cas, le champ magnétique possède une composante suivant z. On avait obtenu dans le cas du guide d'ondes, pour une onde se propageant vers les z positifs (2.2.14b):

$$H_z = H^m \psi_m(\xi, q)\, \phi_m(\eta, q)\, e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{4.2.1}$$

Dans le cas d'une cavité, H_z contient deux composantes, l'une se propageant vers les z positifs, l'autre vers les z négatifs. Nous écrivons donc H_z comme:

$$H_z = \psi_m(\xi, q)\, \phi_m(\eta, q)\, (H_+^m\, e^{i(\omega t - \beta z)} + H_-^m\, e^{i(\omega t + \beta z)}) \tag{4.2.2}$$

où H_+^m et H_-^m sont les amplitudes des ondes se propageant vers les z positifs et les z négatifs, respectivement. Deux conditions aux frontières additionnelles interviennent dans la cavité, à $z = 0$ et $z = d$. La condition de continuité de la densité de flux magnétique **B** aux parois conductrices à $z = 0$ et $z = d$ implique que la composante normale de **B** dans la cavité est nulle. D'où, à $z = 0$:

$$H_z\Big|_{z=0} = \psi_m(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q)\,(H_+^m + H_-^m)\,e^{i\,\omega\,t} = 0 \tag{4.2.3}$$

ce qui donne:

$$H_+^m = -H_-^m \tag{4.2.4}$$

La composante H_z peut s'écrire maintenant:

$$H_z = -2\,i\,H_+^m\,\psi_m(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q)\,sin\,(\beta\,z)\,e^{i\,\omega\,t}. \tag{4.2.5}$$

À $z = d$, $H_z = 0$ aussi. On en déduit que:

$$sin\,(\beta\,d) = 0 \tag{4.2.6}$$

D'où

$$\beta = l\,\frac{\pi}{d} \qquad\qquad l = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.7}$$

Les relations (1.1.12), (1.1.13a) et (1.1.13b) donnent:

$$\omega^2\,\mu\,\varepsilon = \left(l\,\frac{\pi}{d}\right)^2 + \frac{4\,q'_{mn}}{(a\,e)^2} \tag{4.2.8}$$

et la composante H_z du champ magnétique s'écrit donc:

$$H_z = -2\,i\,H_+^m\,\psi_m(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q)\,sin\left(l\,\frac{\pi}{d}\,z\right)e^{i\,\omega\,t} \tag{4.2.9}$$

La composante H_z, ainsi que toutes les autres composantes de **H** et **E** qui en découlent, dépendent de trois nombres entiers, m, n et l:

$$m = 0, 1, 2, ... \quad \text{(cas pair)}, \quad \text{ou} \quad 1, 2, 3, ... \quad \text{(cas impair)}$$

$$n = 1, 2, 3, ...$$

$$l = 1, 2, 3, ...$$

L'ensemble (m, n, l) définit un mode, et puisque nous considérons les ondes TE, on parle alors de modes TE_{cmnl} (ou TE_{smnl}) dans la cavité. Dans le cas d'un guide d'ondes, aucune onde ne peut se propager si la fréquence d'opération ω est inférieure à la fréquence de coupure du mode dominant. Dans une cavité, la fréquence (4.2.8) est bien définie par les trois nombres m, n et l:

$$\omega_{mnl} = \frac{1}{\sqrt{\mu}\,\varepsilon} \sqrt{\frac{4\, q'_{mn}}{(a\, e)^2} + \left(\frac{l\,\pi}{d}\right)^2} \tag{4.2.10}$$

où q'_{mn} est le $n^{i\grave{e}me}$ zéro de la dérivée de la fonction de Mathieu modifiée d'ordre m. Pour que le mode TE_{cmnl} (ou TE_{smnl}) puisse exister dans la cavité, il faut donc que la fréquence ait une valeur précise, déterminée par l'ensemble (m, n, l) et les dimensions de la cavité:

$$f_{mnl} = \frac{\omega_{mnl}}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{\mu}\,\varepsilon} \sqrt{\frac{4\, q'_{mn}}{(a\, e)^2} + \left(\frac{l\,\pi}{d}\right)^2} \tag{4.2.11}$$

Les différentes fréquences f_{mnl} représentent les *fréquences de résonnance* de la cavité. En effet, pour une fréquence d'opération f, un axe majeur $2\,a$ et une excentricité e donnés, il faudrait ajuster d de telle façon que la fréquence f_{mnl} soit égale à f. Le mode TE_{cmnl} (ou TE_{smnl}) peut exister dans la cavité uniquement si cette condition est remplie.

Notons que pour des dimensions a, d et une excentricité e données, il y a une infinité de fréquences de résonnance puisque les nombres entiers m, n et l peuvent en principe s'étendre jusqu'à l'infini.

Les autres composantes des champs **E** et **H** se calculent à partir de H_z en utilisant les équations (1.1.11a) et (1.1.11b). Les composantes transversales de **H** et **E** sont alors [10]:

$$\mathbf{H_t} = \frac{2}{i\,\rho_1\,k^2} \left(\frac{l\,\pi}{d}\right) H_+^m\, cos\left(\frac{l\,\pi}{d}\,z\right) \nabla_\mathbf{t}\, \Psi_m\,(\xi,\,\eta)\, e^{i\,\omega\,t} \tag{4.2.12a}$$

$$\mathbf{E_t} = -\frac{2\,\mu\,\omega}{\rho_1\,k^2}\, H_+^m\, sin\left(\frac{l\,\pi}{d}\,z\right) \left\{\mathbf{u_z} \times \nabla_\mathbf{t}\,\Psi_m\,(\xi,\,\eta)\right\} e^{i\,\omega\,t} \tag{4.2.12b}$$

où $\Psi_m(\xi, \eta)$ est donné en (1.2.1). On en déduit les composantes elliptiques des champs:

$$H_\xi = \frac{2}{i\rho_1 k^2}\left(\frac{l\pi}{d}\right) H_+^m \psi_m'(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) e^{i\omega t} \quad (4.2.13a)$$

$$H_\eta = \frac{2}{i\rho_1 k^2}\left(\frac{l\pi}{d}\right) H_+^m \psi_m(\xi, q)\,\phi_m'(\eta, q) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) e^{i\omega t} \quad (4.2.13b)$$

$$E_\xi = \frac{2\omega\mu}{\rho_1 k^2} H_+^m \psi_m(\xi, q)\,\phi_m'(\eta, q) \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right) e^{i\omega t} \quad (4.2.13c)$$

$$E_\eta = -\frac{2\omega\mu}{\rho_1 k^2} H_+^m \psi_m'(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q) \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right) e^{i\omega t} \quad (4.2.13d)$$

4.2.2 Les modes TM

Les modes TM dans la cavité s'obtiennent en considérant l'expression de E_z pour un guide d'ondes elliptique infini (éq. 2.2.1b) et une propagation suivant les z positifs et les z négatifs. Les conditions aux frontières à $z = 0$ et $z = d$, selon lesquelles la composante transversale du champ électrique doit y être nulle, mène à l'expression de E_z dans la cavité, comme nous l'avons fait pour H_z dans le cas des modes TE. En effet, à $z = 0$ et $z = d$, $E_\xi = E_\eta = 0$. D'où:

$$E_z = 2 E_+^m \psi_m(\xi, q)\,\phi_m(\eta, q) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) e^{i\omega t} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \quad (4.2.14)$$

Les composantes transversales des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont déterminées à partir de E_z [10]:

$$\mathbf{E_t} = -\frac{2}{\rho_1 k^2}\left(\frac{l\pi}{d}\right) E_+^m \sin\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \nabla_\mathbf{t} \Psi_m(\xi, \eta)\, e^{i\omega t} \quad (4.2.15a)$$

$$\mathbf{H_t} = -\frac{2\omega\varepsilon}{i\rho_1 k^2} E_+^m \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) \left\{\mathbf{u_z} \times \nabla_\mathbf{t} \Psi_m(\xi, \eta)\right\} e^{i\omega t} \quad (4.2.15b)$$

On obtient:

$$H_\xi = \frac{2\omega\varepsilon}{i\rho_1 k^2} E_+^m \psi_m(\xi, q)\,\phi_m'(\eta, q) \cos\left(\frac{l\pi}{d} z\right) e^{i\omega t} \quad (4.2.16a)$$

$$H_\eta = -\frac{2\,\omega\,\varepsilon}{i\,\rho_1\,k^2}\,E_+^m\,\psi_m^{'}(\xi,\,q)\,\phi_m(\eta,\,q)\,cos\left(\frac{l\,\pi}{d}\,z\right)\,e^{i\,\omega\,t} \tag{4.2.16b}$$

$$E_\xi = -\frac{2}{\rho_1\,k^2}\left(\frac{l\,\pi}{d}\right)E_+^m\,\psi_m^{'}(\xi,\,q)\,\phi_m(\eta,\,q)\,sin\left(\frac{l\,\pi}{d}\,z\right)\,e^{i\,\omega\,t} \tag{4.2.16c}$$

$$E_\eta = -\frac{2}{\rho_1\,k^2}\left(\frac{l\,\pi}{d}\right)E_+^m\,\psi_m(\xi,\,q)\,\phi_m^{'}(\eta,\,q)\,sin\left(\frac{l\,\pi}{d}\,z\right)\,e^{i\,\omega\,t} \tag{4.2.16d}$$

Les fréquences de résonnance des modes $TM_{cmnl}\,(TM_{smnl})$ sont données aussi par la relation (4.2.11):

$$f_{mnl} = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{\mu\,\varepsilon}}\sqrt{\frac{4\,q_{mn}}{(a\,e)^2} + \left(\frac{l\,\pi}{d}\right)^2} \tag{4.2.17}$$

où q_{mn} correspond maintenant au $n^{i\grave{e}me}$ zéro de la fonction de Mathieu modifiée d'ordre m.

En général, pour une fréquence de résonnance f_{mnl} donnée, il y a quatre distributions du champ électromagnétique, correspondant respectivement aux modes TE_c, TE_s, TM_c et TM_s. Les modes les plus communément utilisés sont les modes TE_{c01l} (en particulier le mode TE_{c011}). Ils correspondent au mode TE_{c01} du guide d'ondes elliptique infini qui présente une très faible atténuation à haute fréquence (fig. 3.3c). Les modes TE_{c01l} présentent également l'avantage d'induire dans les parois des courants qui n'ont aucune composante axiale (suivant z), facilitant ainsi la variation de la longueur de la cavité sans perturber la configuration des lignes de courant. Cet avantage est exploité dans l'utilisation des ondemètres [15].

4.3 Les pertes dans une cavité elliptique-Facteur de qualité

Les cavités résonnantes possédent des fréquences de résonnance discrètes avec des configurations du champ électrique et du champ magnétique bien définies. Cela implique que si l'on veut exciter un mode particulier, que ce soit du type $TE_{cmnl}(TE_{smnl})$ ou du type $TM_{cmnl}(TM_{smnl})$, cela n'est possible que si la fréquence d'excitation est exactement égale à la fréquence de résonnance de ce mode particulier. Par exemple, si l'on veut exciter le mode TE_{c011} elliptique, il faut que la fréquence d'excitation f soit égale à f_{011}^c, sinon le mode ne peut être excité dans la cavité.

En pratique, f n'a pas besoin d'être exactement égale à f_{011}^c. Il y aura plutôt une bande de fréquences, caractérisée par une largeur de bande Δf centrée autour de f_{011}^c, dans laquelle l'excitation du mode TE_{c011} est possible. La raison de cet 'étalement' de la fréquence est la perte d'énergie dans la cavité. Cette perte peut être due aux parois de la cavité (conducteur non parfait, $\sigma_c \neq \infty$), ou au diélectrique remplissant la cavité (diélectrique non parfait, $\sigma_d \neq 0$), ou les deux. Jusqu'ici, nous avons considéré des parois et un diélectrique parfaits.

Une mesure de l'étalement en fréquence est donnée par ce que l'on appelle le *facteur de qualité* Q de la cavité. Ce facteur est défini de façon générale comme suit [15]:

$$Q \equiv \omega_R \frac{\text{Énergie moyenne emmagasinée}}{\text{Puissance dissipée}} \tag{4.3.1}$$

où ω_R est la fréquence de résonnance du mode excité, en supposant que les pertes sont nulles.

Soit W_0 l'énergie moyenne emmagasinée dans la cavité. Supposons qu'à $t = 0$, on débranche la source qui excite la cavité. L'énergie emmagasinée va dès lors diminuer. La conservation de l'énergie implique que la puissance dissipée par effet Joule dans les parois et le diélectrique est égale au taux de diminution de l'énergie emmagasinée dans la cavité. Si W est cette énergie emmagasinée à l'instant t, et P la puissance dissipée, alors:

$$P = -\frac{dW}{dt} \tag{4.3.2}$$

En utilisant la définition (4.3.1) de Q, on obtient:

$$\frac{dW}{W} = -\frac{\omega_R}{Q}\,dt \tag{4.3.3}$$

C'est une équation différentielle dans la solution est:

$$W = W_0\, e^{-\frac{\omega_R}{Q}t} \tag{4.3.4}$$

L'énergie emmagasinée décroît donc de façon exponentielle dans le temps. La constante de temps est égale à Q/ω_R. L'énergie emmagasinée W_0 est calculée en considérant l'énergie électrique U_e et magnétique U_m, par unité de volume, emmagasinée dans les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$. Celles-ci sont données par [15]:

$$U_e = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E^2, \qquad\qquad U_m = \frac{1}{2}\,\mu\,H^2 \tag{4.3.5}$$

L'énergie électrique contenue dans le volume V de la cavité est donc:

$$W_e = \int_V \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E^2\,dV \tag{4.3.6}$$

L'énergie magnétique s'écrit de la même façon:

$$W_m = \int_V \frac{1}{2}\,\mu\,H^2\,dV \tag{4.3.7}$$

Par conséquent, l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la cavité est:

$$W_e + W_m = \int_V \left(\frac{1}{2}\,\varepsilon\,E^2 + \frac{1}{2}\,\mu\,H^2\right)dV \tag{4.3.8}$$

Les expressions ci-dessus supposent des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ réels. Si les champs sont écrits sous leur forme complexe, il faut en prendre la partie réelle:

$$W_e + W_m = Re\int_V \left(\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\,\mu\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\right)dV \tag{4.3.9}$$

et la valeur moyenne de cette quantité est W_0. Elle est donnée par [15]:

$$W_0 = < W_e + W_m > = \int_V \left(\frac{1}{4}\,\varepsilon\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \frac{1}{4}\,\mu\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\right)dV \tag{4.3.10}$$

Cette énergie est donc proportionnelle à $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ (ou $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*$). Cela implique donc que $\mathbf{E}$ (ou $\mathbf{H}$) n'oscille plus dans la cavité de façon sinusoïdale, mais peut s'écrire plutôt, en fonction du temps, comme:

$$E(t) \; = \; E_0 \, e^{-\frac{\omega_R}{2Q}\, t} \, e^{i\,\omega\, t} \tag{4.3.11}$$

Le champ électrique (ou magnétique) subit donc des oscillations amorties qui ne correspondent pas à une 'fréquence pure' ω_R mais plutôt à une superposition infinie de fréquences autour de ω_R. En effet, on peut calculer la transformée de Fourier de $E(t)$:

$$\begin{aligned} E(\omega) \; &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)\, e^{i\,\omega\, t}\, d\,t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 \, e^{-\frac{\omega_R}{2Q}\, t} \, e^{i\,(\omega_R\, -\, \omega)\, t}\, d\,t \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Cette intégrale peut être évaluée assez facilement. L'énergie emmagasinée dans la cavité, pour une fréquence ω donnée, est proportionnelle à $|E(\omega)|^2$:

$$|E(\omega)|^2 \; \propto \; \frac{1}{(\omega - \omega_R)^2 + \left(\frac{\omega_R}{2\,Q}\right)^2} \tag{4.3.13}$$

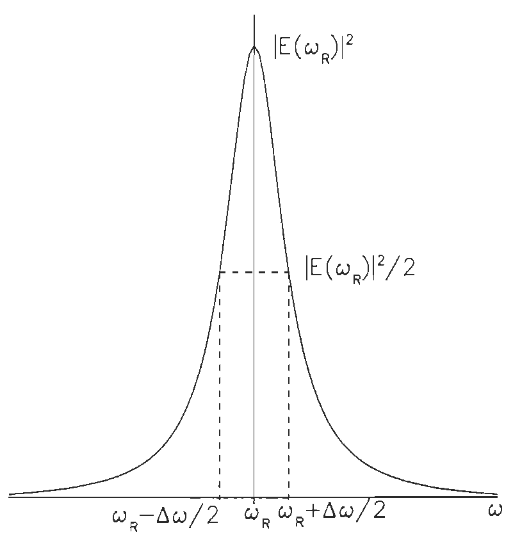


Figure 4.1 Variation de $|E(\omega)|^2$ en fonction de ω.

La courbe de $|E(\omega)|^2$ en fonction de ω (fig. 4.1) présente une résonnance à $\omega = \omega_R$, mais une résonnance 'douce', c'est-à-dire qu'à $\omega = \omega_R$, $|E(\omega)|^2 \neq \infty$ à cause de la présence de Q dans le dénominateur de l'expression (4.3.13).

La largeur de bande $\Delta\,\omega = 2\,\pi\,\Delta\,f$ est définie par les fréquences $\omega_R - \Delta\,\omega/2$ et $\omega_R + \Delta\,\omega/2$, pour lesquelles $|E(\omega)|^2$ tombe de moitié de sa valeur maximale. On obtient ainsi:

$$\Delta\,\omega \;=\; \frac{\omega_R}{Q} \tag{4.3.14}$$

D'où:

$$Q \;=\; \frac{\Delta\,\omega}{\omega_R} \tag{4.3.15}$$

On se propose maintenant de calculer le facteur de qualité Q en fonction des propriétés physiques de la cavité. Il faut alors calculer W_0, l'énergie moyenne emmagasinée dans la cavité et P, la puissance dissipée (dans les parois conductrices et le diélectrique). Écrivons:

$$P \;=\; P_c \,+\, P_d \tag{4.3.16}$$

où P_c est la puissance dissipée dans les parois conductrices et P_d la puissance dissipée dans le diélectrique. La relation (4.3.1) donne pour le facteur de qualité:

$$\frac{1}{Q} \;=\; \frac{P_c}{\omega_R\,W_0} \,+\, \frac{P_d}{\omega_R\,W_0} \;\equiv\; \frac{1}{Q_c} \,+\, \frac{1}{Q_d} \tag{4.3.17}$$

où

$$Q_c \;\equiv\; \frac{\omega_R\,W_0}{P_c}, \qquad\qquad Q_d \;\equiv\; \frac{\omega_R\,W_0}{P_d} \tag{4.3.18}$$

Par conséquent:

$$Q \;=\; \frac{Q_c\,Q_d}{Q_c \,+\, Q_d} \tag{4.3.19}$$

Pour calculer P_c, notons que sur les parois circule un courant surfacique dont la densité, en A/m, est donnée par:

$$\mathbf{J_s} \;=\; \mathbf{n} \,\times\, \mathbf{H_c} \tag{4.3.20}$$

où $\mathbf{H_c}$ est le champ magnétique sur les parois conductrices. Le conducteur formant les parois présente une impédance surfacique (éqs. 3.3.20 et 3.3.21):

$$Z_s = \frac{1}{\delta_c \, \sigma_c} (1 + i) \tag{4.3.21}$$

donc une résistance surfacique:

$$R_s = \frac{1}{\delta_c \, \sigma_c} \tag{4.3.22}$$

La puissance moyenne par unité de surface dissipée dans les parois est:

$$d \, P_c = \frac{1}{2} R_s \, |\mathbf{J_s}|^2 \tag{4.3.23}$$

La puissance P_c s'obtient en intégrant cette expression sur toute la suface S des parois:

$$P_c = \frac{1}{2} R_s \int_S |\mathbf{J_s}|^2 \, d\, s \tag{4.3.24}$$

Calculons P_d maintenant. Le diélectrique a une conductivité σ_d non nulle. Si $\mathbf{E}$ est le champ électrique dans la cavité, c'est-à-dire dans le diélectrique, il y circule une densité de courant $\mathbf{J_d}$, en A/m^2, donnée par:

$$\mathbf{J_d} = \sigma_d \, \mathbf{E} \tag{4.3.25}$$

La puissance instantanée dissipée dans le diélectrique, par unité de volume, est:

$$Re \Big(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \Big) = \sigma_d \, Re \Big(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \Big) \tag{4.3.26}$$

dont la valeur moyenne est:

$$\frac{1}{2} \sigma_d \Big(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \Big) = \frac{1}{2} \sigma_d \, |\mathbf{E}|^2 \tag{4.3.27}$$

D'où

$$P_d = \frac{1}{2} \int_V \sigma_d \, |\mathbf{E}|^2 \, d\, v \tag{4.3.28}$$

Si le diélectrique est le vide ($\sigma_d = 0$), la puissance P_d est nulle, ce qui donne un facteur de qualité Q_d infini. Dans ce cas:

$$Q = Q_c \tag{4.3.29}$$

De façon générale, les pertes dans le diélectrique qui remplit le guide sont négligeables comparées aux pertes dans les parois, ce qui nous permet de les négliger. On a donc:

$$P \approx P_c \tag{4.3.30}$$

D'autre part, à la résonnance [10],

$$< W_m > = < W_e > \tag{4.3.31}$$

D'où

$$W_0 = 2 < W_e > = 2 < W_m > \tag{4.3.32}$$

4.3.1 Les modes TE

Appliquons ces résultats au calcul du facteur de qualité Q des modes TE_{cmnl} et TE_{smnl} dont les composantes des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont données à la section 4.2.1. Nous calculons d'abord W_0. Puisque l'énergie emmagasinée dans le champ électrique est égale à l'énergie emmagasinée dans le champ magnétique, en moyenne (éq. 4.3.31), on peut la calculer lorsque l'énergie électrique est maximale. Dans ce cas, l'énergie magnétique est nulle:

$$W_0 = \frac{\varepsilon}{2} \int_V |E|^2 \, dV = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^d \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} [|E_\xi|^2 + E_\eta|^2] \, \rho_1^2 \, d\xi \, d\eta \, dz \tag{4.3.33}$$

Les relations (4.2.13c) et (4.2.13d) donnent:

$$\begin{aligned} W_0 &= d \, \frac{\omega^2 \, \mu^2 \, \varepsilon}{k^4} \, |H_+^m|^2 \times \\ & \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} [\psi_m^2 \, (\xi, q) \, \phi_m^{'2} \, (\eta, q) + \psi_m^{'}{}^2 \, (\xi, q) \, \phi_m^2 \, (\eta, q)] \, d\xi \, d\eta \\ &= d \, \frac{\omega^2 \, \mu^2 \, \varepsilon}{k^4} \, |H_+^m|^2 \, \Lambda_m \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

où Λ_m est donné par l'équation (3.3.11).

Calculons maintenant la puissance dissipée dans les parois que l'on écrit:

$$P_c = P_{cl} + P_{cb} \tag{4.3.35}$$

où P_{cl} et P_{cb} sont respectivement les puissances dissipées sur la face latérale et les deux bases de la cavité elliptique. Sur la base à $z = 0$, on a $\mathbf{n} = -\mathbf{u_z}$, et une densité de courant (éq. 4.3.20):

$$\mathbf{J_s} = H_\eta \, \mathbf{u}_\xi - H_\xi \, \mathbf{u}_\eta \tag{4.3.36}$$

Sur la base à $z = d$, on a $\mathbf{n} = \mathbf{u_z}$ et

$$\mathbf{J_s} = -H_\eta \, \mathbf{u}_\xi + H_\xi \, \mathbf{u}_\eta \tag{4.3.37}$$

On a donc la même contribution qu'à $z = 0$, en valeur absolue. En vertu de la relation (4.3.24), la puissance dissipée sur les deux bases est:

$$P_{cb} = R_s \int_S \left[|H_\xi|^2 + |H_\eta|^2 \right]_{z=0,\, d} d\,S \tag{4.3.38}$$

En remplaçant H_ξ et H_η par leurs expressions données en (4.2.13a) et (4.2.13b) et l'élément de surface $d\,S$ par l'expression (A.3.10), on obtient:

$$\begin{aligned} P_{cb} &= \frac{4\,R_s}{k^4} \left(\frac{l\,\pi}{d} \right)^2 |H_+^m|^2 \times \\ & \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\,\pi} [\psi_m^2\,(\xi,\,q)\,\phi_m^{'2}\,(\eta,\,q) + \psi_m^{'2}\,(\xi,\,q)\,\phi_m^2\,(\eta,\,q)]\,d\,\xi\,d\,\eta \\ &= \frac{4}{\sigma_c\,\delta_c\,k^4} \left(\frac{l\,\pi}{d} \right)^2 |H_+^m|^2\,\Lambda_m \end{aligned} \tag{4.3.39}$$

Sur la face latérale, à $\xi = \xi_0$, on a $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\xi$ et une densité de courant (éq. 4.3.20):

$$\mathbf{J_s} = -H_z \, \mathbf{u}_\eta + H_\eta \, \mathbf{u_z} \tag{4.3.40}$$

La puissance qui y est dissipée est donc:

$$P_{cl} = \frac{R_s}{2} \int_S \left[|H_\eta|^2 + |H_z|^2 \right]_{\xi = \xi_0} d s_2 \tag{4.3.41}$$

Les expressions de H_z, H_η et $d s_2$ en (4.2.9), (4.2.13b) et (A.3.8) donnent:

$$P_{cl} = \frac{d\, R_s}{a\, k^4} \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 |H_+^m|^2\, \psi_m^2\,(\xi_0,\, q) \int_0^{2\,\pi} \frac{\phi_m'^2\,(\eta,\, q)}{\sqrt{1\, -\, e^2\, cos^2\, \eta}}\, d\eta$$

$$+\; a\, d\, R_s\, |H_+^m|^2\, \psi_m^2\,(\xi_0,\, q) \int_0^{2\,\pi} \phi_m^2\,(\eta,\, q)\, \sqrt{1\, -\, e^2\, cos^2\, \eta}\, d\eta$$

$$= \frac{d}{\sigma_c\, \delta_c\, a\, k^4} \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 |H_+^m|^2\, [\Phi_m' \,+\, \left(\frac{a\, d\, k^2}{l\,\pi}\right)^2 \widetilde{\Phi}_m]\, \psi_m^2\,(\xi_0,\, q) \tag{4.3.42}$$

où Φ_m' et $\widetilde{\Phi}_m$ sont donnés en (3.3.39a et 3.3.39b). La puissance totale dissipée dans les parois conductrices est donc, en vertu de (4.3.35):

$$P_c \;=\; \frac{4}{\sigma_c\, \delta_c\, k^4} \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 |H_+^m|^2\, [\Lambda_m + \frac{d}{4\, a}\, [\Phi_m' + \left(\frac{a\, d\, k^2}{l\,\pi}\right)^2 \widetilde{\Phi}_m]\, \psi_m^2\,(\xi_0,\, q)] \tag{4.3.43}$$

En utilisant les expressions (4.3.34) et (4.3.43) de W_0 et P_c et en négligeant les pertes dans le diélectrique, le facteur de qualité de la cavité devient donc (éqs. 4.3.1, 4.3.29 et 4.3.30):

$$Q \;=\; \frac{d}{4\, \delta_c} \left(\frac{d\, \omega_R\, \sqrt{\mu^2\, \varepsilon}}{l\,\pi}\right)^2 \times$$

$$\frac{\omega_R\, \sigma_c\, \delta_c^2}{1\, +\, \frac{d}{4\, a\, \Lambda_m} \left\{\Phi_m' \,+\, \left(\frac{a\, d\, k^2}{l\,\pi}\right)^2 \widetilde{\Phi}_m\right\} \psi_m^2\,(\xi_0,\, q)} \tag{4.3.44}$$

Pour un bon conducteur, on a (éq. 3.3.22):

$$\delta_c \;=\; \sqrt{\frac{2}{\omega\, \mu\, \sigma_c}} \tag{4.3.45}$$

et comme (éq. 4.2.8)

$$\omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{l \pi}{d}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{4 d q}{a l \pi e^2}\right)^2\right) \tag{4.3.46}$$

on a donc:

$$Q = \frac{d}{2 \delta_c} \frac{1 + \frac{4 q}{(l \pi e^2)^2} \left(\frac{d}{a}\right)^2}{1 + \frac{d}{4 a \Lambda_m} \left\{\Phi'_m + \left(\frac{4 q}{l \pi e^2}\right)^2 \left(\frac{d}{a}\right)^2 \widetilde{\Phi}_m\right\} \psi_m^2 (\xi_0, q)} \tag{4.3.47}$$

où q représente q'_{mn}. En multipliant le numérateur et le dénominaleur par la surface totale interne de la cavité, l'expression ci-dessus peut se mettre sous la forme:

$$Q = \frac{\text{volume de la cavité}}{\delta_c \times \text{surface interne de la cavité}} \times (\textit{facteur géométrique}) \tag{4.3.48}$$

L'expression de Q peut aussi être vue sous un autre angle. En effet, on peut écrire:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\lambda_0}{\delta_c} \frac{\left(4 q + (l \pi e)^2 \left(\frac{a}{d}\right)^2\right)^{3/2} / e \pi}{4 (l \pi e)^2 \left(\frac{a}{d}\right)^3 + \frac{1}{\Lambda_m} \left\{(l \pi e)^2 \left(\frac{a}{d}\right)^2 \Phi'_m + \left(\frac{4 q_{mn}}{e}\right)^2 \widetilde{\Phi}_m\right\} \psi_m^2 (\xi_0, q)} \\ &= \frac{\lambda_0}{\delta_c} \times (\textit{facteur de forme}) \end{aligned} \tag{4.3.49}$$

où

$$\lambda_0 = \frac{2 \pi}{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}} \tag{4.3.50}$$

est la longueur d'onde dans le milieu diélectrique infini.

L'expression (4.3.48) du facteur de qualité de la cavité montre qu'il est proportionnel au rapport volume/surface de la cavité. Le *facteur géométrique* est de l'ordre de 1 quelle que soit la cavité [15]. La qualité de la cavité est donc assurée par la plus grande valeur du rapport volume/surface pour une fréquence de résonnance donnée.

L'expression (4.3.49) de Q introduit un *facteur de forme* qui ne dépend que de la forme de la cavité et du mode de résonnance considéré. Pour une fréquence de résonnance donnée, la valeur maximale de Q correspond à celle du facteur de forme.

Le facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ a été calculé pour plusieurs modes de résonnance TE_{cmnl} et TE_{smnl} en fonction du rapport $2\,a/d$ et pour différentes excentricités. Les résultats présentés aux figures 4.2 et 4.3 concordent avec ceux donnés dans la littérature [20 - 24] qui ne portent cependant que sur quelques modes de résonnance. Les résultats de Higgins et Straiton [20] comportent toutefois des erreurs de l'ordre de 20% qui sont dues aux approximations que ces auteurs ont utilisées [24].

La figure 4.2 indique que pour les modes pairs TE_{cmnl}, le facteur de qualité Q est, en général, le plus grand pour une excentricité nulle, ce qui correspond à la cavité circulaire. Mais à mesure que le rapport $2\,a/d$ augmente, la cavité elliptique peut avoir un plus grand facteur de qualité. Ceci est particulièrement vrai pour les modes TE_{c01l} (fig. 4.2c) pour lesquels le facteur de qualité est le plus grand pour des rapports $2\,a/d$ de l'ordre 3 et plus.

Le facteur de qualité le plus élevé est celui du mode TE_{c122} (fig. 4.2d) pour des rapports $2\,a/d$ plus petit que 2,6 environ. Ce facteur de qualité est plus grand que ceux des modes TE_{c011} et TE_{c012} (fig. 4.2c).

Les mêmes observations peuvent être faites pour les modes impaires TE_{smnl} (fig. 4.3).

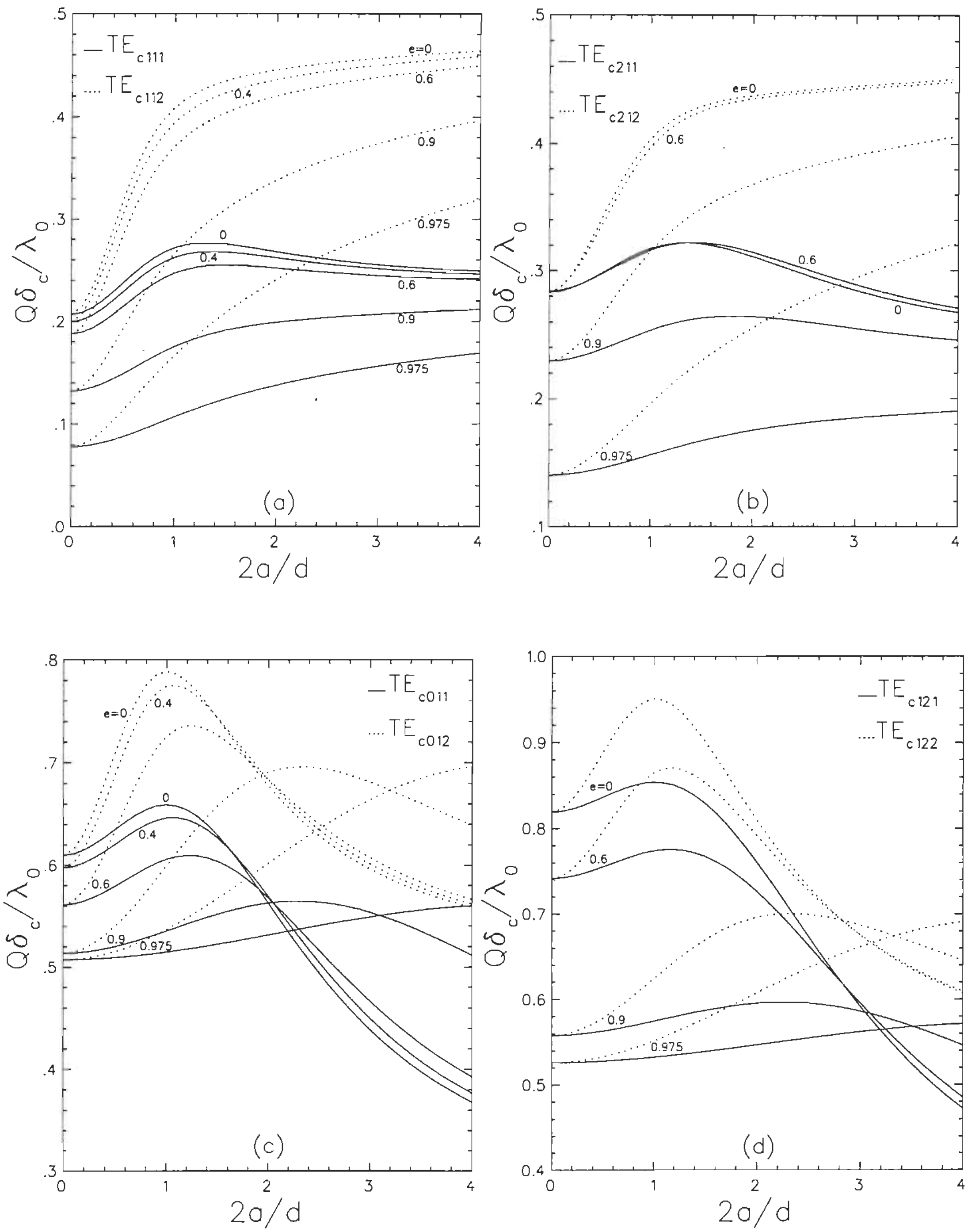


Figure 4.2 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TE_{cmnl} d'une cavité elliptique en fonction du rapport $2\,a/d$ avec l'excentricité e comme paramètre.

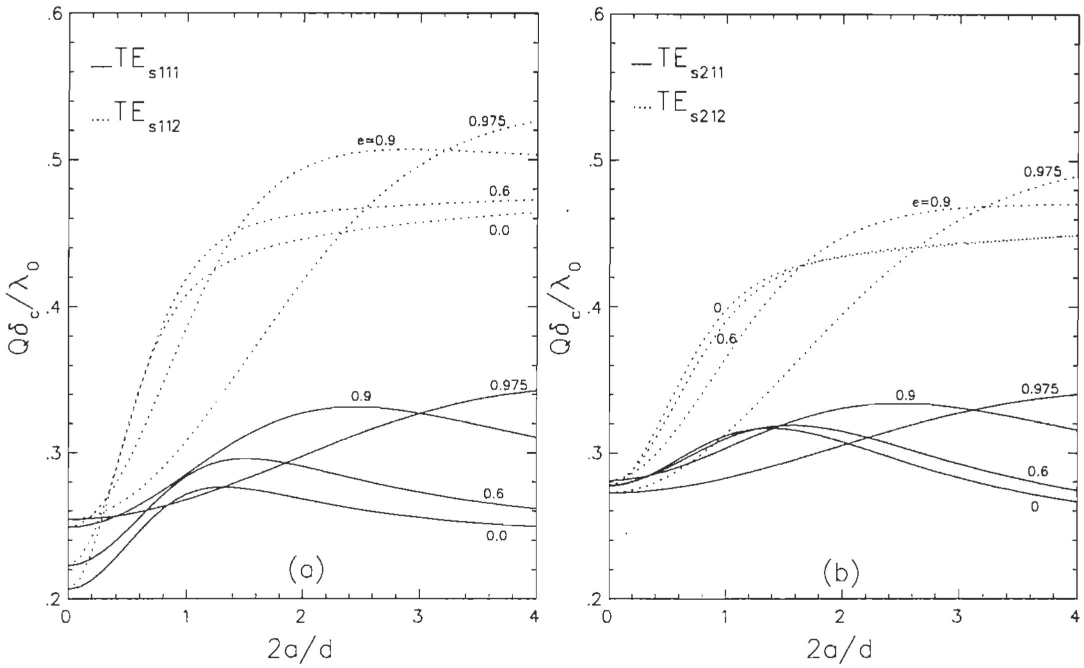


Figure 4.3 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TE_{smnl} d'une cavité elliptique en fonction du rapport $2\,a/d$ avec l'excentricité e comme paramètre.

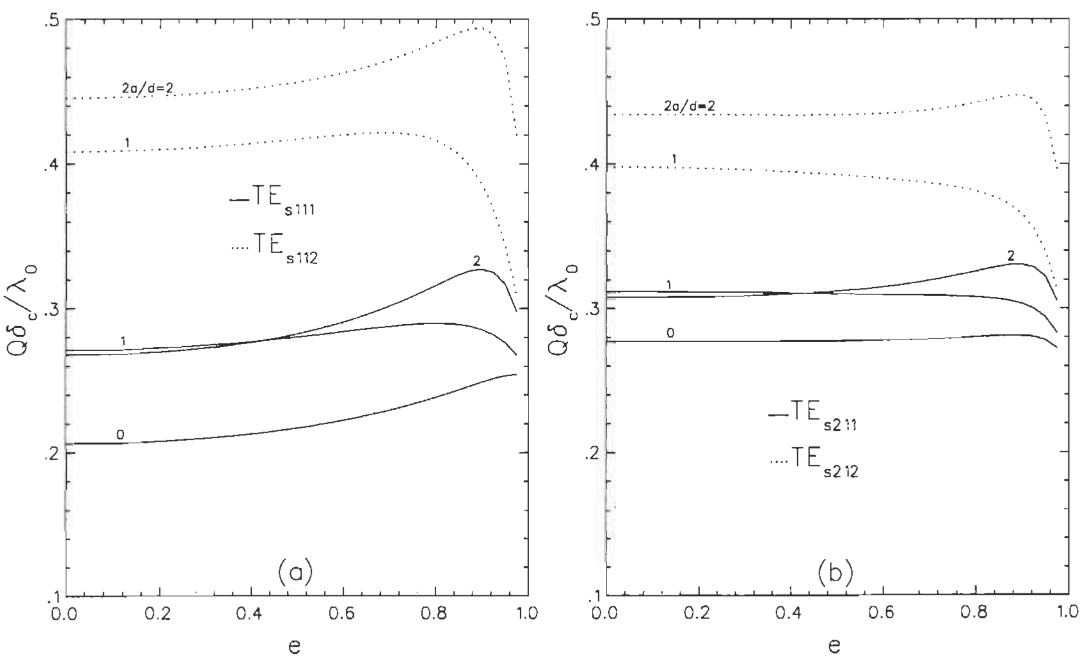


Figure 4.4 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TE_{smnl} d'une cavité elliptique en fonction de l'excentricité e avec $2\,a/d$ comme paramètre.

Les figures 4.4 et 4.5 montrent la variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ pour les mêmes modes TE_{smnl} et TE_{cmnl} en fonction de l'excentricité avec le rapport $2\,a/d$ comme paramètre. On note que pour un rapport $2\,a/d$ donné, le facteur de forme est peu sensible à l'excentricité, en autant que celle-ci ne soit pas très grande. Pour de grandes excentricités, le facteur de forme de certains modes de résonnance présente un maximum. C'est le cas, par exemple, des modes TE_{s111} (fig. 4.4a) et TE_{c012} (fig. 4.5c) pour $2\,d/a = 2$.

4.3.2 Les modes TM

Les composantes des champs **E** et **H** pour les modes TM sont données à la section 4.2.2. Deux cas doivent être envisagés: les modes (mnl) pour lesquels $l \neq 0$ et ceux pour lesquels $l = 0$.

Cas où l $\neq$ 0:

L'énergie électromagnétique W_0 est calculée au moment où l'énergie électrique est nulle:

$$W_0 \;=\; \frac{\mu}{2} \int_V |H|^2 \, dV \tag{4.3.51}$$

En se référant aux expressions (4.2.16a) et (4.2.16b), on obtient:

$$\begin{aligned} W_0 \;&= d\,\frac{\omega^2\,\varepsilon^2\,\mu}{k^4}\,|E_+^m|^2 \times \\ &\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi} \left[\psi_m^2\,(\xi,\,q)\,\phi_m'^2\,(\eta,\,q) \;+\; \psi_m'^2\,(\xi,\,q)\,\phi_m^2\,(\eta,\,q)\right] d\xi\,d\eta \\ &= d\,\frac{\omega^2\,\varepsilon^2\,\mu}{k^4}\,|E_+^m|^2\,\Lambda_m \end{aligned} \tag{4.3.52}$$

où Λ_m est donné par l'équation (3.3.11)

La puissance dissipée dans les parois est calculée en utilisant la relation (4.3.35). Sur la base à $z = 0$, $\mathbf{n} = -\,\mathbf{u_z}$ et alors:

$$\mathbf{J_s} \;=\; H_\eta\,\mathbf{u}_\xi \;-\; H_\xi\,\mathbf{u}_\eta \tag{4.3.53}$$

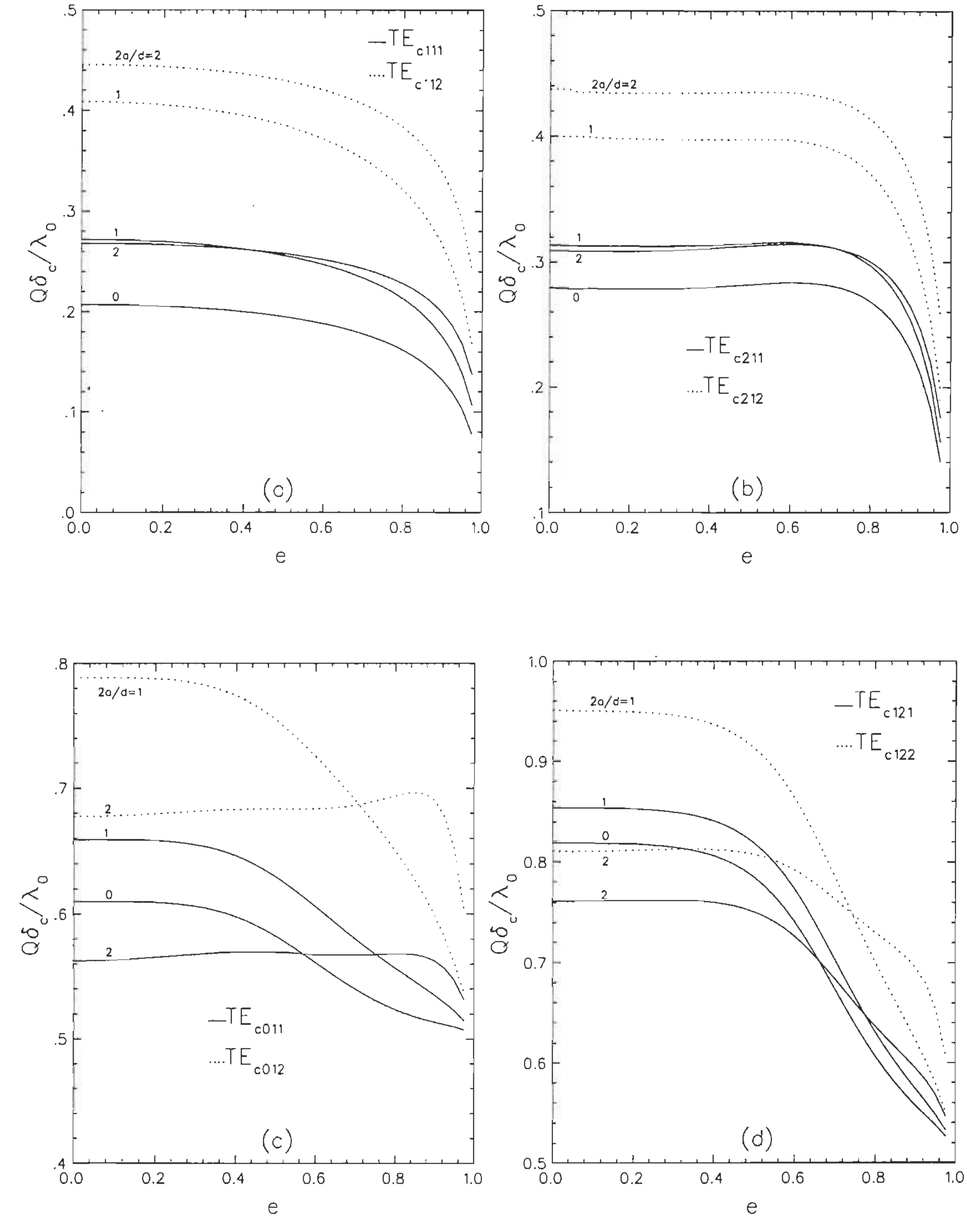


Figure 4.5 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TE_{cmnl} d'une cavité elliptique en fonction de l'excentricité e avec $2\,a/d$ comme paramètre.

Sur la base à $z = d$, $\mathbf{n} = \mathbf{u_z}$, on a:

$$\mathbf{J_s} = -H_\eta \, \mathbf{u}_\xi + H_\xi \, \mathbf{u}_\eta \tag{4.3.54}$$

La relation (4.3.24) pour la puissance dissipée sur les deux bases de la cavité donne:

$$P_{cb} = R_s \int_S |\mathbf{J_s}|^2_{z=0,\, d} \, d\,S = R_s \int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} \left[|H_\xi|^2 + |H_\eta|^2 \right]_{z=0,\, d} \rho_1^2 \, d\,\xi \, d\,\eta$$

$$= \frac{4\,\omega^2\,\varepsilon^2}{\sigma_c\,\delta_c\,k^4} \, |E_+^m|^2 \times$$

$$\int_0^{\xi_0} \int_0^{2\pi} [\psi_m^2\,(\xi,\, q)\,\phi_m'^2\,(\eta,\, q) + \psi_m'^2\,(\xi,\, q)\,\phi_m^2\,(\eta,\, q)] \, d\,\xi \, d\,\eta$$

$$= \frac{4\,\omega^2\,\varepsilon^2}{\sigma_c\,\delta_c\,k^4} \, |E_+^m|^2 \, \Lambda_m \tag{4.3.55}$$

Sur la face latérale, à $\xi = \xi_0$, $\mathbf{n} = \mathbf{u}_\xi$ on a:

$$\mathbf{J_s} = H_\eta \, \mathbf{u_z} \tag{4.3.56}$$

et la puissance dissipée (4.3.24) sur cette face est:

$$P_{cl} = \frac{R_s}{2} \int_S |J_s|^2_{\xi\,=\,\xi_0} \, d\,s_2 \, d\,z = \frac{R_s}{2} \int_0^{d} \int_0^{2\pi} |H_\eta|^2_{\xi\,=\,\xi_0} \, \rho_1 \, d\,\eta \, d\,z$$

$$= \frac{d\,\omega^2\,\varepsilon^2}{\sigma_c\,\delta_c\,k^4} \, |E_+^m|^2 \, \psi_m'^2\,(\xi_0,\, q) \int_0^{2\pi} \frac{\phi_m^2\,(\eta,\, q)}{a\,\sqrt{1 - e^2\,cos^2\,\eta}} \, d\,\eta$$

$$= \frac{d\,\omega^2\,\varepsilon^2}{a\,\sigma_c\,\delta_c\,k^4} \, |E_+^m|^2 \, \Phi_m \, \psi'^2\,(\xi_0,\, q) \tag{4.3.57}$$

où Φ_m est donné en (3.3.27)

La puissance totale dissipée dans les parois est la somme de (4.3.55) et (4.3.57):

$$P_c = \frac{4\,\omega^2\,\varepsilon^2}{\sigma_c\,\delta_c\,k^4} \, |E_+^m|^2 [\Lambda_m + \frac{d}{4\,a} \, \Phi_m \psi'^2\,(\xi_0,\, q)] \tag{4.3.58}$$

En négligeant ici aussi les pertes dans le diélectrique, le facteur de qualité de la cavité s'écrit donc (éq. 4.3.1):

$$Q = \frac{d}{4\,\delta_c} \frac{\omega_R\,\sigma_c\,\delta_c^2}{1 + \frac{d}{4\,a}\frac{\Phi_m}{\Lambda_m}\psi_m'^2(\xi_0,\,q)} = \frac{d}{2\,\delta_c}\frac{1}{1 + \frac{d}{4\,a}\frac{\Phi_m}{\Lambda_m}\psi_m'^2(\xi_0,\,q)}$$

$$= \frac{d}{2\,\delta_c} \times (\textit{facteur géométrique}) \tag{4.3.59}$$

où q représente q_{mn}. L'expression ci-dessus peut être transformée pour donner:

$$Q = \frac{\lambda_0}{\delta_c}\,\frac{\frac{1}{e\,\pi}\left[4\,q + (l\,\pi\,e)^2\left(\frac{a}{d}\right)^2\right]^{1/2}}{4\,\frac{a}{d} + \frac{\Phi_m}{\Lambda_m}\psi_m'^2(\xi_0,\,q)} = \frac{\lambda_0}{\delta_c} \times (\textit{facteur de forme}) \tag{4.3.60}$$

Cas où l = 0:

Dans ce cas, $E_\xi = E_\eta = 0$ (éqs. 4.2.16c et d), et l'énergie emmagasinée est le double de celle donnée en (4.3.52):

$$W_0 = 2\,d\,\frac{\omega^2\,\varepsilon^2\,\mu}{k^4}\,|E_+^m|^2\,\Lambda_m \tag{4.3.61}$$

La puissance dissipée sur les deux bases demeure inchangée:

$$P_{cb} = \frac{4\,\omega^2\,\varepsilon^2}{\sigma_c\,\delta_c\,k^4}\,|E_+^m|^2\,\Lambda_m \tag{4.3.62}$$

Mais la puissance dissipée sur la face latérale est aussi doublée en raison de l'intégration sur la variable z:

$$P_{cl} = \frac{2\,d\,\omega^2\,\varepsilon^2}{a\,\sigma_c\,\delta_c\,k^4}\,|E_+^m|^2\,\Phi_m\,\psi'^2(\xi_0,\,q) \tag{4.3.63}$$

La puissance totale dissipée dans les parois est donc:

$$P_c = \frac{4\,\omega^2\,\varepsilon^2}{\sigma_c\,\delta_c\,k^4}\,|E_+^m|^2[\Lambda_m + \frac{d}{2\,a}\,\Phi_m\psi'^2(\xi_0,\,q)] \tag{4.3.64}$$

Le facteur de qualité est donné dans ce cas par:

$$Q = \frac{d}{2\,\delta_c}\,\frac{1}{1 + \frac{d}{2\,a}\frac{\Phi_m}{\Lambda_m}\psi'^2(\xi_0,\,q)} = \frac{d}{2\,\delta_c} \times (\textit{facteur géometrique}) \tag{4.3.65}$$

ou encore par:

$$Q = \frac{a}{\delta_c} \frac{1}{2\,\frac{a}{d} + \frac{\Phi_m}{\Lambda_m}\,\psi'^2\,(\xi_0,\,q)} \tag{4.3.66}$$

Pour $l = 0$, on a (éq. 4.2.8):

$$a = \frac{\lambda_0}{\pi\, e}\,\sqrt{4\,q} \tag{4.3.67}$$

où q représente q_{mn}. Dans ce cas, l'équation (4.3.66) devient:

$$Q = \frac{\lambda_0}{\delta_c} \frac{\frac{2}{e\,\pi}\,\sqrt{q}}{2\,\frac{a}{d} + \frac{\Phi_m}{\Lambda_m}\,\psi'^2\,(\xi_0,\,q)} = \frac{\lambda_0}{\delta_c} \times \textit{(facteur de forme)} \tag{4.3.68}$$

Le facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes TM_{cmnl} et TM_{smnl} est représenté aux figures 4.6 à 4.11 en fonction du rapport $2\,a/d$ et de l'excentricité de la cavité. Les courbes présentent les mêmes caractéristiques générales que celles des modes TE. Il est utile de noter que la dégénérescence des modes circulaires TE_{01l} et TM_{11l} est levée dans les cavités elliptiques, chacun de ces modes se décomposant en deux modes, pair et impair; ils se comportent, de plus, de façon différente avec une variation de l'excentricité ou du rapport $2\,a/d$.

4.4 Conclusion

Nous avons appliqué les méthodes utilisées dans l'étude des guides d'ondes elliptiques au calcul des modes de résonnance dans une cavité et de leur facteur de qualité. La variation du facteur de qualité en fonction des paramètres de la cavité, l'excentricité e et le rapport $2\,a/d$, a également été examinée en détail dans le cas de 24 modes de résonnance, beaucoup plus que ce qui est présentement disponible dans la littérature.

Notons de plus que les différentes expressions des facteurs de qualité que nous avons développées contiennent les termes q_{mn}/e^2 et q'_{mn}/e^2 que nous avons paramétrisés dans l'étude des guides d'ondes elliptiques (chapitre II). Cette paramétrisation peut être d'une grande utilité pratique car elle permet d'évaluer rapidement les fréquences de résonnance d'une infinité de modes de résonnance générés à partir des **36** modes de propagation dans les guides elliptiques (éqs. 2.4.1 et tableau II.1).

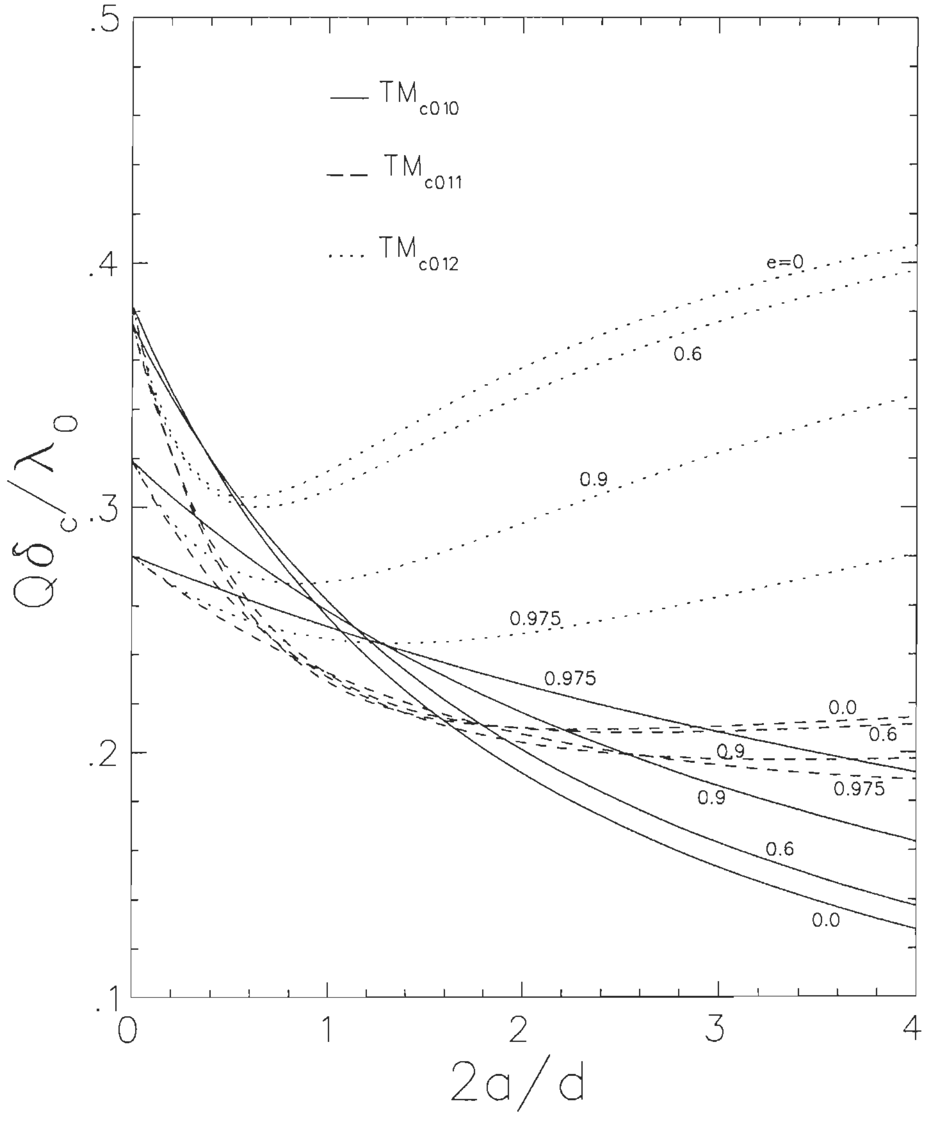


Figure 4.6 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TM_{c01l} d'une cavité elliptique en fonction du rapport $2\,a/d$ avec l'excentricité e comme paramètre.

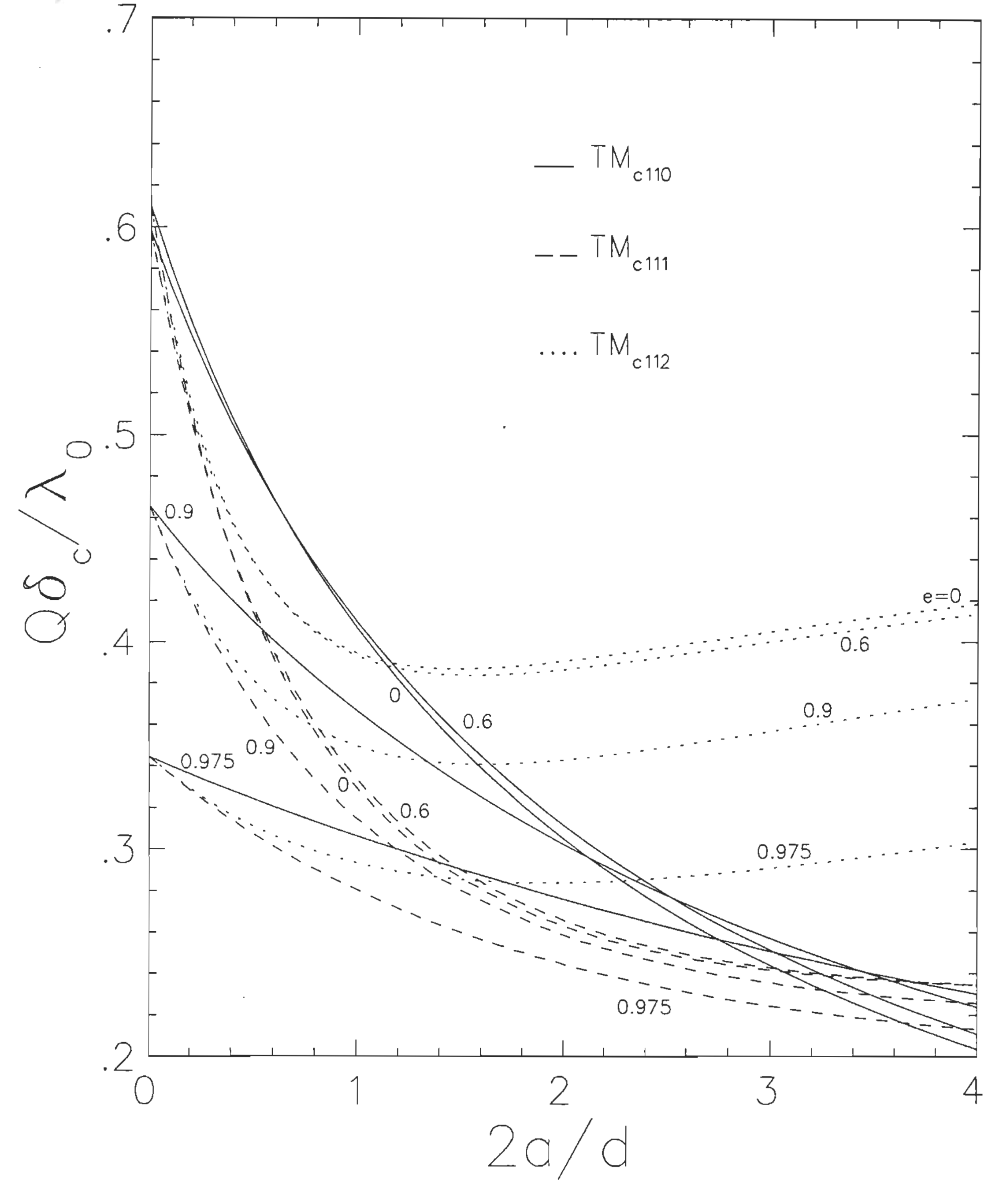


Figure 4.7 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TM_{c11l} d'une cavité elliptique en fonction du rapport $2\,a/d$ avec l'excentricité e comme paramètre.

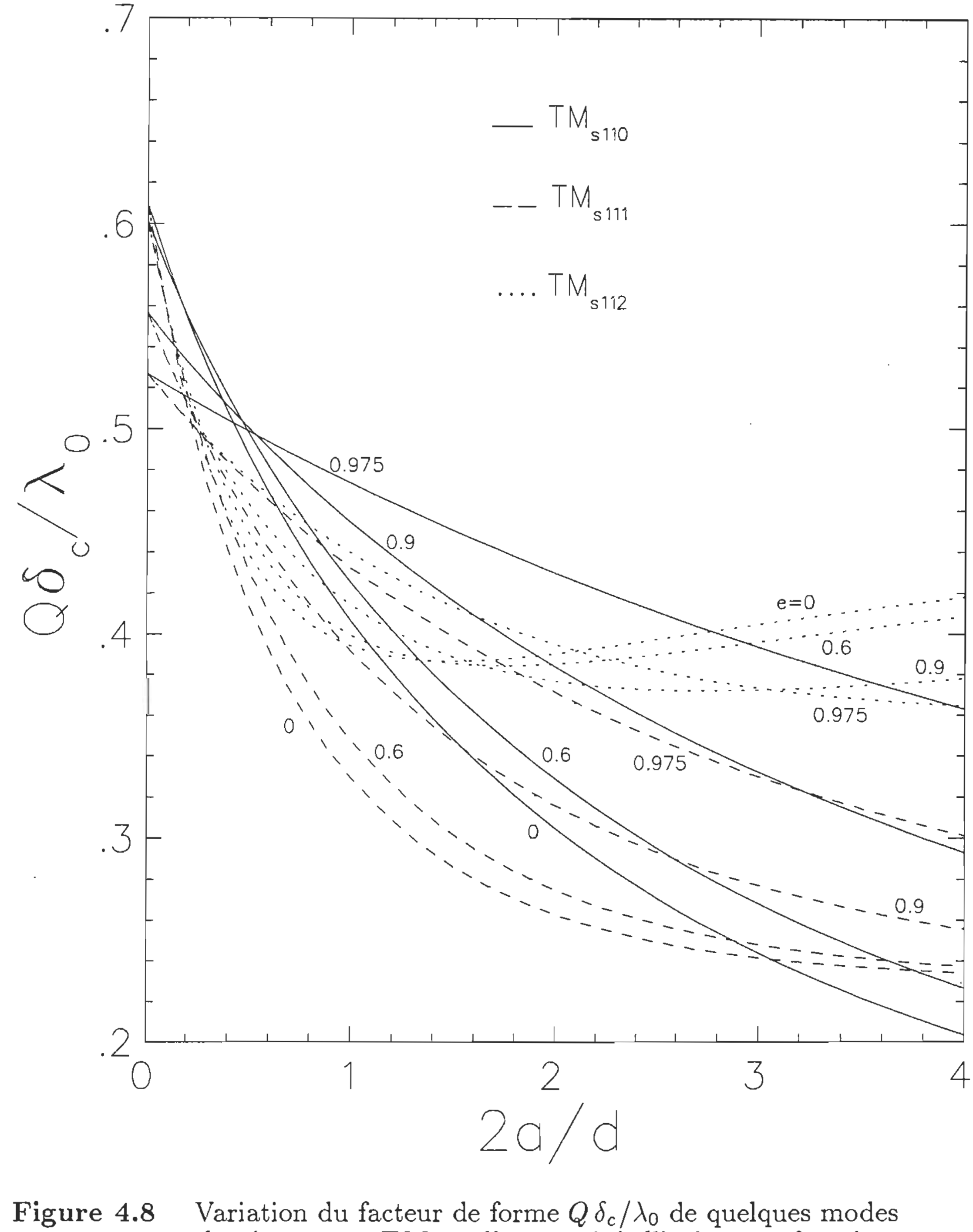


Figure 4.8 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TM_{s11l} d'une cavité elliptique en fonction du rapport $2\,a/d$ avec l'excentricité e comme paramètre.

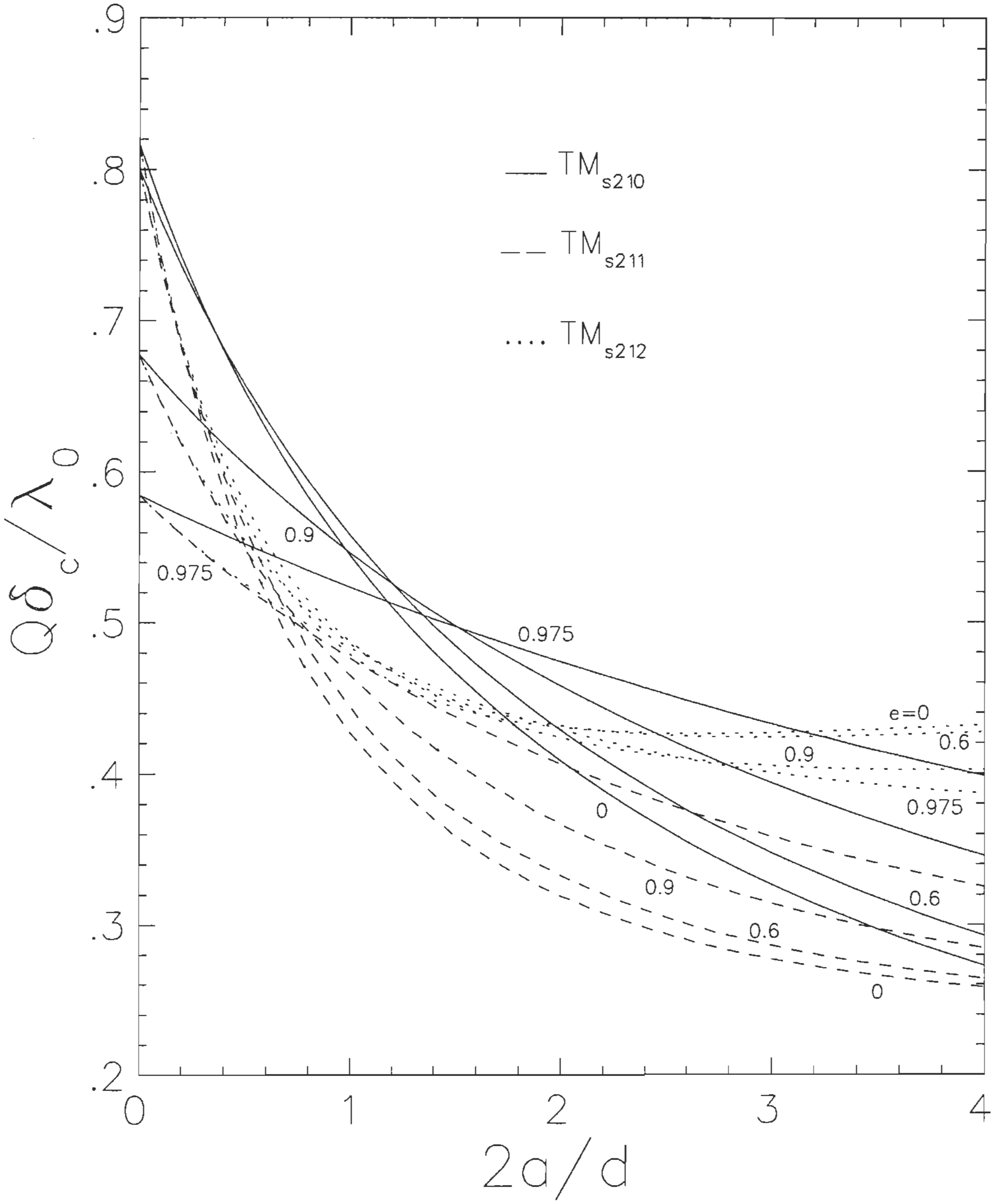


Figure 4.9 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TM_{s21l} d'une cavité elliptique en fonction du rapport $2\,a/d$ avec l'excentricité e comme paramètre.

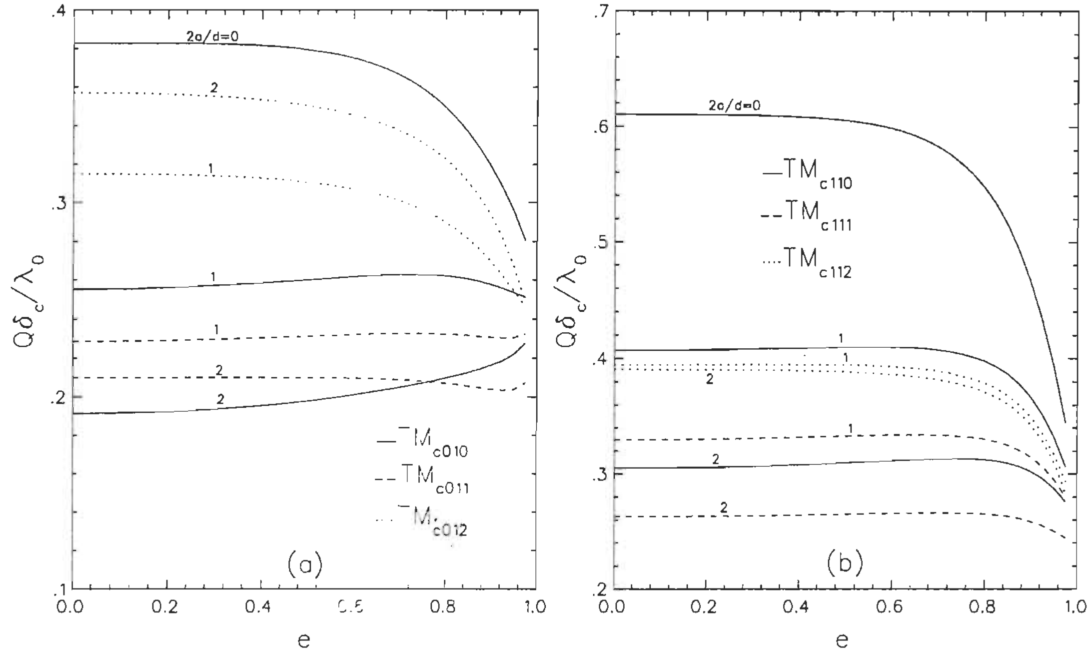


Figure 4.10 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TM_{cmnl} d'une cavité elliptique en fonction de l'excentricité e avec le rapport $2\,a/d$ comme paramètre.

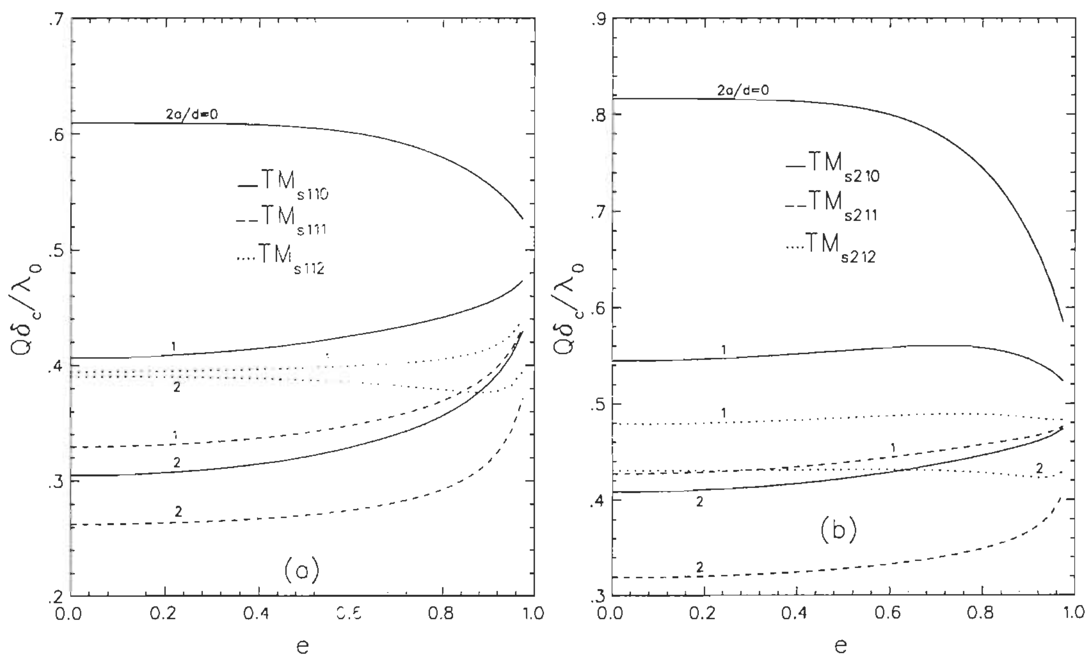


Figure 4.11 Variation du facteur de forme $Q\,\delta_c/\lambda_0$ de quelques modes de résonnance TM_{smnl} d'une cavité elliptique en fonction de l'excentricité e avec le rapport $2\,a/d$ comme paramètre.

CHAPITRE V

DISCUSSION ET CONCLUSION

L'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes elliptiques est plus compliquée que celle dans les guides circulaires ou rectangulaires. Elle implique en effet des fonctions mathématiques, les fonctions de Mathieu, qui sont à la fois peu connues et d'utilisation relativement ardue. Leur manipulation nécessite soit un traitement numérique élaboré, soit des approximations qui affectent leur précision.

C'est pourquoi les premières tentatives de l'étude des guides d'ondes elliptiques, en particulier celle de Chu, ont mené à des résultats entachés de plusieurs erreurs dues aux approximations que l'on qualifierait aujourd'hui de grossières étant donnée les outils de calcul numérique puissants dont nous disposons.

Les erreurs de Chu ont généré un certain nombre de travaux qui ont permis de corriger, au fil des ans, un aspect ou un autre de la théorie de la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides elliptiques qu'il a développée en 1938. Les travaux publiés portant sur le sujet sont toutefois peu nombreux.

Nous avons voulu présenter dans ce mémoire un traitement cohérent et systématique de cette théorie qui soit également le plus complet possible.

Du point de vue numérique, la meilleure représentation des fonctions de Mathieu est celle qui consiste à les exprimer en séries de produits de fonctions de Bessel. Une telle représentation assure en effet le meilleur taux de convergence des fonctions de Mathieu et augmente beaucoup la précision des calculs qui a fait défaut dans l'approche de Chu.

Cette expansion nous a permis de calculer les valeurs exactes des fréquences et longueurs d'ondes de coupure ainsi que les autres paramètres des modes de propagation. Nous avons également présenté une paramétrisation des fréquences de coupure des 36 premiers modes de propagation suffisamment précise pour permettre un calcul simple et rapide de ces fréquences sans faire appel aux procédures numériques élaborées. Cet aspect de notre étude est nouveau, en plus de présenter un intérêt pratique dans la conception des guides d'ondes elliptiques.

Nous avons établi une classification des 36 premiers modes de propagation en fonction de l'excentricité du guide elliptique. À cet égard, nous avons été au delà des calculs de Kretzschmar [3] qui a considéré uniquement les 19 premiers modes.

La configuration du modes TM_{c01} a été examinée en détail car c'est elle qui a semé le doute quant aux calculs de Chu. Nous avons par la même occasion corrigé la configuration du mode TE_{c01} donnée par Chu et qui n'a pas été considérée dans la littérature.

L'atténuation dans les guides elliptiques a aussi retenu notre attention et nous l'avons calculée pour un grand nombre de modes de propagation. Nous avons dégagé ses principales caractéristiques en comparaison avec l'atténuation dans les guides circulaires et rectangulaires.

Nous avons étendu l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides elliptiques à celle des modes de résonnance dans les cavités elliptiques. Les composantes du champ électromagnétique dans de telles cavités ont été calculées ainsi que leur le facteur de qualité. La théorie a été appliquée à 24 modes de résonnance, un nombre beaucoup plus élevé que ce qui est présentement disponible.

Notre investigation des propriétés des guides et cavités elliptiques a nécessité la mise au point d'un code numérique FORTRAN qui n'a pas été discuté dans ce mémoire mais qui nous a permis de produire tous les résultats que nous avons présentés. Ce code est général, en ce sens qu'il permet de traiter tout mode TE ou TM. À la base de ce code est le calcul précis des valeurs caractéristiques a_m et b_m des équations différentielles de Mathieu. Les valeurs de a_m et b_m présentées dans la littérature couvrent un domaine assez restreint du paramètre q. C'est pourquoi, nous avons présenté à l'appendice D les valeurs caractéristiques $a_m\,(0 \leq m \leq 6)$ et $b_m\,(1 \leq m \leq 6)$ pour un paramètre q allant jusqu'à $q = 60$, et avec une grande précision. Ces valeurs pouraient être d'une grande utilité dans tout problème impliquant les fonctions de Mathieu, et non seulement dans le problème de propagation et de résonnance des ondes électromagnétiques dans les guides et cavités elliptiques.

APPENDICE A

LE LAPLACIEN, LE GRADIENT ET LES ÉLÉMENTS DIFFÉRENTIELS EN COORDONNÉES ELLIPTIQUES†

A.1 Le laplacien en coordonnées elliptiques

Considérons les variables u et $\overline{u}$ définies comme suit:

$$u = x + i\,y = \rho\,cosh\,(\,\xi + i\,\eta\,) \tag{A.1.1}$$

$$\overline{u} = x - i\,y = \rho\,cosh\,(\,\xi - i\,\eta\,) \tag{A.1.2}$$

On a alors:

$$u\,\overline{u} = x^2 + y^2 \tag{A.1.3}$$

et

$$4\,\frac{\partial^2\,u\,\overline{u}}{\partial u\,\partial \overline{u}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u\,\overline{u} \tag{A.1.4}$$

En introduisant la variable

$$\zeta\;=\;\xi + i\,\eta \quad , \quad \overline{\zeta} = \xi - i\,\eta \tag{A.1.5}$$

on obtient:

$$\zeta\,\overline{\zeta} = \xi^2 + \eta^2 \tag{A.1.6}$$

et

$$u = \rho\,cosh\,\zeta \quad , \quad \overline{u} = \rho\,cosh\,\overline{\zeta} \tag{A.1.7}$$

† Le contenu de cet appendice est tiré de la référence [8].

Par conséquent:

$$\frac{\partial\,\zeta}{\partial\,u} = \frac{1}{\rho\,sinh\,\zeta} \qquad , \qquad \frac{\partial\,\overline{\zeta}}{\partial\,\overline{u}} = \frac{1}{\rho\,sinh\,\overline{\zeta}} \tag{A.1.8}$$

et

$$4\,\frac{\partial^2\,\zeta\,\overline{\zeta}}{\partial\,\zeta\,\partial\,\overline{\zeta}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\,\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,\eta^2}\right)\zeta\,\overline{\zeta} \tag{A.1.9}$$

D'où:

$$4\,\frac{\partial^2}{\partial\,\zeta\,\partial\,\overline{\zeta}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\,\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,\eta^2}\right) \tag{A.1.10}$$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial\,u} = \frac{1}{\rho\,sinh\,\zeta}\,\frac{\partial}{\partial\,\zeta} \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial\,\overline{u}} = \frac{1}{\rho\,sinh\,\overline{\zeta}}\,\frac{\partial}{\partial\,\overline{\zeta}} \tag{A.1.11}$$

les équations (A.1.4) et (A.1.11) donnent alors:

$$\frac{\partial^2}{\partial\,x^2} + \frac{\partial}{\partial\,y^2} = \frac{1}{\rho^2\,sinh\,\zeta\,sinh\,\overline{\zeta}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,\eta^2}\right) \tag{A.1.12}$$

Par ailleurs:

$$sinh\,(\xi + i\,\eta)\,sinh\,(\xi - i\,\eta) = \frac{1}{2}\,(cosh\,2\xi - cos\,2\eta) \tag{A.1.13}$$

alors, le laplacien en coordonnées elliptiques s'écrit:

$$\nabla^2 \; = \frac{2}{\rho^2\,(\,cosh\,2\xi - cos\,2\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\,\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,\eta^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\,z^2}$$

$$= \nabla_t^2 \,+\, \partial^2/\partial\,z^2 \tag{A.1.14}$$

où ∇_t^2 est le laplacien transversal en coordonnées elliptiques:

$$\nabla_t^2 = \frac{2}{\rho^2\,(\,cosh\,2\xi - cos\,2\eta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\,\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,\eta^2}\right) \tag{A.1.15}$$

A.2 Le gradient en coordonnées elliptiques

Sachant que

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \tag{A.2.1}$$

le gradient en coordonnées elliptiques s'écrit:

$$\nabla = \frac{\sqrt{2}}{\rho\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}}\left(\mathbf{u}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{u}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \mathbf{u_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \nabla_{\mathbf{t}} + \mathbf{u_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{A.2.2}$$

où $\nabla_{\mathbf{t}}$ est le gradient transversal en coordonnées elliptiques:

$$\nabla_{\mathbf{t}} = \frac{\sqrt{2}}{\rho\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}}\left(\mathbf{u}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{u}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \tag{A.2.3}$$

A.3 Éléments différentiels curvilignes en coordonnées elliptiques

Référons-nous à la figure 1.1 du chapitre I. Les éléments de longueurs curvilignes $d\,s_1$ et $d\,s_2$ sont donnés par:

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi \tag{A.3.1}$$

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\, d\eta \tag{A.3.2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \rho \sinh\xi \cos\eta \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\rho \cosh\xi \sin\eta \tag{A.3.3}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \rho \cosh\xi \sin\eta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \rho \sinh\xi \cos\eta \tag{A.3.4}$$

Par conséquent:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \tag{A.3.5}$$

$$= \rho \sqrt{cosh^2 \xi - cos^2 \eta} \tag{A.3.6}$$

$$= \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{cosh\, 2\, \xi - cos\, 2\, \eta} \tag{A.3.7}$$

Alors:

$$ds_1 = \rho_1\, d\xi \qquad , \qquad ds_2 = \rho_1\, d\eta \tag{A.3.8}$$

où

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sqrt{cosh\, 2\, \xi - cos\, 2\, \eta} \tag{A.3.9}$$

L'élément de surface en coordonnées elliptiques s'écrit donc:

$$d\, S \; = \; d\, s_1\, d\, s_2 \; = \; \rho_1^2\, d\, \xi\, d\, \eta \tag{A.3.10}$$

APPENDICE B

LES FONCTIONS DE MATHIEU ET LEURS PROPRIÉTÉS†

B.1 Les fonctions de Mathieu angulaires

$$ce_{2r}(\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2r)} cos\, 2jz \qquad (B.1.1)$$

$$ce_{2r+1}(\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}^{(2r+1)} cos\, (2j+1)z \qquad (B.1.2)$$

$$se_{2r+1}(\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1}^{(2r+1)} sin\, (2j+1)z \qquad (B.1.3)$$

$$se_{2r+2}(\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+2}^{(2r+2)} sin\, (2j+2)z \qquad (B.1.4)$$

B.2 Les relations d'orthogonalité

$$\int_0^{2\pi} ce_m(\eta, q)\, ce_p(\eta, q)\, d\eta = 0 \qquad (m \neq p) \qquad (B.2.1)$$

$$\int_0^{2\pi} se_m(\eta, q)\, se_p(\eta, q)\, d\eta = 0 \qquad (m \neq p) \qquad (B.2.2)$$

$$\int_0^{2\pi} ce_m(\eta, q)\, se_p(\eta, q)\, d\eta = 0 \qquad (m \neq p) \qquad (B.2.3)$$

† Le contenu de cet appendice est tiré de la référence [8].

$$\int_0^{2\pi} ce_{2r}^2(\eta,q)\,d\eta = 2\pi\left[A_0^{(2r)}\right]^2 + \pi\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_{2j}^{(2r)}\right]^2 \qquad (B.2.4)$$

$$\int_0^{2\pi} ce_{2r+1}^2(\eta,q)\,d\eta = \pi\sum_{j=0}^{\infty}\left[A_{2j+1}^{(2r+1)}\right]^2 \qquad (B.2.5)$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2r+1}^2(\eta,q)\,d\eta = \pi\sum_{j=0}^{\infty}\left[B_{2j+1}^{(2r+1)}\right]^2 \qquad (B.2.6)$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2r+2}^2(\eta,q)\,d\eta = \pi\sum_{j=0}^{\infty}\left[B_{2j+2}^{(2r+2)}\right]^2 \qquad (B.2.7)$$

B.3 La relation de normalisation

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} ce_m^2(\eta,q)\,d\eta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} se_m(\eta,q)\,d\eta = 1 \qquad (B.3.1)$$

B.4 Les relations de recurrence

B.4.1 $ce_{2r}(\eta,q)$

$$a\,A_0 - q\,A_2 = 0 \qquad (B.4.1a)$$

$$(a_{2\,r} - 4)\,A_2 - q\,(A_4 + 2\,A_0) = 0 \qquad (B.4.1b)$$

$$(a_{2\,r} - 4\,r^2)\,A_{2j} - q\,(A_{2\,j+2} + A_{2\,j-2}) = 0 \qquad j \geq 2 \qquad (B.4.1c)$$

B.4.2 $ce_{2r+1}(\eta,q)$

$$(a_{2r+1} - 1 - q)\,A_1 - q\,A_3 = 0 \qquad (B.4.2a)$$

$$[a_{2r+1} - (2\,j+1)^2]\,A_{2\,j+1} - q\,(A_{2\,j+3} + A_{2\,j-1}) = 0 \qquad j \geq 1 \qquad (B.4.2b)$$

B.4.3 $se_{2r+1}(\eta,q)$

$$(a_{2r+1} - 1 + q)\,B_1 - q\,B_3 = 0 \qquad (B.4.3a)$$

$$[a_{2r+1} - (2\,j+1)^2]\,B_{2\,j+1} - q\,(B_{2\,j+3} + B_{2\,j-1}) = 0 \qquad j \geq 1 \qquad (B.4.3b)$$

B.4.4 $se_{2r+2}(\eta, q)$

$$(a_{2r+2} - 4)\, B2 - q\, B_4 = 0 \qquad (B.4.4a)$$

$$(a_{2r+2} - 4\, j^2)\, B_{2j} - q\, (B_{2\,j+2} + B_{2\,j-2}) = 0 \qquad j \geq 2 \qquad (B.4.4b)$$

B.5 Les fonctions de Mathieu modifiées

$$Ce_{2r}(\xi, q) = ce_{2r}(i\,\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}^{(2r)} cosh\, 2jz \qquad (B.5.1)$$

$$Ce_{2r+1}(\xi, q) = ce_{2r+1}(i\,\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}^{(2r+1)} cosh\,(2j+1)z \qquad (B.5.2)$$

$$Se_{2r+1}(\xi, q) = se_{2r+1}(i\,\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+1}^{(2r+1)} sinh\,(2j+1)z \qquad (B.5.3)$$

$$Se_{2r+2}(\xi, q) = se_{2r+2}(i\,\eta, q) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{2j+2}^{(2r+2)} sinh\,(2j+2)z \qquad (B.5.4)$$

B.6 Les séries produits de fonctions de bessel de $Ce_m\,(\xi,\, q)$ et $Se_m\,(\xi,\, q)$

Posons:

$$v_1 = \sqrt{q}\, e^{-\xi} \qquad , \qquad v_2 = \sqrt{q}\, e^{\xi} \qquad (B.6.1)$$

on a alors:

$$Ce_{2\,r}\,(\xi,\, q) \;=\; \frac{ce_{2\,r}\,(0,\, q)\, ce_{2\,r}(\pi/2,\, q)}{[A_0^{2\,r}]^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, A_{2\,j}^{2\,r} J_j\,(v_1)\, J_j\,(v_2) \qquad (B.6.2)$$

$$Ce_{2\,r+1}\,(\xi,\, q) \;=\; \frac{ce_{2\,r+1}\,(0,\, q)\, ce'_{2\,r+1}\,(\pi/2,\, q)}{\sqrt{q}\,[A_1^{2\,r+1}]^2} \times$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1}\, A_{2\,j+1}^{2\,r+1} [J_j\,(v_1)\, J_{j+1}\,(v_2) \,+\, J_{j+1}\,(v_1)\, J_j\,(v_2)] \qquad (B.6.3)$$

$$Se_{2\,r+1}\,(\xi,\, q) \;=\; \frac{se'_{2\,r+1}\,(0,\, q)\, se_{2\,r+1}\,(\pi/2,\, q)}{\sqrt{q}\,[B_1^{2\,r+1}]^2} \times$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, B_{2\,j+1}^{2\,r+1} [J_j\,(v_1)\, J_{j+1}\,(v_2) \,-\, J_{j+1}\,(v_1)\, J_j\,(v_2)] \qquad (B.5.4)$$

$$Se_{2r+2}(\xi, q) = \frac{se'_{2r+2}(0, q)\, se'_{2r+2}(\pi/2, q)}{q\,[B_2^{2r+2}]^2} \times$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1} B_{2j+2}^{2r+2}[J_j(v_1)\, J_{j+2}(v_2) - J_{j+2}(v_1)\, J_j(v_2)] \qquad (B.6.5)$$

APPENDICE C

CODE FORTRAN POUR LE CALCUL DE $a_0\,(q)$

```
      program a0
      implicit real*8 (a-h, o-z)
      dimension rac(800000)
      open (2, file ='a0.dat', status='unknown', access='sequential',
     *     form='unformatted')
      tr = 0
      do 003 i=1, 800000
      q=5.0d-5*i
      a=re(q, tr)
      tr=re(q, tr)
      write(2) a
003   continue
      close(2)
      end

      function re(q, tr)
      implicit real*8 (a-h, o-z)
      if 0.le.q.le.1 then
      re=-1/2*(q**2)+7/128*(q**4)-29/2304*(q**6)
           +686887/18874368*(q**8)
      else
      pas=1.d-1
      fact=1.d+1
      fact1=1.d-12
      re=rec(q, pas, fact, fact1, tr)
      endif
```

```
        return
        end

        function rec(q, pas, fact, fact1, tr)
        implicit real*8 (a-h, o-z)
        parameter(n=48)
        dimension v(n)
        do 001 j=0, n, 1
        v(j)=0.0d0
001     continue
        a=tr
100     v(n)=-q/((n+2)**2-a)
        do 002 j=(n-2)/2, 1, -1
        v(2*j)=-q/((2*j+2)**2-a+q*v(2*j+2)
002     continue
        v(0)=-2*q/(4-a+q*v(2))
        v0=a/q
        if dabs(v0-v(0).gt.dabs(pas*fact) then
        a=a-pas
        go to 100
        elseif dabs(pas).gt.fact1 then
        pas=pas*1.d-1
        go to 100
        else
        endif
        rec=a
        return
        end
```

APPENDICE D

LES VALEURS CARACTÉRISTIQUES DES FONCTIONS DE MATHIEU

Tableau D.1 Les valeurs caractéristiques $a_m\ (q)$ des fonctions de Mathieu paires, $ce_m\ (\eta,\ q)$ et $Ce_m\ (\xi,\ q)$, m allant de 0 à 6.

q	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	0,00000000	1,00000000	4,00000000	9,00000000	16,00000000	25,00000000	36,00000000
1	0,45513860	1,85910807	4,37130098	9,07836885	16,03383234	25,02085437	36,01429004
2	-1,51395688	2,37919988	5,17266513	9,37032248	16,14120379	25,08377778	36,05721562
3	-2,83439189	2,51903909	6,04519685	9,91550629	16,33872075	25,19028553	36,12896867
4	-4,28051882	2,31800817	6,82907483	10,67102710	16,64981891	25,34375763	36,22995251
5	-5,80004602	1,85818754	7,44910974	11,54883204	17,09658168	25,54997175	36,36089998
6	-7,36883083	1,21427816	7,87006447	12,46560068	17,68878295	25,81727199	36,52302501
7	-8,97374251	0,43834909	8,08662314	13,35842132	18,41660866	26,15612025	36,71819273
8	-10,60672924	-0,43594360	8,11523883	14,18188036	19,25270506	26,57775329	36,94908697
9	-12,26241422	-1,38670157	7,98284316	14,90367967	20,16092639	27,09186608	37,21934384
10	-13,93697996	-2,39914240	7,71736985	15,50278437	21,10463371	27,70376873	37,53360634
11	-15,62759065	-3,46284060	7,34294811	15,96891226	22,05099912	28,41207762	37,89743919
12	-17,33206603	-4,57013285	6,87873686	16,30153494	22,97212747	29,20805500	38,31703406
13	-19,04868417	-5,71518060	6,33944764	16,50760884	23,84488117	30,07687792	38,79864860
14	-20,77605531	-6,89340053	5,73631235	16,59854047	24,65059505	31,00005084	39,34777853
15	-22,51303776	-8,10110513	5,07798320	16,58738117	25,37506106	31,95782125	39,96816628
16	-24,25867947	-9,33526707	4,37123261	16,48688426	26,00867834	32,93089514	40,66086716
17	-26,01217644	-10,59335923	3,62146112	16,30848857	26,54647647	33,90135973	41,42364882
18	-27,77284216	-11,87324252	2,83305673	16,06197536	26,98776644	34,85305874	42,25092157
19	-29,54008486	-13,17308487	2,00964789	15,75550380	27,33536971	35,77171290	43,13420540
20	-31,31339007	-14,49130142	1,15428289	15,39581091	27,59457815	36,64498973	44,06294865
21	-33,09230715	-15,82650917	0,26955854	14,98845431	27,77208701	37,46261323	45,02543550
22	-34,87643872	-17,17749207	-0,64228591	14,53804081	27,87509931	38,21651232	46,00957205
23	-36,66543223	-18,54317373	-1,57929924	14,04842043	27,91069232	38,90094940	47,00345524
24	-38,45897317	-19,92259564	-2,53976570	13,52284272	27,88544080	39,51255190	47,99572913
25	-40,25677955	-21,31489969	-3,52216473	12,96407944	27,80524058	40,05019098	48,97578672
26	-42,05859738	-22,71931388	-4,52513948	12,37451983	27,67526525	40,51469788	49,93388585

Tableau **D.1** (Suite)

q	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
27	-43,86419695	-24,13514064	-5,54747195	11,75624399	27,49999932	40,90845772	50,86123457
28	-45,67336964	-25,56174709	-6,58806297	11,11107984	27,28330817	41,23495027	51,75007822
29	-47,48592536	-26,99855690	-7,64591594	10,44064730	27,02852019	41,49830839	52,59379758
30	-49,30169031	-28,44504342	-8,72012344	9,74639289	26,73850772	41,70294502	53,38700809
31	-51,12050506	-29,90072389	-9.80985613	9,02961708	26,41576036	41,85327203	54,12563824
32	-52,94222296	-31,36515445	-10,91435339	8,29149615	26,06244825	41,95351116	54,80696185
33	-54,76670878	-32,83792589	-12,03291544	7,53309969	25,68047537	42,00758316	55,42956528
34	-56,59383745	-34,31865996	-13,16489661	6,75540493	25,27152356	42,01905579	55,99324339
35	-58,42349305	-35,80700619	-14,30969957	5,95930852	24,83708855	41,99113225	56,49883330
36	-60,25556789	-37,30263912	-15,46677034	5,14563626	24,37850943	41,92666457	56,94800670
37	-62,08996173	-38,80525585	-16,63559392	4,31515125	23,89699261	41,82818071	57,34304688
38	-63,92658107	-40,31457391	-17,81569058	3,46856087	23,39363139	41,69791776	57,68663482
39	-65,76533851	-41,83032938	-19,00661249	2,60652259	22,86942190	41,53785651	57,98166218
40	-67,60615224	-43,35227525	-20,20794083	1,72964908	22,32527634	41,34975442	58,23108081
41	-69,44894553	-44,88017991	-21,41928319	0,83851253	21,76203377	41,13517592	58,43779084
42	-71,29364633	-46,41382583	-22,64027132	-0,06635149	21,18046915	40,89551910	58,60456445
43	-73,14018682	-47,95300845	-23,87055902	-0,98444076	20,58130090	40,63203903	58,73399919
44	-74,98850314	-49,49753503	-25,10982040	-1,91528344	19,96519726	40,34586768	58,82849435
45	-76,83853502	-51,04722381	-26,35774821	-2,85843550	19,33278162	40,03803094	58,89024375
46	-78,69022554	-52,60190308	-27,61405236	-3,81347842	18,68463716	39,70946297	58,92123973
47	-80,54352084	-54,16141046	-28,87845864	-4,78001714	18,02131080	39,36101838	58,92328396
48	-82,39836993	-55,72559218	-30,15070749	-5,75767822	17,34331656	38,99348241	58,89800205
49	-84,25472445	-57,29430248	-31,43055297	-6,74610817	16,65113855	38,60757963	58,84685989
50	-86,11253853	-58,86740302	-32,71776171	-7,74497202	15,94523359	38,20398123	58,77118009
51	-87,97176854	-60,44476234	-34,01211210	-8,75395190	15,22603345	37,78331120	58,67215791
52	-89,83237301	-62,02625546	-35,31339343	-9,77274588	14,49394689	37,34615159	58,55087595
53	-91,69431244	-63,61176337	-36,62140516	-10,80106686	13,74936144	36,89304702	58,40831757
54	-93,55754920	-65,20117265	-37,93595626	-11,83864153	12,99264503	36,42450853	58,24537882
55	-95,42204739	-66,79437516	-39,25686457	-12,88520947	12,22414740	35,94101686	58,06287897
56	-97,28777274	-68,39126763	-40,58395625	-13,94052230	11,44420140	35,44302535	57,86156975
57	-99,15469249	-69,99175142	-41,91706524	-15,00434293	10,65312415	34,93096239	57,64214339
58	-101,02277532	-71,59573221	-43,25603280	-16,07644484	9,85121815	34,40523363	57,40523960
59	-102,89199127	-73,20311970	-44,60070705	-17,15661139	9,03877216	33,86622384	57,15145158
60	-104,76231162	-74,81382747	-45,95094256	-18,24463530	8,21606217	33,31429863	56,88133125

Tableau D.2 Les valeurs caractéristiques b_m (q) des fonctions de Mathieu impaires, se_m $(\eta,\, q)$ et Se_m $(\xi,\, q)$, m allant de 1 à 6.

q	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
0	1,00000000	4,00000000	9,00000000	16,00000000	25,00000000	36,00000000
1	-0,11024882	3,91702477	9,04773926	16,03297008	25,02084082	36,01428991
2	-1,39067650	3,67223271	9,14062774	16,12768795	25,08334903	36,05720700
3	-2,78537970	3,27692197	9,22313285	16,27270120	25,18707980	36,12887125
4	-4,25918290	2,74688103	9,26144613	16,45203529	25,33054487	36,22941143
5	-5,79008060	2,09946045	9,23632771	16,64821994	25,51081605	36,35886685
6	-7,36391101	1,35138116	9,13790585	16,84460164	25,72341065	36,51706670
7	-8,97120235	0,51754541	8,96238546	17,02666078	25,96244718	36,70350271
8	-10,60536814	-0,38936177	8,70991436	17,18252777	26,22099947	36,91721309
9	-12,26166165	-1,35881012	8,38311916	17,30301096	26,49154724	37,15669496
10	-13,93655248	-2,38215824	7,98606914	17,38138068	26,76642636	37,41985878
11	-15,62734205	-3,45233504	7,52354886	17,41305356	27,03821313	37,70403165
12	-17,33191844	-4,56353993	7,00056678	17,39524968	27,30001241	38,00600870
13	-19,04859490	-5,71098752	6,42204334	17,32665638	27,54564772	38,32214453
14	-20,77600042	-6,89070068	5,79262947	17,20711534	27,76976668	38,64847187
15	-22,51300350	-8,09934680	5,11661512	17,03734214	27,96788060	38,98083305
16	-24,25865779	-9,33410974	4,39789620	16,81868374	28,13635593	39,31501077
17	-26,01216254	-10,59258995	3,63997689	16,55291593	28,27237229	39,64684812
18	-27,77283316	-11,87272645	2,84599170	16,24208044	28,37385819	39,97235109
19	-29,54007896	-13,17273570	2,01873697	15,88835867	28,43941294	40,28777066
20	-31,31338617	-14,49106326	1,16070568	15,49397758	28,46822132	40,58966405
21	-33,09230454	-15,82634548	0,27412198	15,06114251	28,45996615	40,87493640
22	-34,87643697	-17,17737876	-0,63902650	14,59199155	28,41474273	41,14086520
23	-36,66543104	-18,54309477	-1,57695945	14,08856655	28,33297844	41,38511001
24	-38,45897235	-19,92254027	-2,53807789	13,55279653	28,21535941	41,60570992
25	-40,25677898	-21,31486062	-3,52094153	12,98648995	28,06276590	41,80107129
26	-42,05859699	-22,71928616	-4,52424901	12,39133324	27,87621669	41,96994787
27	-43,86419667	-24,13512086	-5,54682089	11,76889330	27,65682264	42,11141525
28	-45,67336945	-25,56173291	-6,58758498	11,12062273	27,40574882	42,22484148
29	-47,48592523	-26,99854667	-7,64556360	10,44786640	27,12418444	42,30985542
30	-49,30169021	-28,44503602	-8,71986272	9,75186887	26,81331954	42,36631414
31	-51,12050499	-29,90071850	-9,80966249	9,03378192	26,47432755	42,39427063
32	-52,94222291	-31,36515051	-10,91420905	8,29467208	26,10835259	42,39394277
33	-54,76670875	-32,83792300	-12,03280747	7,53552775	25,71650066	42,36568417
34	-56,59383742	-34,31865783	-13,16481559	6,75726591	25,29983389	42,30995756
35	-58,42349303	-35,80700462	-14,30963857	5,96073838	24,85936716	42,22731083

Tableau **D.2** (Suite)

q	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
36	-60,25556788	-37,30263795	-15,46672426	5,14673752	24,39606653	42,11835607
37	-62,08996172	-38,80525498	-16,63555902	4,31600144	23,91084900	41,98375142
38	-63,92658106	-40,31457326	-17,81566406	3,46921874	23,40458321	41,82418570
39	-65,76533850	-41,83032889	-19,00659228	2,60703279	22,87809085	41,64036561
40	-67,60615223	-43,35227488	-20,20792539	1,73004563	22,33214847	41,43300523
41	-69,44894553	-44,88017963	-21,41927137	0,83882142	21,76748959	41,20281762
42	-71,29364632	-46,41382562	-22,64026223	-0,06611039	21,18480697	40,95050819
43	-73,14018682	-47,95300828	-23,87055203	-0,98425217	20,58475490	40,67676955
44	-74,98850314	-49,49753491	-25,10981500	-1,91513564	19,96795152	40,38227772
45	-76,83853502	-51,04722372	-26,35774403	-2,85831943	19,33498109	40,06768939
46	-78,69022553	-52,60190301	-27,61404912	-3,81338710	18,68639611	39,73363996
47	-80,54352083	-54,16141041	-28,87845612	-4,77994516	18,02271945	39,38074243
48	-82,39836992	-55,72559214	-30,15070553	-5,75762137	17,34444625	39,00958668
49	-84,25472445	-57,29430245	-31,43055143	-6,74606320	16,65204579	38,62073933
50	-86,11253853	-58,86740299	-32,71776051	-7,74493637	15,94596318	38,21474385
51	-87,97176854	-60,44476232	-34,01211116	-8,75392360	15,22662096	37,79212092
52	-89,83237300	-62,02625545	-35,31339269	-9,77272338	14,49442062	37,35336904
53	-91,69431244	-63,61176335	-36,62140458	-10,80104894	13,74974393	36,89896516
54	-93,55754920	-65,20117264	-37,93595580	-11,83862723	12,99295425	36,42936553
55	-95,42204739	-66,79437515	-39,25686421	-12,88519804	12,22439770	35,94500651
56	-97,28777274	-68,39126762	-40,58395597	-13,94051316	11,44440426	35,44630543
57	-99,15469249	-69,99175142	-41,91706502	-15,00433560	10,65328878	34,93366149
58	-101,02277532	-71,59573220	-43,25603262	-16,07643895	9,85135190	34,40745661
59	-102,89199127	-73,20311970	-44,60070691	-17,15660666	9,03888096	33,86805631
60	-104,76231162	-74,81382746	-45,95094245	-18,24463149	8,21615077	33,31581051

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chu, L. J. 1938. - *Electromagnetic waves in elliptic hollow pipes of metal, J. Appl. Phys.,* Vol. 9, 583.

[2] Krank, W. 1965. - *Ü ber die theorie und technik des elliptischen wellrohr rhohlleiters, dissertation, Rhenish-Westphalian Technical University of Aachen, Aachen, Germany,* D 82.

[3] Kretzschmar, J. G. 1970. - *Wave propagation in hollow conducting elliptical waveguides, IEEE Trans.,* Vol. MTT-18, n^o 9, 547.

[4] ―――――――― . 1969. - *Cutoff frequency of the TM_{c11} mode in a hollow conducting elliptical waveguide, Electronic. Lett.,* Vol. 5, n^o 9, 192.

[5] ―――――――― . 1969. - *Difference between the TM_{11} mode in a circular and elliptical waveguide ibid.,* Vol. 5, n^o 23, 602.

[6] Falciasecca, G., Someda, C. G. et Valdoni, F. 1971. - *Wall impedances and application to long-distance waveguides, Alta Freq.,* vol. 40, 426.

[7] Rengarajan, S. R. et Lewis, J. E. 1979. - *Surface impedance of elliptical hollow conducting waveguides, Electronic. Lett.,* Vol. 15, n^o 20, 637.

[8] Mclachlan, N. W. 1964. - *Theory and Applications of Mathieu Functions* (New York: Dover), ch. 13.

[9] Abramowitz, M. et Stegun, I. A. 1965. - *Handbook of mathematical functions* (New York: Dover), ch. 10.

[10] Ramo, S., Whinnery, J.R., et Van Duzer, T. 1965. - *Fields and waves in communication electronics* (New York: Wiley).

[11] Kretzschmar, J. G. 1969. - *Teorie van de Gewone–en gewijzigde Mathieu funkties van de eerste soort. Revue X Trjdschrift, n^o* 3.

[12] ————. 1969. - *Gewone en gewijzigde Mathieu funkties van de eerste soort. Praktische berekening, ibid., n^o* 4.

[13] ————. 1971. - *Field configuration of the TM_{c01} mode in an elliptical waveguide, PROC. IEE,* Vol. 118, *n^o* 9, 1187.

[14] Goldberg, D. A., Jackson, L. L. et Rimmer, R. A. 1990. - *Modes of elliptical waveguides: A correction, IEEE Trans.,* vol. 38, *n^o* 11, 1603.

[15] Jackson, J. D. 1963. - *Classical electrodynamics* (New York: Wiley).

[16] Falciasecca, G., Someda, C. G., Valdoni, F. et Kretzschmar, J. G. 1973. - *Comments on attenuation characteristics of hollow conducting elliptical waveguides, IEEE Trans.,* vol. MTT-21, 154.

[17] Lewin, L. et Al-Hariri, A. M. B. 1974. - *The effect of cross-section curvature on attenuation in elliptic waveguides and a basic correction to previous formulas, bid.,*Vol. MTT-22, *n^o* 5, 504.

[18] Valenzuela, G. R. 1960. - *Impedances of an elliptic waveguide (for the $_eH_1$ mode), IRE Trans. Microwave Theory Tech.,* Vol. MTT-8, 431.

[19] Kretzschmar, J. G. 1972. - *Attenuation characteristics of hollow conducting elliptical waveguides, IEEE Trans.,* Vol. MTT-20, *n^o* 4, 280.

[20] Higgins, T. P. et Straiton, A. W. 1953. - *Characteristics of an elliptical electromagnetic resonant cavity operating in the TE_{111} mode, J. Appl.*

Phys., Vol. 24, 1297.

[21] Alhargan, F. A. et Juday, S. R. - *Tables of normalized cutoff wavenumbers of elliptic cross section resonators, IEEE Trans.*, Vol. 42, n^o 2, 333.

[22] Kretzschmar, J. G. 1970. - *Mode charts for elliptical resonant cavities, Electronic. Lett.*, Vol. 6, n^o 14, 432.

[23] ———— . 1972. - *Maximum longitudinal electric field in hollow cylindrical cavities with elliptical cross-section, J. Microwave Power*, vol.7, n^o 1, 35.

[24] Rengarajan, S. R. et Lewis, J. E. 1980. - *Quality factor of elliptical cylindrical resonant cavities, ibid.*, Vol. 15, n^o 1, 52.