

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR  
RADU S. ROIBAN

LE MOMENT ANAPOLAIRE D'UN FERMION DE SPIN 1/2  
DANS LE MODÈLE STANDARD ET  
INVARIANCE DE JAUGE

AVRIL 1997

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

## REMERCIEMENTS

Je veux remercier M. Chérif Hamzaoui pour avoir dirigé ce travail et M. Gilles Couture pour sa co-direction.

Je veux remercier tout le département de physique de l'UQAM et spécialement M. Élie Boridy et M. Chérif Hamzaoui pour leur support financier sans lequel ce travail n'aurait pas pu être fait.

Un merci particulier est adressé à M. Maxim Pospelov pour les discussions très instructives sur la physique.

Un autre merci particulier est dû à mon épouse, Irina, qui avec beaucoup de patience m'a aidé à traverser les moments difficiles.

Je remercie aussi nos parents et tous nos amis qui, de près ou de loin, nous ont été toujours proches.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES .....	v
LISTE DES TABLEAUX .....	vi
LISTE DES SYMBOLES .....	vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS	
RÉSUMÉ .....	x
INTRODUCTION .....	1
1. PROBLÉMATIQUE .....	4
1.1. Historique .....	4
1.2. Les moments toroïdaux classiques .....	6
1.3. Traitement quantique des interactions d'un fermion de spin 1/2 ..	18
2. SUPPORT THÉORIQUE .....	23
2.1. Le Lagrangien du Modèle Standard .....	23
2.1.1. Champs fermioniques et leurs interactions .....	24
2.1.2. Champs de jauge et leurs interactions mutuelles .....	27
2.1.3. Champ de Higgs et la masse des champs de jauge .....	28
2.1.4. Fixage de jauge .....	29
2.1.5. Terme de Faddeev et Popov .....	30
2.1.6. Couplages de Yukawa, le mélange et les masses des champs fermioniques .....	32
2.1.7. Inclusion de l'interaction forte .....	34
2.1.8. Quantification du modèle .....	36
2.2. Renormalisation .....	41
2.2.1. Degrés de divergence .....	41
2.2.2. Systématique de la renormalisation .....	45

3. CONVENTIONS ET TECHNIQUES DE CALCUL .....	48
3.1. Projecteur du moment anapolaire .....	48
3.2. Paramétrisation de Feynman .....	53
3.3. Régularisation .....	54
3.4. Intégrales $d$ -dimensionnelles dans la régularisation dimensionnelle .....	57
4. CALCUL DU MOMENT ANAPOLAIRE INTRINSEQUE D'UN FERMION DE SPIN $\frac{1}{2}$ .....	60
4.1. Première classe de diagrammes .....	61
4.1.1. Diagrammes avec des bosons de Higgs.....	61
4.1.2. Diagrammes avec des bosons de Higgs et bosons $W$ .....	67
4.1.3. Diagrammes avec des bosons de jauge.....	70
4.2. Mélange $\gamma - Z$ .....	80
4.3. Réorganisation des termes .....	85
4.4. Indépendance de jauge vs. dépendance de jauge.....	88
4.5. Le moment anapolaire fort .....	95
5. DISCUSSION .....	97
CONCLUSION .....	101
APPENDICE : Estimation du moment anapolaire électromagnétique des leptons légers à partir de "Four-Fermi Theory" .....	102
BIBLIOGRAPHIE .....	105

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1.1.</b> - Image classique de l'anapôle .....	5
<b>Figure 4.1.</b> - Première contribution des scalaires au vertex électromagnétique .....	61
<b>Figure 4.2.</b> - Deuxième contribution des scalaires au vertex électromagnétique .....	63
<b>Figure 4.3.</b> - Les contributions des énergies propres dues aux scalaires au vertex électromagnétique .....	65
<b>Figure 4.4.</b> - La contribution des couplages $\gamma WS$ au vertex électromagnétique .....	67
<b>Figure 4.5.</b> - Première contribution des bosons massifs de jauge au vertex électromagnétique .....	70
<b>Figure 4.6.</b> - La contribution des énergies propres dues aux bosons massifs de jauge au vertex électromagnétique .....	74
<b>Figure 4.7.</b> - Deuxième contribution des bosons massifs de jauge au vertex électromagnétique .....	76
<b>Figure 4.8.</b> - La contribution des quarks au mélange $\gamma - Z$ .....	80
<b>Figure 4.9.</b> - La contribution des leptons au mélange $\gamma - Z$ .....	81
<b>Figure 4.10.</b> - La contribution des $W$ , Higgs et fantômes au mélange $\gamma - Z$ .....	81
<b>Figure A1.</b> - Diagramme à considérer dans la théorie de Fermi .....	102

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 1.1.</b> - Les opérateurs qui apparaissent dans l'expression du courant, leurs expressions dans l'espace temps-position, leurs facteurs de forme et le type d'interaction qu'ils produisent .....	21
<b>Tableau 2.1.</b> - Règles de Feynman .....	41
<b>Tableau 3.1.</b> - Propriétés de symétrie des différents moments .....	49
<b>Tableau 3.2.</b> - Divergence des divers types d'intégrales .....	55
<b>Tableau 3.3.</b> - Développement en série des fonctions $\Gamma$ les plus souvent rencontrées .....	59

## LISTE DES SYMBOLES

$A_\mu^a$	Champs de jauge $SU(2)_L$
$B_\mu$	Champ de jauge $U(1)_Y$
$b$	Quark bottom (dans les figures)
$C$	Conjugaison de charge
$c$	Quark charm (dans les figures)
$D_L^\mu$	Dérivé covariante gauche
$D_R^\mu$	Dérivé covariante droite
$d$	Quark down (dans les figures)
$e$	Électron (dans les figures)
$F_{\mu\nu}^a$	Tenseur de type électromagnétique réalisé à partir des champs de jauge en général
$g$	Constante de couplage faible
$I_3$	La troisième composante de l'isospin faible
$\mathcal{L}$	Lagrangien
$M$	Masse d'un boson; Amplitude d'un diagramme
$m$	Masse d'un fermion
$P$	Parité
$p$	Impulsion du fermion entrant
$q$	Impulsion d'un photon ou gluon
$q$	Charge d'un fermion
$S$	Boson scalaire en général (dans le texte)
$s$	Quark strange (dans les figures)
$T$	Renversement du temps
$t$	Quark top (dans les figures)
$u(p)$	Fonction d'onde d'un fermion d'impulsion $p$ dans l'espace énergie-impulsion
$u$	Quark up (dans les figures)
$V_{ij}$	Éléments de matrice de Kobayashi-Maskawa
$v$	Valeur moyenne sur le vide
$e_X$	Charge du boson $X$
$Y$	L'hypercharge

$Z_\mu$	Champ vectoriel neutre
$W_\mu^\pm$	Champ vectoriel chargé
$Z$	Boson vectoriel neutre
$W^\pm$	Boson vectoriel chargé
$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$	Tenseur de Levi-Civita
$\epsilon$	Quantité indéfiniment petite
$\gamma$	Photon; Constante d'Euler
$\Gamma$	Fonction $\Gamma$ d'Euler
$\gamma_\mu$	Matrice de Dirac
$\gamma_L$	Projecteur d'hélicité gauche
$\gamma_R$	Projecteur d'hélicité droite
$\mu$	Muon
$\phi$	Boson de Higgs en général (dans les figures)
$\tau$	Lepton tau
$\tau_a$	Matrices de Pauli
$\theta_W$	Angle faible
$\omega$	Fantômes électro-faibles
$\eta$	Fantômes dus aux interactions fortes
$\psi$	Fonction d'onde d'un fermion dans l'espace temps-position; Vecteur à trois composantes dans l'espace des générations dans la base qui diagonalise la matrice des masses
$\hbar$	Constante de Planck réduite

## LISTE DES ABRÉVIATIONS

<b>QCD</b>	Chromodynamique quantique
<b>QED</b>	Électrodynamique quantique
<b>MS</b>	Modèle Standard
i.e.	id est
<b>GeV</b>	Giga-électron volt
<b>ce</b>	Charge électrique
<b>a</b>	Anapôle
<b>dm</b>	Dipôle magnétique
<b>de</b>	Dipôle électrique
<b>ca</b>	Charge axiale

## RÉSUMÉ

Dans ce travail on discute le moment anapolaire électromagnétique et fort d'un fermion quelconque, dans le cadre du Modèle Standard de la physique des particules. On commence par une description des moments toroïdaux dans le cadre de l'électrodynamique classique. Ensuite on discute un petit peu les contraintes imposées par la Théorie de la Relativité Restreinte sur les couplages entre un boson de spin 1 et un fermion de spin  $\frac{1}{2}$ . On fait un résumé du Modèle Standard en déduisant aussi les règles de Feynman dont on aura besoin pendant les calculs. On développe le projecteur du moment anapolaire en considérant juste les propriétés des divers moments par rapport aux transformations  $C$ ,  $P$  et  $T$ . On utilise le projecteur construit pour extraire d'une manière non ambiguë le moment anapolaire à partir des diagrammes à une boucle. On montre qu'une partie des corrections obliques contribue d'une manière essentielle à la conservation du courant électromagnétique. On démontre explicitement, en faisant les calculs dans la jauge  $R_\xi$ , la dépendance de jauge du moment anapolaire intrinsèque électromagnétique et l'indépendance de jauge du moment anapolaire intrinsèque fort. Cela conduit à la conclusion que le moment anapolaire intrinsèque fort est observable en principe, pendant que le moment anapolaire électromagnétique a un sens si et seulement si on l'inclut dans un processus physique. On suggère une technique de calcul que l'on pourrait utiliser lorsqu'on considère le moment anapolaire électromagnétique dans un processus physique à basse énergie. On explique aussi la source de la dépendance de jauge du moment anapolaire intrinsèque électromagnétique dans le Modèle Standard.

PHYSIQUE, FERMION, MOMENT ANAPOLAIRE, JAUGE, BOSON

## INTRODUCTION

Le Modèle Standard de la physique des particules élémentaires, MS, est la théorie qui décrit les interactions électromagnétiques, faibles et fortes; elle est présentement la mieux vérifiée expérimentalement. Ce modèle décrit les phénomènes physiques à l'échelle d'énergie accessible aujourd'hui.

Dans ce mémoire on calcule les moments anapolaire intrinsèques électromagnétique et fort d'un fermion élémentaire libre, de spin  $\frac{1}{2}$  dans le Modèle Standard. Ces quantités sont définies comme le couplage fermion-boson de jauge qui brise la parité spatiale et la conjugaison de charge et qui génère une interaction de type contact. Parmi tous les facteurs de forme, le moment anapolaire a été le moins étudié pour deux raisons. Premièrement, il ne peut pas être testé avec des champs réels à cause de la structure de son opérateur. Deuxièmement, puisque l'électromagnétisme et les interactions fortes conservent la parité en l'absence des interactions faibles, on s'attend à une contribution aux amplitudes des processus physiques de basses énergies proportionnelle à  $\frac{1}{M_W^2}$ . Cet ordre de magnitude n'est devenu accessible que tout récemment. Nous voulons répondre à la question suivante: Est-ce que les moments anapolaire électromagnétique et fort sont des observables physiques? On définit une observable physique par la condition que, dans un modèle théorique bien établi, la quantité considérée a une seule valeur bien définie.

Dans la littérature il y a plusieurs traitements du moment anapolaire d'un fermion élémentaire. Certains d'entre eux discutent le cas d'une particule libre, pendant que d'autres traitent le moment anapolaire dans un processus, en tirant des conclusions pour un fermion libre. Cette approche n'est pas rigoureuse, car un facteur de forme dans un processus est une quantité effective, différente du facteur de forme intrinsèque correspondant.

On commence dans le premier chapitre avec une discussion sur les moments toroïdaux dans le cadre de l'électrodynamique classique. On constate

que le dipôle toroïdal a le droit, du point de vue historique, d'être appelé moment anapolaire. Ensuite on discute les couplages fermion-boson de jauge les plus généraux et on arrive à la conclusion que, parmi les termes permis par les transformations de Lorentz, il y en a un qui génère une interaction similaire à celle générée par le dipôle toroïdal. C'est le terme qui constitue le sujet de ce travail et en même temps le terme appelé premièrement *moment anapolaire*.

Le deuxième chapitre passe en revue le Modèle Standard de la physique des particules. À partir du groupe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  on construit tous les termes du Lagrangien qui décrit les interactions électro-faibles. À la fin on inclut les interactions fortes. On quantifie le modèle construit en utilisant la méthode des intégrales de chemin. Par la même méthode on extrait les règles de Feynman nécessaires pour le calcul explicite du moment anapolaire. Ensuite on donne un bref aperçu de la théorie de la renormalisation.

Dans le troisième chapitre on fixe les techniques nécessaires pour le calcul proprement dit. On développe le projecteur sur le moment anapolaire par des considérations de symétrie. On donne aussi les projecteurs sur tous les moments dans le cas du changement de saveur. Ensuite on démontre la forme la plus générale de la paramétrisation de Feynman et on discute plusieurs méthodes de régularisation. On choisit la régularisation dimensionnelle et on calcule dans leur forme la plus générale les intégrales  $d$ -dimensionnelles qui peuvent apparaître.

Dans le quatrième chapitre on passe au calcul proprement dit du moment anapolaire d'un fermion quelconque de spin  $\frac{1}{2}$ . Premièrement on calcule les contributions provenant des diverses corrections au vertex électromagnétique et on vérifie la réduction des divergences associées aux termes de type charge axiale. On traite ensuite le mélange  $\gamma - Z$ . Les calculs sont faits dans la jauge  $R_\xi$  linéaire, pour pouvoir discuter l'observabilité de la quantité d'intérêt. Par des transformations évidentes on obtient aussi le moment anapolaire fort.

Le dernier chapitre donne une idée des techniques de l'algèbre des courants électro-faibles et leur utilité dans la considération du moment anapolaire électromagnétique dans un processus physique. On donne aussi une es-

timation de la limite à  $q^2 = 0$  du moment anapolaire électromagnétique effectif du quark top dans l'approximation des grands logarithmes. Ensuite on tire les conclusions principales.

En terminant, on mentionne que ce document ne traite pas le moment anapolaire faible. Une étude systématique de cette quantité demande permièrement une définition généralement acceptée, ce qui n'existe pas pour le moment.

# CHAPITRE I

## PROBLÉMATIQUE

Récemment on constate un intérêt de plus en plus grand pour les multipôles toroïdaux. Ils sont étudiés en relation avec plusieurs domaines de la physique, spécialement dans la physique de l'état solide, la physique atomique et la physique des particules élémentaires. On note que, 30 ans après l'introduction de ces quantités, il n'existe aucune évidence expérimentale du moment anapolaire d'une particule élémentaire, même si l'évidence de la brisure de la parité impose son existence.

Dans ce chapitre on va développer la signification classique et quantique du moment anapolaire.

### 1.1. Historique

L'histoire des moments toroïdaux a commencé avec le travail de Zel'dovich [1], après l'étude théorique [11] et la découverte expérimentale de la brisure de la parité. Avant cette découverte, l'interaction d'une particule de spin 1/2 avec un champ électromagnétique faible était décrite à l'aide de deux termes:

- <sub>1</sub> Un terme de type  $q\phi$  où  $q$  représente la charge de la particule et  $\phi$  le potential scalaire du champ.
- <sub>2</sub> Un terme de type  $\mu(\sigma \cdot \mathbf{B})$  où  $\mu$  représente le moment magnétique de la particule (plus tard on va changer ce nom en *facteur de forme du moment magnétique*),  $\sigma$  le spin et  $\mathbf{B}$  le champ magnétique externe.

Dans le contexte de la brisure de la parité, les grandeurs indépendantes qui existent dans le système particule-champ permettent la construction de deux termes supplémentaires. Le premier est

- <sub>3</sub> le terme de type dipôle électrique:

$$d(\sigma \cdot \mathbf{E}) \quad (1.1)$$

l'autre étant

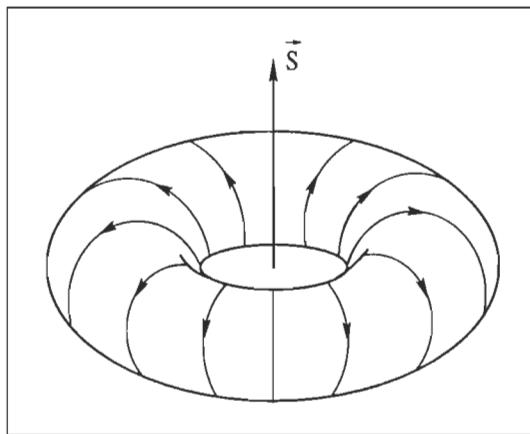
- <sub>4</sub> un terme de type *anapôle*:

$$a(\sigma \cdot (\Delta \mathbf{A})) = -a\mu_0(\sigma \cdot \mathbf{j}_{ext}) = -a(\sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{B})) \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{j}_{ext}$  est le courant qui produit le champ électromagnétique considéré.

L'invariance de jauge nous empêche de construire un terme de type  $\sigma \cdot \mathbf{A}$ , même s'il est permis par les transformations de symétrie. De plus, dans une théorie qui préserve la symétrie *CP*, un terme de type dipôle électrique est interdit parce qu'il brise cette symétrie.

On va appeler (comme Zel'dovich) la quantité  $\sigma \cdot \mathbf{j}_{ext}$  anapôle [1]; ce nom a été choisi parce que cette interaction ne correspond à aucune des interactions multipolaires électromagnétiques connue à ce temps-là. Une particule peut sentir une interaction de ce type si et seulement si elle se trouve au même point que la source du champ. Un modèle macroscopique pourrait être un solénoïde parcouru par un courant électrique.



**Figure 1.1.** Image classique de l'anapôle.

Le courant produit un champ magnétique juste à l'intérieur du solénoïde, donc aucun champ extérieur ne peut interagir avec lui. Mais, si on place le solénoïde dans un milieu conducteur parcouru par un courant, on va constater un moment des forces qui agit sur lui, moment proportionnel au sinus de l'angle entre la direction du courant dans le milieu et la normale au plan du solénoïde. Cela revient à une énergie d'interaction proportionnelle au produit  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_{ext}$  où  $\mathbf{n}$  est la normale au plan du solénoïde et  $\mathbf{j}_{ext}$  est le courant extérieur.

Dans le sous-chapitre suivant on va montrer qu'une expansion multipolaire qui tient compte de l'invariance par rapport aux rotations spatiales conduit à des quantités de type moments toroïdaux. En fait, l'anapôle de Zel'dovich est juste le premier terme d'une longue suite; l'inclusion de la mécanique quantique et de la Relativité Restreinte arrête cette suite après un certain nombre de termes à cause des propriétés cinématiques du spin et des contraintes provenant de la supposition de la covariance vis-à-vis les transformations de Lorentz (e.g. pour les particules de spin 1/2 la suite s'arrête après le premier terme).

## 1.2. Les moments toroïdaux classiques

Considérons un système arbitraire des charges et courants, avec la charge totale indépendante du temps. Ce système est décrit par le 4-vecteur courant  $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$ . Le nombre de composantes indépendantes peut être réduit de quatre à trois à l'aide de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.3)$$

En conséquence, on peut choisir trois fonctions scalaires pour décrire le système considéré.

L'expansion multipolaire représente en fait la description du système comme une superposition de plusieurs autres systèmes, chacun d'entre eux avec une seule propriété. Du point de vue mathématique, cela représente une expansion en termes des fonctions de type  $\delta$  de Dirac:

$$J^\mu(\mathbf{x}, t) = \int_D J^\mu(\xi, t) \delta(\mathbf{x} - \xi) d^3\xi = \sum_{l=0}^{\infty} A_{i_1 \dots i_l}^\mu \partial^{i_1} \dots \partial^{i_l} \delta(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

avec:

$$A_{i_1 \dots i_l}^\mu = \frac{(-1)^l}{l!} \int_D \xi_{i_1} \dots \xi_{i_l} J^\mu(\xi, t) d^3 \xi \quad (1.5)$$

Malheureusement cela n'est pas la meilleure idée que quelqu'un puisse trouver, car des photons de parité et moment cinétique bien définis sont absorbés (ou émis) par des combinaisons linéaires des coefficients  $A$ . Ces combinaisons se transforment sous des rotations comme les représentations irréductibles du groupe  $O(3)$ . (e.g.  $\xi_i \xi_j - \frac{1}{3} \xi^2 \delta_{ij}$  - moment électrique quadrupolaire). Cette reconstruction est plus ou moins facile pour les premiers termes de la série, mais pour les ordres supérieurs la procédure est vraiment laborieuse. Par conséquent, il est nécessaire d'utiliser dès le début les tenseurs irréductibles du groupe  $O(3)$ .

Dans ce qui suit on va utiliser comme base d'expansion les fonctions  $\mathcal{F}_{klm}$  solutions de l'équation de Helmholtz<sup>†</sup>:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \mathcal{F}_{klm} &= 0 \\ \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) &= j_l(kx) Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad \text{avec} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{x} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ici  $j_l$  sont les fonctions de Bessel sphériques:  $j_l(a) = 4\pi i^l \sqrt{\frac{\pi}{2a}} J_{l+\frac{1}{2}}(a)$  et  $Y_{lm}$  les harmoniques sphériques habituelles. Les fonctions  $Y_{lm}$  apparaissent d'une façon naturelle dans les expansions multipolaires, car elles sont aussi fonctions propres des transformations du groupe  $O(3)$  (aussi de l'opérateur moment cinétique - en anticipant les effets quantiques). Les fonctions  $\mathcal{F}_{klm}$  forment un système orthonormé et complet:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) \mathcal{F}_{k'l'm'}^*(\mathbf{x}) d^3 x &= \frac{(2\pi)^3}{k^2} \delta(k - k') \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \sum_{l,m} \int k^2 dk \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) \mathcal{F}_{klm}^*(\xi) &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{x} - \xi) \end{aligned} \quad (1.7)$$

---

<sup>†</sup> On arrive à ces fonctions en écrivant l'équation de d'Alembert pour une transformée de Fourier par rapport au temps. Ce traitement garde une liaison étroite entre le système et le champ électromagnétique irradié.

En utilisant ces relations on peut construire une expansion de la densité de charge  $\rho$  du système considéré:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} \int k^2 dk \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) q_{lm}(k, t) \quad (1.8)$$

où les coefficients  $q_{lm}$  sont donnés par:

$$q_{lm}(k, t) = \int \mathcal{F}_{klm}^* \rho(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.9)$$

Si la densité de charge a une extension spatiale petite, on peut utiliser une expansion en série de Taylor autour de  $kx = 0$  pour les fonctions  $\mathcal{F}_{klm}$ :

$$\mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) = 4\pi \frac{(ikx)^l}{(2l+1)!!} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (1.10)$$

On normalise cette forme des fonctions de la base et on absorbe toutes les constantes par une redéfinition des quantités  $q_{lm}$ ; par conséquent, on écrit:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} \int k^2 dk (-ik)^l \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{(2l+1)!!} \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) Q_{lm}(k, t) \quad (1.11)$$

où les  $Q_{lm}$  sont donnés par:  $Q_{lm}(k, t) = \frac{(2l+1)!!}{(-ik)^l \sqrt{4\pi(2l+1)}} q_{lm}(k, t)$ . Si on calcule le champ électromagnétique en équilibre avec une telle densité de charge, on constate l'apparition des états de moment cinétique et de parité bien déterminés (par exemple, voir réf. [20]).

On appelle  $Q_{lm}(k, t)$  facteur de forme du multipole  $2^l$ . La dépendance en  $k$  est en fait de type  $k^2$ . Dans l'équation de Helmholtz on a dès le début  $k^2$ . Tous les termes dans le développement en série des fonctions de Bessel sphériques sont de type  $x^2$ , où  $x$  est l'argument. Donc on écrit  $Q_{lm}(k^2, t)$ . On peut développer le facteur de forme  $Q_{00}(k^2, t)$  en série d'après  $k^2$ :

$$Q_{00}(k, t) = Q_{00}(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k^2)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n Q_{00}(k^2, t)}{\partial(k^2)^n} \right|_{k=0} \quad (1.12)$$

Il est évident que le terme libre  $Q_{00}(0, t)$  représente la charge totale du système.

On peut faire la même chose avec tous les facteurs de forme. On appelle les dérivées des facteurs de forme normalisés *rayons moyens d'ordre n de la distribution de charge du multipôle 2<sup>l</sup>*.

L'expansion multipolaire des courants est en quelque sorte plus compliquée. Il est évident que le 3-vecteur courant peut être décomposé en une partie longitudinale et une partie transverse par rapport à  $\mathbf{x}$ . La partie longitudinale est reliée à la densité de charge par l'équation de continuité (1.3). On peut donc écrire:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\parallel} + \mathbf{J}_{\perp}; \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_{\perp} = 0 = \nabla \times \mathbf{J}_{\parallel} \quad (1.13)$$

Les composantes transverse et longitudinale du courant peuvent être exprimées à l'aide de trois fonctions scalaires  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$ :

$$\mathbf{J}_{\parallel} = \nabla \varphi; \quad \mathbf{J}_{\perp} = \nabla \times [\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}, t)] + \nabla \times \nabla \times [\mathbf{x} \chi(\mathbf{x}, t)] \quad (1.14)$$

La fonction scalaire  $\varphi$  peut être reliée à la densité de charge du système à l'aide de l'équation de continuité. Donc, on peut exprimer la partie longitudinale du courant en fonction des quantités  $Q_{lm}$ .

On choisit donc comme base pour l'expansion des fonctions  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$  les mêmes fonctions  $\mathcal{F}_{klm}$ . Puisque le résultat de cette expansion va être un vecteur, on doit construire des quantités vectorielles à partir de ces fonctions. De plus, elles doivent être irréductibles (par rapport à  $O(3)$ ) et avec une "direction" bien définie (i.e. soit longitudinales, soit transverses). Ces demandes identifient uniquement les vecteurs de la base comme suit:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{klm}^{(0)} &= \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla \times [\mathbf{x} \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x})] = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \hat{\mathbf{L}} \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) \\ \mathcal{F}_{klm}^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{i}{k} \nabla \times \nabla \times [\mathbf{x} \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x})] = \\ &= -\frac{1}{k \sqrt{l(l+1)}} \nabla \times \hat{\mathbf{L}} \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{k} \nabla \times \mathcal{F}_{klm}^{(0)} \\ \mathcal{F}_{klm}^{(-)} &= -\frac{i}{k} \nabla \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

On a utilisé la définition de l'opérateur moment cinétique  $\hat{\mathbf{L}} = -i\mathbf{x} \times \nabla$ . Les fonctions  $\mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)}$  ainsi définies sont des solutions de l'équation de Helmholtz, ont une parité bien définie et forment un système orthogonal et fermé:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)*}(\mathbf{x}) \mathcal{F}_{k'l'm'}^{(\lambda')}(\mathbf{x}) d^3x &= \frac{(2\pi)^3}{k^2} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k') \\ \sum_{l,m,\lambda} \int [\mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)}(\mathbf{x})]_i^* [\mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)}(\xi)]_j k^2 dk &= (2\pi)^3 \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \xi) \\ \mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)}(-\mathbf{x}) &= (-1)^{l+\lambda} \mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)}(\mathbf{x}), \quad \lambda = 0, \pm(1) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ces fonctions ont aussi les propriétés de transversalité demandées; les deux premières fonctions (1.16) sont transverses et la dernière est longitudinale:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{F}_{klm}^{(0)}(\mathbf{x}) &= 0 = \nabla \cdot \mathcal{F}_{klm}^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \nabla \times \mathcal{F}_{klm}^{(-)}(\mathbf{x}) &= 0; \quad \nabla \cdot \mathcal{F}_{klm}^{(-)}(\mathbf{x}) = ik \mathcal{F}_{klm}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

À l'aide de la relation de fermeture on peut écrire l'expansion multipolaire du vecteur courant sous la forme:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l,m,\lambda} \int k^2 dk \mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) m_{lm}^{(\lambda)}(k^2, t) \quad (1.18)$$

avec les coefficients  $m_{lm}^{(\lambda)}(k, t)$  donnés par:

$$m_{lm}^{(\lambda)}(k^2, t) = \int \mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)*}(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.19)$$

L'argument pour la dépendance en  $k^2$  est le même que pour les quantités  $Q_{lm}(k^2, t)$ .

En ce moment on traite séparément les parties transverses et longitudinale du courant.

**1) La partie longitudinale:** En utilisant l'équation de continuité (1.3) et les propriétés de transversalité des fonctions vectorielles  $\mathcal{F}_{klm}^{(\lambda)}$  on trouve la relation suivante entre les coefficients  $Q_{lm}$  et  $m_{lm}^{(-)}$ :

$$m_{lm}^{(-)}(k^2, t) = (-ik)^{l-1} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{(2l+1)!!} \dot{Q}_{lm}(k^2, t) \quad (1.20)$$

En utilisant le développement en série (1.12) du  $Q_{00}$  et le fait que la charge totale du système ne dépend pas du temps, on arrive à la conclusion que la charge n'entre pas dans l'expression du courant  $\mathbf{J}$ . Par contre, ses rayons moyens sont contenus dans la partie longitudinale du courant.

**2) La première partie transverse:** On signifie par la première partie transverse la partie engendrée par l'ensemble des fonctions  $\mathcal{F}_{klm}^{(0)}$ . On normalise les  $m_{lm}^{(0)}(k^2, t)$  pour obtenir les  $2^l$  facteurs de forme magnétiques généralement acceptés:

$$M_{lm}(k^2, t) = -\frac{i(2l+1)!!\sqrt{l}}{(-ik)^l \sqrt{4\pi(l+1)(2l+1)}} m_{lm}^{(0)}(k^2, t) \quad (1.21)$$

On peut définir aussi des rayons moyens d'ordre  $2^n$  comme dans le cas des facteurs  $Q_{lm}$ .

**3) La deuxième partie transverse:** On signifie par la deuxième partie transverse la partie engendrée par l'ensemble des fonctions  $\mathcal{F}_{klm}^{(+)}$ . Pour mettre en évidence les constantes de normalisation on a besoin de construire un développement en série de  $\mathcal{F}_{klm}^{(+)}$  dans la limite des  $k$  petits. On peut écrire:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{klm}^{(+)\mu}(\mathbf{x}) &\stackrel{k \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\frac{l+1}{l}} \mathcal{F}_{klm}^{(-)\mu}(\mathbf{x}) \\ &\approx 4\pi \frac{(ikx)^{l-1}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \sum_{m'=-l+1}^{l-1} C_{lm}^{l-1, m'; 1, \mu} Y_{l-1, m'} + \mathcal{O}[(kx)^{l+1}] \end{aligned} \quad (1.22)$$

où  $C_{lm}^{l-1, m'; 1, \mu}$  sont les coefficients de Clebsch-Gordan; on peut diminuer la longueur de la somme en tenant compte du fait que les coefficients sont non nuls juste pour  $m = m' + \mu$ . On va revenir un peu plus tard sur le lien entre l'indice vectoriel  $\mu$  et les composantes cartésiennes. En regardant cette expression on constate que, dans la limite des  $k$  petits,  $m_{lm}^{(+)}(0, t)$  ressemble à  $m_{lm}^{(-)}(0, t)$  à une constante près. La conclusion qu'on peut tirer de cette ressemblance est que les coefficients  $m_{lm}^{(+)}$  sont reliés à  $\dot{Q}_{lm}(0, t)$ . Quelle que soit la dépendance  $m_{lm}^{(+)}(\dot{Q}_{lm}(0, t))$ , dans la limite  $k \rightarrow 0$  on doit avoir  $m_{lm}^{(+)} \sim \dot{Q}_{lm}$ . On utilise cette relation comme condition de normalisation pour  $m_{lm}^{(+)}$ . Par conséquent on

écrit:

$$E_{lm}(k^2, t) = \dot{Q}_{lm}(0, t) - k^2 T_{lm}(k^2, t) \quad (1.23)$$

où  $E_{lm}$  s'obtiennent de  $m_{lm}^{(+)}$  par la normalisation spécifiée:

$$E_{lm}(k^2, t) = \frac{(2l+1)!!\sqrt{l}}{(-ik)^{l-1}\sqrt{4\pi(l+1)(2l+1)}} m_{lm}^{(+)}(k^2, t) \quad (1.24)$$

Pour écrire les coefficients  $T_{lm}(k^2, t)$  sous une forme raisonnable on définit:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{l,l',m}^\mu &= \sum_{m'=-l'}^{l'} C_{lm}^{l',m';1,\mu} Y_{l',m'}; \quad \mu = 0, \pm 1 \\ \mathbf{Y}_{l,l',m}^z &= \mathbf{Y}_{l,l',m}^0; \quad \mathbf{Y}_{l,l',m}^{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{Y}^x \pm i\mathbf{Y}^y)_{l,l',m} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ainsi, l'expression compacte promise pour les coefficients  $T_{lm}(k^2, t)$  est:

$$\begin{aligned} T_{lm}(k^2, t) &= -\frac{(2l+1)!!\sqrt{l}}{(-ik)^{l+1}(2l+1)\sqrt{4\pi(l+1)}} \int \left\{ \sqrt{l} j_{l+1}^*(kx) \mathbf{Y}_{l,l+1,m}(\mathbf{n}) - \right. \\ &\quad \left. - ikx \frac{\sqrt{l+1}}{2} j_l^*(kx) \mathbf{Y}_{l,l-1,m}(\mathbf{n}) \right\} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x \end{aligned} \quad (1.26)$$

On peut construire une expansion en série de Taylor pour les coefficients  $T_{lm}(k^2, t)$ . Le premier terme de la série (qui est par ailleurs celui qui nous intéresse) est:

$$\begin{aligned} T_{lm}(t) = T_{lm}(0, t) &= -\frac{\sqrt{4\pi l}}{2(2l-1)} \int x^{l+1} \left\{ \mathbf{Y}_{l,l-1,m}(\mathbf{n}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\sqrt{l}}{(2l+3)\sqrt{l+1}} \mathbf{Y}_{l,l+1,m}(\mathbf{n}) \right\} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) d^3x \end{aligned} \quad (1.27)$$

et on appelle cette quantité le multipôle toroïdal d'ordre  $2^l$ .

En regardant l'expression de  $T_{lm}(k^2, t)$  on constate que:

$$T_{lm}(k^2, t) \Big|_{l=0} = 0 \quad (1.28)$$

En d'autres mots, il n'existe pas de *monopôle toroïdal* dans l'expansion multipolaire du courant. Le multipôle d'ordre le plus bas est le *dipôle toroïdal*.

En mettant toutes les composantes du courant ensemble, on peut écrire l'expansion multipolaire cherchée:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} \int k^2 dk (-ik)^{l-1} \frac{\sqrt{4\pi(l+1)(2l+1)}}{(2l+1)!!\sqrt{l}} \left\{ k \mathcal{F}_{klm}^{(0)} M_{lm}(k^2, t) + \sqrt{\frac{l}{l+1}} \mathcal{F}_{klm}^{(-)} \dot{Q}_{lm}(k^2, t) + \mathcal{F}_{klm}^{(+)} \left[ \dot{Q}_{lm}(0, t) - k^2 T_{lm}(k^2, t) \right] \right\} \quad (1.29)$$

Dans cette expression les limites de la somme sur  $l$  varient de terme à terme. Ainsi, dans le premier terme la somme est de un à l'infini à cause de l'inexistence des monopôles magnétiques et dans les deux termes suivants elle est de zéro à l'infini.

À ce niveau c'est nécessaire d'écrire les rayons moyens de chaque facteur de forme, en donnant aussi les constantes de normalisation généralement acceptées:

$$\begin{aligned} \langle r_{Q_{lm}}^{2n} \rangle &= \frac{2^n (2n+2l+1)!!}{(2l+1)!!} \frac{\partial^n Q_{lm}}{\partial(k^2)^n} \Big|_{k=0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3x x^{2n+l} \rho(\mathbf{x}, t) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') \\ \langle r_{M_{lm}}^{2n} \rangle &= \frac{2^n (2n+2l+1)!!}{(2l+1)!!} \frac{\partial^n M_{lm}}{\partial(k^2)^n} \Big|_{k=0} = l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3x x^{2n+l} \psi(\mathbf{x}, t) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') \\ \langle r_{T_{lm}}^{2n} \rangle &= \frac{2^n (2n+2l+1)!!}{(2l+1)!!} \frac{\partial^n T_{lm}}{\partial(k^2)^n} \Big|_{k=0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3x x^{2n+l} \psi(\mathbf{x}, t) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') \\ \langle r_{\dot{Q}_{lm}}^{2n} \rangle &= \frac{2^n (2n+2l+1)!!}{(2l+1)!!} \frac{\partial^n \dot{Q}_{lm}}{\partial(k^2)^n} \Big|_{k=0} = \\ &= -2n(2n+2l+1) \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3x x^{2(n-1)+l} \varphi(\mathbf{x}, t) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') \end{aligned} \quad (1.30)$$

Pour déterminer le type d'interaction de chaque moment multipolaire on doit construire l'énergie d'interaction entre le système considéré et un champ électromagnétique externe. Pour réaliser cela on va faire premièrement le lien entre l'expansion multipolaire présentée et l'expansion en terme des distributions delta de Dirac, en gardant en même temps la décomposition en termes de

moment cinétique et parité bien déterminés. La relation de base qu'on utilisera est prise de la théorie des opérateurs différentiels:

$$e^{\mathbf{r} \cdot \nabla} = 4\pi \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\mathbf{r}) S_l(r^2 \nabla^2) Y_{lm}(-\nabla) \quad (1.31)$$

où

$$Y_{lm}(\mathbf{r}) = r^l Y_{lm}(\mathbf{n}); \quad S_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n! (2n+2l+1)!!} \quad (1.32)$$

L'opérateur  $Y_{lm}(-\nabla)$  permet une "décomposition" de la distribution delta de Dirac en distributions delta-sphériques:

$$\delta_{lm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2l-1)!!} Y_{lm}(-\nabla) \delta(\mathbf{r}); \quad (-1)!! = 1 \quad (1.33)$$

Cette quantité représente la source pour une équation de Poisson; la fonction de Green associée est singulière à l'origine:

$$\Delta \frac{Y_{lm}(\mathbf{r})}{r^{l+1}} = 4\pi \delta_{lm}(\mathbf{r}) \quad (1.34)$$

À l'aide de ces relations on peut facilement construire une expansion pour une fonction scalaire quelconque  $h(\mathbf{r}, t)$ . En fait c'est cela qu'il nous faut, car la densité de charge et le courant peuvent être exprimés à l'aide des fonctions scalaires. On écrit:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' h(\mathbf{r}', t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int d^3 r' h(\mathbf{r}', t) e^{\mathbf{r}' \cdot \nabla} \delta(\mathbf{r}) = \\ &= 4\pi \sum_{l,m} \int d^3 r' h(\mathbf{r}', t) Y_{lm}^*(\mathbf{r}') S_l(r'^2 \nabla^2) Y_{lm}(-\nabla) \delta(\mathbf{r}) = \\ &= 4\pi \sum_{l,m,n} \frac{(2l-1)!!}{2^n n! (2n+2l+1)!!} \left\{ \int d^3 r' r'^{2n} h(\mathbf{r}', t) Y_{lm}^*(\mathbf{r}') \right\} \Delta^n \delta_{lm}(\mathbf{r}) = \\ &= \sum_{l,m,n} \frac{(2l+1)!!}{2^n n! (2n+2l+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \mathcal{H}_{lm}^{(2n)}(t) \Delta^n \delta_{lm}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Ici on a introduit  $\mathcal{H}_{lm}^{(2n)}(t)$  comme:

$$\mathcal{H}_{lm}^{(2n)}(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3 r' r'^{2n+l} h(\mathbf{r}', t) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') \quad (1.36)$$

Ayant comme base cette relation, on est prêt à traiter le 4-vecteur courant. En comparant  $\mathcal{H}_{lm}^{(2n)}(t)$  avec les rayons moyens des moments de la charge, on constate qu'ils sont identiques si on remplace  $h$  par  $\rho$ .

$$\left. \mathcal{H}_{lm}^{(2n)} \right|_{h \rightarrow \rho} = \langle r_{Q_{lm}}^{(2n)} \rangle \quad (1.37)$$

Par conséquent on a l'expansion de la densité de charge:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,m,n} \frac{(2l+1)!!}{2^n n! (2n+2l+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \langle r_{Q_{lm}}^{2n} \rangle \Delta^n \delta_{lm}(\mathbf{r}) \quad (1.38)$$

Évidemment, le rayon moyen d'ordre zéro est le facteur de forme pour  $k$  égal à zéro.

Pour l'expansion de la partie vectorielle du courant on utilise la paramétrisation (1.14) et on développe les fonctions scalaires  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$  suivant les relations (1.35) et (1.36). Pour la reconstruction du courant, on applique à la fin les opérateurs nécessaires (i.e.  $\nabla$ ,  $-\mathbf{r} \times \nabla$  et  $-\nabla \times \mathbf{r} \times \nabla$  selon le cas). On peut faire cela car on sait que la série est convergente (par construction). On utilise aussi les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \int d^3r \mathcal{F}_{klm}^{(0)\star}(\mathbf{r}, t) \cdot [-\mathbf{r} \times \nabla \psi] &= i\sqrt{l(l+1)} \int d^3r \mathcal{F}_{klm}^\star(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \\ \int d^3r \mathcal{F}_{klm}^{(+)\star}(\mathbf{r}, t) \cdot [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\chi)] &= ik\sqrt{l(l+1)} \int d^3r \mathcal{F}_{klm}^\star(\mathbf{r}, t) \chi(\mathbf{r}, t) \\ \int d^3r \mathcal{F}_{klm}^{(-)\star}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \varphi &= -ik \int d^3r \mathcal{F}_{klm}^\star(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Les membres gauches de ces relations font partie des définitions des facteurs de forme  $M_{lm}$ ,  $\dot{Q}_{lm}$  et  $E_{lm}$ , tandis que les membres droits entrent dans la définition des quantités de type  $H_{lm}^{(2n)}$ . Par comparaison avec les rayons moyens, la première équation permet l'extraction de la relation suivante pour les quantités  $\mathcal{H}_{lm}^{(2n)}(t)$  dans le cas  $h \rightarrow \psi$ :

$$\int d^3r r^{2n+l} \psi(\mathbf{r}, t) Y_{lm}^\star(\mathbf{n}) = \frac{1}{l} \langle r_{M_{lm}}^{2n} \rangle \quad (1.40)$$

où  $M_{lm}$  sont les moments magnétiques introduits dans l'équation (1.21).

En utilisant la troisième relation (1.39) et les équations (1.30) on arrive à l'expression suivante pour les facteurs de forme de la partie longitudinale:

$$\mathcal{H}_{lm}^{(2n)} \Big|_{h \rightarrow \varphi} = \frac{\langle r_{\dot{Q}_{lm}}^{(2(n+1))} \rangle}{2(n+1)(2n+2l+3)} \quad (1.41)$$

En utilisant la deuxième relation (1.39) et les équations (1.30) on arrive à l'expression suivante pour les facteurs de forme de la deuxième partie transverse:

$$\mathcal{H}_{lm}^{(2n)} \Big|_{h \rightarrow \chi} = \frac{1}{l} \left[ \frac{[\dot{Q}_{lm}(0, t)]^{(2(n+1))}}{2(n+1)(2n+2l+3)} + \langle r_{T_{lm}}^{(2n)} \rangle \right] \quad (1.42)$$

Le premier terme de la parenthèse est non nul si et seulement si  $n+1=0$ . On peut penser que dans ce cas le terme est divergent. Ce problème est résolu quand on met cette expression dans le courant.

Puisqu'on a tous les ingrédients dont on a besoin, on est prêt à écrire le courant:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = & - \sum_{l,m,n} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{(2l+1)!!}{2^n n! (2n+2l+1)!!} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{l} \langle r_{M_{lm}}^{2n} \rangle (\mathbf{r} \times \nabla) \Delta^n \delta_{lm}(\mathbf{r}) + \langle r_{\dot{Q}_{lm}}^{(2n)} \rangle \nabla \Delta^{n-1} \delta_{lm}(\mathbf{r}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{l} \left[ [\dot{Q}_{lm}(0, t)]^{(2n)} \delta_{n,0} \Delta^{-1} + \langle r_{T_{lm}}^{(2n)} \rangle \right] (\nabla \times \mathbf{r} \times \nabla) \Delta^n \delta_{lm}(\mathbf{r}) \right\} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Pour  $l=0$  le dernier terme du membre droit de l'équation ne contribue pas à cause de la conservation de la charge, pendant que les autres termes ne contribuent pas à cause du fait que  $(\mathbf{r} \times \nabla) \delta_{00} = 0$ .

Avec cette expression du courant on peut paramétriser l'interaction du système considéré avec un champ électromagnétique externe en termes des tenseurs irréductibles du groupe  $O(3)$ . En général l'énergie d'interaction est donnée par:

$$W = \int d^3r \left( \rho \phi - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right) = W^{charge} + W^{courant} \quad (1.44)$$

Avec la paramétrisation considérée l'énergie prend la forme d'une convolution entre les distributions  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  et les fonctions de test  $\phi$  et  $\mathbf{A}$  respectivement. En utilisant la relation (1.38), on trouve pour  $W^{charge}$ :

$$W^{charge} = \sum_{l,n=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(2l+1)!!}{2^n n! (2n+2l+1)!!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \langle r_{Q_{lm}}^{2n} \rangle \left[ \Delta^n \phi_{lm}(\mathbf{r}, t) \right]_{\mathbf{r}=0} \quad (1.45)$$

Pour écrire cette forme de l'énergie d'interaction électrostatique on a utilisé la parité des harmoniques sphériques, la propriété de la dérivée des distributions:  $\langle \mathcal{D}^n f; h \rangle = (-1)^n \langle f; \mathcal{D}^n h \rangle$  où  $f$  est une distribution et  $h$  est une fonction test et on a posé  $\phi_{lm}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{(2l+1)!!} Y_{lm}(\nabla) \phi$ .

En utilisant l'équation (1.43) ainsi que les équations de Maxwell écrites pour les potentiels électrodynamiques et les mêmes propriétés des fonctions sphériques et des distributions, on construit l'expression de la partie  $W^{courant}$  de l'énergie totale  $W$ :

$$W^{courant} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!!}{2^n n! (2n+2l+1)!!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{l} \langle r_{M_{lm}}^{2n} \rangle \Delta^n Y_{lm}(\nabla) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}] + \langle r_{Q_{lm}}^{(2n)} \rangle \Delta^{n-1} Y_{lm}(\nabla) \nabla \cdot \mathbf{A} + \\ & + \frac{1}{l} \left[ [\dot{Q}_{lm}(0, t)]^{(2n)} \delta_{n,0} \Delta^{-1} + \langle r_{T_{lm}}^{(2n)} \rangle \right] \Delta^n Y_{lm}(\nabla) [\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}_{ext}] \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Ici  $\mathbf{D}$  représente l'induction du champ électrique extérieur et  $\mathbf{j}_{ext}$  le courant qui produit le champ électromagnétique. Si on fait quelques manipulations dans le dernier terme de cette expression pour  $l = 1$ , on peut le mettre, à une constante près, sous la forme:

$$W_{l=1}^{courant} \sim \left[ \frac{1}{c} \int d^3x (\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{j}) - 2x^2 \mathbf{j}) \right] \cdot (\mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)) \Big|_{\mathbf{r}=0} \quad (1.47)$$

Avec l'énergie mise sous cette forme on voit un lien étroit entre le moment toroïdal dipolaire et l'anapole de Zel'dovich. L'intégrale dans la parenthèse va

donner une quantité qui peut dépendre seulement des propriétés intrinsèques du système considéré au début du chapitre. On doit écrire, donc:

$$W_{l=1}^{courant} \sim \mathcal{T}(t) \cdot (\mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t)) \Big|_{\mathbf{r}=0} \quad (1.48)$$

où  $\mathcal{T}(t)$  est une fonctionnelle vectorielle qui dépend juste des propriétés du système et du temps. En extrapolant les calculs classiques pour une particule élémentaire on peut dire que  $\mathcal{T}(t) \sim \vec{\sigma}$ . De cette relation on peut tirer la conclusion que le moment toroïdal dipolaire intrinsèque et l'anapôle de Zel'dovich représentent une seule et même chose.

### 1.3. Traitement quantique des interactions d'un fermion de spin 1/2

Considérons un fermion  $i$  qui interagit avec un boson de jauge quelconque. On veut trouver la forme la plus générale de cette interaction permise par les principes de la mécanique quantique et la covariance par rapport aux transformations de Lorentz. On va faire les calculs de telle manière qu'on puisse utiliser la plupart du résultat pour toutes les interactions connues, sauf celle gravitationnelle qui n'amène pas d'effets mesurables à l'échelle d'énergie considérée.

On va appeler *courant* la quantité qu'on veut construire. Il a la forme d'un 4-vecteur. De plus, il peut dépendre juste des grandeurs indépendantes qu'on peut trouver dans l'interaction, i.e. les 4-impulsions du fermion entrant  $p_1$  et du boson de jauge<sup>†</sup>  $q$ . En demandant la covariance sous les transformations de Lorentz, le courant le plus général qu'on puisse écrire est:

$$\begin{aligned} J^\mu = \bar{\psi}(p_2) & \left\{ \left[ A_1 \not{p}_1 p_1^\mu + A_2 \not{p}_1 q^\mu + A_3 \not{q} p_1^\mu + A_4 \not{q} q^\mu + \right. \right. \\ & + A_5 \not{q} \gamma^\mu \not{p}_1 + A_6 \gamma^\mu + A_7 \gamma^\mu q^2 + \\ & \left. \left. + A_8 \gamma^\mu q \cdot p_1 + A_9 \gamma^\mu p_1^2 + A_{10} \gamma^\mu \not{p}_1 + \right] \right. \end{aligned}$$

---

<sup>†</sup> On peut aussi bien choisir les impulsions des fermions, mais la variante qu'on a choisi est plus économique et les expressions prennent des formes plus courtes que dans l'autre variante.

$$\begin{aligned}
& + A_{11} \gamma^\mu \not{q} + A_{12} p_1^\mu + A_{13} q^\mu \Big] \gamma_L \\
& + \left[ B_1 \not{p}_1 p_1^\mu + B_2 \not{p}_1 q^\mu + B_3 \not{q} p_1^\mu + B_4 \not{q} q^\mu \right. \\
& + B_5 \not{q} \gamma^\mu \not{p}_1 + B_6 \gamma^\mu + B_7 \gamma^\mu q^2 + \\
& + B_8 \gamma^\mu q.p_1 + B_9 \gamma^\mu p_1^2 + B_{10} \gamma^\mu \not{p}_1 + \\
& \left. + B_{11} \gamma^\mu \not{q} + B_{12} p_1^\mu + B_{13} q^\mu \right] \gamma_R \Big\} \psi(p_1) \quad (1.49)
\end{aligned}$$

L'application de l'équation de Dirac et de l'anticomutation des matrices  $\gamma_5$  et  $\gamma_{\{0,1,2,3\}}$  conduit à la possibilité de simplifier l'expression déjà écrite par les transformations suivantes:

$$\begin{aligned}
\not{p}_1 \gamma_{L,R} & \longrightarrow m_i \gamma_{R,L} \\
\not{q} \gamma_{L,R} & \longrightarrow m_i (\gamma_{L,R} - \gamma_{R,L}) \\
\not{q} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_{L,R} & \longrightarrow m_i^2 \gamma^\mu - 2m_i p_1^\mu \gamma_{R,L} \quad (1.50)
\end{aligned}$$

On peut faire encore des simplifications en utilisant les formules de décomposition de Gordon:

$$\begin{cases} 2p_{1\mu} \gamma_L = (q_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu) \gamma_L + m_i \gamma_\mu \\ 2p_{1\mu} \gamma_R = (q_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu) \gamma_R + m_i \gamma_\mu \end{cases} \quad (1.51)$$

Ces relations montrent que, en fait,  $p_1$  et  $q$  ne sont pas des quantités indépendantes. Cela est une caractéristique des particules de spin 1/2. Pour les particules de spin 1,  $p_1$  et  $q$  sont vraiment indépendants et apparaissent tous les deux dans l'expression du courant.

Après quelques manipulations algébriques on obtient la forme la plus générale de l'interaction fermion (spin 1/2)-boson de jauge:

$$\begin{aligned}
J_\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}(p_2) \Big\{ & F_1 q^\mu + iF_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_3 \gamma^\mu \\
& + [G_1 q^\mu + iG_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu + G_3 \gamma^\mu] \gamma_5 \Big\} \psi(p_1) \quad (1.52)
\end{aligned}$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = s_{13} + \frac{1}{2}s_{12} + m_i[s_2 - s_5 + \frac{1}{2}s_1] \\ F_2 = \frac{1}{2}s_{12} + m_i[\frac{1}{2}s_1 - s_5] \\ F_3 = s_6 + m_i(s_{10} + s_{12}) + m_i^2(s_1 + s_9) + q^2[s_7 - \frac{1}{2}s_8] \\ G_1 = \bar{s}_{13} + \frac{1}{2}\bar{s}_{12} + m_i[-\bar{s}_2 + \bar{s}_5 + \bar{s}_3 + 2\bar{s}_4 - \frac{1}{2}\bar{s}_1] \\ G_2 = \frac{1}{2}\bar{s}_{12} + m_i[-\frac{1}{2}\bar{s}_1 + \bar{s}_5 + \bar{s}_3] \\ G_3 = \bar{s}_6 + m_i(2\bar{s}_{11} - \bar{s}_{10}) + m_i^2\bar{s}_9 + q^2[\bar{s}_7 - \frac{1}{2}\bar{s}_8] \end{array} \right. \quad (1.53)$$

avec  $s_i = A_i + B_i$  et  $\bar{s}_i = B_i - A_i$ .

Jusqu'à maintenant on n'a pas encore spécifié le type de boson de jauge, en d'autres mots le type d'interaction auquel on s'intéresse. Une telle spécification ajoute encore des contraintes sur l'expression trouvée, selon le cas:

- <sub>1</sub> L'interaction électromagnétique conserve le courant (i.e.  $q_\mu J^\mu = 0$ ).
- <sub>2</sub> L'interaction forte conserve le courant et introduit un facteur multiplicatif  $\frac{\lambda_a}{2}$  entre les spineurs (qui sont dans ce cas des triplets  $SU(3)$ ,  $\lambda$  étant les générateurs du même groupe).
- <sub>3</sub> L'interaction faible ne conserve pas le courant.

En fait ce sont ces nouvelles contraintes qui font la différence entre les divers types d'interactions.

En explicitant ces conditions supplémentaires, on obtient:

- 1) Le courant électromagnétique:

$$J_\mu^{em} = \bar{\psi}(p_2) \left[ f^{em}(q^2) \gamma_\mu + F_A^{em}(q^2)(q^2 \gamma_\mu - \not{q} q_\mu) \gamma_5 + i D_M^{em}(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + i D_E^{em}(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 \right] \psi(p_1) \quad (1.54)$$

- 2) Le courant fort:

$$J_\mu^{st} = \bar{\psi}(p_2) \left[ f^{st}(q^2) \gamma_\mu + F_A^{st}(q^2)(q^2 \gamma_\mu - \not{q} q_\mu) \gamma_5 + i D_M^{st}(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + i D_E^{st}(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 \right] \frac{\lambda_a}{2} \psi(p_1) \quad (1.55)$$

3) Le courant faible:

$$J_\mu^W = \bar{\psi}(p_2) \left[ f^W(q^2) \gamma_\mu + t(q^2) \gamma_\mu \gamma_5 + F_A^W(q^2) (q^2 \gamma_\mu - q^\nu q_\mu) \gamma_5 + i D_M^W(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + i D_E^W(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 \right] \psi(p_1) \quad (1.56)$$

Les relations (1.54) – (1.56) donnent les expressions les plus générales des courants électromagnétiques, forts et faibles respectivement. On appelle les grandeurs  $f$ ,  $t$ ,  $F_A$ ,  $D_M$  et  $D_E$  *facteurs de forme* et les opérateurs associés *moments*. Les facteurs de forme renferment en eux les contributions de tous les ordres de la théorie des perturbations. Cette affirmation est soutenue par la demande que la théorie soit cohérente avec la Théorie de la Relativité Restreinte.

Dans les expressions écrites pour les divers courants les moments sont écrits dans l'espace énergie-impulsion. Pour passer dans l'espace habituel en électrodynamique (i.e. l'espace temps-position) on doit faire une transformée de Fourier. En considérant aussi une interaction entre les courants écrits et un champ extérieur on obtient des expressions plus connues pour les interactions engendrées. Leur forme, ainsi que les noms spécifiques associés sont rassemblés dans le tableau qui suit:

Opérateur	Espace ( $t, \vec{r}$ )	Facteur	Description
$\gamma_\mu$	$A_0 + \vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A})$	$f$	Charge électrique
$(q^2 \gamma_\mu - q^\nu q_\mu) \gamma_5$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{J}_{extern}$	$F_A$	Anapôle
$\sigma^{\mu\nu} q_\nu$	$\vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A})$	$D_M$	Dipôle magnétique
$\sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5$	$\vec{\sigma} \cdot (-\nabla A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$	$D_E$	Dipôle électrique
$\gamma_\mu \gamma_5$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{A}$	$t$	Charge axiale

**Tableau 1.1.** Les opérateurs qui apparaissent dans l'expression du courant, leurs expressions dans l'espace temps-position, leurs facteurs de forme et le type d'interaction qu'ils produisent

Les noms qu'on utilise dans la colonne "Description" sont ceux de QED; pour avoir la description exacte il faut ajouter un suffixe qui spécifie un autre type d'interaction que celui électromagnétique.

Si on regarde la deuxième ligne du tableau 1.1. on constate que l'expression de l'énergie d'interaction du terme  $(q^2 \gamma_\mu - q^\mu) \gamma_5$  dans l'espace position-temps est identique avec le terme introduit par Zel'dovich et avec l'analogie classique trouvé dans le sous-chapitre précédent. Par conséquent cette quantité a le droit d'être appelée moment anapolaire et son facteur dans le courant *facteur de forme du moment anapolaire*. Toutefois, cette définition ne s'applique pas pour le moment anapolaire faible et cela pour une très bonne raison: dans ce cas il y a une ambiguïté dans la définition du moment anapolaire (et implicitement de son facteur de forme) à cause des interférences avec le moment de la charge axiale. Une définition qui conduit à une interaction de contact avec des caractéristiques semblables à celles des interactions avec les photons et gluons peut être:

$$Z j_\mu^{anapole} = \bar{\psi}(p_2) [(q^2 - M_Z^2) \gamma_\mu - q^\mu] \gamma_5 \psi(p_1) \quad (1.57)$$

Le traitement du moment anapolaire faible ne fait pas partie du but de ce travail et va être traité dans une autre approche. Dans ce qui suit on va raffiner un petit peu la définition du moment anapolaire électromagnétique et fort.

Si on considère l'interaction de la partie anapolaire du courant avec un photon externe on constate que le facteur  $F_A(0)$  n'est pas bien défini:

$$j_\mu^{anapole} \epsilon^\mu(q^2) \Big|_{q^2=0} = 0 \quad \forall F_A \in \mathbf{R} \quad (1.58)$$

Cela revient à prendre la limite  $q^2 \rightarrow 0$  après toutes les manipulations nécessaires. Par conséquent on a dans l'espace position-temps:

$$j_\mu^{anapole} \epsilon^\mu = \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(\mathbf{x}) j_{ext}^\mu(\mathbf{x}) \quad (1.59)$$

Cela est la preuve de la première raison pour laquelle le moment anapolaire est le moins étudié.

## CHAPITRE II

### SUPPORT THÉORIQUE

Dans ce chapitre on va construire les outils qu'on va utiliser pour le calcul du moment anapolaire discuté dans un des chapitres suivants. Premièrement on construit le Lagrangien du Modèle Standard, on donne un bref aperçu sur la Méthode des Intégrales de Chemin et on liste les règles de Feynman qu'on utilisera. Après cela on explique la méthode de projection. Puisque dans le calcul on va rencontrer des intégrales divergentes on discute la paramétrisation de Feynman et la régularisation dimensionnelle. Quand tout cela sera dit on va être en possession de tous les ingrédients nécessaires pour passer aux calculs.

#### 2.1. Le Lagrangien du Modèle Standard

Le Modèle Standard (MS) dans sa forme décrivant l'interaction faible et électromagnétique a été proposé dans les années '60 par Glashow (1961), Weinberg (1967) et Salam (1968). Il a pu accomoder d'une façon naturelle la théorie décrivant les interactions fortes, la Chromodynamique Quantique. Le MS tel qu'on l'utilise aujourd'hui est une théorie des champs invariante de jauge qui décrit d'une manière unitaire les interactions faible et électromagnétique et qui inclut avec succès les interactions fortes entre les constituants fondamentaux de la matière, les leptons et les quarks. Il est construit comme une théorie de jauge axée sur le groupe non abélien  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Le groupe  $SU(3)_c$  est le groupe responsable de l'interaction forte, pendant que le groupe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , avec la symétrie brisée spontanément par le

mécanisme de Higgs, est responsable de la description des interactions faible et électromagnétique et aussi de leur unification. Même si le groupe qui se trouve à la base du MS contient une partie qui s'occupe des interactions fortes, ces interactions ne sont pas vraiment unifiées avec les deux autres décrites dans ce modèle. On va voir dans les pages suivantes qu'on peut séparer le Lagrangien total en deux parties: la première décrit l'interaction électro-faible et la deuxième l'interaction forte. En fait on construit la première partie et puis on introduit la deuxième partie en imposant l'invariance par rapport au groupe  $SU(3)_c$ .

Dans ce qui suit on va construire une théorie de jauge générale avec la symétrie spontanément brisée, contenant un nombre quelconque  $2N$  de particules qui sentent l'interaction faible parmi lesquelles  $n$  sentent aussi l'interaction forte. En tenant compte des principes généraux pour la construction d'une telle théorie on sépare le Lagrangien en 6 parties.

### 2.1.1. Champs fermioniques et leurs interactions avec les champs de jauge

Supposons qu'on a  $2N$  champs fermioniques de spin  $1/2$ . Puisqu'on sait que les constituants fondamentaux de la matière sont des particules de spin  $1/2$ , après la quantification de la théorie, on peut mettre en correspondance les quantas des champs fermioniques et ces particules. On décrit les interactions entre ces champs (et après la quantification entre les particules) en donnant leurs propriétés de transformation par rapport au groupe de jauge.

Les données expérimentales montrent que les interactions faibles font une distinction entre gauche et droite; pour être plus exact, elles "préfèrent" les particules gauches, i.e. avec la projection négative du spin sur la direction de mouvement. Pour satisfaire ces observations on doit supposer que la gauche et la droite n'obéissent pas aux mêmes transformations de symétrie.

On base la construction du modèle sur la supposition que la Nature respecte la symétrie du groupe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , i.e. les lois qui décrivent

les champs (particules) dans un état gauche possèdent une symétrie de type  $SU(2)$  et tous les états possèdent une symétrie  $U(1)_Y$  (on appelle  $Y$  hypercharge faible). On associe les parties gauches de nos champs fermioniques à la représentation fondamentale du groupe  $SU(2)_L$  et les parties droites à la représentation identité du même groupe. Pour que les opérateurs de la représentation fondamentale de  $SU(2)$  puissent agir sur les champs gauches on doit les grouper dans des doublets qu'on va appeler *générations*. Les champs droits restent des singulets. Donc, les champs gauches sont des doublets  $SU(2)_L$ , pendant que les champs droits sont des singulets.

$$\begin{pmatrix} f_{iL}^1 \\ f_{iL}^2 \end{pmatrix}, \quad f_{iR}^1, \quad f_{iR}^2 \quad (2.1)$$

Puisqu'on a considéré  $2N$  champs, on a  $N$  tels doublets et  $2N$  singulets.

On appelle projecteurs de chiralité les projecteurs qui extraient la partie gauche, respectivement droite d'un champ. Ils ont la forme:

$$P_L = \gamma_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad P_R = \gamma_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (2.2)$$

Puisqu'on a considéré des champs fermioniques de spin  $1/2$  on a besoin du Lagrangien de Dirac pour les décrire. Ce Lagrangien pour un seul champ est:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \text{ et } \psi = \psi_L + \psi_R \quad (2.3)$$

Il est clair qu'un terme de masse ne peut pas être invariant par rapport à  $SU(2)_L$ . Donc pour l'instant toutes les particules de ce modèle ont une masse nulle.

Pour rendre un Lagrangien de type Dirac sans masse invariant par rapport aux transformations du groupe choisi on utilise ce qu'on appelle "la substitution minimale"; c'est à dire, on remplace l'opérateur de dérivation par un autre opérateur judicieusement choisi nommé *dérivée covariante*. Dans le cas discuté ici on a deux telles dérivées à cause du fait que les composantes gauche

et droite des champs sont invariantes sous des transformations différentes.

$$\begin{aligned} D_\mu^L &= \partial_\mu - ig \frac{\tau_a}{2} A_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu^0 & a \in \{1, 2, 3\} \\ D_\mu^R &= \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu^0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $\tau_a$  sont les matrices de Pauli et en même temps les générateurs du groupe  $SU(2)$ . Les champs  $A$  et  $B$  sont appelés *champs de jauge*.

Le Lagrangien obtenu en remplaçant  $\partial_\mu$  par  $D_\mu^L$  ou  $D_\mu^R$  selon le cas dans (2.3) décrit un fermion en interaction avec certains champs et il est invariant sous  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Donc, pour les  $2N$  champs de la théorie, le Lagrangien total est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \sum_{i=1}^{2N} \bar{f}_i (i\cancel{\partial} - q_i \cancel{A}) f_i + \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{i \neq j} \bar{f}_i W^\pm \gamma_L f_j + \\ &+ \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_{i=1}^{2N} \bar{f}_i Z (I_{3i} \gamma_L - Q_i \sin^2 \theta_W) f_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

où on a défini les champs suivants:

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (2.6.a)$$

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1 \mp i A_2) \quad (2.6.b)$$

avec:

$$\begin{aligned} \cos \theta_W &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ \sin \theta_W &= \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

On a aussi supposé la validité de la relation de Gell-Mann et Nishijima qui donne un lien entre la charge, l'isospin et l'hypercharge:

$$q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.8)$$

On constate que le champ  $A$  couple avec les fermions exactement de la même manière que le champ électromagnétique.

### 2.1.2. Champs de jauge et leurs interactions mutuelles

Puisque les champs de jauge sont des quantités vectorielles, ils doivent décrire des bosons. On peut démontrer que le Lagrangien le plus général pour des tels champs est de la forme:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

la forme explicite de  $F_{\mu\nu}^a$  étant dépendante du type de groupe de jauge (abélien ou non abélien). Le groupe  $U(1)_Y$  est un groupe abélien; le Lagrangien associé est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu^0 - \partial_\nu B_\mu^0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le Lagrangien associé aux champs de jauge du groupe  $SU(2)_L$  est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^a A_a^{\mu\nu} \\ A_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 + g \epsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le fait que le groupe  $SU(2)_L$  soit non abélien produit des interactions entre les bosons de jauge, ce qui n'existe pas dans les théories abéliennes (e.g. QED). Pour extraire de ce Lagrangien la forme exacte des interactions entre les champs physiques, il faut qu'on fasse la transformation inverse de (2.6). Le résultat de cette manipulation est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= -\partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W^{-\nu} + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} - \frac{1}{2} \partial_\mu Z_\nu \partial^\mu Z^\nu + M_Z^2 Z_\mu Z^\mu - \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + g \cos \theta_W [\partial^\nu Z^\mu (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) + \\ &\quad + Z^\nu (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + Z^\mu (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)] + \\ &\quad + g \sin \theta_W [\partial^\nu A^\mu (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) + \\ &\quad + A^\nu (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + A^\mu (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)] - \\ &\quad - \frac{1}{2} g^2 W_\mu^+ W^{-\mu} W_\nu^+ W^{-\nu} + \frac{1}{2} g^2 W_\mu^+ W_\mu^- W^{+\mu} W^{-\nu} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g^2 \cos^2 \theta_W [Z^\mu W_\mu^+ Z^\nu W_\nu^- - Z^\mu Z_\mu W_\nu^+ W_\nu^-] + \\
& + g^2 \sin^2 \theta_W [A^\mu W_\mu^+ A^\nu W_\nu^- - A^\mu A_\mu W_\nu^+ W_\nu^-] + \\
& + g^2 \sin \theta_W \cos \theta_W [A^\mu Z^\nu (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-) - 2 A_\mu Z^\mu W_\nu^+ W_\nu^-]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

D'ici on peut extraire toutes les interactions possibles entre les bosons vectoriels physiques.

### 2.1.3. Champ de Higgs et la masse des champs de jauge

Le fait que les fermions jusqu'à maintenant ne possèdent pas de masse représente une grande différence par rapport à la réalité. De plus, le fait que les bosons de jauge n'aient pas de masse nous empêche d'utiliser ce modèle pour décrire les interactions faibles car des bosons sans masse conduisent à une interaction avec un rayon d'action infini et les expériences montrent un rayon d'action très court pour la force faible. Pour donner une masse aux particules qui sont présentes dans la théorie on utilise le mécanisme de Higgs pour briser la symétrie  $SU(2)$  d'une manière spontanée: on introduit un champ qui a une valeur non nulle dans l'état fondamental. La formulation minimale demande l'existence d'un seul doublet scalaire complexe  $SU(2)_L$  avec hypercharge  $Y = 1$ . Ce doublet a la forme:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \chi \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

où le champ  $\chi$  a une moyenne non nulle dans l'état fondamental. On peut lui donner une forme plus explicite en le décomposant en sa valeur moyenne dans l'état fondamental (on va la noter  $v$ ) et une fonction complexe quelconque. Donc, le champ de Higgs et sa moyenne sur le vide ont les expressions:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H + i\phi^0 + v) \end{pmatrix} \quad \langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Le Lagrangien associé à ce champ doit être un invariant  $SU(2)_L$ . Pour cela on utilise de nouveau la dérivée covariante.

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu^L \phi)^\dagger D_L^\mu \phi - \mathcal{V}(\phi) \tag{2.15}$$

où  $\mathcal{V}$  représente un potentiel qui va être choisi de telle manière que la théorie reproduise le spectre des masses observé pour les bosons.

$$\mathcal{V}(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (2.16)$$

Pour ce choix on a pour  $\langle \phi \rangle_0$ :

$$\langle \phi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Si on développe le Lagrangien qu'on vient d'écrire, on constate qu'il produit des termes de masse pour les bosons  $W^\pm$  et  $Z$  en gardant le champ  $A$  sans masse. On appelle donc:

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{1}{2} g v \\ M_Z &= \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mais il introduit une interaction étrange, qui ne doit pas exister si on croit à la conservation du moment cinétique. Par cette interaction un des champs  $\phi^+$  ou  $\phi^0$  (qui ont un spin 0) peut se transformer spontanément en des champs de jauge (qui ont un spin 1), la liaison scalaire-vecteur étant faite par une dérivée. Ce problème a une racine plus profonde: les théories de jauge avec brisure spontanée de symétrie ne peuvent être quantifiées que si on fixe la jauge. En fixant la jauge, la symétrie  $SU(2)_L$  n'existe plus, mais elle n'est pas brisée. Elle existe sous une forme cachée dans l'équivalence de toutes les jauge possibles à choisir.

#### 2.1.4. Fixage de jauge

Il y a plusieurs classes de jauge qui vont résoudre les problèmes soulignés auparavant. On va choisir d'utiliser le fixage de jauge linéaire de type 't Hooft; cette jauge s'appelle *jauge R<sub>ξ</sub> linéaire* [16]. Le terme qu'on ajoute au Lagrangien est:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} (F_\gamma^2 + F_Z^2 + 2F_+F_-) \quad (2.19)$$

où les fonctions  $F$  sont:

$$\begin{aligned} F_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{\xi^W}} (\partial_\mu W^\pm \mp i \frac{g}{2} \xi^W \langle \phi \rangle_0 \phi'^\pm) \\ F_Z &= \frac{1}{\sqrt{\xi^Z}} (\partial_\mu Z^\mu - \frac{1}{2} \xi^Z \sqrt{g^2 + g'^2} \langle \phi \rangle_0 \phi'^0) \\ F_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\xi^\gamma}} \partial_\mu A^\mu \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec les paramètres  $\xi$  arbitraires. Ces paramètres vont apparaître dans les calculs et on peut démontrer l'invariance de jauge d'une quantité physique en démontrant son indépendance des  $\xi$ .

### 2.1.5. Terme de Faddeev et Popov

Pour compléter le Lagrangien on doit ajouter le terme de Faddeev et Popov. Il joue le rôle de contre-balancer des effets indésirables introduits par un fixage de jauge aussi général que celui utilisé. Si on fait tendre les paramètres  $\xi$  vers l'infini et on redéfinit le champ de Higgs par une transformation de jauge, le terme de Faddeev et Popov n'existe plus.

$$\mathcal{L}_{FP} = (\omega^\dagger)_\alpha \frac{\delta F^\alpha}{\delta \Omega^\beta(x)} \omega_\beta \quad (2.21)$$

où les nouveaux champs  $\omega$  sont des variables de Grassmann scalaires (donc avec une "mauvaise" relation spin-statistique) et  $\frac{\delta F^a}{\delta \Omega^b(x)}$  représente le changement dans les opérateurs de fixage de jauge induit par une transformation de jauge de fonction caractéristique:

$$\Omega(x)_\alpha = (\Omega(x)_a, \Omega(x)_Y) \quad (2.22)$$

On va appeler les champs  $\omega$  *fantômes* à cause du fait qu'ils ne peuvent exister que dans des boucles fermées.

Sous une telle transformation, les champs  $A_a$  et  $B_0$  varient comme suit:

$$\begin{aligned} B_\mu^0 \longrightarrow B'^0_\mu &= B_\mu^0 + Y \partial_\mu \Omega(x)_Y \\ A_\mu^a \longrightarrow A'^a_\mu &= A_\mu^a + \partial_\mu \Omega^a + g \epsilon^{abc} A_{\mu b} \Omega_c \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le doublet de Higgs devient:

$$\phi \rightarrow \phi' = (1 - \frac{i}{2}\tau_a\Omega(x)^a)\phi \quad (2.24)$$

En remplaçant toutes ces expressions dans (2.21) et en utilisant les définitions (2.6) on obtient pour le Lagrangien de Faddeev et Popov:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} = & \partial_\mu \omega^{+\star} \partial^\mu \omega^+ + \partial_\mu \omega^{-\star} \partial^\mu \omega^- + \partial_\mu \omega^{Z\star} \partial^\mu \omega^Z + \partial_\mu \omega^{\gamma\star} \partial^\mu \omega^\gamma - \\ & - \xi_W M_W^2 (\omega^{+\star} \omega^+ + \omega^{-\star} \omega^-) - \xi_Z M_Z^2 \omega^{Z\star} \omega^Z + \\ & + ig(Z^\mu \cos \theta_W + A^\mu \sin \theta_W)((\partial_\mu \omega^{-\star}) \omega^+ - (\partial_\mu \omega^{+\star}) \omega^-) + \\ & + ig((\partial_\mu \omega^{Z\star}) \cos \theta_W + (\partial_\mu \omega^{\gamma\star}) \sin \theta_W)(\omega^- W^+ - \omega^+ W^-) + \\ & + ig(\omega^Z \cos \theta_W + \omega^\gamma \sin \theta_W)(W^- \partial^\mu \omega^{+\star} - W_\mu^+ \partial^\mu \omega^{-\star}) - \\ & - \frac{1}{2} g \xi M_W H (\omega^{+\star} \omega^- + \omega^{-\star} \omega^+ + \frac{1}{\cos^2 \theta_W} \omega^{Z\star} \omega^Z) + \\ & + \frac{i}{2} g \xi M_W \phi^0 (\omega^{+\star} \omega^- - \omega^{-\star} \omega^+) - \\ & - g \sin \theta_W \xi M_W (\phi^+ \omega^{-\star} + \phi^- \omega^{+\star}) \omega^\gamma - \\ & - \frac{1}{2} g \xi M_W \frac{\cos 2\theta_W}{\cos \theta_W} (\phi^+ \omega^{-\star} + \phi^- \omega^{+\star}) \omega^Z + \\ & + \frac{1}{2} g \xi M_Z \omega^{Z\star} (\phi^+ \omega^- + \phi^- \omega^+) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où on a définis les champs:

$$\begin{pmatrix} \omega^+ \\ \omega^- \\ \omega^z \\ \omega^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ 0 & 0 & -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \\ \omega^0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Le modèle construit jusqu'à maintenant ne peut pas donner des résultats en accord avec l'expérience à cause de l'absence des masses pour les fermions. Pour résoudre ce problème on introduit dans le Lagrangien encore un terme -le dernier- qui va donner des masses aux fermions par une interaction avec le champ de Higgs. Ce moyen de générer les masses d'une manière invariante de

jauge va avoir des répercussions sur les couplages fermion-Higgs qui vont être proportionnels à la masse du fermion considéré.

### 2.1.6. Couplages de Yukawa, le mélange et les masses des champs fermioniques

Le plus général Lagrangien d'interaction entre les fermions groupés comme doublets et le champ de Higgs est:

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{i,j} \left[ h_{ij} \bar{L}^i \phi R_1^j + \tilde{h}_{ij} \bar{L}^i \tilde{\phi} R_2^j \right. \\ \left. h_{ij}^\dagger \bar{R}_1^i \phi^\dagger L^j + \tilde{h}_{ij}^\dagger \bar{R}_2^i \tilde{\phi}^\dagger L^j \right] \quad (2.27)$$

où

$$L^i = \gamma_L \begin{pmatrix} f_1^i \\ f_2^i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{1,2}^i = \gamma_R f_{1,2}^i \\ \tilde{\phi} = i \tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \chi \\ -\phi^+ \end{pmatrix}^* \quad (2.28)$$

On appelle les quantités  $h_{ij}$  et  $\tilde{h}_{ij}$  couplages de Yukawa pour les fermions de type 1 ( $I_3 = \frac{1}{2}$ ) et 2 ( $I_3 = -\frac{1}{2}$ ) respectivement. Ces sont des matrices arbitraires  $N \times N$  où  $N$  représente le nombre de doublets du groupe  $SU(2)_L$  présents dans la théorie, doublets indexés par l'indice  $i$ . Le doublet  $\tilde{\phi}$  est obtenu à partir du doublet  $\phi$  par l'opération de conjugaison de charge. Le développement des termes conduit à la forme suivante pour la partie du Lagrangien qui produit des masses pour les fermions:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i,j} \left[ \bar{f}_{1L}^i M_{ij}^1 f_{1R}^j + \bar{f}_{2L}^i M_{ij}^2 f_{2R}^j + \right. \\ \left. + \bar{f}_{1R}^i M_{ij}^{1\dagger} f_{1L}^j + \bar{f}_{2R}^i M_{ij}^{2\dagger} f_{2L}^j \right] \quad (2.29)$$

où on a introduit la notation:

$$M_{ij}^1 = \tilde{h}_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad M_{ij}^2 = h_{ij} \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (2.30)$$

Les matrices introduites ont la dimension  $N$  et portent le nom de *matrices de masse*. Puisque pendant leur construction on n'a pas supposé que les matrices de masse sont diagonales, on doit les diagonaliser pour obtenir les états physiques pour les champs qui composent les doublets  $SU(2)_L$ . On peut toujours faire cela par une transformation biunitaire:

$$U_L^1 M^1 U_R^{1\dagger} = M_{diag}^1 \quad \text{et} \quad U_L^2 M^2 U_R^{2\dagger} = M_{diag}^2 \quad (2.31)$$

Cette procédure transforme les champs  $f$  qui forment la base d'interaction, en d'autres champs qui sont les états propres de masse et, en même temps, les champs physiques. En gardant la même notation pour les matrices diagonales que pour celles non diagonales, le Lagrangien s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = - \sum_{i,j} & \left[ \bar{\psi}_{1L}^i M_{ij}^1 \psi_{1R}^j + \bar{\psi}_{2L}^i M_{ij}^2 \psi_{2R}^j + \right. \\ & \left. + \bar{\psi}_{1R}^i M_{ij}^{1\dagger} \psi_{1L}^j + \bar{\psi}_{2R}^i M_{ij}^{2\dagger} \psi_{2L}^j \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec

$$\psi_{L,R}^{1,2} = U_{L,R}^{1,2} f_{L,R}^{1,2} \quad (2.33)$$

Les valeurs propres des matrices de masse sont des quantités arbitraires, puisque les couplages de Yukawa ne sont pas fixés par le modèle. Cette diagonalisation introduit des mélanges entre les fermions dans le secteur des courants chargés (i.e. les termes du Lagrangien qui décrivent l'interaction entre les fermions et les bosons  $W^\pm$ ). La forme générique de ces termes est:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{f}_L^i \gamma^\mu \gamma_L f^j W^\pm = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{f}_L^i \gamma^\mu f_L^j W^\pm = \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_L^i \gamma^\mu \psi_L^j W^\pm U_L^1 U_L^{2\dagger} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Puisque les deux matrices  $U$  sont unitaires, leur produit est une matrice unitaire.

$$V_{KM} = U_L^1 U_L^{2\dagger} \quad (2.35)$$

On appelle cet objet *matrice de mélange*. Notons que les courants neutres (i.e. termes d'interaction entre les photons ou bosons  $Z$  et les fermions) restent inchangés après la diagonalisation des matrices de masse. Cela est dû au fait qu'ils sont du type  $f_L^i \gamma_\mu f_L^i$ , donc sont invariants par rapport à une redéfinition des champs de type (2.33). Aussi, des termes de masse diagonaux permettent une redéfinition des champs fermioniques par une transformation de phase, ce qui équivaut à la liberté de multiplier n'importe quelle ligne ou colonne de la matrice de mélange par une phase arbitraire.

Le reste du Lagrangien (2.27) produit une grande variété de couplages Higgs-fermion. Le secteur des courants chargés qui se développe d'ici (i.e. les termes qui contiennent des champs  $\phi^\pm$  et des champs fermioniques) va contenir aussi des éléments de la matrice de mélange de la même façon que pour les champs  $W$ .

### 2.1.7. Inclusion de l'interaction forte

Au début on a supposé que parmi les  $2N$  champs présents dans la théorie il y en a  $n$  qui sentent l'interaction forte. Après la quantification, on associe leurs quantas à des particules qui sentent l'interaction forte, i.e. les quarks.

On suppose que cette interaction est dictée par la symétrie du groupe  $SU(3)$ . Plusieurs essais ont été faits en ce sens et la conclusion qui a été tirée est la nécessité d'ajouter un autre degré de liberté dans la description des particules. Ce nouveau degré de liberté a été appelé *couleur*. La couleur est intimement liée aux propriétés de transformation des champs sous l'action des opérateurs de la représentation fondamentale du groupe  $SU(3)$ . Cette liaison est la suivante: on suppose que les champs qui sentent l'interaction forte viennent en trois couleurs différentes et ce triplet se transforme suivant la représentation fondamentale du groupe considéré.

$$f^i = \begin{pmatrix} f_r^i \\ f_y^i \\ f_g^i \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Le fait qu'on ne peut pas observer une particule colorée libre se traduit dans ce langage par la supposition qu'on puisse observer seulement les états singulets par rapport à  $SU(3)$  (i.e. les particules qui ont la couleur "blanche").

Pour rendre le Lagrangien construit jusqu'à maintenant invariant sous les transformations du groupe  $SU(3)_c$ , on introduit une nouvelle dérivée covariante qui agit seulement sur les  $n$  champs colorés.

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \quad (2.37)$$

où  $\lambda_a$  sont les générateurs du groupe  $SU(3)$  et les champs  $G_\mu^a$  sont huit champs de jauge qu'on va appeler *gluons*. Le Lagrangien est:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left[ \bar{\psi}_i (i\cancel{\partial} - m_i) \psi_i - g_s \bar{\psi}_i \frac{\lambda_a}{2} G^a \psi_i \right] \quad (2.38)$$

Puisque le groupe qu'on utilise est non abélien, les gluons peuvent interagir aussi entre eux (de la même façon que les bosons  $W$  et  $Z$ ). Le Lagrangien qu'on ajoute à ce qu'on a déjà écrit à cause des champs  $G_\mu^a$  est:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad a = \overline{1, 8} \quad (2.39)$$

avec

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.40)$$

Les interactions entre les gluons proviennent du dernier terme du tenseur  $G_{\mu\nu}^a$ .

On doit ajouter à ce qu'on a construit jusqu'à maintenant, un terme pour le fixage de jauge et, par conséquent, le terme de Faddeev et Popov correspondant. De nouveau, on fixe la jauge d'une manière générale; cela introduit un nouveau paramètre arbitraire  $\xi_s$ , par analogie avec  $\xi_W$ ,  $\xi_Z$  et  $\xi_\gamma$ .

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\xi_s} (\partial^\mu G_\mu^a)^2 \quad (2.41)$$

Sous une transformation  $SU(3)$  caractérisée par la fonction

$$\Omega(x)_a = (\Omega(x)_1, \dots, \Omega(x)_8) \quad (2.42)$$

les gluons se transforment comme suit:

$$G_\mu^a \longrightarrow G'_\mu^a = G_\mu^a - \partial_\mu \Omega(x)_a - g_s f_{bc}^a \Omega(x)_b G_\mu^c \quad (2.43)$$

En conséquence, à l'aide de l'équation (2.21), on construit le terme de Faddeev-Popov:

$$\mathcal{L}_{FP} = \partial_\mu \eta_a^\star \left( \partial^\mu \eta^a + g_s f_{bc}^a \eta_b G_\mu^c \right) \quad (2.44)$$

où on a noté les particules-fantôme par  $\eta$  pour les distinguer des particules-fantôme électro-faibles symbolisées par  $\omega$

Le fait que les gluons n'aient pas de masse peut conduire à la conclusion que le modèle n'est pas bon pour les interactions fortes. Cette conclusion n'est pas toujours vraie. Pour un nombre de champs fermioniques qui sentent l'interaction forte plus petit que huit la théorie présente ce qu'on appelle *liberté asymptotique*. Cela veut dire que la valeur de la constante de couplage  $g_s$  décroît avec la croissance de l'énergie. Donc, dans le cas de QCD, le rayon d'action court est dû au propriétés de la constante de couplage, par contraste avec les interactions faibles où le rayon d'action court est dû à la grande masse des bosons d'échange.

En particularisant ce qu'on a dit pour les leptons et les quarks connus à ce moment on obtient le MS. Pour être plus précis:  $2N = 12$  et  $n = 6$ . Il faut quand même souligner l'absence du mélange dans le secteur leptonique du modèle. Cela est dû au fait qu'on suppose (en suivant les données expérimentales) une masse nulle pour les neutrinos. Des effets non triviaux apparaissent si on suppose une masse non nulle pour les neutrinos, mais cela ne fait pas partie du but de ce travail.

### 2.1.8. Quantification du modèle

Par la procédure de quantification on associe à chacun des champs rencontrés dans le Lagrangien une particule. Il existe plusieurs procédures qui conduisent au même résultat. Dans le cadre des théories de jauge la plus

économique est la méthode des intégrales de chemin. Cette méthode nous permet de construire la fonction de Green associée à n'importe quel processus de n'importe quel ordre dans la série perturbative. Du premier ordre on extrait par inspection les règles de Feynman. La quantité de base dans cette procédure s'appelle la *fonctionnelle génératrice*; les fonctions de Green s'obtiennent par l'opération de dérivation fonctionnelle. La construction de cette méthode ne fait pas partie du but de ce travail, mais on va souligner le principe de calcul et surtout les résultats qui sont indispensables pour les calculs.

On sépare le Lagrangien total en deux parties: la partie libre et la partie d'interaction.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{libre} + \mathcal{L}_{int} \quad (2.45)$$

À l'aide du Lagrangien libre on construit la fonctionnelle génératrice pour les champs libres qui va donner les propagateurs des particules de la théorie. Son expression est:

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{libre}[\phi] + S[J, \phi] \right] \right\} \quad (2.46)$$

où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation,  $[\phi]$  symbolise tous les champs de la théorie,  $\mathcal{D}$  symbolise le fait qu'on intègre sur toutes les configurations possibles de chaque champ et  $S[J, \phi]$  représente un terme de source <sup>†</sup>.

La fonction de Green associée à un processus avec  $n$  particules externes est:

$$\langle 0 | T([\phi](x_1) \dots [\phi](x_n)) | 0 \rangle = (-i)^n \left. \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J_\alpha(x_1) \dots \delta J_\alpha(x_n)} \right|_{J=0} \quad (2.47)$$

où l'indice  $\alpha$  couvre le spectre des particules dans le processus. En fait, cette fonction décrit la propagation de  $n$  particules qui n'interagissent pas. Le propa-

---

<sup>†</sup> Ce terme est construit de manière à ce que les champs  $\phi$  aient les sources  $J$ . Si la théorie contient un seul champ fermionique  $\psi$ , ce terme est  $\bar{\psi}J + \bar{J}\psi$ , les fonctions  $J$  étant des nombres de Grassmann.

gateur libre d'une particule est donné par:

$$\langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle = (-i)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J_\alpha(x_1) \delta J_\alpha(x_2)} \quad (2.48)$$

L'inclusion du Lagrangien d'interaction dans le formalisme nous permet de calculer les fonctions de Green pour de vrais processus. Maintenant on doit souligner le rôle des termes de Faddeev et Popov et de fixage de jauge dans le Lagrangien d'une théorie de jauge. Le fait qu'on intègre sur toutes les configurations possibles des champs de la théorie nous conduit à un résultat infini à cause du fait qu'on a une infinité des champs équivalents par une transformation de jauge. Les termes mentionnés conduisent à la résolution de ce problème, en éliminant les contributions des champs équivalents au moment de la normalisation de la fonctionnelle génératrice. La fonctionnelle génératrice de la théorie complète (i.e. avec le Lagrangien d'interaction inclus) est:

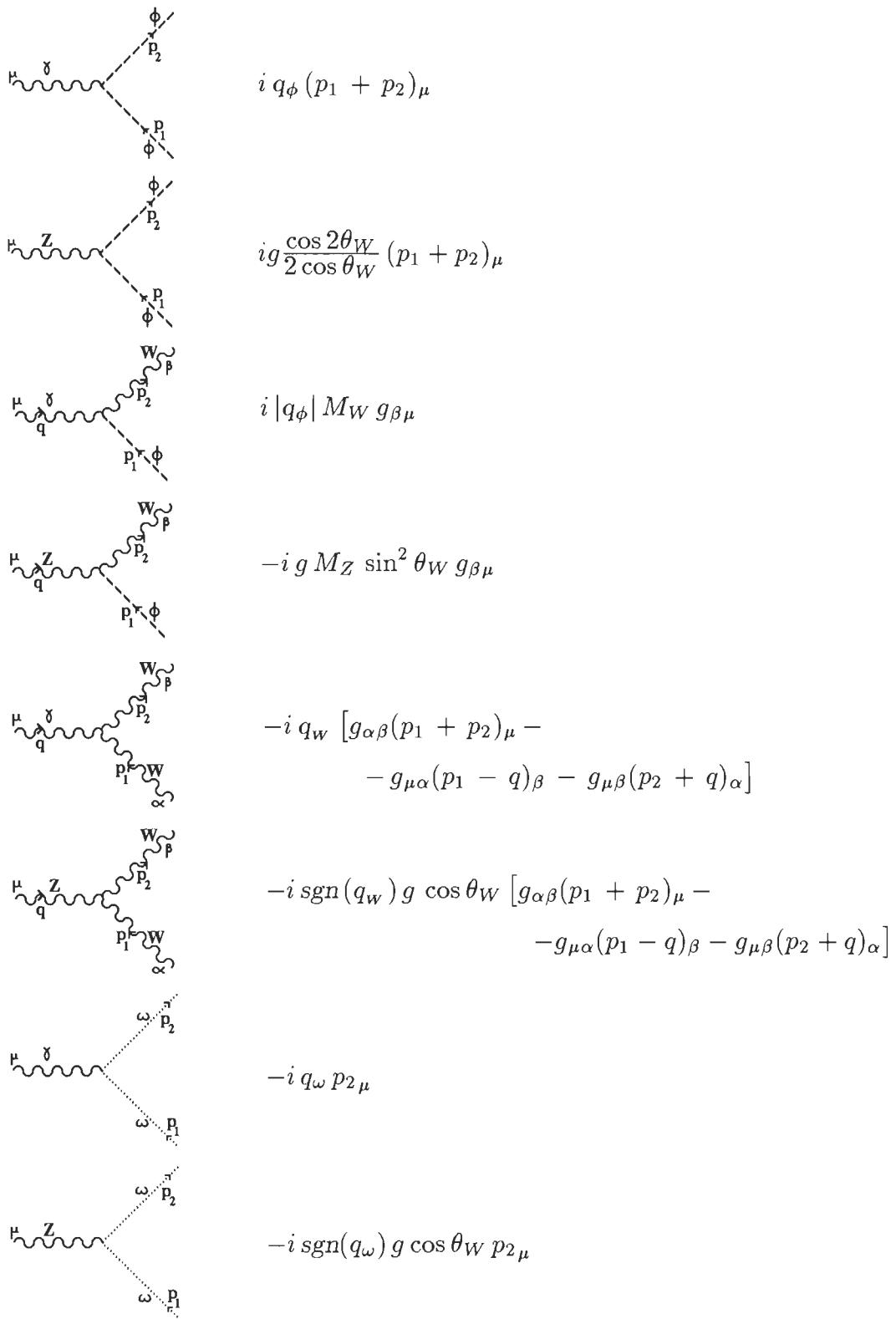
$$Z[J] = \mathcal{N} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{int} \left( -i \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \right\} Z_0[J] \quad (2.49)$$

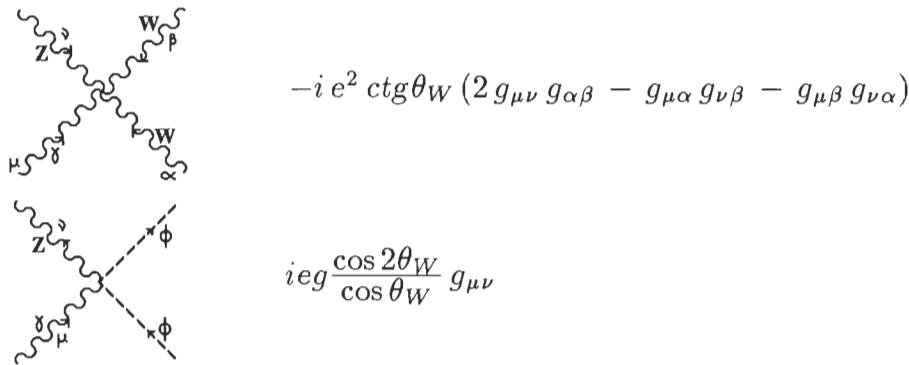
Les fonctions de Green sont données par la même expression (2.47) en changeant  $Z_0[J]$  par  $Z[J]$ . Parmi les processus obtenus de cette manière il y en a quelques-uns qui sont décrits par des diagrammes non connexes. Ces processus n'ont pas d'intérêt, parce qu'ils ne décrivent pas une interaction. Pour les éliminer dès le début, il suffit de remplacer  $Z[J]$  par  $\ln Z[J]$ .

En utilisant toutes ces relations on extrait les règles de Feynman qui seront utilisées dans le calcul proprement dit du moment anapolaire. Elles sont données dans le tableau suivant.

$w^\pm$		$\frac{i}{q^2 - M_W^2} \left( -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi M_W^2} \right)$
$z$		$\frac{i}{q^2 - M_Z^2} \left( -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi M_Z^2} \right)$
$\gamma$		$\frac{i}{q^2} \left( -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$
$g$		$\frac{i}{q^2} \left( -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \delta_{ab}$

$\phi^0 \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{i}{q^2 - \xi M_Z^2}$	$\phi^\pm \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{i}{q^2 - \xi M_W^2}$
$\omega^\pm \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{-i}{q^2 - \xi M_W^2}$	$H \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{i}{q^2 - M_H^2}$
$\omega^Z \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{-i}{q^2 - \xi M_W^2}$	$\omega^0 \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{-i}{q^2}$
$\eta \rightarrow q \bar{q}$	$\frac{i}{q^2}$		
	$i q_f \gamma_\mu$		$-i g_s \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2}$
	$\frac{i g}{2\sqrt{2}} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) V_{ij}$		
	$\frac{i g}{2 \cos \theta_W} \gamma_\mu [(I_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W) - I_3^f \gamma_5]$		
	$I_3^i \frac{i g}{\sqrt{2} M_W} [m_i(1 + \gamma_5) - m_j(1 - \gamma_5)] V_{ij}$		
	$I_3 \frac{g}{2 M_W} m_f \gamma_5$		
	$-\frac{i g}{2 M_W} m_f$		





**Tableau 2.1.** Règles de Feynman.

Ces sont les règles de Feynman qu'on va utiliser pour le calcul du moment anapolaire dans le chapitre suivant.

## 2.2. Renormalisation

En général, on pense que les théories réalistes utilisées de nos jours pour décrire la physique aux énergies accessibles sont des *théories effectives*; en d'autres mots elles sont, en fin de compte, des limites d'énergies basses d'une théorie plus générale qui peut s'avérer ne pas être une théorie des champs. Dans ces théories effectives, la théorie des perturbations rencontre des problèmes à partir du premier terme de correction. Pour être plus spécifique, les calculs montrent que ce terme, calculé naïvement, est infini. Mais ces infinités disparaissent quand on exprime tous les paramètres de la théorie en termes des quantités "renormalisées". Brièvement, c'est cela la définition de la renormalisation.

Dans ce qui suit on va donner un bref aperçu de la théorie générale de la renormalisation.

### 2.2.1. Degrés de divergence

Considérons une théorie très générale, contenant des interactions différentes qu'on va indexer par  $i$ . Chaque interaction peut être caractérisée par le

nombre  $n_{if}$  de champs de chaque type  $f$  et par le nombre  $d_i$  de dérivées qui agissent sur ces champs<sup>†</sup>.

On commence par calculer *le degré superficiel de divergence*  $D$  d'un diagramme quelconque, i.e. la différence entre le nombre de facteurs d'impulsion dans le numérateur et le dénominateur. En terme de ce degré superficiel de divergence le diagramme considéré va se comporter dans la limite des grandes impulsions comme:

$$\int_0^\infty k^{D-1} dk \quad (2.50)$$

Pour calculer  $D$  on doit savoir les caractéristiques suivantes du diagramme:

- $I_f \equiv$  nombre de lignes internes de type  $f$ ,
- $E_f \equiv$  nombre de lignes externes de type  $f$ ,
- $N_i \equiv$  nombre de vertex d'interaction de type  $i$ .

À partir du tableau 2.1 on peut tirer la conclusion que, en général, le comportement asymptotique des propagateurs est:

$$\Delta_f(k) \sim k^{-2+2s_f} \quad (2.51)$$

où  $s_f$  est le spin du champ  $f$ . Par conséquent, les propagateurs contribuent au degré superficiel de divergence avec:

$$D_b = \sum_f I_f (2s_f - 2) \quad (2.52)$$

Puisque la transformée de Fourier d'un opérateur de dérivation est une impulsion, les dérivées du Lagrangien contribuent au degré superficiel de divergence avec:

$$D_d = \sum_i N_i d_i \quad (2.53)$$

---

<sup>†</sup> On rappelle que pour "connaître" une théorie il suffit de pouvoir écrire son Lagrangien. Chaque terme d'interaction du Lagrangien peut être caractérisé par les nombres  $n_{if}$  et  $d_i$ .

Le dernier ingrédient du résultat désiré est le nombre d'impulsions indépendantes dans le diagramme. Chaque ligne interne peut être paramétrisée avec une impulsion différente. À chaque vertex on a une relation de conservation d'impulsion. Parmi ces relations il en existe une qui représente la conservation de l'impulsion totale, donc elle ne fixe aucune des impulsions internes. On a donc le nombre d'impulsions indépendantes:

$$l = \sum_f I_f - \left( \sum_i N_i - 1 \right) \quad (2.54)$$

On a alors le degré superficiel de divergence:

$$\begin{aligned} D &= D_b + D_d + dl = \\ &= \sum_f I_f [2s_f + (d - 2)] + \sum_i N_i(d_i - d) + d \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ici  $d$  est le nombre de dimensions de l'espace dans lequel on travaille.

À première vue, cette quantité dépend de la structure interne du diagramme. On arrive à une forme plus convenable en utilisant l'identité topologique:

$$2I_f + E_f = \sum_i N_i n_{if} \quad (2.56)$$

(Chaque ligne interne a un vertex à chaque extrémité, pendant qu'une ligne externe est liée juste à une extrémité.). On peut éliminer le nombre de ligne interne  $I_f$  dans l'expression de  $D$  et on obtient:

$$\begin{aligned} D &= d - \sum_f E_f [s_f + (\frac{d}{2} - 1)] - \sum_i N_i \Delta_i \quad \text{avec} \\ \Delta_i &= d - d_i - \sum_f n_{if} [s_f + (\frac{d}{2} - 1)] \end{aligned} \quad (2.57)$$

On constate par inspection que  $\Delta_i$  est une quantité qui caractérise l'interaction de type  $i$ . On appelle  $\Delta_i$  *index de divergence* de l'interaction  $i$ .

À partir des index de divergence des diverses interactions du Lagrangien on peut faire une classification utile des théories possibles:

**1)** Si  $\Delta_i \geq 0$  pour toutes les interactions présentes dans le Lagrangien, alors on a une limite supérieure du degré superficiel de divergence:

$$D \leq d - \sum_f E_f [s_f + (\frac{d}{2} - 1)] \quad (2.58)$$

En conséquence, seulement un nombre fini de combinaisons des lignes externes conduisent à des intégrales divergentes. En d'autres mots, juste un nombre fini d'amplitudes vont être superficiellement divergentes; bien que tous les termes de la série perturbative contiennent des divergences. Des théories avec cette qualité (nombre fini d'amplitudes divergentes) s'appellent *superficiellement renormalisables*.

**2)** Si dans la théorie il existe une interaction avec  $\Delta_i < 0$ , alors le degré de divergence croît avec la croissance du nombre de vertex avec l'interaction  $i$  dans le diagramme. La divergence de l'intégrale (2.50) devient de plus en plus sévère. À partir d'un ordre suffisamment grand de la théorie des perturbations, toutes les amplitudes sont divergentes. Ce genre de théorie s'appelle *non renormalisable*.

Les termes *superficiellement renormalisable* et *non renormalisable* s'appliquent aussi aux interactions. Pour celles-ci on a encore l'épithète *super-renormalisable* qui est valable pour les interactions avec  $\Delta_i > 0$ ; les interactions renormalisables étant celles avec  $\Delta_i = 0$ . L'existence de telles interactions dans une théorie assure un nombre fini de diagramme divergents.

On peut construire une autre correspondance entre l'index de divergence d'une interaction et la dimensionnalité de la constante de couplage associée.

On sait que l'action de la théorie doit être une quantité sans dimension. D'ici on peut savoir quelle est la dimension permise du Lagrangien:

$$S = \int \mathcal{L}([\phi]) d^d x \quad (2.59)$$

Puisqu'on travaille dans le système naturel ( $\hbar = c = 1$ ), l'unité de longueur est l'inverse de l'unité de masse. Par conséquent, la dimension canonique du Lagrangien est  $d$  (i.e. il a la dimension  $(masse)^d$ ). À partir d'ici et de la définition

de l'index de divergence on peut réécrire la classification des interactions en fonction des dimensions de la constante de couplage de chaque interaction:

- interaction super-renormalisable - Constante de couplage avec la dimension canonique positive
- interaction superficiellement renormalisable - Constante de couplage avec la dimension canonique nulle
- interaction non renormalisable - Constante de couplage avec la dimension canonique négative.

Cette variante de classification est plus facile à utiliser que celle en fonction de l'index de divergence.

### 2.2.2 Systématique de la renormalisation

Dans la littérature il existe plusieurs méthodes de renormalisation, dont l'équivalence est garantie par la renormalisabilité de la théorie. Ces méthodes ont toutes une structure commune dans le sens qu'on doit suivre les mêmes étapes pour arriver au résultat. La procédure est comme suit:

- <sub>1</sub> Régularisation
- <sub>2</sub> Renormalisation proprement dite.

Dans ce qui suit on va les traiter de plus près.

On appelle *Régularisation* la procédure par laquelle on rend explicite les divergences des intégrales. Les infinités seront après éliminées par la renormalisation proprement dite. Il existe plusieurs procédures de régularisation; les aspects techniques de chacune d'entre elles vont être présentés plus tard. Après avoir appliqué la régularisation à une amplitude quelconque, elle sera écrite sous la forme d'une somme d'une partie infinie et d'une partie finie. La partie infinie dépend d'un nombre de constantes infinies qui ne peuvent pas être déterminées par la théorie. On appelle ces constantes *constantes de renormalisation*. Dans les théories non renormalisables ces constantes sont en nombre infini. Pour les théories superficiellement renormalisables ces constantes sont en nombre fini et peuvent être absorbées dans un nombre fini de paramètres. Ce

processus d'absorption des constantes de renormalisation dans les paramètres de la théorie s'appelle *Renormalisation* (proprement dite). La preuve que, dans une théorie bien spécifique, la renormalisation est possible à tous les ordres de la théorie des perturbations est certainement non triviale et la preuve que le modèle construit dans le sous-chapitre précédent est renormalisable ne fait pas l'objet de ce travail. Cette affirmation a été démontré dans les années '70 par 't Hooft [21].

Regardons de plus près la définition et le traitement des constantes de renormalisation. Soit  $\mathcal{I}$  la combinaison des champs dans le Lagrangien d'interaction qui a pour constante de couplage  $g$  et soit  $\Lambda(q)$  une grandeur infinie générée au deuxième ordre dans la théorie des perturbations par une interaction similaire à  $\mathcal{I}$ .

On définit la quantité renormalisé  $\Lambda_R(q)$  comme:

$$\Lambda_R(q) = \Lambda(q) - \Lambda_0 \quad (2.60)$$

où  $\Lambda_0$  est la partie infinie de  $\Lambda$ . Elle a été séparée par une certaine procédure de régularisation et va être reliée à une constante de renormalisation. On peut la traiter de deux manières différentes, mais équivalentes.

**1)** Dans la première méthode on considère le Lagrangien écrit en fonction des paramètres non renormalisés. Le Lagrangien effectif associé à l'interaction  $\mathcal{I}$  au deuxième ordre dans la théorie des perturbations est:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_I^{eff} &= g_R \Gamma \mathcal{I} = g_0 \mathcal{I} + g_0 \Lambda(q) \mathcal{I} = \\ &= g_0 \mathcal{I} + g_0 (\Lambda_R(q) + \Lambda_0) \mathcal{I} = \\ &= g_R \mathcal{I} + g_0 \Lambda_R(q) \mathcal{I} \approx \\ &\approx g_R \mathcal{I} + g_R \Lambda_R(q) \mathcal{I} \end{aligned} \quad (2.61)$$

où  $g_0$  est la constante de couplage non renormalisée,  $g_R = g_0 + g_0 \Lambda_0$  est la constante de couplage renormalisée et  $g_0 \Lambda_R(q) \approx g_R \Lambda_R(q)$  jusqu'au troisième ordre dans la théorie des perturbations. On définit la constante de renormalisation  $Z_1$  par:

$$\Lambda_0 = \frac{1}{Z_1} - 1 \quad (2.62)$$

et on a

$$g_R = \frac{g_0}{Z_1} \quad (2.63)$$

**2)** La deuxième méthode considère la constante de couplage  $g$  comme étant la constante de couplage renormalisée, mais on ajoute au Lagrangien un terme infini qui s'appelle *contre-terme*. Le Lagrangien d'interaction avant d'ajouter le contre-terme est:

$$\mathcal{L}_I = -g_R \mathcal{I} \quad (2.64)$$

Le terme infini  $\Lambda_0$  est réduit en ajoutant le contre-terme:

$$\mathcal{L}_{ct} = -g_R (Z_1 - 1) \mathcal{I} \quad (2.65)$$

Maintenant, en écrivant le Lagrangien effectif au deuxième ordre dans la théorie des perturbations, on a:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_I^{eff} &= g_R \Gamma \mathcal{I} = g_R \mathcal{I} - g_R Z_1 \Lambda_0 \mathcal{I} + g_R \Lambda(q) \mathcal{I} = \\ &\approx g_R \mathcal{I} + g_R \Lambda_R(q) \mathcal{I} \end{aligned} \quad (2.66)$$

puisque  $Z_1 \Lambda_0 = \Lambda_0$  jusqu'au troisième ordre. D'ici on voit que les deux variantes sont équivalentes puisqu'on a obtenu le même résultat.

On observe qu'on a pu absorber l'infinité  $\Lambda_0$  dans  $g_0$  ou, de façon équivalente, on a pu introduire un contre-terme sans changer la théorie car il existe dans le Lagrangien un terme avec une combinaison de champs similaire à celle qui génère  $\Lambda$  au deuxième ordre. Cela est la caractéristique des théories renormalisables. Dans une théorie non renormalisable chaque ordre de perturbation amène des infinités avec des combinaisons de champs qui n'existent pas dans le Lagrangien de l'ordre précédent, autrement dit, qui ne peuvent pas être absorbées.

On conclut ce chapitre avec l'opinion de Stephen Hawking en ce qui concerne la théorie de la renormalisation:

”... rather dubious mathematically, but seems to work in practice.”

## CHAPITRE III

### CONVENTIONS ET TECHNIQUES DE CALCUL

Pour commencer le calcul du moment anapolaire dans le cadre du modèle présenté dans le chapitre précédent on a besoin de construire une méthode non ambiguë pour l'extraction de cette quantité. On doit aussi établir la paramétrisation des intégrales et la méthode de régularisation qu'on utilisera. On va décrire les trois méthodes de régularisation les plus utilisées et on va se baser sur la régularisation dimensionnelle. Dans le cadre de celle-ci on va rencontrer des intégrales qui peuvent être calculées d'une manière générale. Ces sont les points qu'on va approcher dans ce chapitre.

#### 3.1. Projecteur du moment anapolaire

La méthode des projecteurs part de la supposition que les différents moments sont des quantités orthogonalisables par rapport à un produit scalaire judicieusement choisi. Par conséquent, leurs facteurs de forme peuvent être extraits sans ambiguïté en projetant le vecteur courant sur les vecteurs orthogonaux constitués par les différents moments.

La construction du projecteur sur le moment anapolaire (et implicitement la construction du produit scalaire par rapport auquel les moments sont orthogonaux) peut être faite de deux manières différentes:

- <sub>1</sub> on utilise les propriétés de symétrie de cet opérateur vis-à-vis des transformations  $C$  (conjugaison de charge),  $P$  (parité),  $T$  (renversement du temps) aussi que leurs relations avec les propriétés des autres moments.

•<sub>2</sub> par calcul direct.

Pour l'instant on va choisir la première variante de construction. Les propriétés de symétrie des différents moments sont groupées dans le tableau qui suit:

MOMENT \ SYMÉTRIE	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>T</i>	<i>CP</i>	<i>CPT</i>
<b>ce</b>	+	+	+	+	+
<b>a</b>	-	-	+	+	+
<b>dm</b>	+	+	+	+	+
<b>de</b>	+	-	-	-	+
<b>ca</b>	-	-	+	+	+

**Tableau 3.1.** Propriétés de symétrie des différents moments

La première colonne de ce tableau contient les opérateurs nommés dans la dernière du tableau 1.1. Pour un tel moment, un signe "+" sous une opération de symétrie signifie que cette symétrie est conservée, un signe "-" signifie qu'elle est brisée (i.e. l'opérateur n'est pas un invariant de cette symétrie).

Considérons la quantité suivante:

$$P = \text{Tr} \left[ M^\mu (\not{p}_2 - m_i) [f(q^2) \gamma_\mu + t(q^2) \gamma_\mu \gamma_5 + F_A(q^2) (q^2 \gamma_\mu - \not{q} q_\mu) \gamma_5 + i D_M(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu + i D_E(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5] (\not{p}_1 - m_i) \right] \quad (3.1)$$

où  $M^\mu$  a la structure d'un vecteur de matrices  $4 \times 4$ . Puisque  $P$  est une quantité scalaire qui est obtenue de deux quantités vectorielles, elle peut être conçue comme un produit scalaire<sup>†</sup>. On peut tenter de mettre  $P$  en liaison avec  $F_A$  par considérations de symétrie. La relation entre ces deux grandeurs s'obtient à une constante de normalisation près qui est, en fait, la norme du moment anapolaire par rapport au produit scalaire considéré. Evidemment, elle peut être déterminée seulement par calcul.

---

<sup>†</sup> Pour être plus rigoureux, cette opération est un pseudo-produit scalaire, puisqu'elle n'est pas toujours positivement définie.

En inspectant le tableau 3.1. on constate que le moment anapolaire et la charge axiale ont le même comportement sous l'action des opérations de symétrie. En considérant aussi la manière dans laquelle différents moments brisent les différentes symétries, on peut tirer la conclusion que pour extraire du résultat de la trace juste le terme  $F_A$ , il est naturel de considerer  $M^\mu$  comme une combinaison linéaire de  $\gamma_\mu \gamma_5$  et  $(q^2 \gamma_\mu - q^\mu) \gamma_5$ . À ce point on a un problème qui n'a pas de solution. Plus précisément, cette procédure ne marche pas pour le courant faible. Cela est dû au fait que l'opérateur de la charge axiale et le moment anapolaire sont des grandeurs colinéaires par rapport au produit scalaire défini, donc on ne peut pas faire une distinction entre eux. Cela ne nous empêchera pas de construire un projecteur pour le moment anapolaire électromagnétique et fort. Le moment anapolaire faible va être traité dans une prochaine étude.

Puisque dans le courant électromagnétique et fort on n'a pas de terme de charge axiale, on peut restreindre la généralité de la matrice  $M_\mu$  en l'écrivant comme:

$$M_\mu = \mathcal{N} (q^2 \gamma_\mu - q^\mu) \gamma_5 \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{N}$  est une constante de normalisation. On peut la calculer en imposant comme résultat de la trace (3.1) le facteur de forme du moment anapolaire. Les calculs conduisent à la forme suivante pour le projecteur cherché:

$$F_A^{(el, st)} = \frac{1}{4 q^4 (q^2 - 4m_i^2)} \text{Tr} \left[ (q^2 \gamma^\mu - q^\mu) \gamma_5 (\not{p}_2 - m_i) \Gamma_\mu^{(el, st)} (\not{p}_1 - m_i) \right] \quad (3.3)$$

où  $\Gamma_\mu$  symbolise la somme sur tous les diagrammes de Feynman qui contribuent au courant électromagnétique et fort respectivement.

Le même projecteur peut être obtenu en utilisant la deuxième manière de construction. On remplace la matrice  $M_\mu$  par une expression similaire à  $\Gamma_\mu$  mais avec d'autres coefficients, on calcule la trace et on impose comme résultat le facteur de forme du moment d'intérêt. En gardant la masse entrante différente de celle sortante et les fermions sur leurs couche de masse, on obtient:

•<sub>1</sub> le projecteur sur la charge:

$$f = \frac{1}{\mathbb{D}_1} \left\{ \begin{aligned} & \{ 2q^2 [4m_1 m_2 - q^2 - (m_1 - m_2)^2] + 4(m_1^2 - m_2^2)^2 \} \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] + \\ & + 6i(m_1 + m_2) [q^2 + (m_1 - m_2)^2] \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [\sigma_{\mu\nu} (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

•<sub>2</sub> le projecteur sur le moment magnétique:

$$D_M = \frac{1}{\mathbb{D}_1} \left\{ \begin{aligned} & 4[q^2 + 2m_1 m_2 - (m_1 - m_2)^2] \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] - \\ & - 6i(m_1 + m_2) [q^2 - (m_1 - m_2)^2] \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [\sigma_{\mu\nu} (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

•<sub>3</sub> le projecteur sur le moment électrique dipolaire:

$$D_E = \frac{1}{\mathbb{D}_2} \left\{ \begin{aligned} & 2q^2 [2q^4 - 8q^2 m_1 m_2 - 2q^2 (m_1 - m_2)^2 - (m_1^2 - m_2^2)^2] \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] - \\ & - 12(m_1 - m_2) q^2 [q^2 - (m_1^2 + m_2^2)] \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [(q^2 \gamma_\mu - \not{q} q_\mu) \gamma_5 (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

•<sub>4</sub> le projecteur sur le moment anapolaire:

$$F_A = \frac{1}{\mathbb{D}_2} \left\{ \begin{aligned} & [2q^2 [4m_1 m_2 - q^2 - (m_1 - m_2)^2] + 4(m_1^2 - m_2^2)^2] \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [(q^2 \gamma_\mu - \not{q} q_\mu) \gamma_5 (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] - \\ & - 6iq^2 (m_1 - m_2) [q^2 - (m_1 + m_2)^2] \cdot \\ & \cdot \text{Tr} [\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1)] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1 = & 4[q^2 + 2m_1m_2 - (m_1 - m_2)^2] \cdot \\ & \cdot \{2q^2[4m_1m_2 - q^2 - (m_1 - m_2)^2] + 4(m_1^2 - m_2^2)^2\} - \\ & - 36(m_1 + m_2)^2[q^4 - (m_1 - m_2)^4] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_2 = & 2q^2[2q^4 - 8q^2m_1m_2 - 2q^2(m_1 - m_2)^2 - (m_1^2 - m_2^2)^2] \cdot \\ & \cdot \{2q^2[4m_1m_2 - q^2 - (m_1 - m_2)^2] + 4(m_1^2 - m_2^2)^2\} - \\ & - 72iq^4(m_1 - m_2)^2[q^2 - (m_1 + m_2)^2](q^2 - m_1^2 - m_2^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ces expressions peuvent être utilisées pour calculer les facteurs de forme des divers moments de transition. Si on particularise le projecteur sur le moment anapolaire pour  $m_1 = m_2$  on obtient exactement la forme (3.3).

Revenons à cette forme. On peut la modifier pour simplifier les calculs ultérieurs. Le courant électromagnétique le plus général permis par les lois de conservation et l'invariance par rapport aux transformations de Lorentz est donné par l'équation (1.54):

$$\begin{aligned} J_\mu = \bar{u}(p_f) \left[ & F_1 \gamma_\mu - \frac{i}{2m} F_2 \sigma_{\mu\nu} q^\nu - \right. \\ & \left. - \frac{i}{2m} F_3 \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 + F_4 (q^2 \gamma_\mu - q^\nu q_\mu) \gamma_5 \right] u(p_i) \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $q_\mu$  représente la 4-impulsion du photon. On observe que l'expression du courant à  $q = 0$  ne contient plus de terme de type moment anapolaire. Donc, si on utilise dans nos calculs  $J_\mu - J_\mu|_{q=0}$  au lieu de  $J_\mu$  le résultat ne change pas. Par conséquent, on peut écrire le facteur de forme du moment anapolaire:

$$F^A = \frac{1}{4q^4(q^2 - 4m_i^2)} \text{Tr} \left[ (q^2 \gamma_\mu - q^\nu q_\mu) (\not{p}_2 - m_i) (\Gamma^\mu - \Gamma^\mu|_{q=0}) (\not{p}_1 - m_i) \right] \quad (3.11)$$

C'est l'expression du projecteur qu'on va utiliser dans le chapitre suivant pour l'extraction du moment anapolaire des diagrammes de Feynman à une boucle.

### 3.2. Paramétrisation de Feynman

La suite des propagateurs dans les amplitudes associées aux diagrammes de Feynman au-delà du niveau des arbres doit être manipulée de telle façon qu'on obtienne la forme la plus simple possible. Comme parmi les formes les plus simples on a la fraction rationnelle il sera désirable de mettre la suite des propagateurs sous la forme d'une seule fraction avec un dénominateur raisonnable. Dans ce qui suit on va démontrer une formule qui permet de faire cette chose.

#### Proposition :

Soit  $\mathcal{A}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$   $n$  expressions quelconques et  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$   $n$  nombres réels et positifs. Dans ces conditions, la formule suivante est vraie:

$$\frac{1}{\prod_{i=0}^n \mathcal{A}_i^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma\left[\sum_{i=0}^n \alpha_i\right]}{\prod_{i=0}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 \delta(1 - \sum_{i=0}^n x_i) \frac{\prod_{i=0}^n x_i^{\alpha_i-1} dx_i}{\left(\sum_{i=0}^n x_i \mathcal{A}_i\right)^{\sum_{i=0}^n \alpha_i}} \quad (3.12)$$

#### Preuve :

On part de la définition de la fonction  $\Gamma$  et on fait le changement de variable  $t = \mathcal{A}_i t_i$ :

$$\Gamma(\alpha_i) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha_i-1} dt \stackrel{t \rightarrow \mathcal{A}_i t_i}{=} \mathcal{A}_i^{\alpha_i} \int_0^\infty e^{-\mathcal{A}_i t_i} t_i^{\alpha_i-1} dt_i \quad (3.13)$$

On construit le produit de  $n$  fonctions  $\Gamma$  paramétrisées de telle manière et on obtient:

$$\prod_{i=0}^n \frac{\Gamma(\alpha_i)}{\mathcal{A}_i^{\alpha_i}} = \int_0^\infty e^{-\sum_{i=0}^n \mathcal{A}_i t_i} \prod_{i=0}^n (t_i^{\alpha_i-1} dt_i) \int_0^\infty dt \delta(t - \sum_{i=0}^n t_i) \quad (3.14)$$

où on a introduit la fonction  $\delta$  de Dirac par sa relation de normalisation. On reparamétrise l'expression obtenue à l'aide des changements de variables:

$$\begin{aligned} 1) \quad t_i &\rightarrow tx_i \quad \implies \quad \delta(t - \sum_{i=0}^n t_i) = \frac{1}{t} \delta(1 - \sum_{i=0}^n x_i) \\ 2) \quad t &\rightarrow \frac{q}{\sum_{i=0}^n \mathcal{A}_i x_i} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Par le deuxième changement de variable on arrive à mettre l'intégrale d'après  $t$  sous la forme d'une fonction  $\Gamma$ .

En mettant toutes ces relations ensemble et en tenant compte du fait que la fonction  $\delta$  impose que les  $x_i$  soit entre 0 et 1, on arrive au résultat désiré:

$$\frac{1}{\prod_{i=0}^n \mathcal{A}_i^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma\left[\sum_{i=0}^n \alpha_i\right]}{\prod_{i=0}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 \delta(1 - \sum_{i=0}^n x_i) \frac{\prod_{i=0}^n x_i^{\alpha_i-1} dx_i}{\left(\sum_{i=0}^n x_i \mathcal{A}_i\right)^{\sum_{i=0}^n \alpha_i}} \quad (3.16) \quad \square$$

Dans les calculs pratiques on utilise des cas particuliers de cette formule générale. Dans les chapitres suivants on va avoir besoin des cas  $n = 2$  et  $n = 3$  et  $\alpha_i = 1 \ (\forall) i$ . Pour ces cas, en faisant l'intégrale sur un des paramètres à l'aide de la fonction  $\delta$ , la formule devient:

$$\begin{aligned} n = 2 \quad \frac{1}{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(x \mathcal{A}_1 + (1-x) \mathcal{A}_2)^2} \\ n = 3 \quad \frac{1}{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(x \mathcal{A}_1 + y \mathcal{A}_2 + (1-x-y) \mathcal{A}_3)^3} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ces sont les paramétrisations qu'on va utiliser dans ce qui suit pour calculer les corrections du vertex ( $n = 3$ ) et le mélange  $\gamma - Z$  ( $n = 2$ ).

### 3.3. Régularisation

Après la paramétrisation de Feynman, si on fait un changement de variable bien choisi, on se retrouve avec des intégrales de type:

$$\mathcal{J}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\beta}(\alpha) = \int_M \frac{d^4 k}{(2\pi)^d} \frac{k^{\lambda_1} k^{\lambda_2} \dots k^{\lambda_\beta}}{(k^2 - \aleph^2)^\alpha} \quad (3.18)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_\beta$  sont des indices Lorentziens et  $M$  signifie que le domaine d'intégration est l'espace de Minkowski. Dépendant de la valeur de  $\beta$  ces intégrales peuvent être des quantités convergentes ou divergentes. Le tableau suivant résume ces propriétés.

$\beta - 2\alpha + 4$	Description
$< 0$	Convergence
0	Divergence logarithmique
1	Divergence linéaire
2	Divergence quadratique
3	Divergence cubique

**Tableau 3.2.** Divergence des divers types d'intégrales.

Il est évident que la quantité de la première colonne peut être mise en liaison avec le degré de divergence superficielle du diagramme d'où l'intégrale provient.

D'après la définition donnée dans le chapitre précédent en ce qui concerne la régularisation, on doit trouver une méthode de mettre en évidence les infinités de l'intégrale pour pouvoir les éliminer par la renormalisation. Pendant l'évolution de la théorie quantique des champs, plusieurs méthodes de régularisation ont été développées. Les trois plus importantes sont:

- Méthode de coupure
- Méthode de Pauli-Villars
- Régularisation dimensionnelle

La méthode de coupure part de l'observation que la divergence de  $\mathcal{J}$  provient de l'intégration sur des impulsions arbitrairement grandes. Par conséquent, pour rendre la divergence explicite, il suffit de considérer que le module de l'impulsion varie de zéro à une valeur  $\Lambda$  et après de prendre la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . On a donc:

$$\mathcal{J} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [F_1 + F_2(\Lambda)] = F_1 + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} F_2(\Lambda) \quad (3.19)$$

Si  $\mathcal{J}$  est divergente, alors l'infini devient explicite dans  $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} F_2(\Lambda)$ . À partir d'ici on peut définir une constante de renormalisation et l'éliminer en restant ainsi avec un résultat fini.

Malheureusement cette méthode brise l'invariance de jauge.

La méthode de Pauli-Villars suppose l'existence des particules fictives de masses  $\Lambda_i$ . Par conséquent, le propagateur devient:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \longrightarrow \frac{1}{p^2 - m^2} + \sum_i \frac{a_i}{p^2 - \Lambda_i} \quad (3.20)$$

Les masses  $\Lambda_i$  sont considérées beaucoup plus grandes que  $m$  et les coefficients  $a_i$  sont choisis de telle manière que le degré de divergence superficielle soit négatif (autrement dit le diagramme de Feynman contient juste des intégrales convergentes). En conséquence, toutes les  $\mathcal{J}$  qui apparaissent ici sont convergentes. À la fin des calculs on prend la limite  $\Lambda_i \rightarrow \infty$  pour faire disparaître les particules fictives et on va avoir une séparation semblable à celle de la méthode précédente.

Cette méthode marche très bien en QED, mais dans des cas plus compliqués, elle brise l'invariance de jauge.

La régularisation dimensionnelle se base sur l'observation de 't Hooft et Veltman [22] que les intégrales divergentes en quatre dimensions peuvent être rendues finies dans un espace à  $d$  dimensions où  $d < 4$ . Les intégrales deviennent des fonctions analytiques dans cet espace. Les divergences vont se manifester par des pôles pour  $d = 4$ . Le résultat désiré est obtenu par

continuation analytique et en isolant les pôles. À partir d'ici la construction des constantes de renormalisation est directe.

Cette méthode est très efficace puisqu'elle préserve toutes les symmetries de la théorie. C'est pour cela qu'on va l'utiliser dans les calculs ultérieurs.

### 3.4. Intégrales $d$ -dimensionnelles dans la régularisation dimensionnelle

En utilisant la symétrie du domaine d'intégration dans l'équation 3.18 on arrive à la conclusion que, pour  $\beta = 2n + 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $\mathcal{J}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\beta}(\alpha) = 0$ . En faisant le changement de variable  $k \rightarrow -k$  on constate que, si  $\beta$  est impaire,  $\mathcal{J}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\beta}(\alpha) = -\mathcal{J}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\beta}(\alpha)$ .

Si  $\beta$  est un nombre pair alors l'intégrale est non nulle. En utilisant de nouveau la symétrie du domaine d'intégration, on peut décomposer le tenseur  $k^{\lambda_1} k^{\lambda_2} \dots k^{\lambda_\beta}$  dans une combinaison linéaire de produits de tenseurs métriques:

$$k^{\lambda_1} k^{\lambda_2} \dots k^{\lambda_\beta} = |k|^\beta \sum_{\sigma} \chi(\sigma) g_{\sigma(1)\sigma(2)} g_{\sigma(3)\sigma(4)} \dots g_{\sigma(\beta-1)\sigma(\beta)} \quad (3.21)$$

Ici  $\sigma$  représente l'ensemble des permutations de  $(1, 2, \dots, \beta)$  et  $\chi(\sigma)$  sont des coefficients numériques qui dépendent de la permutation  $\sigma$ . Par conséquent on arrive à:

$$\mathcal{J}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\beta}(\alpha) \sim \mathcal{I}(\alpha, \beta) = \int_M \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{|k|^\beta}{(|k|^2 - \aleph^2)^\alpha} \quad (3.22)$$

où l'indice  $M$  signifie le fait qu'on intègre sur tout l'espace de Minkowski et  $|k|^2$  représente le carré de la norme minkowskienne du 4-vecteur  $k$ .

Pour calculer l'intégrale (3.22) on a besoin de passer de l'espace de Minkowski à un espace Euclidien. Cela se fait en changeant la composante temporelle du  $d$ -vecteur  $k$  par  $i k$  et en laissant les autres composantes inchangées. Maintenant le  $d$ -vecteur obtenu appartient à un espace Euclidien; la métrique de cet espace est:  $\hat{g} = -I$  où  $I$  représente la matrice identité en  $d$  dimensions. On garde la même notation  $k$  pour le  $d$ -vecteur dans cet espace. Dans ces conditions l'intégrale de départ devient:

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta) = i (-1)^{\alpha + \frac{\beta}{2}} \int_E \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{|k|^\beta}{(|k|^2 + \aleph^2)^\alpha} \quad (3.23)$$

Puisqu'on est dans un espace Euclidien (en fait on est dans un espace de type  $\mathbb{R}^n$  mais avec une métrique négative), on peut séparer la partie angulaire dans l'élément d'intégration.

$$d^d k = |k|^{d-1} d k d\Omega \quad (3.24)$$

On observe que l'intégrand ne dépend que du module du  $d$ -vecteur  $k$ , donc on peut traiter séparément la partie angulaire de l'élément d'intégration. La valeur de l'angle solide qui "voit" tout l'espace  $d$ -dimensionnel s'obtient rapidement en utilisant la fonction  $\Gamma$  de Euler:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \\ \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^d &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\sum_{i=1}^d t_i^2} \prod_{i=1}^d dt_i = \int d\Omega \int_0^\infty e^{-t^2} t^{d-1} dt \\ \Gamma(n) &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n-1} dt \quad \Rightarrow \\ \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^d &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int d\Omega \quad \Rightarrow \\ \int d\Omega &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Donc, de l'intégrale initiale il reste seulement à calculer l'intégrale sur le module de l'impulsion.

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\infty \frac{d|k|}{(2\pi)^d} \frac{|k|^{\beta+d-1}}{(|k|^2 + \aleph^2)^\alpha} \quad (3.26)$$

Par le changement de variable  $|k| \mapsto \frac{|k|}{\aleph}$  on réduit l'intégrale à une des représentations de la fonction B d'Euler:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2[\aleph^2]^{\alpha-\frac{1}{2}(d+\beta)}} B\left[\frac{1}{2}(d+\beta), \alpha - \frac{1}{2}(d+\beta)\right] \quad (3.27)$$

Si on met tous les ingrédients ensemble et si on utilise les relations entre les fonctions d'Euler on obtient la formule recherchée:

$$\int_M \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^\beta}{(q^2 - \aleph^2)^\alpha} = i \frac{(-1)^{\alpha+\frac{\beta}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(d+\beta)]}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma[\alpha - \frac{1}{2}(d+\beta)]}{[\aleph^2]^{\alpha-\frac{1}{2}(d+\beta)}} \quad (3.28)$$

On constate que, si  $\alpha - \frac{1}{2}(d+\beta)$  est une quantité non positive, alors l'intégrale est divergente, la divergence provenant de  $\Gamma[\alpha - \frac{1}{2}(d+\beta)]$ . Pour extraire les pôles on pose  $d = 4 - \epsilon$  et on a:

$$\alpha - \frac{1}{2}(d+\beta) = \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2}(\beta + 4 - 2\alpha) \quad (3.29)$$

En reprenant le tableau 3.2. on a:

$\frac{1}{2}(\beta - 2\alpha + 4)$	$\Gamma[\alpha - \frac{1}{2}(d+\beta)]$
$< 0$	Convergent
0	$\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)$
1	$-\frac{2}{\epsilon} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(\epsilon)$
2	$\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \gamma) + \mathcal{O}(\epsilon)$
3	$-\frac{1}{3\epsilon} + \frac{1}{6}(-\frac{11}{6} + \gamma) + \mathcal{O}(\epsilon)$

**Tableau 3.3.** Développement en série des fonctions  $\Gamma$  les plus souvent rencontrées.

Les pôles sont isolés sous la forme de  $\frac{1}{\epsilon}$  et les constantes de renormalisation sont faciles à construire.

On va utiliser cette méthode de régularisation dans les calculs du chapitre suivant car elle préserve toutes les symétries de la théorie, même la symétrie de jauge  $SU(2)_L$ . Par conséquent, elle nous permet d'étudier la dépendance de jauge du facteur de forme du moment anapolaire.

## CHAPITRE IV

### CALCUL DU MOMENT ANAPOLAIRE INTRINSÈQUE D'UN FERMION DE SPIN $\frac{1}{2}$

Pour obtenir l'expression du facteur de forme du moment anapolaire on a besoin de calculer dix-neuf diagrammes génériques. Ils peuvent être séparés en deux classes:

- <sub>I</sub> Diagrammes à trois lignes externes
- <sub>II</sub> Mélange  $\gamma - Z$

Chacune de ces classes de diagrammes peut être séparée en sous-classes. La première va être séparée en trois sous-classes:

- <sub>1</sub> diagrammes juste avec des bosons de Higgs (fig. 4.1, fig. 4.2, fig. 4.3 (a, b))
  - <sub>2</sub> diagrammes avec des bosons de Higgs et bosons  $W$  (fig. 4.4 (a, b))
  - <sub>3</sub> diagrammes juste avec des bosons de jauge (fig. 4.5, fig. 4.7, fig. 4.6 (a, b))
- pendant que la deuxième classe va être séparée en deux sous-classes:
- <sub>1</sub> boucles des bosons (fig. 4.10)
  - <sub>2</sub> boucles des fermions (fig. 4.8 et fig. 4.9)

Dans ce qui suit on va adopter un programme de calcul. Premièrement on va écrire l'amplitude de chaque diagramme en considérant la masse entrante comme étant différente de celle sortante. Après cela on calcule:

$$T_n = \text{Tr} \left[ (q^2 \gamma_\mu - q^\mu q_\mu) \gamma_5 (\not{p}_2 - m_i) (\Gamma_n^\mu - \Gamma_n^\mu \Big|_{q=0}) (\not{p}_1 - m_i) \right] \quad (4.1)$$

avec les deux masses égales et aussi avec des coefficients de couplage généraux, pour chaque diagramme. Cette quantité peut être mise en liaison avec la contribution au facteur de forme du moment anapolaire du  $n$ -ième diagramme à

l'aide de l'expression:

$$F_n^A = \frac{1}{4q^4(q^2 - 4m_i^2)} T_n \quad (4.2)$$

Après avoir calculé la contribution au moment anapolaire de chaque diagramme avec les couplages généraux, on va passer au Modèle Standard (MS).

On donne aussi le facteur de  $\gamma_\mu \gamma_5$  de la partie soustraite. À la fin des calculs on va montrer que la seule infinité qui subsiste dans le résultat est celle qui provient de la partie transverse du mélange  $\gamma - Z$ .

Après cela on va attaquer le problème de la dépendance de jauge. On va montrer qu'on a des contributions invariantes de jauge et des contributions dépendantes de jauge, les dernières d'entre elles se distinguent par la présence du paramètre de fixage de jauge,  $\xi$ .

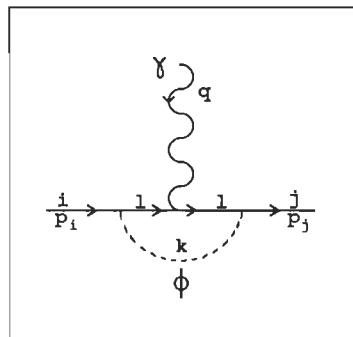
Ayant fixé la stratégie, on peut passer aux calculs !

## 4.1. Première classe de diagrammes

### 4.1.1. Diagrammes avec des bosons de Higgs

La première sous-classe de diagrammes à quatre membres génériques. Leur qualité principale est l'existence d'une identité de Ward qui assure que leur somme est finie et en même temps garantie la conservation du courant pour cette sous-classe. Par conséquent, on va pouvoir constater que la somme des parties soustraites est finie.

### §1 Diagrammes de type 1



**Figure 4.1.** Première contribution des scalaires au vertex électromagnétique

L'amplitude associée à ce diagramme est:

$$\begin{aligned}
 M_1 = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} & \left[ i(a_{j,l}^* \gamma_L + b_{j,l}^* \gamma_R) \frac{i(p_j - k + m_l)}{(p_j - k)^2 - m_l^2 + i\epsilon} \cdot \right. \\
 & \cdot i a_l \gamma_\mu \frac{i(p_i - k + m_l)}{(p_i - k)^2 - m_l^2 + i\epsilon} \cdot \\
 & \left. \cdot i(a_{l,i} \gamma_L + b_{l,i} \gamma_R) \frac{i}{k^2 - \xi M_\phi^2} \right] u(p_i)
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

On fait la paramétrisation de Feynman et le changement de variable:

$$k \longrightarrow k' + x p_1 + y p_2 \quad (4.4)$$

En mettant  $m_i$  et  $m_j$  égales, en faisant la soustraction, en calculant la trace et l'intégrale sur l'impulsion on obtient:

$$\begin{aligned}
 T_1 = -2i \frac{i}{(4\pi)^2} a_l (a_{il}^* a_{li} - b_{il}^* b_{li}) q^2 (q^2 - 4m_i^2) \cdot \\
 \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \frac{a(x,y)}{C_\phi(\xi)} - \frac{\tilde{a}(x,y)}{\tilde{C}_\phi(\xi)} - \ln \frac{C_\phi(\xi)}{\tilde{C}_\phi(\xi)} \right]
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

où on a posé:

$$\begin{aligned}
 a(x,y) &= -(1-x-y)m_i^2 + m_l^2 + u(x,y) \\
 C_X(\alpha) &= (x+y)m_i^2 + (1-x-y)\alpha M_X^2 - u(x,y) = g_X(\alpha) - u(x,y) \\
 \tilde{a}(x,y) &= -(1-x-y)m_i^2 + m_l^2 + \tilde{u}(x,y) \\
 \tilde{C}_X(\alpha) &= (x+y)m_i^2 + (1-x-y)\alpha M_X^2 - \tilde{u}(x,y) = g_X(\alpha) - \tilde{u}(x,y) \\
 u(x,y) &= (x+y)(1-x-y)m_i^2 + xyq^2 \\
 g_X(\alpha) &= (x+y)m_i^2 + (1-x-y)\alpha M_X^2 \quad \alpha \in \{1, \xi\}
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dans le MS les constantes de couplage et la masse du boson chargé non physique de Higgs sont:

$$\begin{aligned}
 M_\phi &= M_W \\
 a_l &= q_l \\
 a_{il}^* a_{li} - b_{il}^* b_{li} &= -\frac{g^2}{2M_W^2} V_{il}^* V_{li} (m_i^2 - m_l^2)
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour les bosons neutres de Higgs la combinaison  $a_{il}^*a_{li} - b_{il}^*b_{li}$  est nulle. Donc, la contribution de ce type de diagrammes au moment anapolaire du fermion  $i$  dans le MS est:

$$F_1^A = i q_i \frac{i}{4(4\pi)^2} \frac{g^2}{q^2 M_W^2} \sum_l V_{il}^* V_{li} (m_i^2 - m_l^2) \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \frac{a(x,y)}{C_W(\xi)} - \frac{\tilde{a}(x,y)}{\tilde{C}_W} - \ln \frac{C_W(\xi)}{\tilde{C}_W(\xi)} \right] \quad (4.8)$$

La partie en  $\gamma_\mu \gamma_5$  qu'on a soustraite est (dans le MS):

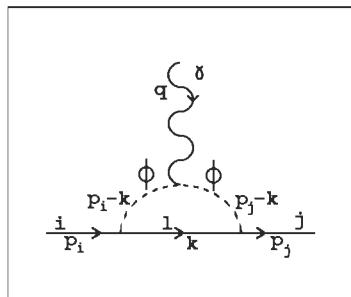
$$S_1^{(5)} = i q_i \frac{i}{16(4\pi)^2} \frac{g^2}{M_W^2} \sum_l V_{il}^* V_{li} (m_i^2 - m_l^2) \cdot \left\{ 2\Delta - 5 + 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \frac{\tilde{a}(x,y)}{\tilde{C}_W(\xi)} - \ln \frac{\tilde{C}_W(\xi)}{M_W^2} \right] \right\} \quad (4.9)$$

où on a utilisé la notation:

$$\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{M_W^2}{4\pi\mu^2} \quad (4.10)$$

Dans  $\Delta$  on a caché le pôle de l'intégrale sur l'impulsion non déterminée du diagramme.

## §2 Diagrammes de type 2



**Figure 4.2.** Deuxième contribution des scalaires au vertex électromagnétique

L'amplitude associée à ce diagramme est:

$$M_2 = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ i(a_{j,l}^* \gamma_L + b_{j,l}^* \gamma_R) \frac{i(k + m_l)}{k^2 - m_l^2 + i\epsilon} \cdot i(a_{l,i} \gamma_L + b_{l,i} \gamma_R) \frac{i}{(p_i - k)^2 - \xi M_\phi^2} \cdot \frac{i}{(p_j - k)^2 - \xi M_\phi^2} i a(p_j + p_i - 2k)_\mu \right] u(p_i) \quad (4.11)$$

On fait la paramétrisation de Feynman et on projette sur le moment anapolaire. Après avoir calculé la trace et l'intégrale sur l'impulsion, en mettant  $m_i = m_j$  on a:

$$T_2 = 2i \frac{i}{(4\pi)^2} e_\phi q^2 (q^2 - 4m_i^2) (a_{il}^* a_{li} - b_{il}^* b_{li}) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \ln \frac{D_\phi(\xi, \xi)}{\tilde{D}_\phi(\xi, \xi)} \quad (4.12)$$

où on a posé:

$$\begin{aligned} D_X(\alpha, \beta) &= (1 - x - y)(m_l^2 - (x + y)m_i^2) - xyq^2 + (\alpha x + \beta y)M_X^2 \\ \tilde{D}_X(\alpha, \beta) &= (1 - x - y)(m_l^2 - (x + y)m_i^2) + (\alpha x + \beta y)M_X^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

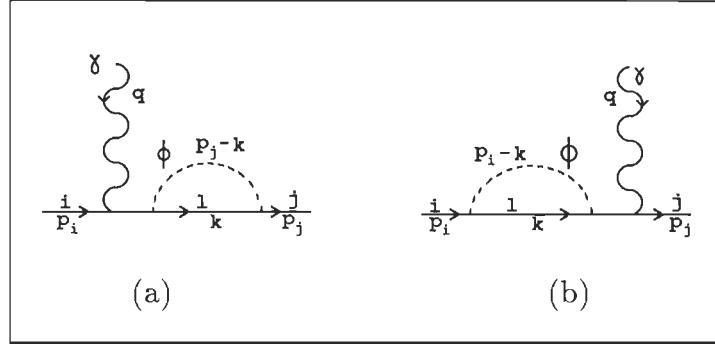
Donc, dans le MS, la contribution de ce diagramme au moment anapolaire est:

$$F_2^A = -i \frac{i}{(4\pi)^2} e_\phi \frac{g^2}{4q^2 M_W^2} V_{il}^* V_{li} (m_i^2 - m_l^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \ln \frac{D_W(\xi, \xi)}{\tilde{D}_W(\xi, \xi)} \quad (4.14)$$

La partie en  $\gamma_\mu \gamma_5$  qu'on a soustraite est (dans le MS):

$$\begin{aligned} S_2^{(5)} &= i \frac{i}{16(4\pi)^2} (q_l - q_i) \frac{g^2}{M_W^2} V_{il}^* V_{li} (m_i^2 - m_l^2) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ -2\Delta + 3 + 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \ln \frac{\tilde{D}_W(\xi, \xi)}{M_W^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

### §3 Diagrammes de type 3



**Figure 4.3.** La contribution des énergies propres dues aux scalaires au vertex électromagnétique

Ces diagrammes sont les derniers qui contiennent juste des particules de Higgs. On peut alors s'attendre à ce que leur somme avec les deux premiers possède certaines propriétés spéciales.

Les amplitudes associées à ces diagrammes sont:

$$M_3^a = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ i(a_{j,l}^* \gamma_L + b_{j,l}^* \gamma_R) \frac{i(k + m_l)}{k^2 - m_l^2 + i\epsilon} \cdot i(a_{l,i} \gamma_L + b_{l,i} \gamma_R) \frac{i(p_j + m_i)}{p_j^2 - m_i^2 + i\epsilon} \cdot i a_i \gamma_\mu \frac{i}{(p_j - k)^2 - \xi M_\phi^2 + i\epsilon} \right] u(p_i) \quad (4.16)$$

$$M_3^b = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{i}{(p_i - k)^2 - \xi M_\phi^2 + i\epsilon} i a_j \gamma_\mu \cdot \frac{i(p_i + m_j)}{p_i^2 - m_j^2 + i\epsilon} i(a_{j,l}^* \gamma_L + b_{j,l}^* \gamma_R) \cdot \frac{i(k + m_l)}{k^2 - m_l^2 + i\epsilon} i(a_{l,i} \gamma_L + b_{l,i} \gamma_R) \right] u(p_i) \quad (4.17)$$

À cause de la présence du propagateur du fermion virtuel on se retrouve au dénominateur avec la différence entre la masse entrante et celle sortante.

Donc, on ne peut pas mettre dès le début  $m_i = m_j$ . Mais les calculs montrent que dans le cas de la projection sur le moment anapolaire la différence entre des masses se réduit, donc on peut poser à la fin  $m_i = m_j$  sans avoir de problème. Après avoir fait toutes les manipulations nécessaires, on trouve que dans les deux diagrammes les facteurs de  $\gamma_\mu \gamma_5$  sont égaux. Le projecteur donne pour ces diagrammes:

$$T_{3a} = 0 = T_{3b} \quad (4.18)$$

Donc:

$$F_3^A = F_{3a}^A + F_{3b}^A = 0 \quad (4.19)$$

Avec des couplages généraux, la partie soustraite est:

$$S_3^{(5)} = i \frac{i}{8(4\pi)^2} a_i (a_{il}^\star a_{li} - b_{il}^\star b_{li}) \left\{ 2\Delta - 3 - 4 \int_0^1 dx (1-x) \ln \frac{C_\phi^S(\xi)}{M_\phi^2} \right\} \quad (4.20)$$

Dans le MS, la même quantité est:

$$\begin{aligned} S_3^{(5)} = & -i \frac{i}{16(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{M_W^2} V_{il}^\star V_{li} (m_i^2 - m_l^2) \cdot \\ & \cdot \left\{ 2\Delta - 3 - 4 \int_0^1 dx (1-x) \ln \frac{C_\phi^S(\xi)}{M_W^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

où

$$C_X^S(\alpha) = xm_l^2 - (1-x)[xm_i^2 - \alpha M_X^2] \quad \alpha \in \{1, \xi\} \text{ et } X \in \{\phi, W, Z\} \quad (4.22)$$

On constate que la contribution au moment anapolaire de l'énergie propre du fermion entrant, respectivement sortant, est nulle.

◊ *Remarques*

- 1) On peut comprendre la non-contribution des bosons neutres non physiques de Higgs au moment anapolaire juste en regardant le tableau 2.1. Le couplage du boson physique est proportionnel à  $\gamma_5$ ; puisqu'on a deux tels couplages dans chaque diagramme, il ne reste plus de  $\gamma_5$  pour construire l'opérateur

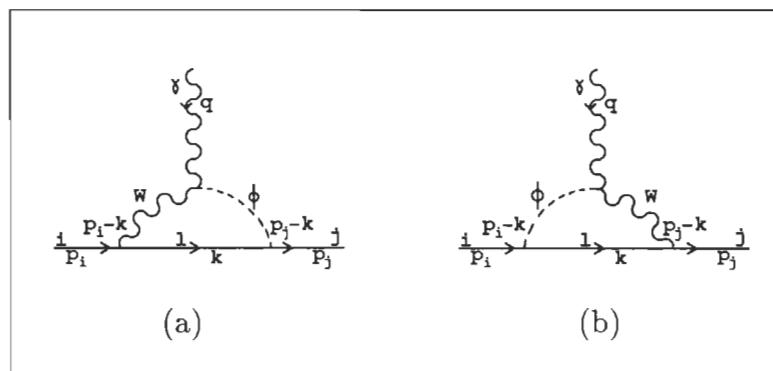
du moment anapolaire. Le couplage du boson non physique ne contient pas de  $\gamma_5$ , donc on n'a pas besoin de poser le problème qu'il peut donner une contribution à cause de l'absence de la brisure de parité dans un tel diagramme.

2) Si on ajoute les parties soustraites des diagrammes considérés jusqu'à maintenant, on constate que la somme est une quantité finie. Le rôle des diagrammes d'énergie propre est de rendre cette somme finie. D'un certain point de vue, ce résultat est une réflexion de l'identité de Ward-Takahashi. Si on prend l'amplitude de l'énergie propre du fermion généré par un boson de Higgs et on la dérive par rapport à la composante  $\mu$  de l'impulsion du fermion, on obtient exactement la somme des amplitudes des diagrammes considérés avec l'impulsion du photon nulle. Puisque la partie divergente de l'énergie propre n'est pas proportionnelle à l'impulsion de la particule considérée sur sa couche de masse, le résultat est fini.

#### 4.1.2. Diagrammes avec des bosons de Higgs et bosons $W$

La deuxième sous-classe de diagrammes a deux membres: figures 4.4 (a) et 4.4 (b). Leur qualité principale est d'être finis, donc la partie en  $\gamma_\mu \gamma_5$  qu'on soustrait est finie. Même avec cette qualité, ces diagrammes causent des problèmes dû au fait qu'ils brisent la conservation du courant. De ce point de vue, ils sont finis dû à l'absence d'une identité de Ward-Takahashi.

##### §1 Diagrammes de type 4



**Figure 4.4.** La contribution des couplages  $\gamma W S$  au vertex électromagnétique

Les amplitudes associées à ces diagrammes sont:

$$M_4^a = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ i(a_{j,l}^{\phi\star} \gamma_L + b_{j,l}^{\phi\star} \gamma_R) \frac{i(\not{k} + m_l)}{k^2 - m_l^2 + i\epsilon} i\gamma_\alpha (a_{l,i}^W \gamma_L + b_{l,i}^W \gamma_R) \cdot \right. \\ \left. \cdot i\Delta^{\alpha\beta}(p_i - k) (-iag_{\beta\mu}) \frac{i}{(p_j - k)^2 - \xi M_\phi^2} \right] u(p_i) \quad (4.23)$$

$$M_4^b = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ i\gamma_\alpha (a_{j,l}^{W\star} \gamma_L + b_{j,l}^{W\star} \gamma_R) \frac{i(\not{k} + m_l)}{k^2 - m_l^2 + i\epsilon} i(a_{l,i}^\phi \gamma_L + b_{l,i}^\phi \gamma_R) \cdot \right. \\ \left. \cdot i\Delta_W^{\alpha\beta}(p_j - k) (-iag_{\beta\mu}) \frac{i}{(p_i - k)^2 - \xi M_\phi^2} \right] u(p_i) \quad (4.24)$$

où on a noté le propagateur du boson W par  $i\Delta_W^{\alpha\beta}(q)$ ,  $q$  étant une notation générique pour l'impulsion du même boson  $\dagger$ . Pour rester seulement avec des intégrales doubles, on décompose le propagateur comme suit:

$$i\Delta_{\mu\nu}^X(q) = \frac{i}{q^2 - M_X^2} \left( -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi M_X^2} \right) \\ = i \left( \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_X^2}}{q^2 - M_X^2} - \frac{\frac{q_\mu q_\nu}{M_X^2}}{q^2 - \xi M_X^2} \right) \quad (4.25)$$

On fait la paramétrisation de Feynman et le changement de variable:

$$k \longrightarrow k' + xp_1 + yp_2 \quad (4.26)$$

En comptant les puissances de  $k'$  dans les deux amplitudes, on constate avec bonheur que le terme qui vient de la partie en  $g_{\mu\nu}$  du propagateur n'est pas divergent. Par contre, les termes qui viennent de chaque partie longitudinale (i.e. proportionnelle à  $q_\mu q_\nu$ ) divergent. La divergence est logarithmique, donc l'infini est bien isolée, sans avoir des facteurs qui proviennent du

---

$\dagger$  Il n'existe aucune identification entre ce  $q$  et l'impulsion du photon dans les diagrammes.

dénominateur. Cette chose nous facilite la vie et est, en fait, la racine du fait que les amplitudes de ces diagrammes sont finies. En regardant l'expression du propagateur on constate que les deux termes longitudinaux ont un signe de différence entre eux et aussi qu'ils diffèrent juste par leur dénominateur. Cependant, la divergence de ces termes étant logarithmique, elle se réduit et laisse la contribution finie. La trace et l'intégrale sur l'impulsion donnent:

$$\begin{aligned}
T_4 = & -i \frac{i}{(4\pi)^2} q^2 (q^2 - 4m_i^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 2 \left[ -m_l \left[ (A_{il}^{\phi*} B_{li}^W - B_{il}^{\phi*} A_{li}^W) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (A_{il}^{W*} B_{li}^\phi + B_{il}^{W*} A_{li}^\phi) \right] - (x+y)m_i \left[ (A_{il}^{\phi*} B_{li}^W + B_{il}^{\phi*} A_{li}^W) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (A_{il}^{W*} B_{li}^\phi - B_{il}^{W*} A_{li}^\phi) \right] \right] \left( \frac{1}{D(1, \xi)} + \frac{1}{D(\xi, 1)} - \frac{1}{\tilde{D}(\xi, 1)} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\tilde{D}(1, \xi)} \right) + \frac{1}{M_W^2} \left[ m_l \left[ (A_{il}^{\phi*} B_{li}^W - B_{il}^{\phi*} A_{li}^W) + (A_{il}^{W*} B_{li}^\phi + \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{il}^{W*} A_{li}^\phi) \right] + m_i \left[ (A_{il}^{\phi*} B_{li}^W + B_{il}^{\phi*} A_{li}^W) - (A_{il}^{W*} B_{li}^\phi - \right. \right. \\
& \left. \left. - B_{il}^{W*} A_{li}^\phi) \right] \right] \left( 2 \ln \frac{D(\xi, \xi)}{\tilde{D}(\xi, \xi)} - \ln \frac{D(1, \xi)}{\tilde{D}(1, \xi)} - \ln \frac{D(\xi, 1)}{\tilde{D}(\xi, 1)} \right) \right\} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Pour passer dans le MS on doit remplacer les grandeurs  $A$  et  $B$  par leur forme explicite donnée par les règles de Feynman.

$$\begin{aligned}
A_{li}^{(W; \phi)} &= \frac{1}{2} (a_{li}^{(W; \phi)} + b_{li}^{(W; \phi)}) = \left( \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{li}; -I_3^i \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{m_l - m_i}{M_W} V_{li} \right) \\
A_{il}^{(W; \phi)*} &= \frac{1}{2} (a_{il}^{(W; \phi)*} + b_{il}^{(W; \phi)*}) = \left( \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{li}^*; -I_3^i \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{m_l - m_i}{M_W} V_{li} V_{li}^* \right) \quad (4.28) \\
B_{li}^{(W; \phi)} &= \frac{1}{2} (b_{li}^{(W; \phi)} - a_{li}^{(W; \phi)}) = \left( -\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{li}; I_3^i \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{m_l + m_i}{M_W} V_{li} \right) \\
B_{il}^{(W; \phi)*} &= \frac{(+; -)}{2} (b_{il}^{(W; \phi)*} - a_{il}^{(W; \phi)*}) = -\left( \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{li} V_{li}^*; I_3^i \frac{g}{\sqrt{2}} \frac{m_l + m_i}{M_W} V_{li} V_{li}^* \right)
\end{aligned}$$

En tenant compte de ces relations, on peut écrire la somme des contributions au moment anapolaire de cette classe de diagrammes:

$$F_4^A = i \frac{i}{(4\pi)^2} |e_W| \frac{I_3^i g^2}{2q^2 M_W^2} |V_{li}|^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left\{ -M_W^2 a_1(x, y) \left[ \frac{1}{D_W(1, \xi)} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{D_W(\xi, 1)} - \frac{1}{\tilde{D}_W(1, \xi)} - \frac{1}{\tilde{D}_W(1, \xi)} \Big] + \frac{1}{2}(m_i^2 - m_l^2) \cdot \\
& \cdot \left[ 2 \ln \frac{D_W(\xi, \xi)}{\tilde{D}_W(\xi, \xi)} - \ln \frac{D_W(1, \xi)}{\tilde{D}_W(1, \xi)} - \ln \frac{D_W(\xi, 1)}{\tilde{D}_W(\xi, 1)} \right] \} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

où

$$a_1(x, y) = m_l^2 + (x + y)m_i^2 \quad (4.30)$$

et les fonctions  $D_W(\alpha, \beta)$  sont définies par l'équation (4.13).

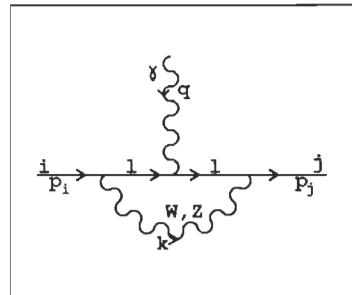
La partie soustraite proportionnelle à  $\gamma_\mu \gamma_5$  est:

$$\begin{aligned}
S_4^{(5)} = & i \frac{i}{(4\pi)^2} e_W \frac{I_3^i g^2}{2M_W^2} |V_{li}|^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ M_W^2 a_1(x, y) \left[ \frac{-1}{\tilde{D}_W(1, \xi)} + \frac{-1}{\tilde{D}_W(1, \xi)} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(m_i^2 - m_l^2) \left[ 2 \ln \frac{\tilde{D}_W(\xi, \xi)}{M_W^2} - \ln \frac{\tilde{D}_W(1, \xi)}{M_W^2} - \ln \frac{\tilde{D}_W(\xi, 1)}{M_W^2} \right] \right\} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

#### 4.1.3. Diagrammes avec des bosons de jauge

La troisième sous-classe de diagrammes contient sept diagrammes. On peut les séparer en diagrammes qui ont dans la boucle soit un boson  $W$  soit un boson  $Z$ . Les différences entre eux sont représentées par les coefficients de couplage et la masse du boson. Par conséquent, on va faire un seul calcul et on va remplacer à la fin les masses selon le diagramme.

#### §1 Diagrammes de type 5



**Figure 4.5.** Première contribution des bosons massifs de jauge au vertex électromagnétique

L'amplitude associée à ce diagramme est:

$$M_5 = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ i(a_{j,l}^{V*} \gamma_{\alpha} \gamma_L + b_{j,l}^{V*} \gamma_{\alpha} \gamma_R) \frac{i(p_j - k + m_l)}{(p_j - k)^2 - m_l^2 + i\epsilon} i a_l \gamma_{\mu} \cdot \right. \\ \cdot \frac{i(p_i - k + m_l)}{(p_i - k)^2 - m_l^2 + i\epsilon} i(a_{l,i}^V \gamma_{\beta} \gamma_L + b_{l,i}^V \gamma_{\beta} \gamma_R) \cdot \\ \left. \cdot \frac{i}{k^2 - M_V^2} \left( -g^{\alpha\beta} + (1 - \xi) \frac{k^{\alpha} k^{\beta}}{k^2 - \xi M_V^2} \right) \right] u(p_i) \quad (4.32)$$

où  $V \in \{Z, W\}$

La trace donne:

$$T_{5V} = 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_l (A_{il}^{V*} B_{li}^V + B_{il}^{V*} A_{li}^V) q^2 (4m_i^2 - q^2) \cdot \\ \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 4 \left[ \frac{f(x, y)}{C_V(1)} - \frac{\tilde{f}(x, y)}{\tilde{C}_V(1)} - \frac{(1-x-y)q^2}{C_V(1)} + \ln \frac{C_V(1)}{\tilde{C}_V(1)} \right] + \right. \\ + \frac{2}{M_V^2} \left[ \left[ \frac{h(x, y)}{C_V(\xi)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_V(\xi)} \right] - \left[ \frac{h(x, y)}{C_V(1)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_V(1)} \right] - \right. \\ - \left[ 6g_V(1) - 12u(x, y) + 3(x+y)q^2 + m_i^2 - m_l^2 - q^2 \right] \ln \frac{C_V(1)}{M_V^2} + \\ + \left[ 6g_V(1) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_V(1)}{M_V^2} + \\ + \left[ 6g_V(\xi) - 12u(x, y) + 3(x+y)q^2 + m_i^2 - m_l^2 - q^2 \right] \ln \frac{C_V(\xi)}{M_V^2} - \\ - \left[ 6g_V(\xi) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_V(\xi)}{M_V^2} \left. \right\} + \\ + 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_l (A_{il}^{V*} B_{li}^V - B_{il}^{V*} A_{li}^V) q^2 (4m_i^2 - q^2) \cdot \\ \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x+y)(y-x) \frac{q^2}{M_V^2} \left[ \frac{1}{C_V(\xi)} - \frac{1}{C_V(1)} \right] \quad (4.33)$$

avec

$$f(x, y) = (1-x-y)m_i^2 - m_l^2 - u(x, y) \\ h(x, y) = u^2(x, y) - (x+y)q^2 u(x, y) + \\ + xyq^2(q^2 - m_i^2) + m_l^2 [u(x, y) - (x+y)m_i^2] \quad (4.34)$$

Les couplages entre le boson  $W$  et les fermions sont ceux donnés dans la classe précédente. Les coefficients de couplage du boson  $Z$  sont:

$$\begin{aligned} A_{li}^Z &= \frac{g}{2 \cos \theta_W} (I_3^i - 2q_i \sin^2 \theta_W) = A_{il}^{Z*} \\ B_{li}^Z &= -\frac{g}{2 \cos \theta_W} I_3^i = B_{il}^{Z*} \end{aligned} \quad (4.35)$$

D'habitude on note:

$$\begin{aligned} c_L^I &= I_3^i - q_i \sin^2 \theta_W \\ c_R^I &= -q_i \sin^2 \theta_W \end{aligned} \quad (4.36)$$

Dans ces conditions, les combinaisons des coefficients  $A$  et  $B$  qui apparaissent dans  $T_5$  sont:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ pour } W : \quad A_{il}^{W*} B_{li}^W + B_{il}^{W*} A_{li}^W &= -\frac{g^2}{4} |V_{li}|^2 \\ A_{il}^{W*} B_{li}^W - B_{il}^{W*} A_{li}^W &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ pour } Z : \quad A_{il}^{Z*} B_{li}^Z + B_{il}^{Z*} A_{li}^Z &= -\frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \\ A_{il}^{Z*} B_{li}^Z - B_{il}^{Z*} A_{li}^Z &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} F_{5W}^A &= 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 q^2} |V_{li}|^2 \cdot \\ &\cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 4 \left[ \frac{f(x, y)}{C_W(1)} - \frac{\tilde{f}(x, y)}{\tilde{C}_W(1)} - \frac{(1-x-y)q^2}{C_W(1)} + \ln \frac{C_W(1)}{\tilde{C}_W(1)} \right] + \right. \\ &+ \frac{2}{M_W^2} \left[ \left[ \frac{h(x, y)}{C_W(\xi)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_W(\xi)} \right] - \left[ \frac{h(x, y)}{C_W(1)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_W(1)} \right] - \right. \\ &- \left[ 6g_W(1) - 12u(x, y) + 3(x+y)q^2 + m_i^2 - m_l^2 - q^2 \right] \ln \frac{C_W(1)}{M_W^2} + \\ &+ \left[ 6g_W(1) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_W(1)}{M_W^2} + \\ &+ \left[ 6g_W(\xi) - 12u(x, y) + 3(x+y)q^2 + m_i^2 - m_l^2 - q^2 \right] \ln \frac{C_W(\xi)}{M_W^2} - \\ &\left. - \left[ 6g_W(\xi) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_W(\xi)}{M_W^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}
F_{5Z}^A = & 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{8q^2 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \cdot \\
& \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 4 \left[ \frac{f(x, y)}{C_Z(1)} - \frac{\tilde{f}(x, y)}{\tilde{C}_Z(1)} - \frac{(1-x-y)q^2}{C_Z(1)} + \ln \frac{C_Z(1)}{\tilde{C}_Z(1)} \right] + \right. \\
& + \frac{2}{M_Z^2} \left[ \left[ \frac{h(x, y)}{C_Z(\xi)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_Z(\xi)} \right] - \left[ \frac{h(x, y)}{C_Z(1)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_Z(1)} \right] - \right. \\
& - \left[ 6g_Z(1) - 12u(x, y) + 3(x+y)q^2 + m_i^2 - m_l^2 - q^2 \right] \ln \frac{C_Z(1)}{M_Z^2} + \\
& + \left[ 6g_Z(1) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_Z(1)}{M_Z^2} + \\
& + \left[ 6g_Z(\xi) - 12u(x, y) + 3(x+y)q^2 + m_i^2 - m_l^2 - q^2 \right] \ln \frac{C_Z(\xi)}{M_Z^2} - \\
& \left. \left. - \left[ 6g_Z(\xi) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_Z(\xi)}{M_Z^2} \right] \right\} \quad (4.40)
\end{aligned}$$

La partie soustraite en  $\gamma_\mu \gamma_5$  pour  $V = W$  est (dans le MS)

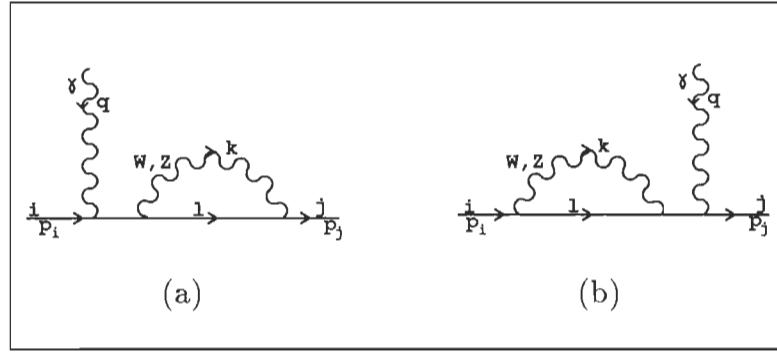
$$\begin{aligned}
S_{5W}^{(5)} = & 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{16} |V_{li}|^2 \left\{ - [2 + 2(\xi - 1)] \Delta - 7 + \right. \\
& + \frac{8}{3} (\xi - 1) + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 4 \left[ \frac{\tilde{f}(x, y)}{\tilde{C}_W(1)} + \right. \right. \\
& + \ln \frac{\tilde{C}_W(1)}{M_W^2} \left. \right] + \frac{2}{M_W^2} \left[ \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_W(\xi)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_W(1)} - \right. \\
& - \left[ 6g_W(1) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_W(1)}{M_W^2} - \\
& - \left. \left. \left[ 6g_W(\xi) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_W(\xi)}{M_W^2} \right] \right\} \quad (4.41)
\end{aligned}$$

La partie soustraite en  $\gamma_\mu \gamma_5$  pour  $V = Z$  est (dans le MS)

$$\begin{aligned}
S_{5Z}^{(5)} = & 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \left\{ - [2 + 2(\xi - 1)] \Delta - 7 + \right. \\
& + \frac{8}{3} (\xi - 1) + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 4 \left[ \frac{\tilde{f}(x, y)}{\tilde{C}_Z(1)} + \right. \right. \\
& \left. \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \frac{\tilde{C}_Z(1)}{M_Z^2} \Big] + \frac{2}{M_Z^2} \left[ \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_Z(\xi)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_Z(1)} - \right. \\
& - \left[ 6g_Z(1) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_Z(1)}{M_Z^2} - \\
& - \left. \left[ 6g_Z(\xi) - 12\tilde{u}(x, y) + m_i^2 - m_l^2 \right] \ln \frac{\tilde{C}_Z(\xi)}{M_Z^2} \right] \Big\} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

## §2 Diagrammes de type 6



**Figure 4.6.** La contribution des énergies propres dues aux bosons de jauge massifs au vertex électromagnétique

Les amplitudes associées à ces diagrammes sont:

$$M_6^a = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ i(a_{j,l}^* \gamma_\alpha \gamma_L + b_{j,l}^* \gamma_\alpha \gamma_R) \frac{i(p_j - k + m_l)}{(p_j - k)^2 - m_l^2 + i\epsilon} \cdot \right.$$

$$\cdot i(a_{li} \gamma_\beta \gamma_L + b_{li} \gamma_\beta \gamma_R) \frac{i(p_j + m_i)}{p_j^2 - m_i^2 + i\epsilon} i a_i \gamma_\mu \cdot$$

$$\left. \cdot \frac{i}{k^2 - M_V^2} \left( -g^{\alpha\beta} + (1 - \xi) \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2 - \xi M_V^2} \right) \right] u(p_i) (4.43)$$

$$M_6^b = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ i a_j \gamma_\mu \frac{i(p_i + m_j)}{p_i^2 - m_j^2 + i\epsilon} i(a_{j,l}^\star \gamma_\alpha \gamma_L + b_{j,l}^\star \gamma_\alpha \gamma_R) \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{i(p_i - k + m_l)}{(p_i - k)^2 - m_l^2 + i\epsilon} i(a_{l,i} \gamma_\beta \gamma_L + b_{l,i} \gamma_\beta \gamma_R) \cdot$$

$$\left. \cdot \frac{i}{k^2 - M_V^2} \left( -g^{\alpha\beta} + (1 - \xi) \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2 - \xi M_V^2} \right) \right] u(p_i) \quad (4.44)$$

Les résultats de la trace pour ces deux diagrammes sont égaux et ont la valeur:

$$T_{6a} = 0 = T_{6b} \quad (4.45)$$

Donc, la contribution au moment anapolaire de ces deux diagrammes est nulle.

$$F_6^A = F_{6a}^A + F_{6b}^A = 0 \quad (4.46)$$

Avec les couplages généraux la partie soustraite est:

$$\begin{aligned} S_{6V}^{(5)} = & 2i \frac{i}{4(4\pi)^2} q_i (A_{il}^{V*} B_{li}^V + B_{il}^{V*} A_{li}^V) \left\{ \left[ 2 + 2(\xi - 1) \right] \Delta - \right. \\ & - 5 - \frac{7}{3}(\xi - 1) - \int_0^1 dx \left[ 4(1-x) \ln \frac{C_V^S(1)}{M_V^2} + \right. \\ & + \frac{2}{M_V^2} \left[ [x^2(1-x)m_i^2 - (3x+1)C_V^S(1)] \ln \frac{C_V^S(1)}{M_V^2} - \right. \\ & \left. \left. - [x^2(1-x)m_i^2 - (3x+1)C_V^S(\xi)] \ln \frac{C_V^S(\xi)}{M_V^2} \right] \right\} \quad (4.47) \end{aligned}$$

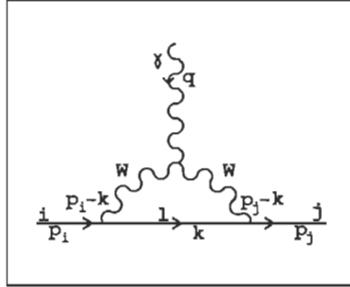
Pour obtenir le résultat dans le MS on utilise les constantes de couplage explicités au diagramme précédent et on obtient:

$$\begin{aligned} S_{6W}^{(5)} = & i \frac{i}{4(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{2} |V_{li}|^2 \left\{ \left[ 2 + 2(\xi - 1) \right] \Delta - \right. \\ & - 5 - \frac{7}{3}(\xi - 1) - \int_0^1 dx \left[ 4(1-x) \ln \frac{C_W^S(1)}{M_W^2} + \right. \\ & + \frac{2}{M_W^2} \left[ [x^2(1-x)m_i^2 - (3x+1)C_W^S(1)] \ln \frac{C_W^S(1)}{M_W^2} - \right. \\ & \left. \left. - [x^2(1-x)m_i^2 - (3x+1)C_W^S(\xi)] \ln \frac{C_W^S(\xi)}{M_W^2} \right] \right\} \quad (4.48) \end{aligned}$$

$$S_{6Z}^{(5)} = 2i \frac{i}{4(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \left\{ \left[ 2 + 2(\xi - 1) \right] \Delta - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -5 - \frac{7}{3}(\xi - 1) - \int_0^1 dx \left[ 4(1-x) \ln \frac{C_Z^S(1)}{M_Z^2} + \right. \\
& + \frac{2}{M_Z^2} \left[ [x^2(1-x)m_i^2 - (3x+1)C_Z^S(1)] \ln \frac{C_Z^S(1)}{M_Z^2} - \right. \\
& \left. \left. - [x^2(1-x)m_i^2 - (3x+1)C_Z^S(\xi)] \ln \frac{C_Z^S(\xi)}{M_Z^2} \right] \right] \quad (4.49)
\end{aligned}$$

### §3 Diagramme 7



**Figure 4.7.** Deuxième contribution des bosons massifs de jauge au vertex électromagnétique

L'amplitude associée à ce diagramme est:

$$\begin{aligned}
M_7 = i \bar{u}(p_j) \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} & \left[ i \gamma_\rho (a_{j,l}^* \gamma_L + b_{j,l}^* \gamma_R) \frac{i(k+m_l)}{k^2 - m_l^2 + i\epsilon} i \gamma_\epsilon (a_{l,i} \gamma_L + b_{l,i} \gamma_R) \cdot \right. \\
& \cdot i \Delta_W^{\alpha\epsilon}(p_i - k) \cdot i \Delta_W^{\beta\rho}(p_j - k) (-i a) \left( g_{\alpha\beta}(p_i + p_j - 2k)_\mu - \right. \\
& \left. \left. - g_{\mu\alpha}(p_i - q - k)_\beta - g_{\mu\beta}(p_j + q - k)_\alpha \right) \right] u(p_i) \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Avec l'amplitude écrite de cette manière, on constate que ce diagramme brise la conservation du courant, le principal coupable étant le couplage  $WW\gamma$ . On peut isoler la partie qui conserve le courant

$$-i a \left( g_{\alpha\beta}(p_i + p_j - 2k)_\mu + g_{\mu\alpha}q_\beta - g_{\mu\beta}q_\alpha \right) \quad (4.51)$$

et la partie qui le brise:

$$-i a \left( -g_{\mu\alpha}(p_i - k)_\beta - g_{\mu\beta}(p_j - k)_\alpha \right) \quad (4.52)$$

Dans les calculs qui suivent cette séparation n'est pas vraiment utile, car elle introduit des divergences fictives et beaucoup de termes non physiques qui se réduisent quand on ajoute les deux parties. Les résultats des traces (encore avec les deux parties séparées) sont:

$$\begin{aligned}
T_7^{cc} = & 2ia \frac{i}{(4\pi)^2} q^2 (q^2 - 4m_i^2) (A_{il}^\star B_{li} + B_{il}^\star A_{li}) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 2 \left[ \frac{p^{cc}(x, y)}{D_W(1, 1)} - \right. \right. \\
& - \left. \frac{\tilde{p}^{cc}(x, y)}{\tilde{D}_W(1, 1)} \right] + 6 \left[ (x + \xi y) \ln \frac{D_W(1, \xi)}{\tilde{D}_W(1, \xi)} + (\xi x + y) \ln \frac{D_W(\xi, 1)}{\tilde{D}_W(\xi, 1)} \right] + \\
& + \frac{3}{M_W^4} \left[ \sum_{\alpha=\beta} - \sum_{\alpha \neq \beta} \right] d(\alpha, \beta) (4d(\alpha, \beta) - 12\tilde{u}(x, y)) \ln \frac{D_W(\alpha, \beta)}{\tilde{D}_W(\alpha, \beta)} - \\
& - \frac{q^2}{M_W^2} \left[ 3(x - y) \ln \frac{D_W(1, \xi)}{D_W(\xi, 1)} - u(x, y) \left( \frac{1+x-y}{D_W(1, \xi)} + \frac{1-x+y}{D_W(\xi, 1)} \right) \right] - \\
& - 3 \frac{q^2}{M_W^4} \left[ \sum_{\alpha=\beta} - \sum_{\alpha \neq \beta} \right] d(\alpha, \beta) (2 - x - y + 12xy) \ln \frac{D_W(\alpha, \beta)}{M_W^2} - \\
& - 4 \ln \frac{D_W(1, 1)}{\tilde{D}_W(1, 1)} + \frac{q^2}{M_W^4} \left[ (2 - x - y) (4u(x, y) + (1 - x - y)m_i^2) + \right. \\
& \left. + 26xy(u(x, y) + \tilde{u}(x, y)) \right] \ln \frac{D_W(1, 1)D_W(\xi, \xi)}{D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)} - \frac{1}{M_W^2} \left[ 8\tilde{u}(x, y) + \right. \\
& \left. + 2(1 - x - y)(m_i^2 - 3m_l^2) \right] \ln \frac{\tilde{D}_W^2(1, 1)D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)}{D_W^2(1, 1)\tilde{D}_W(1, \xi)\tilde{D}_W(\xi, 1)} - \\
& - \frac{q^2}{M_W^2} (8xy - 2) \ln \frac{D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)}{D_W^2(1, 1)} + \frac{2}{M_W^4} \left[ 13\tilde{u}^2(x, y) - \right. \\
& \left. - (1 - x - y)^2 m_i^4 \right] \ln \frac{D_W(1, 1)D_W(\xi, \xi)\tilde{D}_W(1, \xi)\tilde{D}_W(\xi, 1)}{\tilde{D}_W(1, 1)\tilde{D}_W(\xi, \xi)D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)} \Big\} \quad (4.53)
\end{aligned}$$

$$T_7^{nc} = 2ia \frac{i}{(4\pi)^2} q^2 (q^2 - 4m_i^2) (A_{il}^\star B_{li} + B_{il}^\star A_{li}) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 2 \left[ \frac{p^{nc}(x,y)}{D_W(1,1)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\tilde{p}^{nc}(x,y)}{\tilde{D}_W(1,1)} \right] - 15 \left[ (x + \xi y) \ln \frac{D_W(1,\xi)}{\tilde{D}_W(1,\xi)} + (\xi x + y) \ln \frac{D_W(\xi,1)}{\tilde{D}_W(\xi,1)} \right] \right. \\ \left. + \frac{2}{M_W^2} u(x,y) \left[ u(x,y) - (1-x-y) \left( m_i^2 - \frac{q^2}{2} \right) \right] \left[ \frac{2}{D(1,1)} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{D(1, \xi)} - \frac{1}{D(\xi, 1)} \Big] - (8 + 30(x + y)) \ln \frac{D_W(1, 1)}{\tilde{D}_W(1, 1)} - \\
& - \frac{2}{M_W^2} \tilde{u}(x, y) (\tilde{u}(x, y) - (1 - x - y)m_i^2) \Big[ \frac{2}{\tilde{D}(1, 1)} - \frac{1}{\tilde{D}(1, \xi)} - \\
& - \frac{1}{\tilde{D}(\xi, 1)} \Big] + \frac{1}{M_W^2} \Big[ 28\tilde{u}(x, y) - 5(1 - x - y)m_i^2 - \\
& - 15(1 - x - y)m_l^2 \Big] \ln \frac{\tilde{D}_W^2(1, 1)D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)}{D_W^2(1, 1)\tilde{D}_W(1, \xi)\tilde{D}_W(\xi, 1)} - \\
& - \frac{3}{M_W^4} \left[ \sum_{\alpha=\beta} - \sum_{\alpha \neq \beta} \right] d(\alpha, \beta) (4d(\alpha, \beta) - 12\tilde{u}(x, y)) \ln \frac{D_W(\alpha, \beta)}{\tilde{D}_W(\alpha, \beta)} + \\
& + 3 \frac{q^2}{M_W^4} \left[ \sum_{\alpha=\beta} - \sum_{\alpha \neq \beta} \right] d(\alpha, \beta) (1 - x - y + 12xy) \ln \frac{D_W(\alpha, \beta)}{M_W^2} + \\
& + \frac{q^2}{M_W^2} [28xy - 3(x + y) + 2] \ln \frac{D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)}{D_W^2(1, 1)} - \\
& - \frac{q^2}{M_W^4} \left[ (1 - x - y)^2 m_i^2 + 26xy(u(x, y) + \tilde{u}(x, y)) + \right. \\
& \left. + 4(1 - x - y)u(x, y) \right] \ln \frac{D_W(1, 1)D_W(\xi, \xi)}{D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)} - \frac{2}{M_W^4} \left[ 13\tilde{u}^2(x, y) - \right. \\
& \left. - (1 - x - y)^2 m_i^4 \right] \ln \frac{D_W(1, 1)D_W(\xi, \xi)\tilde{D}_W(1, \xi)\tilde{D}_W(\xi, 1)}{\tilde{D}_W(1, 1)\tilde{D}_W(\xi, \xi)D_W(1, \xi)D_W(\xi, 1)} \Big\} \quad (4.54)
\end{aligned}$$

On a utilisé les notations:

$$\begin{aligned}
d(\alpha, \beta) &= (1 - x - y)m_l^2 + (\alpha x + \beta y)M_W^2 \\
p^{cc} &= -(x + y)q^2 \\
p^{nc} &= 2[(x + y)(1 - x - y)m_i^2 + xyq^2] - (x + y)q^2 \\
\tilde{p}^{nc} &= 2(x + y)(1 - x - y)m_i^2 \\
p &= p^{cc} + p^{nc} \\
\tilde{p} &= \tilde{p}^{nc}
\end{aligned} \quad (4.55)$$

En utilisant ces expressions et celles des couplages donnés dans la première classe de diagrammes, on obtient l'expression de la contribution au moment

anapolaire de ce diagramme:

$$\begin{aligned}
F_7^A = & -i \frac{i}{4(4\pi)^2} e_W \frac{g^2}{2q^2} \sum_l |V_{li}|^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 2 \left[ \frac{p(x,y)}{D_W(1,1)} - \frac{\tilde{p}(x,y)}{\tilde{D}_W(1,1)} \right] - \right. \\
& - 9 \left[ (x + \xi y) \ln \frac{D_W(1,\xi)}{\tilde{D}_W(1,\xi)} + (\xi x + y) \ln \frac{D_W(\xi,1)}{\tilde{D}_W(\xi,1)} \right] + \\
& + \frac{2}{M_W^2} u(x,y) \left[ u(x,y) - (1-x-y) \left( m_i^2 - \frac{q^2}{2} \right) \right] \left[ \frac{2}{D(1,1)} - \right. \\
& - \frac{1}{D(1,\xi)} - \frac{1}{D(\xi,1)} \left. \right] - [12 - 18(x+y)] \ln \frac{D_W(1,1)}{\tilde{D}_W(1,1)} + \\
& + \frac{q^2}{M_W^2} \left[ 20xy - 3(x+y) + 4 \right] \ln \frac{D_W(1,\xi) D_W(\xi,1)}{D_W^2(1,1)} + \\
& + \frac{q^2}{M_W^4} \left[ 4u(x,y) + (1-x-y)m_i^2 \right] \ln \frac{D_W(1,1) D_W(\xi,\xi)}{D_W(1,\xi) D_W(\xi,1)} - \\
& - \frac{2}{M_W^2} \tilde{u}(x,y) \left[ \tilde{u}(x,y) - (1-x-y)m_i^2 \right] \left[ \frac{2}{\tilde{D}(1,1)} - \frac{1}{\tilde{D}(1,\xi)} - \right. \\
& - \frac{1}{\tilde{D}(\xi,1)} \left. \right] + \frac{1}{M_W^2} \left[ 20\tilde{u}(x,y) - 7(1-x-y)m_i^2 - \right. \\
& - 9(1-x-y)m_l^2 \left. \right] \ln \frac{\tilde{D}_W^2(1,1) D_W(1,\xi) D_W(\xi,1)}{D_W^2(1,1) \tilde{D}_W(1,\xi) \tilde{D}_W(\xi,1)} - \\
& \left. - 3 \frac{q^2}{M_W^4} \left[ \sum_{\alpha=\beta} - \sum_{\alpha \neq \beta} \right] d(\alpha, \beta) \ln \frac{D_W(\alpha, \beta)}{M_W^2} \right\} \quad (4.56)
\end{aligned}$$

La partie soustraite est:

$$\begin{aligned}
S_7^{(5)} = & i \frac{i}{4(4\pi)^2} e_W \frac{g^2}{2} \sum_l |V_{li}|^2 \left\{ -[6 + 3(\xi - 1)] \Delta + 13 + \frac{9}{2}(\xi - 1) + \right. \\
& + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 9 \left[ (x + \xi y) \ln \frac{\tilde{D}_W(1,\xi)}{M_W^2} + (\xi x + y) \ln \frac{\tilde{D}_W(\xi,1)}{M_W^2} \right] - \right. \\
& - \frac{2}{M_W^2} \tilde{u}(x,y) \left[ \tilde{u}(x,y) - (1-x-y)m_i^2 \right] \left[ \frac{2}{\tilde{D}(1,1)} - \frac{1}{\tilde{D}(1,\xi)} - \right. \\
& - \frac{1}{\tilde{D}(\xi,1)} \left. \right] - 2 \frac{\tilde{p}(x,y)}{\tilde{D}_W(1,1)} + [12 - 18(x+y)] \ln \frac{\tilde{D}_W(1,1)}{M_W^2} - \\
& \left. - \frac{1}{M_W^2} \left[ 20\tilde{u}(x,y) - (1-x-y)(7m_i^2 + 9m_l^2) \right] \ln \frac{\tilde{D}_W(1,\xi) \tilde{D}_W(\xi,1)}{\tilde{D}_W^2(1,1)} \right\} \quad (4.57)
\end{aligned}$$

◊ *Remarque:*

Si on ajoute les parties soustraites des deux dernières sous-classes de diagrammes on constate qu'on n'obtient pas une quantité finie; donc pas question de conservation du courant. Si on tient compte que  $e_W = q_i - q_l$ , la partie infinie est alors:

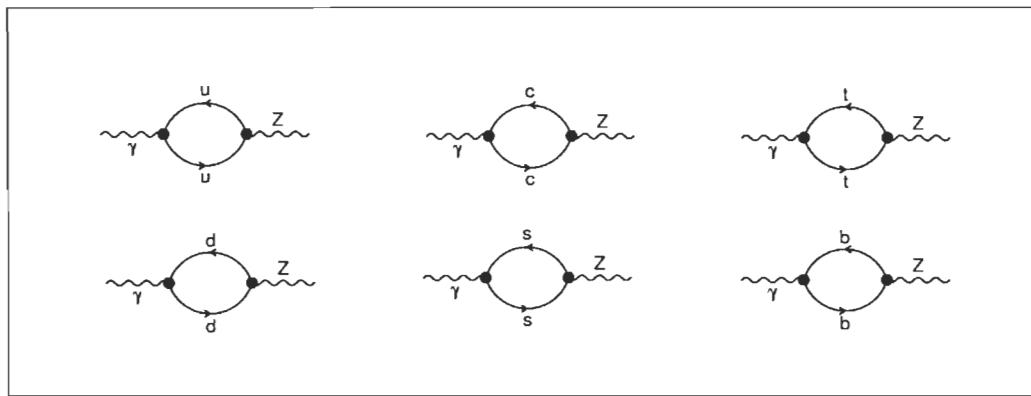
$$K = i \frac{i}{4(4\pi)^2} e_W \frac{g^2}{2} \sum_l |V_{li}|^2 \left\{ - [4 + (\xi - 1)] \Delta \right\} \quad (4.58)$$

où l'infinié est présente dans  $\Delta$  (4.10). On va voir que cette quantité est réduite par une partie du mélange  $\gamma - Z$ .

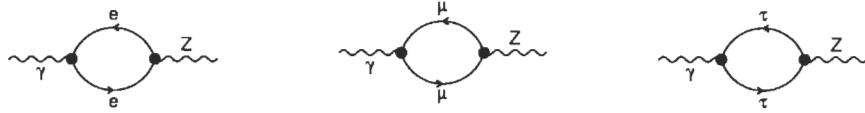
#### 4.2. Mélange $\gamma - Z$

La deuxième classe de diagrammes est constituée par le mélange  $\gamma - Z$ . On s'attend à une dépendance au moins en  $q^2$ , où  $q$  est l'impulsion du photon incident. Si on fait la transformée de Fourier d'une telle quantité, le carré de l'impulsion devient une double dérivée, donc représente une interaction de contact, exactement comme le moment anapolaire.

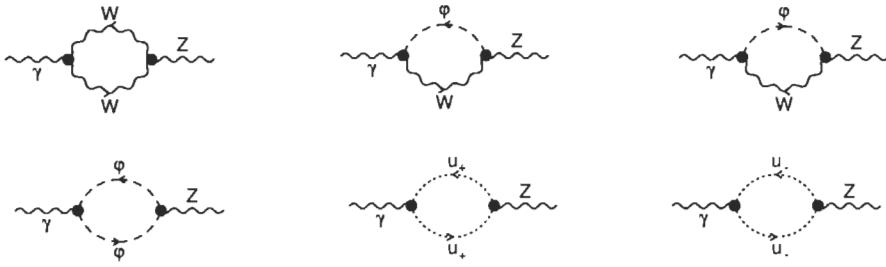
Au niveau des arbres, il n'existe pas de transition entre le photon et le boson  $Z$ . Donc cette transition peut être générée au niveau d'au moins une boucle. Les diagrammes qui contribuent sont les suivants:



**Figure 4.9.** La contribution des quarks au mélange  $\gamma - Z$



**Figure 4.10.** La contribution des leptons au mélange  $\gamma - Z$



**Figure 4.11.** La contribution des  $W$ , Higgs et fantômes au mélange  $\gamma - Z$

À première vue on peut penser que ce mélange a une structure similaire à la polarisation du vide de QED. Là, l'identité de Ward-Takahashi nous dit que les calculs doivent mener à une structure transverse, i.e. proportionnelle au tenseur de polarisation ( $q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu$ ). Mais en QED, on peut utiliser l'identité de Ward-Takahashi parce que la conservation du courant est explicite pour le vertex et la polarisation du vide. Ce n'est plus le cas dans le MS car les bosons de jauge ont une masse. Dans ce cas on sait dès le début qu'on va obtenir pour le tenseur qui représente le mélange  $\gamma - Z$  une expression qui n'est pas transverse. Pour l'instant on va se contenter de l'écrire sous la forme:

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = \mathcal{A}g_{\mu\nu} + \mathcal{B}q_\mu q_\nu \quad (4.59)$$

Le fait que ces diagrammes brisent la conservation du courant électromagnétique

ne signifie pas que le courant n'est pas conservé dans la somme entre le vertex corrigé et le mélange. La partie du vertex qui brise la conservation du courant dans un élément de matrice va se combiner avec la partie analogue du mélange  $\gamma - Z$  et ils vont donner exactement zéro [15]. Mais, puisque le moment anapolaire n'apparaît pas dans un élément de matrice, on n'a aucune raison de penser que la partie transverse du mélange  $\gamma - Z$  va amener des changements majeurs.

La méthode qu'on suit ici est différente de celle utilisée pour les autres diagrammes. Elle nous amène à une expression plus simple à manipuler que dans le cas où on fait la séparation du propagateur du boson  $W$ . Dans ce cas on se retrouve avec des intégrales doubles. Cependant, les calculs montrent qu'on peut mettre ce résultat sous la forme d'une somme entre un tenseur de polarisation et un terme qui n'a pas de  $q^2$  comme facteur commun, mais la masse du boson  $W$ .

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) + M_W^2 g_{\mu\nu} \tilde{\Gamma}' \quad (4.60)$$

$$\Pi(q^2) = \Pi^b(q^2) + \Pi^f(q^2) \quad (4.61)$$

où  $\Pi^b(q^2)$  représente la contribution des bosons,  $\Pi^f(q^2)$  représente la contribution des fermions et  $\tilde{\Gamma}'$  représente la partie qui ne donne pas un tenseur de polarisation et qui provient des diagrammes avec des bosons. L'avantage d'écrire le résultat sous cette forme est de séparer la partie qui brise l'identité de Ward-Takahashi de celle qui ne la brise pas.

Même avec le résultat sous cette forme on a encore des problèmes. On ne peut pas éliminer le deuxième terme par une simple procédure de renormalisation, parce que le résultat va dépendre du schéma de renormalisation choisi. De plus, si on ne peut pas éliminer ce terme de l'équation (4.60), on est forcé soit d'introduire une masse pour le photon [12] (ce qu'on ne veut pas), soit de ne faire aucune renormalisation <sup>†</sup>. Pour résoudre ce problème on suit le raisonnement de Kennedy et Lynn [15] et on fait un réarrangement des termes entre la fonction

---

<sup>†</sup> La renormalisation de la partie transverse ne peut pas se faire d'une manière unique, mais un mélange transverse amène d'un côté la conservation

du vertex et le mélange  $\gamma - Z$  en faisant une rotation des champs  $\gamma$  et  $Z$ . Par cette procédure, on va amener la partie du mélange qui brise la conservation du courant dans la fonction du vertex où elle doit se combiner.

Pour donner le résultat sous une forme plus courte on pose:

$$\begin{aligned}
 B_0(m_1, m_2) &= - \int_0^1 dx \ln \frac{m_1^2(1-x) + m_2^2x - x(1-x)q^2}{M_W^2} \\
 B_1(m_1, m_2) &= \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m_1^2(1-x) + m_2^2x - x(1-x)q^2}{M_W^2} \\
 (1-\xi) H(M_W^2, \xi) &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{M_W^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \frac{M_W^2(1+y(\xi-1))-x(1-x)q^2}{M_W^2(1+(x+y)(\xi-1))-x(1-x)q^2} \\
 C(M_W^2, \xi) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \frac{M_W^2(1+y(\xi-1))-x(1-x)q^2}{M_W^2} \\
 D(M_W^2, \xi) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy x(2-x) \ln \frac{M_W^2(1+y(\xi-1))-x(1-x)q^2}{M_W^2} \\
 \overline{C}(M_W^2, \xi) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x^2}{M_W^2(1+(x+y)(\xi-1))-x(1-x)q^2} \\
 F(M_W^2, \xi) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x^2(2-x)^2}{M_W^2(1+y(\xi-1))-x(1-x)q^2} \\
 G(M_W^2, \xi) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \frac{M_W^2(1+(x+y)(\xi-1))-x(1-x)q^2}{M_W^2} \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Avec ces notations la partie bosonique du mélange  $\gamma - Z$  avant la rotation des champs a la forme suivante:

$$\Pi^b(q^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} e g \cos \theta_W \left[ [3 - (\xi - 1)] \Delta + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}(\xi - 1) + 2B_0(M_W, M_W) - \right.$$

---

du courant et de l'autre un bon comportement du point de vue du groupe de renormalisation.

$$\begin{aligned}
& - B_0(\xi M_W, \xi M_W) - 10B_1(M_W, M_W) - \\
& - 2B_1(\xi M_W, \xi M_W) + (\xi - 1)[2C(M_W^2, \xi) - \\
& - 4D(M_W^2, \xi) + 2M_W^2 \bar{C}(M_W^2, \xi) - 2q^2 F(M_W^2, \xi)] - \\
& - (\xi - 1)^2 H(M_W^2, \xi)] + \\
& + \frac{i}{(4\pi)^2} e g \frac{1}{\cos \theta_W} \left[ \frac{1}{6} \Delta + \frac{1}{2} B_0(\xi M_W, \xi M_W) + 2B_1(\xi M_W, \xi M_W) - \right. \\
& \left. - 2M_W^2 (\xi - 1) \bar{C}(M_W^2, \xi) \right] \tag{4.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}' = \frac{i}{(4\pi)^2} e g \frac{1}{\cos \theta_W} & \left[ [2 + \frac{1}{2}(\xi - 1)] \Delta + 2B_0(M_W, \xi M_W) - \right. \\
& \left. - (\xi - 1)[2q^2 \bar{C}(M_W^2, \xi) + G(M_W^2, \xi)] \right] \tag{4.64}
\end{aligned}$$

La contribution fermionique est transverse et invariante de jauge. Avec les mêmes notations elle a la forme suivante:

$$\Pi^f(q^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} e g \sum_{f,c} q_f \tilde{A}_f^c \left[ -\frac{2}{3} [2\Delta - 1] + 8B_1(m_f, m_f) \right] \tag{4.65}$$

avec

$$\tilde{A}_f^c = \frac{1}{2 \cos \theta_W} (I_3^f - 2q_f \sin^2 \theta_W) \tag{4.66}$$

où  $q_f$  représente la charge du fermion dans la boucle en unités  $e$ ,  $A_f^c$  est le coefficient de  $\gamma_\mu$  dans le couplage  $Z$ -fermion. L'indice  $c$  signifie qu'on doit compter trois fois (le nombre de couleurs) la contribution de chaque quark et une fois la contribution de chaque lepton.  $I_3^f$  représente la troisième composante de l'isospin du fermion.

### 4.3. Réorganisation des termes

Comme on a vu dans le sous-chapitre précédent, le terme non transverse qui existe dans l'expression du mélange  $\gamma - Z$  nous empêche d'utiliser une procédure de renormalisation. Pour éliminer ce problème on fait une rotation des champs qui composent les bosons  $Z$  et  $A$ .

La partie du Lagrangien du MS qui est responsable de l'interaction entre les fermions et le troisième boson de jauge  $SU(2)_L$  est:

$$\mathcal{L} = g_0 I_3 \bar{\psi}_L A_3 \psi \quad (4.67)$$

On inclut la partie de la contribution de la première boucle qui n'a pas de  $\gamma_\mu \not{A}$  (car c'est elle qui nous intéresse pour le moment anapolaire) et on définit un "Lagrangien effectif":

$$\mathcal{L}^{eff} = g_0 I_3 (1 + g_0^2 \Gamma) \bar{\psi}_L A_3 \psi \quad (4.68)$$

où  $\Gamma$  représente la fonction du vertex  $ff\gamma$  généré par la première boucle. Elle ne contient plus de constantes de couplage. En éliminant toutes les puissances supérieures à deux on écrit:

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} + \Gamma' \quad (4.69)$$

$$g_0 (1 + g_0^2 \Gamma) = g_0 (1 + g_0^2 \tilde{\Gamma})(1 + g_0^2 \Gamma') = \tilde{g} (1 + g_0^2 \tilde{\Gamma}) \quad (4.70)$$

où on a défini  $\tilde{g} = g_0 (1 + g_0^2 \Gamma')$ . En utilisant cette nouvelle "constante de couplage" on définit les champs  $Z$  et  $A$  comme:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} (-g' B_\mu + \tilde{g} A_\mu^3) = -\tilde{s} B_\mu + \tilde{c} A_\mu^3 \\ A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} (\tilde{g} B_\mu + g' A_\mu^3) = \tilde{c} B_\mu + \tilde{s} A_\mu^3 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Le terme de masse pour le boson  $Z$  dans le Lagrangien, avant la redéfinition de la constante de couplage  $g_0 \rightarrow \tilde{g}$ , est:

$$\mathcal{L}_{M_Z} = -\frac{1}{8} v^2 (-g' B_\mu + g_0 A_\mu^3)(-g' B^\mu + g_0 A_3^\mu) \quad (4.72)$$

On exprime  $g_0$  en terme de  $\tilde{g}$  en gardant seulement le deuxième ordre dans le développement en série et on obtient:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{M_Z} &= -\frac{1}{8}v^2 \left[ -g' B_\mu + \tilde{g}(1 - \tilde{g}^2 \Gamma') A_\mu^3 \right] \left[ -g' B^\mu + \tilde{g}(1 - \tilde{g}^2 \Gamma') A_3^\mu \right] = \\ &= -\frac{1}{8}v^2 (\tilde{g}^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + 2\frac{1}{8}v^2 \tilde{g} \sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2} Z^\mu A_\mu^3 [\tilde{g}^2 \Gamma']\end{aligned}\quad (4.73)$$

On exprime le produit  $Z^\mu A_\mu^3$  en faisant la rotation inverse à l'équation (4.71) et on a:

$$Z^\mu A_\mu^3 = \frac{\tilde{g}}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} Z^\mu A_\mu + \frac{g'}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} Z^\mu Z_\mu \quad (4.74)$$

Donc le terme de masse devient:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{M_Z} &= -\frac{1}{8}v^2 (\tilde{g}^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + \\ &+ 2\frac{1}{8}v^2 \tilde{g} \left[ \frac{\tilde{g}}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} Z^\mu A_\mu + \frac{g'}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} Z^\mu Z_\mu \right] [\tilde{g}^2 \Gamma']\end{aligned}\quad (4.75)$$

On observe que cette procédure a introduit une partie de la fonction du vertex  $ff\gamma$  dans le mélange  $\gamma - Z$  (le terme en  $Z^\mu A_\mu$  dans le Lagrangien). Cependant, le changement  $g_0 \rightarrow \tilde{g}(1 - \tilde{g}^2 \Gamma')$  ne modifie pas directement l'expression déjà trouvée pour le mélange parce qu'on garde seulement la deuxième puissance dans la constante de couplage.

Les effets de la "redéfinition" des champs  $Z$  et  $A$  sur les charges et les masses des bosons de jauge sont:

$$\begin{aligned}e &= \frac{\tilde{g} g'}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} \\ M_Z^2 &= \frac{1}{4}v^2 (\tilde{g}^2 + g'^2) \\ M_W^2 &= \frac{1}{4}v^2 g'^2\end{aligned}\quad (4.76)$$

On a aussi les nouvelles définitions des fonctions de  $\theta_W$ :

$$\begin{aligned}\cos \theta_W &= \frac{\tilde{g}}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} \quad (= \tilde{c}) \\ \sin \theta_W &= \frac{g'}{\sqrt{\tilde{g}^2 + g'^2}} \quad (= \tilde{s})\end{aligned}\quad (4.77)$$

En tenant compte de cela, on peut écrire les changements introduits:

$$\begin{aligned}\Pi_{\gamma Z}^{\mu\nu} &\longrightarrow \Pi_{\gamma Z}^{\mu\nu} + eg \frac{M_W^2}{\cos \theta_W} g^{\mu\nu} \Gamma' \\ \Pi_{ZZ}^{\mu\nu} &\longrightarrow \Pi_{ZZ}^{\mu\nu} + 2e^2 \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W} g^{\mu\nu} \Gamma' \\ \Pi_{WW}^{\mu\nu} &\longrightarrow \Pi_{WW}^{\mu\nu} \\ \Pi_{\gamma\gamma}^{\mu\nu} &\longrightarrow \Pi_{\gamma\gamma}^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{4.78}$$

Dans ce qui suit, on est intéressé par la première équation (4.78). On fixe  $\Gamma'$  de telle façon qu'on élimine la partie non transverse du mélange  $\gamma - Z$ . On écrit:

$$\Gamma = \Gamma + \tilde{\Gamma}' - \tilde{\Gamma}' = \tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\tag{4.79}$$

où on a posé  $\tilde{\Gamma} = \Gamma + \tilde{\Gamma}'$ . La fonction du vertex se modifie comme suit:

$$\Gamma \longrightarrow \tilde{\Gamma} = \Gamma + \tilde{\Gamma}'\tag{4.80}$$

Par cette méthode de réarrangement des termes, tous les problèmes de transversalité et de "non conservation" du courant électromagnétique sont résolus. Le courant électromagnétique est conservé maintenant pour chaque classe de diagrammes à la fois.

Le Lagrangien effectif est:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{eff} &= \tilde{g}^3 I_3 \tilde{\Gamma}' \bar{\psi}_L \not{A}_3 \psi_L = \\ &= \tilde{g}^2 I_3 \tilde{\Gamma}' \bar{\psi} [e \not{A} + \tilde{g} \cos \theta_W] \gamma_L \psi\end{aligned}\tag{4.81}$$

Par conséquent, la contribution du  $\tilde{\Gamma}'$  au moment anapolaire est la suivante:

$$\begin{aligned}F_{\gamma-Z}^A &= 2i \operatorname{sgn}(I_3^i) \frac{i}{(4\pi)^2} e \frac{g^2}{16q^2} \left[ 4B_0(M_W, \xi M_W) - 4\tilde{B}_0(M_W, \xi M_W) - \right. \\ &\quad \left. - 2(\xi - 1)[2q^2 \bar{C}(M_W^2, \xi) + G(M_W^2, \xi) - \tilde{G}(M_W^2, \xi)] \right]\end{aligned}\tag{4.82}$$

La partie soustraite en  $\gamma_\mu \gamma_5$  est:

$$\begin{aligned}S^{(5)} &= 2i \operatorname{sgn}(I_3^i) \frac{i}{(4\pi)^2} e \frac{g^2}{16} \left[ [4 + (\xi - 1)] \Delta - 3 \left[ 3 + \frac{1}{2}(\xi - 1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 4\tilde{B}_0(M_W, \xi M_W) - 2(\xi - 1)\tilde{G}(M_W^2, \xi) \right]\end{aligned}\tag{4.83}$$

La partie transverse du mélange  $\gamma - Z$  contribue au moment anapolaire avec:

$$F_{tr}^A = -i \frac{g}{8 \cos \theta_W} I_3 \frac{1}{q^2 - M_Z^2} \left[ \frac{i}{(4\pi)^2} e g \left[ 8 \sum_{f,c} q_f \tilde{A}_f^c - \frac{1}{\cos \theta_W} - 6[3 - (\xi - 1)] \cos \theta_w \right] + 4[\Pi^b(q^2) + \Pi^f(q^2)] \right] \quad (4.84)$$

En ce moment, on a tous les ingrédients nécessaires pour écrire l'expression du moment anapolaire intrinsèque d'un fermion de spin 1/2 dans le MS. Elle est:

$$F_A = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \left\{ F_1^A + F_2^A + F_3^A + F_4^A + F_{5W}^A + F_{6W}^A + F_7^A + F_{5Z}^A + F_{6Z}^A + F_{\gamma-Z}^A + F_{tr}^A \right\} \quad (4.85)$$

◊ *Remarque:*

Si on ajoute l'équation (4.41) à l'équation (4.61) on constate que le terme infini se réduit. Par conséquent, la seule infinité qui reste est celle de la partie transverse du mélange  $\gamma - Z$ .

#### 4.4. Indépendance de jauge vs. dépendance de jauge

On continue les calculs des sous-chapitres précédents en calculant les intégrales sur les paramètres de Feynman. Cette fois on divise la première classe de diagrammes de telle manière qu'on puisse calculer leur somme facilement. Cette classification est la suivante:

- <sub>1</sub> Diagrammes de type fig. 4.1 et fig. 4.5
- <sub>2</sub> Diagrammes avec des bosons  $Z$
- <sub>3</sub> Le reste des diagrammes de type fonction à trois points
- <sub>4</sub> La partie transverse du mélange  $\gamma - Z$

Cette classification se base sur des similarités dans les coefficients de couplage. La première sous-classe a comme coefficient  $q_l$  pendant que la deuxième a  $(c_L^2 - c_R^2)$ , donc ils ne peuvent pas s'ajouter d'une manière naturelle. La troisième sous-classe a comme coefficient  $e_W$ , donc on peut tirer la même conclusion.

Pour les deux premières sous-classes on peut faire un seul calcul et on particularise à la fin. Puis, on va faire les calculs premièrement pour le neutrino, c'est à dire avec la masse entrante nulle. Les propriétés spécifiques du résultat obtenu dans cette limite vont être caractéristiques pour n'importe quel autre lepton ou quark puisqu'elles sont liées par la symétrie du MS.

## §1 Les deux premières sous-classes

Le résultat pour la deuxième sous-classe s'obtient du résultat pour la première en prenant  $m_i = m_l$ . Dans le cas  $m_i = 0$  cela ne sera pas possible, mais si on revient et on considère  $m_i \neq 0$  la limite va être régularisée.

D'après les considérations faites dans le sous-chapitre 4.1, la partie qui dépend de  $\xi$  dans les diagrammes 1 et 5 dans la limite  $m_i = 0$  et pour un  $m_l$  fixe est:

$$G_1(\xi) = 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 q^2} |V_{li}|^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \frac{2}{M_W^2} \left[ \frac{h(x, y)}{C_W(\xi)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_W(\xi)} \right] + \right. \\ \left. + 6g_W(\xi) \ln \frac{C_W(\xi)}{\tilde{C}_W(\xi)} + q^2 \left[ -12xy + 3(x+y) - 1 \right] \ln \frac{C_W(\xi)}{M_W^2} \right\} \quad (4.86)$$

En utilisant la définition de  $h(x, y)$  et  $\tilde{h}(x, y)$  et le fait que  $m_i = 0$  on peut trouver:

$$\frac{h(x, y)}{C_V(\xi)} - \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_V(\xi)} = \frac{q^2}{C_V(\xi)} \left[ xy \frac{\tilde{h}(x, y)}{\tilde{C}_V(\xi)} - xy \frac{m_l^4}{\tilde{C}_V(\xi)} + xy(1-x)(1-y)q^2 \right] \quad (4.87)$$

Si on pose:

$$I_n = (1-x-y) \ln \frac{C_V(\xi)}{\tilde{C}_V} \quad (4.88)$$

et

$$-12xy + 3(x+y) - 1 = 2[1 - 6x(1-x)] - 3(1-4x)(1-x-y) \quad (4.89)$$

on obtient pour  $G_1$  la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 G_1 = & 2i \frac{i}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 q^2 M_V^2} |V_{li}|^2 \\
 & \cdot \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ 4 \left[ \frac{q^2}{2C_V(\xi)} \left[ xy(1-x)(1-y)q^2 - xy \frac{m_l^4}{\tilde{C}_V(\xi)} \right] + \right. \right. \\
 & + q^2 \frac{m_l^2 - \xi M_V^2 - xq^2}{2C_V(\xi)} \left[ 2[1-6x(1-x)](1-x-y) - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3}{2}(1-4x)(1-x-y)^2 \right] + 3 \left[ m_l^2 I_0 - (m_l^2 - \xi M_V^2) I_1 \right] \right] + \\
 & \left. + q^2 \int_0^1 dx (1-x) [1+3x-12x(1-x)] \ln \frac{xm_l^2 + (1-x)\xi M_V^2}{M_V^2} \right\} \quad (4.90)
 \end{aligned}$$

Avec les notations:

$$\begin{aligned}
 a(\xi) &= m_l^2 - xq^2 - \xi M_V^2 \\
 b(\xi) &= xm_l^2 + (1-x)\xi M_V^2 \\
 c(\xi) &= b(\xi) + (1-x)a(\xi) \\
 \tilde{a}(\xi) &= m_l^2 - \xi M_V^2 \\
 c(\xi) &= b(\xi) + (1-x)\tilde{a}(\xi) \quad (4.91)
 \end{aligned}$$

on peut calculer l'intégrale sur le paramètre  $y$  et on obtient:

$$\begin{aligned}
 G_1 = & 4i \frac{i}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 M_V^2} |V_{li}|^2 \int_0^1 dx \left\{ \frac{3}{2}(1-x)^2(1-4x) - \right. \\
 & - \frac{1}{4}(1-x) \left[ 8[1-6x(1-x)] - 3(1-x)(1-4x) \right] + \\
 & + \frac{3}{2}(1-x)(1-2x) \frac{b(\xi)}{a(\xi)} + x(1-x)^2 q^2 \frac{2b(\xi) + (1+x)a(\xi)}{2a^2(\xi)} + \\
 & + \left[ 2[1-6x(1-x)] \frac{m_l^2}{a(\xi)} - \frac{3}{2}(1-2x) \frac{m_l^4}{a^2(\xi)} - x(1-x)q^2 \left[ \frac{b^2(\xi)}{a^3(\xi)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{a^2(\xi)} \left[ -2(1-3x)m_l^2 + [1+x-9x(1-x)]a(\xi) \right] \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2}x(1-x)(1-6x)q^2 \Big] \Big] \ln \frac{c(\xi)}{b(\xi)} + 2\frac{m_l^4}{q^2} \left( \frac{1}{a(\xi)} \ln \frac{c(\xi)}{b(\xi)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\tilde{a}(\xi)} \ln \frac{\tilde{c}(\xi)}{b(\xi)} \right) + \frac{1}{2}(1-x)[1+3x-12x(1-x)] \ln \frac{b(\xi)}{M_V^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

Une quantité intrinsèque d'une particule quelconque s'obtient dans la limite  $q^2 = 0$ . Si on prend cette limite dans la dernière expression de  $G_1$  on peut calculer "facilement" l'intégrale sur  $x$  et on obtient:

$$G_1 = -4 \frac{1}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 M_V^2} |V_{li}|^2 \left( -\frac{7}{24} \right) \quad (4.93)$$

On constate que la partie qu'on pensait dépendante de jauge ne l'est pas. Puisque cette qualité ne doit pas dépendre de la masse de la particule incidente, on peut conclure que la contribution qui vient des figures 4.1 et 4.5 est invariante de jauge. Dans cette situation, on peut prendre  $\xi = 1$  et faire les calculs avec  $m_i \neq 0$ , en gardant encore  $m_l$  fixe. On a à calculer l'intégrale:

$$\begin{aligned} F_A^{lp} = & -4 \frac{1}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 M_V^2} |V_{li}|^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ -2(1-x-y) \frac{M_V^2}{C_V(1)} + \right. \\ & \left. + xy \frac{m_i^2 - m_l^2 - 2M_V^2}{C_V(1)} \left( 1 - \frac{\tilde{f}(x,y)}{\tilde{C}_V(1)} \right) + + \frac{2M_V^2 - m_i^2 + m_l^2}{q^2} \ln \frac{C_V(1)}{\tilde{C}_V(1)} \right\} \end{aligned} \quad (4.94)$$

On pose de nouveau  $q^2 = 0$ , on fait le changement de variable et la notation:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\rho(1+2\eta) \\ y &= \frac{1}{2}\rho(1-2\eta) \\ \mathcal{N}(\rho) &= \rho m_l^2 + (1-\rho)(M_V^2 - \rho m_i^2) \end{aligned} \quad (4.95)$$

De cette manière les limites d'intégration ne dépendent plus des paramètres et l'intégrale sur  $\eta$  est triviale. On a après quelques manipulations:

$$F_A^{lp} = -4 \frac{1}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 M_V^2} |V_{li}|^2 \int_0^1 d\rho \frac{\rho}{\mathcal{N}(\rho)} \left\{ -2(1-\rho)M_V^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \rho^2 (m_i^2 - m_l^2 - 2M_V^2) \left[ 1 - \frac{(1-\rho)^2 m_i^2 - m_l^2}{\mathcal{N}(\rho)} \right] + \\
& + (1-\rho)(m_i^2 - m_l^2 - 2M_V^2) \left[ \frac{1}{2} \rho - \right. \\
& \left. - \frac{1}{6} \rho^2 \frac{m_l^2 - (1-2\rho)m_i^2 - M_V^2}{\mathcal{N}(\rho)} \right] \Big\} = \\
= & - 4 \frac{1}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{4 M_W^2} |V_{li}|^2 \int_0^1 d\rho \frac{\rho}{\mathcal{N}(\rho)} \left\{ -2(1-\rho)M_V^2 + \right. \\
& \left. + (m_i^2 - m_l^2 - 2M_V^2) \left[ \frac{1}{3} \rho^2 + \frac{1}{2} \rho(1-\rho) \right] \right\} \quad (4.96)
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale on doit faire une distinction entre les cas  $m_i < \frac{M_V}{2}$  et  $m_i > \frac{M_V}{2}$ .

**Cas**  $m_i < \frac{M_V}{2}$

On pose:

$$\begin{aligned}
\rho_{1,2} &= \frac{M_V^2 + m_i^2 - m_l^2 \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2m_i^2} \quad \text{avec} \quad (4.97) \\
\mathcal{D} &= (m_i + m_l + M_V)(-m_i + m_l + M_V)(m_i - m_l + M_V)(-m_i - m_l + M_V)
\end{aligned}$$

Le résultat est:

$$\begin{aligned}
F_A^{lp} &= -4 \frac{1}{(4\pi)^2} q_l \frac{g^2}{16 M_V^2} |V_{li}|^2 \left\{ \frac{1}{6} (m_i - m_l - 2M_V) \left[ \frac{5}{2} - \rho_1 - \rho_2 + \right. \right. \\
&+ \frac{\rho_1^2(3-\rho_1)}{\rho_1 - \rho_2} \ln \left| \frac{1-\rho_1}{\rho_1} \right| - \frac{\rho_2^2(3-\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2} \ln \left| \frac{1-\rho_2}{\rho_2} \right| \left. \right] \\
&\left. - 2M_V^2 \left[ -1 + \frac{\rho_1(1-\rho_1)}{\rho_1 - \rho_2} \ln \left| \frac{1-\rho_1}{\rho_1} \right| - \frac{\rho_2(1-\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2} \ln \left| \frac{1-\rho_2}{\rho_2} \right| \right] \right\} \quad (4.98)
\end{aligned}$$

Dans la limite  $m_i \rightarrow 0$  ce résultat coïncide avec des calculs antérieurs [17].

Pour obtenir d'ici la contribution des bosons  $W$  on pose  $M_V \equiv M_W$ . Pour la contribution des bosons  $Z$  on doit poser  $i = l$ ,  $M_V \equiv M_Z$  et changer

les coefficients de couplage. À l'aide des relations (4.24) on trouve qu'on doit multiplier l'équation (4.98) par:

$$\frac{2}{\cos^2 \theta_W} \frac{|c_L|^2 - |c_R|^2}{|V_{li}|^2} \quad (4.99)$$

**Cas**  $m_i > \frac{M_V}{2}$

En tenant compte du spectre des particules du MS, on peut tirer la conclusion que si  $V \equiv W$  et  $m_i > \frac{M_V}{2}$ , alors  $m_l < \frac{M_V}{2}$  pour n'importe quel  $l$  possible. En regardant l'expression de  $\mathcal{D}$ , on constate qu'elle est toujours positive. Par contre, si  $V \equiv Z$  et  $m_i = m_l > \frac{M_V}{2}$ ,  $\mathcal{D}$  est négatif, donc on ne peut pas utiliser le résultat obtenu. Dans ces conditions la contribution au moment anapolaire devient:

$$F_A^{pZ} = 4 \frac{1}{(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \int_0^1 d\rho \frac{\rho}{\mathcal{N}_Z(\rho)} \left[ 1 - \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{6}\rho^2 \right] \quad (4.100)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z(\rho) &= \rho^2 m_i^2 + (1-\rho) M_Z^2 && \text{et} \\ \mathcal{D} &= M_Z^2 (M_Z^2 - 4m_i^2) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Le résultat est:

$$\begin{aligned} F_A^{pZ} &= 4 \frac{1}{(4\pi)^2} q_i \frac{g^2}{8 m_i^2 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \left\{ -\frac{7}{12} - \frac{M_Z^2}{6m_i^2} + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{M_Z^2}{3m_i^2} \left( \frac{M_Z^2}{2m_i^2} - 1 \right) \right] \ln \frac{m_i^2}{M_Z^2} + \\ &\quad \left. + \frac{2M_Z^2}{m_i^2 \sqrt{-\mathcal{D}}} \left[ 1 + \frac{M_Z^2}{3m_i^2} \left( \frac{M_Z^2}{8m_i^2} - 1 \right) \right] \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{M_Z^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.102)$$

## §2 La troisième sous-classe

Si l'invariance de jauge est généralement difficile à démontrer, la dépendance de jauge peut être démontrée facilement. Si on développe le résultat

en série et juste un des termes de la série dépend de  $\xi$ , alors le résultat n'est pas invariant de jauge. C'est cela qu'on va faire pour cette dernière sous-classe de diagrammes. Au lieu d'écrire la somme des contributions qui restent et d'essayer de calculer les intégrales sur les paramètres, on va prendre  $m_i = 0$  et on va développer tout en terme de  $\frac{m_l^2}{M_W^2}$ . Pour chaque terme de la série obtenue, on peut calculer facilement les intégrales sur les paramètres. On obtient le résultat:

$$F_A^r = -2 \frac{1}{4(4\pi)^2} e \operatorname{sgn}(I_3^i) \frac{g^2}{4M_W^2} \sum_l |V_{il}|^2 \left\{ \alpha_0 + \frac{m_l^2}{M_W^2} \alpha_1 + \dots \right\} \quad (4.103)$$

avec  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  donnés par:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{-1}{36(\xi-1)^3} \left\{ 239 - 507\xi + 435\xi^2 - 149\xi^3 - 18\xi^4 - \right. \\ &\quad \left. - 30\ln\xi + 342\xi\ln\xi - 324\xi^2\ln\xi + 168\xi^3\ln\xi \right\} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{6(\xi-1)^3} \left\{ 22 - 54 + 50\xi^2 - 18\xi^3 + \right. \\ &\quad \left. + 27\ln\xi - 43\xi\ln\xi + 21\xi^2\ln\xi + 3\xi^3\ln\xi \right\} \end{aligned} \quad (4.104)$$

### §3 La quatrième sous-classe

On sait depuis le début que la partie transverse du mélange  $\gamma - Z$  ne va pas résoudre les problèmes de dépendance de jauge existant dans la sous-classe précédente. En plus elle va introduire une quantité infinie. Le résultat est:

$$\begin{aligned} F_A^{tr} &= -\frac{eg^2}{2(4\pi)^2 \cos\theta_W} \frac{I_3}{M_Z^2} \left\{ \frac{4}{3} \sum_{f,c} q_f \tilde{A}_f^c \left[ -(\Delta-2) + \ln \frac{m_f^2}{M_W^2} \right] + \right. \\ &\quad + \cos\theta_W \left[ (4-\xi) \left[ \Delta - \frac{3}{2} \right] + \frac{1}{90(\xi-1)^3} \left[ -41 - 150\xi + 480\xi^2 - 400\xi^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 105\xi^4 + 6\xi^5 + (-120 + 180\xi^2 - 180\xi^3 + 60\xi^4) \ln\xi \right] \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\cos\theta_W} \left[ \frac{1}{6}\Delta - \frac{1}{4} + \frac{1}{9(\xi-1)^3} \left[ 11 - 18\xi + 9\xi^2 - 2\xi^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[ 6 - \frac{9}{2}(\xi-1)^3 \right] \ln\xi \right] \right] \end{aligned} \quad (4.105)$$

On constate une forte dépendance de jauge et aussi on note les termes infinis.

#### 4.5. Le moment anapolaire fort

Pour le calcul du moment anapolaire fort, on doit considérer des diagrammes similaires à ceux considérés pour le moment anapolaire électromagnétique, mais avec le photon remplacé par un gluon. En tenant compte de la définition du moment anapolaire fort donnée dans le chapitre 1, on observe qu'on peut utiliser les calculs faits jusqu'à maintenant, en remplaçant  $q_i$  et  $q_l$  par  $g_s$ . À partir de la dernière classification des diagrammes, on constate que les seules contributions viennent des deux premières classes. Cette affirmation est supportée par le tableau 2.1. Par conséquent, le moment anapolaire fort d'un quark quelconque est:

$$F_A = 3 \left\{ \sum_l F_{1A} + F_{2A} \right\} \quad (4.106)$$

Pour la quantité  $F_{1A}$ , on a une contribution semblable à l'équation (4.98):

$$\begin{aligned} F_{1A} = & -4 \frac{1}{(4\pi)^2} g_s \frac{g^2}{16 M_W^2} |V_{li}|^2 \left\{ \frac{1}{6} (m_i - m_l - 2M_W) \left[ \frac{5}{2} - \rho_1^w - \rho_2^w + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho_1^{w2}(3 - \rho_1^w)}{\rho_1^w - \rho_2^w} \ln \left| \frac{1 - \rho_1^w}{\rho_1^w} \right| - \frac{\rho_2^{w2}(3 - \rho_2^w)}{\rho_1^w - \rho_2^w} \ln \left| \frac{1 - \rho_2^w}{\rho_2^w} \right| \right] \right. \\ & \left. - 2M_W^2 \left[ -1 + \frac{\rho_1^w(1 - \rho_1^w)}{\rho_1^w - \rho_2^w} \ln \left| \frac{1 - \rho_1^w}{\rho_1^w} \right| - \frac{\rho_2^w(1 - \rho_2^w)}{\rho_1^w - \rho_2^w} \ln \left| \frac{1 - \rho_2^w}{\rho_2^w} \right| \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Pour la quantité  $F_{2A}$  on a des contributions semblables aux équations (4.98) et (4.102), en suivant les mêmes cas.

Cas  $m_i < \frac{M_Z}{2}$

$$\begin{aligned} F_{2A} = & 4 \frac{1}{(4\pi)^2} g_s \frac{g^2}{8 M_Z^2 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \left\{ \frac{1}{3} M_Z \left[ \frac{5}{2} - \rho_1^z - \rho_2^z + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho_1^{z2}(3 - \rho_1^z)}{\rho_1^z - \rho_2^z} \ln \left| \frac{1 - \rho_1^z}{\rho_1^z} \right| - \frac{\rho_2^{z2}(3 - \rho_2^z)}{\rho_1^z - \rho_2^z} \ln \left| \frac{1 - \rho_2^z}{\rho_2^z} \right| \right] \right. \\ & \left. + 2M_Z^2 \left[ -1 + \frac{\rho_1^z(1 - \rho_1^z)}{\rho_1^z - \rho_2^z} \ln \left| \frac{1 - \rho_1^z}{\rho_1^z} \right| - \frac{\rho_2^z(1 - \rho_2^z)}{\rho_1^z - \rho_2^z} \ln \left| \frac{1 - \rho_2^z}{\rho_2^z} \right| \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.108)$$

Cas  $m_i > \frac{M_Z}{2}$

$$\begin{aligned}
F_{2A} = & 4 \frac{1}{(4\pi)^2} g_s \frac{g^2}{8m_i^2 \cos^2 \theta_W} (|c_L|^2 - |c_R|^2) \left\{ -\frac{7}{12} - \frac{M_Z^2}{6m_i^2} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{M_Z^2}{3m_i^2} \left( \frac{M_Z^2}{2m_i^2} - 1 \right) \right] \ln \frac{m_i^2}{M_Z^2} + \\
& \left. + \frac{2M_Z^2}{m_i^2 \sqrt{-\mathcal{D}^z}} \left[ 1 + \frac{M_Z^2}{3m_i^2} \left( \frac{M_Z^2}{8m_i^2} - 1 \right) \right] \arctg \frac{\sqrt{-\mathcal{D}^z}}{M_Z^2} \right\} \quad (4.109)
\end{aligned}$$

Les notations utilisées sont:

$$\begin{aligned}
\rho_{1,2}^w &= \frac{M_V^2 + m_i^2 - m_l^2 \pm \sqrt{\mathcal{D}^w}}{2m_i^2} \quad \text{avec} \\
\mathcal{D}^w &= (m_i + m_l + M_W)(-m_i + m_l + M_W)(m_i - m_l + M_W)(-m_i - m_l + M_W) \\
\rho_{1,2}^z &= \frac{M_V^2 + \pm \sqrt{\mathcal{D}^z}}{2m_i^2} \quad \text{avec} \\
\mathcal{D}^z &= M_W^2(M_W^2 - 4m_i^2) \quad (4.110)
\end{aligned}$$

Avec ces relations, on a atteint les buts de ce chapitre. On a trouvé des expressions pour les moments anapolaïres électromagnétique et fort d'un fermion libre. La discussion de ces résultats ainsi que la signification physique des quantités calculées font l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE V

### DISCUSSION

Dans le chapitre précédent on a calculé le moment anapolaire électromagnétique et le moment anapolaire fort d'un fermion libre, dans le Modèle Standard de la physique des particules. Les résultats montrent que le moment anapolaire électromagnétique est une quantité qui dépend de la jauge du groupe  $SU(2)$ . Ce résultat n'est pas entièrement surprenant, parce que, dans un processus avec des photons réels, le moment anapolaire ne fait pas sentir sa présence à cause de la structure de son opérateur. Par conséquent, on peut avoir des informations sur le moment anapolaire juste à travers un processus de diffusion. Mais, dans ce cas on ne peut plus parler d'une quantité intrinsèque, parce que la particule d'intérêt n'est plus libre. On va appeler cette quantité *moment anapolaire effectif*.

On sait que les éléments de la matrice de diffusion  $S$  sont des quantités indépendantes de jauge [17]. Par conséquent, le moment anapolaire effectif électromagnétique doit être une quantité bien définie. Pour prouver cela par calcul direct, il faut considérer les diagrammes déjà calculés dans un processus physique et on doit ajouter aussi d'autres diagrammes comme, par exemple, des diagrammes en boîte. On ne va pas faire cela ici, parce que ce n'est pas notre but. On va juste montrer qu'il existe une possibilité que la partie dépendante de jauge se réduise dans un processus physique.

À l'ordre  $\frac{1}{M_W^2}$  il y a un type de diagramme qui ne se réduit pas d'une manière évidente à un échange d'un photon. Ces diagrammes sont ceux avec

échange de deux bosons  $W$ . On va montrer que cette classe de diagrammes peut être réduite dans la limite des énergies basses à un échange d'un photon.

En général, l'amplitude associée à ces diagrammes s'écrit:

$$\mathcal{M} = i \left( \frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \int_{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^d} \mathcal{D}_{\mu\alpha}(k) \mathcal{D}_{\nu\beta}(q-k) \int_{\infty} d^4 x e^{ikx} \langle s_f | \mathbf{T}[J_W^\alpha(x) J_W^{\dagger\beta}(0)] | s_i \rangle \cdot \\ \cdot \int_{\infty} d^4 y e^{-ikx} \langle f | \mathbf{T}[J_W^{\dagger\mu}(y) J_W^\nu(0)] | i \rangle \quad (5.1)$$

Ici, les états  $|i\rangle$  et  $\langle f|$  décrivent la particule d'intérêt, pendant que  $|s_i\rangle$  et  $\langle s_f|$  décrivent l'autre particule du processus, *la source*.

Soit  $T^{\alpha\beta} = \int_{\infty} d^4 x e^{ikx} \langle s_f | \mathbf{T}[J_W^\alpha(x) J_W^{\dagger\beta}(0)] | s_i \rangle$ . On peut construire une identité de Ward pour évaluer cette quantité. Considérons la quantité  $k_\alpha T^{\alpha\beta}$ . On peut écrire:

$$k_\alpha T^{\alpha\beta} = -i \int_{\infty} d^4 x \frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^{ik\cdot x} \langle s_f | \mathbf{T}[J_W^\alpha(x) J_W^{\dagger\beta}(0)] | s_i \rangle = \\ = i \int_{\infty} d^4 x e^{ik\cdot x} \langle s_f | \partial_\alpha \mathbf{T}[J_W^\alpha(x) J_W^{\dagger\beta}(0)] | s_i \rangle = \\ = i \int_{\infty} d^4 x e^{ik\cdot x} \langle s_f | \mathbf{T}[\partial_\alpha J_W^\alpha(x) J_W^{\dagger\beta}(0)] | s_i \rangle + \\ + i \int_{\infty} d^3 x e^{-ik\cdot x} \langle s_f | [J_W^0(x) J_W^{\dagger\beta}(0)] | s_i \rangle \quad (5.2)$$

En utilisant l'algèbre des courants électro-faibles [13] on peut écrire:

$$[J_W^0(x) J_W^{\dagger\beta}(0)] = -2 [J_Z^\beta + \sin^2 \theta_W J_\gamma^\beta] \delta^3(\mathbf{x}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M_W^2}\right) \quad (5.3)$$

Le premier terme de la dernière égalité (5.2) conduit aussi à une contribution de l'ordre  $\frac{1}{M_W^2}$  et, par conséquent, n'est pas intéressant pour la présente discussion †.

En utilisant l'identité qu'on vient de construire on arrive à évaluer le tenseur  $T^{\alpha\beta}$ . Le résultat est [14]:

$$T^{\alpha\beta} = -i \frac{k_\lambda}{k^2} (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}) \langle s_f | 2 [J_Z^\beta + \sin^2 \theta_W J_\gamma^\beta]_\rho | s_i \rangle - \\ - \frac{\varepsilon^{\alpha\lambda\beta\rho} k_\lambda}{k^2} \langle s_f | \bar{\psi} \mathbf{1} \gamma_\rho \gamma_L \psi | s_i \rangle + \dots \quad (5.4)$$

---

† La combinaison des propagateurs  $\mathcal{D}_{\mu\alpha}(k) \mathcal{D}_{\nu\beta}(q-k)$  est au moins de l'ordre  $\frac{1}{M_W^2}$ , donc tout autre  $\frac{1}{M_W^2}$  extra n'est pas intéressant pour la présente discussion.

Ici  $\mathbf{1}$  est la matrice unité  $6 \times 6$  dans l'espace des saveurs.

Avec cette relation on est arrivé au but de cette brève discussion. Le premier terme de l'équation (5.4) montre que dans la limite des énergies basses <sup>†</sup> les diagrammes avec échange de deux bosons  $W$  peuvent être conçus comme une superposition des courants neutres. En plus, le facteur  $\sin^2 \theta_W$  devant  $J_\gamma$  donne le bon coefficient à l'élément de matrice (i.e.  $e^2 g^2$ ) pour pouvoir se combiner avec les termes dépendants de jauge dans les diagrammes calculés. La réduction des termes proportionnels aux masses des fermions présents dans le diagramme nécessite la considération des diagrammes contenant des bosons scalaires chargés.

Puisque dans la jauge  $R_\xi$  les diagrammes en boîte n'amènent pas de quantités indépendantes de jauge qui contiennent des logarithmes, à partir des calculs faits dans le chapitre précédent on peut faire une estimation numérique pour la limite à  $q^2 = 0$  du moment anapolaire effectif d'un fermion quelconque. Parce qu'à nos jours le quark top est parmi les particules les plus étudiées, on va le considérer ici. On obtient:

$$\begin{aligned} F_A^t &\sim -e \frac{0.933 \times 10^{-3}}{m_t^2} = -e \cdot 3.05 \times 10^{-8} \text{ GeV}^{-2} = \\ &= -1.22 \times 10^{-35} e \cdot \text{cm}^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Puisqu'à l'ordre  $\frac{1}{M_W^2}$  les logarithmes provenant des corrections du vertex sont beaucoup plus grands que les corrections qui peuvent apparaître des diagrammes supplémentaires, on peut conclure que la valeur exacte de la limite du moment anapolaire électromagnétique effectif du quark top à  $q^2 = 0$  est autour de la valeur présentée dans l'équation (5.5). La valeur venant de cette estimation est en accord avec celle de la référence [4], qui prédit:

$$F_A^t \sim \pm e \frac{4 \times 10^{-3}}{m_t^2} \quad (5.6)$$

---

<sup>†</sup> Limite dans laquelle on peut négliger les termes symbolisés par ... dans l'équation (5.4)

Cette limite est mise en considérant que l'influence du moment anapolaire effectif sur l'asymétrie gauche-droite dans une diffusion polarisé de type Möller est dans la limite des erreurs expérimentales ( $\pm 7.8\%$ ). De plus, ce résultat est en accord avec la référence [18].

Pour les fermions avec une masse très petite -surtout pour les leptons- on peut obtenir une bonne estimation à l'aide de "four-Fermi theory". Pour plus de détail voir l'appendice.

La cause de tous les problèmes concernant le moment anapolaire électromagnétique est le fait que les bosons physiques  $Z$  et  $\gamma$  sont des mélanges des bosons  $A^3$  et  $B^0$  associés aux groupes  $SU(2)_L$  et  $U(1)_Y$ . Pour voir cela il suffit de découpler les deux groupes par la transformation  $U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ . Dans cette limite les couplages  $\gamma WW$ ,  $\gamma SS$  et  $\gamma WS$  n'existent plus et, par conséquent, le moment anapolaire intrinsèque d'un fermion quelconque est invariant par rapport aux transformations de jauge du groupe  $SU(2)_L$ . Un exemple concret est le cas du moment anapolaire fort qui est invariant de jauge à cause de l'absence d'un mélange entre les groupes  $SU(2)_L$  et  $SU(3)_c$ .

## CONCLUSION

Dans ce travail on a montré par calcul direct que, dans le contexte du Modèle Standard Minimal, le moment anapolaire électromagnétique d'un femion libre est, malgré d'autres opinions [4, 5, 6], mal défini et ne peut pas être considéré comme une observable physique. Par contre, le moment anapolaire fort est une quantité observable, en principe. Les quantités d'intérêt ont été extraites d'une manière non ambiguë, en utilisant la méthode de projection.

La définition utilisée pour les moments anapolaires calculés est identique avec celle introduite dans la référence [23] et utilisée aussi dans les références [3], [4], i.e. *le moment anapolaire est le couplage axial-vectoriel qui génère une interaction de type contact avec un courant extérieur*.

On a montré par calcul direct que la partie dépendante de jauge du moment anapolaire intrinsèque électromagnétique peut se réduire dans un processus physique (il existe un théorème général qui affirme cela). Cela permet la définition d'un moment anapolaire effectif qui inclut les calculs du présent travail, auquels on doit ajouter d'autres contributions. On a estimé la limite à  $q^2 = 0$  de cette quantité. À ce moment, on suggère la possibilité d'existence d'un moment anapolaire intrinsèque électromagnétique dans des modèles au-delà du Modèle Standard.

Le moment anapolaire faible n'a pas été considéré dans ce travail. Le calcul de cette quantité ne peut pas se faire à l'aide de la méthode de projection à cause de la non-conservation du courant faible par la présence de la charge axiale.

On conclut en disant que le sujet est académique, mais qu'il y a encore beaucoup de travail à faire sur les moments anapolaires.

## APPENDICE

### Estimation du moment anapolaire électromagnétique des leptons légers à partir de "Four-Fermi Theory"

On sait qu'aux énergies basses, la théorie des interactions faibles proposée par Fermi donne des résultats raisonnables. C'est une théorie non renormalisable et en même temps elle peut être obtenue à partir du Modèle Standard en prenant la limite des énergies petites. Par conséquent, les résultats que cette théorie fournit doivent être pris comme une approximation des vraies résultats. Ensuite, puisque la théorie est non renormalisable, on va "oublier" les infinités qui apparaissent au cours des calculs.

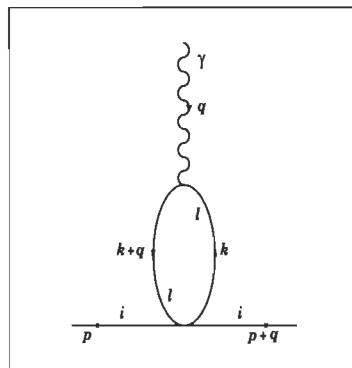
D'un point de vue phénoménologique les interactions faibles sont décrites par un Lagrangien effectif de type courant-courant.

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} J^\mu(x) J_\mu^\dagger(x)$$

avec

$$G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2} \quad \text{et} \quad J^\mu(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi$$

Le diagramme à calculer est le suivant:



**Figure A1.** Diagramme à considérer dans la théorie de Fermi.

L'amplitude associée à ce diagramme est:

$$M = i \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}(p+q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(p) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[ i q_l \gamma_\mu i \frac{k + m_l}{k^2 - m_l^2} i \gamma_\nu (1 - \gamma_5) i \frac{k + q + m_l}{(q+k)^2 - m_l^2} \right] \quad (A1)$$

En calculant la trace on obtient:

$$\begin{aligned} n &= \text{Tr} \left[ \gamma_\mu (k + m_l) \gamma_\nu (1 - \gamma_5) (k + q + m_l) \right] = \\ &= d \left[ k_\mu (k + q)_\nu + k_\nu (k + q)_\mu - [k \cdot (k + q) - m_l^2] g_{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (A2)$$

On fait la paramétrisation de Feynman et on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m_l^2)((q+k)^2 - m_l^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)((q+k)^2 - m_l^2) + x(k^2 - m_l^2)]^2} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[k'^2 - (m_l^2 - x(1-x)q^2)]^2} \end{aligned} \quad (A3)$$

Ici on a posé:  $k = k' - xq$ . Dans ce qui suit on va noter:  $\omega^2 = m_l^2 - x(1-x)q^2$ . En tenant compte que l'intervalle d'intégration sur  $k$  est symétrique et en utilisant les notations proposées, on obtient:

$$n \rightarrow d \left[ \left( \frac{2}{d} - 1 \right) k^2 + m_l^2 g_{\mu\nu} + x(1-x)q^2 g_{\mu\nu} - 2x(1-x)q_\mu q_\nu \right] \quad (A3)$$

En calculant l'intégrale sur l'impulsion non déterminée on obtient pour l'amplitude  $M$  l'expression suivante:

$$\begin{aligned} M &= -2q_l d \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}(4\pi)^2} \right) \bar{u}(p+q) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(p) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^1 dx x(1-x) \left[ \Delta + \ln \frac{M_W^2}{\omega^2} \right] (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \end{aligned} \quad (A4)$$

Maintenant, pour obtenir le moment anapolaire intrinsèque, il suffit de mettre  $q^2 = 0$  dans  $\omega^2$  et "d'oublier" l'existence de  $\Delta$ . On obtient:

$$F_A^l = +\frac{8}{6}q_l \left( \frac{G_F}{\sqrt{2}(4\pi)^2} \right) \left( \ln \frac{M_W^2}{m_l^2} - \frac{1}{2} \right) = q_l \frac{g^2}{96\pi^2 M_W^2} \left( \ln \frac{M_W^2}{m_l^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (A5)$$

On constate que cette expression ne dépend pas de la masse du fermion d'intérêt. En tenant compte des calculs faits au chapitre 4 on peut tirer la conclusion que cette expression est appropriée pour les particules de masse très petite. De plus, il faut prendre dans la boucle juste le conjugué d'isospin de la particule d'intérêt. Par exemple, pour le neutrino électronique on obtient:

$$F_A^{\nu_e} \simeq -23.5 e \frac{g^2}{96\pi^2 M_W^2} [GeV^2] = -19 \times 10^{-33} ecm^2 \quad (A6)$$

Comme on a dit au début, ce résultat doit être considéré comme une estimation de la limite à  $q^2 = 0$  du moment anapolaire effectif électromagnétique. Ce résultat est en accord avec celui de la référence [17].

Si on utilise l'expression (A5) pour estimer le moment anapolaire effectif électromagnétique du quark top, on obtient:

$$F_A^t \sim -e \frac{2.8 \times 10^{-3}}{m_t^2} \quad (A7)$$

Même si l'équation (A5) est valable juste pour des particules avec petites masses, on constate que dans le cas du top-quark l'estimation est assez bonne. La raison de la similarité entre (A5) et (5.5) – (5.6) est la suivante: si on considère juste les termes en logarithmes dans les calculs faits dans le chapitre 4 on obtient avec une bonne approximation l'équation (A5). Et puisque ces termes sont ceux qui dominent, on a presque le même résultat numérique.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ia. B. Zel'dovich, *Electromagnetic Interaction with Parity Violation* Sov. Phys. JETP (Engl. Transl.) **6** (1958), 1184
- [2] A. Costescu, E. E. Radescu, *Dynamic Toroid Polarizability of Atomic Hydrogen*, Ann. Physics **209**, 13 (1991)  
V. M. Dubovik, V. V. Tugushev, *Toroid Moments in Electrodynamics and Solid State Physics*, Phys. Rep. **187**, 145 (1990)  
V. M. Dubovik, A. A. Cheshkov, *Multipole Expansion in Classical and Quantum Field Theory*, Sov. J. Part. Nucl. (Engl. Transl.) **5** (1974), 318
- [3] M. J. Musolf, B. R. Holstein, *Observability of the Anapole Moment and Neutrino Charge Radius*, Phys. Rev. **D43**, 2956 (1991)  
H. Czyz, K. Kolodziej, M. Zralek, *Is the Anapole Moment a Physical Observable?*, Can. J. Phys. **66**, 132 (1988)
- [4] A. Czarnecki, W. J. Marciano, *Electroweak Radiative Corrections to Polarized Möller Scattering Asymmetries*, Phys. Rev. **D53**, 1066 (1996)
- [5] R. G. Stuart, A. Góngora-T, *The Charge Radius and Anapole Moment of a Free Fermion*, Z. Phys. **C55**, 101 (1992), CERN-TH. 6348/91
- [6] L. Bento, R. Neves, *Implications of Anomalous Gauge Boson Interactions to the Fermion Electromagnetic Moments*, CFNUL-96-08, hep-ph/9610512
- [7] V. M. Dubovik, V. E. Kuznetsov, *The Toroid Moment of Majorana Neutrino*, hep-ph/9606258
- [8] S. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961), 579
- [9] A. Salam, *Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity*, Nobel Symposium no. 8 édité par N. Svartholm (Almqvist, Wiksell, Stockholm), (1968), 367

- [10] S. Weinberg, *A model of leptons* Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967)
- [11] T. D. Lee, C. N. Yang, *Question of Parity Conservation in Weak Interactions*, Phys. Rev. **104**, 254 (1956)
- [12] L. Baulieu, R. Coquereaux *Photon-Z Mixing in Weinberg-Salam Model: Effective Charges and the  $a = -3$  Gauge*, Ann. Physics **140**, 163 (1982)
- [13] A. Sirlin, *Universal Renormalization in Leptonic and Semileptonic Amplitudes*, Phys. Rev. Lett. **32**, 966 (1974)  
 A. Sirlin, *Current Algebra Formulation of Radiative Corrections in Gauge Theories and the Universality of Weak Interactions*, Rev. Mod. Phys. **50**, 573 (1978)  
 A. Sirlin, *Radiative Corrections in the  $SU(2)_L \times U(1)$  Theory: A Simple Renormalization Framework*, Phys. Rev. **D22**, 971 (1980)
- W. J. Marciano, A. Sirlin, *Radiative Corrections to Neutrino-induced Phenomena in the  $SU(2)_L \times U(1)$  Theory*, Phys. Rev. **D22**, 2695 (1980)
- [14] G. Degrassi, A. Sirlin, W. J. Marciano, *Effective Electromagnetic Form Factor of the Neutrino*, Phys. Rev. **D39**, 287 (1989)
- [15] D. C. Kennedy, B. W. Lynn, *Electroweak Radiative Corrections with an Effective Lagrangian: Four-Fermion Processes*, Nucl. Phys. **B322**, 1 (1989)
- [16] K. Fujikawa, B. W. Lee, A. I. Sanda, *Generalized Renormalizable Gauge Formulation of Spontaneously Broken Gauge Theories*, Phys. Rev. **D6**, 2923 (1972)
- [17] J. L. Lucio, A. Rosado, A. Zepeda, *Characteristic Size for the Neutrino*, Phys. Rev. **D31**, 1091 (1985)
- [18] E. S. Abers, B. W. Lee, *Gauge Theories*, Phys. Rep. **1**, 5 (1973)
- [19] I. Mocioiu, *Signatures du moment anapolaire du quark top dans des collisions électron-positron*, Mémoire en préparation
- [20] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley&Sons 1975
- [21] G.'t Hooft, *Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields* Nucl. Phys. **B35** (1971), 167

- [22] G.'t Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields* Nucl. Phys. **B44** (1972), 189
- [23] F. Boudjema, C. Hamzaoui, *Massive and massless Majorana particles of arbitrary spin: Covariant gauge couplings and production properties* Phys. Rev. D43 (1991), 3748