

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
HASSAN HAMAD

DIFFUSION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE PAR UN
OBJET CYLINDRIQUE DE CONDUCTIVITÉ QUELCONQUE

AVRIL 1997

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

À la mémoire de mon père

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier tout d'abord mon directeur, le professeur Elie Boridy, directeur du département de physique de l'UQAM, pour son soutien tant scientifique que moral et pour sa présence continuelle.

Je suis particulièrement reconnaissant à ma mère, mes frères, mes sœurs et ma fiancé Majida qui m'ont encouragé à atteindre mes objectifs.

Je remercie mes collègues et tous les professeurs qui ont contribué à ma formation. Merci aussi à Éva pour son soutien informatique.

RÉSUMÉ

La diffusion d'une onde électromagnétique par un objet cylindrique circulaire non magnétique de longueur infinie et de conductivité quelconque est étudiée dans ce mémoire. On examine plus particulièrement "l'invasion" progressive du volume du conducteur par les courants quand la distance de pénétration δ augmente. Les informations disponibles sur ce phénomène sont limitées.

Les deux cas d'une onde incidente E et H sont considérés. On examine le comportement de certaines quantités comme les champs électrique et magnétique à la surface, le courant induit, l'impédance de surface et les sections efficaces de diffusion et d'absorption. Le calcul est fait aussi bien aux basses qu'aux hautes fréquences.

Van Bladel a traité le problème d'un cylindre circulaire non magnétique de longueur infinie, mais il a limité son calcul au cas d'un bon conducteur et aux fréquences basses. Aux hautes fréquences son calcul n'est pas correct car il n'a pas représenté les quantités mentionnées ci-dessus que par les deux premiers termes de leurs formes sérielles.

Nous avons conçu deux programmes Fortran qui calculent toutes les quantités mentionnées ci-dessus avec grande précision. Un programme effectue le calcul dans le cas d'un bon conducteur et l'autre dans le cas d'un milieu de conductivité quelconque.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	iii
RÉSUMÉ.....	iv
TABLE DES MATIÈRES.....	v
LISTE DES FIGURES.....	viii
LISTE DES TABLEAUX.....	xi
LISTE DES ABRÉVIATIONS.....	xiii
LISTE DES SYMBOLES.....	xiv
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I	
DIFFUSION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR UN OBJET CYLINDRIQUE DE CONDUCTIVITÉ QUELCONQUE	4
1.1 Introduction	4
1.2 Diffusion d'une onde électromagnétique plane par un cylin- dre circulaire droit et infini	5
1.2.1 Onde E	5
1.2.2 Onde H	9
1.3 Champs électromagnétiques à la surface, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre	12
1.3.1 Onde E	13
1.3.2 Onde H	14
1.4 Impédance de surface	16

1.4.1	Onde E	16
1.4.2	Onde H	16
1.5	Courant total I induit dans le cylindre	17
1.5.1	Onde E	17
1.5.2	Onde H	18
1.6	Section efficace de diffusion	18
1.7	Section efficace d'absorption	19
1.7.1	Onde E	19
1.7.2	Onde H	21
1.8	Conclusion	23
CHAPITRE II		
CAS DES BONS CONDUCTEURS.....		24
2.1	Le champ électromagnétique à la limite des bons conducteurs	24
2.2	Conclusion	31
CHAPITRE III		
CALCUL NUMÉRIQUE ET RÉSULTATS.....		33
3.1	Introduction	33
3.2	Résultats et discussion	35
3.2.1	Le courant induit par l'onde	35
3.2.2	Sections efficaces de diffusion et d'absorption	44
3.2.3	Impédance de surface	49
3.2.4	Champs à la surface	58
CONCLUSION		79

APPENDICE A

DÉVELOPPEMENT DE $e^{-ix \cos \varphi}$ DANS LA BASE DES FONCTIONS DE BESSEL.....	80
---	----

APPENDICE B

LE CODE FORTRAN.....	82
LISTE DES RÉFÉRENCES	97

LISTE DES FIGURES

0.1	Variations relatives du module du champ électrique dans la section d'un conducteur cylindrique circulaire.	3
1.1	Cylindre circulaire dans le plan d'onde incident (onde E).	6
1.2	Cylindre circulaire dans le plan d'onde incident (onde H).	10
3.1	Module du courant total(axial) induit et normalisé en fonction de δ/a à des ka différents pour l'onde E.	37
3.2	Module du courant surfacique induit et normalisé en fonction de δ/a à des différents ka pour l'onde H.	38
3.3	Module de la partie réelle du courant total induit et normalisé en fonction de δ/a pour l'onde E à des différents ka	39
3.4	Module du courant total induit et normalisé en fonction de δ/a pour l'onde E à des différents ka selon Van Bladel et reproduit par notre calcul.	40
3.5	Partie réelle du courant total induit normalisé en fonction de ka pour l'onde E à des différents δ/a	41
3.6	Module de la partie réelle du courant total induit normalisé en fonction de δ/a pour l'onde E à des différents ka	42
3.7	Module du courant total(axial) induit normalisé en fonction de ka à des δ/a différents pour l'onde E.	43
3.8	Section efficace de diffusion normalisée de l'onde E en fonction de δ/a à des ka différents.	45
3.9	Section efficace de diffusion normalisée de l'onde H en fonction de δ/a à des ka différents.	46

3.10	Section efficace d'absorption normalisée de l'onde E en fonction de δ/a à des ka différents.	47
3.11	Section efficace d'absorption normalisée de l'onde H en fonction de δ/a à des ka différents.	48
3.12	Module de l'impédance de surface de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents.	50
3.13	Module de l'impédance de surface de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents.	51
3.14	Module de l'impédance de surface de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents. . . .	52
3.15	Module de l'impédance de surface de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents. . . .	53
3.16	Module de l'impédance de surface réduite de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 0,03$. .	54
3.17	Module de l'impédance de surface réduite de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 1$. . .	55
3.18	Module de l'impédance de surface réduite de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 0,03$. .	56
3.19	Module de l'impédance de surface réduite de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 1$. . .	57
3.20	Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.	60
3.21	Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.	61

3.22	Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.	62
3.23	Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.	63
3.24	Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.	64
3.25	Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.	65
3.26	Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.	66
3.27	Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.	67
3.28	Module de la partie réelle du courant induit normalisé en fonction de δ/a à un ka donné et à des ϵ_r différents pour l'onde E.	68
3.29	Section efficace de diffusion normalisée en fonction de δ/a à un ka donné et des ϵ_r différents pour l'onde E.	69
3.30	Section efficace d'absorption normalisée en fonction de δ/a à un ka donné et des ϵ_r différents pour l'onde E.	70
3.31	Phase du champ électrique par rapport au champ magnétique pour une onde E.	71
3.32	Module du courant relatif en fonction de r/a pour $ka = 1$ et δ/a différents dans le cas de l'onde E.	72

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde E en fonction de δ/a à $ka = 0,03$	73
3.2	Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde H en fonction de δ/a à $ka = 0,03$	73
3.3	Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde E en fonction de δ/a à $ka = 1$	74
3.4	Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde H en fonction de δ/a à $ka = 1$	74
3.5	Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde E en fonction de δ/a à $ka = 10$	75
3.6	Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde H en fonction de δ/a à $ka = 10$	75
3.7	Module du courant total induit et de sa partie réelle pour l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$	76
3.8	Module du courant total induit et de sa partie réelle pour l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 1$	76
3.9	Module du courant total induit et de sa partie réelle pour l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 10$	76
3.10	Module du courant surfacique induit et de sa partie réelle pour l'onde H en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$ et $ka = 1$	76
3.11	Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$	77
3.12	Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 1$	77

3.13	Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde H en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$	78
3.14	Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde H en fonction de δ/a et à $ka = 1$	78

LISTE DES ABRÉVIATIONS

Symbole	Définition
deg.	Degré
Re	Partie réelle
Ω	Ohm
fig.	Figure

LISTE DES SYMBOLES

Symbole	Définition
(gras)	Représente un vecteur
E	Champ électrique
H	Champ magnétique
a	Rayon du cylindre
k	Nombre d'onde dans le vide
I	Courant induit dans le cylindre
K	Courant de surface
K_{eff}	Courant de surface effectif
J	Densité du courant
$\partial \mathbf{D} / \partial t$	Courant de déplacement
n	Vecteur unitaire suivant la normale à la surface
r	Vecteur position
T	Période
Z_s	Impédance de surface
Q	Facteur de qualité du milieu
Z_0	Impédance caractéristique du vide
Y_0	Admittance du vide
E⁺	Champ électrique total à l'extérieur du cylindre
Eⁱ	Champ électrique correspondant à l'onde incidente

E^{dif}	Champ électrique correspondant à l'onde diffusée
E^{-}	Champ électrique correspondant à l'onde transmise
E_s	Champ électrique à la surface du cylindre
E_{φ}^{+}	Composante tangentielle du champ électrique dans le cas de l'onde H à l'extérieur du cylindre
E_{φ}^{-}	Composante tangentielle du champ électrique dans le cas de l'onde H à l'intérieur du cylindre
E_r^{+}	Composante radiale du champ électrique dans le cas de l'onde H à l'extérieur du cylindre
E_r^{-}	Composante radiale du champ électrique dans le cas de l'onde H à l'intérieur du cylindre
H^{+}	Champ magnétique total à l'extérieur du cylindre
H^i	Champ magnétique correspondant à l'onde incidente
H^{dif}	Champ magnétique correspondant à l'onde diffusée
H^{-}	Champ magnétique correspondant à l'onde transmise
H_s	Champ magnétique à la surface du cylindre
H_{φ}^{+}	Composante tangentielle du champ magnétique dans le cas de l'onde E à l'extérieur du cylindre
H_{φ}^{-}	Composante tangentielle du champ magnétique dans le cas de l'onde E à l'intérieur du cylindre
H_r^{+}	Composante radiale du champ magnétique dans le cas de l'onde E à l'extérieur du cylindre
H_r^{-}	Composante radiale du champ magnétique dans le cas de l'onde E à l'intérieur du cylindre
S^{-}	Vecteur de Poynting
$\langle S^{inc} \rangle$	Densité de puissance incidente
J_n	Fonction de Bessel d'ordre n

$H_n^{(1)}, H_n^{(2)}$	Fonctions de Hankel d'ordre n de première et deuxième espèces, respectivement
dl	Élément de longueur
ds	Élément de surface
φ	Angle azimutal
δ	Épaisseur de peau
γ	Nombre d'onde complexe dans le milieu conducteur
γ_r	Partie réelle de γ
γ_i	Partie imaginaire de γ
σ_0	Conductivité du vide
σ	Conductivité du milieu
Σ	Densité surfacique de charge
ϵ_0	permittivité du vide
ϵ	permittivité du milieu
ϵ_r	permittivité relative du milieu
μ_0	Perméabilité du vide
μ	Perméabilité du milieu
μ_r	Perméabilité relative du milieu
ω	Pulsation
σ^{dif}	Section efficace de diffusion
σ^{abs}	Section efficace d'absorption
∇	Gradient
∇^2	Laplacien

INTRODUCTION

Une littérature extensive existe sur la diffusion des ondes électromagnétiques par les bons conducteurs dont la conductivité σ est supposée très grande aux hautes fréquences [1]. Dans ce cas, les distances de pénétration δ sont très petites par rapport aux dimensions de l'objet diffuseur. À 10 GHz, par exemple, δ est de l'ordre de $1\mu m$ pour un bon conducteur comme le cuivre et les courants induits par l'onde incidente sont donc confinés à la surface du conducteur.

Aux basses fréquences, le courant pénètre dans le volume du conducteur. Par exemple, $\delta \simeq 7cm$ à 50 Hz dans un alliage de nickel et de chrome, mais dans d'autres cas cette pénétration profonde n'est pas limitée aux petites fréquences. À 10 MHz, la pénétration dans les muscles, par exemple, est de l'ordre de 20 cm. En hyperthermie, une telle pénétration est essentielle.

Dans ce travail, "l'invasion" progressive du volume du conducteur par les courants quand δ augmente fait l'objet d'une étude systématique. Les informations disponibles sur ce phénomène sont limitées [2],[3], ce sont souvent des courbes comme celles montrées dans la figure 0.1 qui représentent les variations relatives du module du champ électrique longitudinal dans un cylindre circulaire de rayon a . Quelques données numériques sont disponibles [4],[5].

Nous discuterons en particulier de la diffusion d'une onde électromagnétique plane par un objet cylindrique de longueur infinie et de conductivité quelconque. Ce cas est intéressant car il est assez simple pour qu'il puisse être résolu analytiquement mais sa solution mène à des résultats typiques qui pourraient s'appliquer au cas d'un objet de forme quelconque. Les deux cas d'une onde incidente E et H seront considérés.

Nous examinerons spécifiquement:

- 1- Le champ électrique à la surface du cylindre. Les courbes de la figure 0.1 montrent des valeurs relatives. Mais ce n'est pas suffisant: la valeur du champ à la surface, $E(a)$, doit aussi être connue. Quand la conductivité augmente, δ diminue et le centre du conducteur devient de plus en plus blindé contre les ondes incidentes. Mais $E(a)$ diminue également (en fait, il s'annule à la limite $\sigma \rightarrow \infty$) et cela diminue davantage le blindage au centre du cylindre.
- 2- Le courant total induit dans le cylindre.
- 3- L'impédance de surface.
- 4- Les pertes par effet Joule et les pertes radiatives.

Dans le premier chapitre, nous trouverons les solutions des équations d'onde dans un cylindre circulaire de conductivité quelconque pour les ondes E et H. Nous développerons des expressions analytiques pour les champs électromagnétiques, le courant induit, l'impédance de surface et les sections efficaces de diffusion et d'absorption.

Les expressions trouvées dans le premier chapitre seront appliquées au cas d'un bon conducteur dans le deuxième chapitre. Le calcul numérique et les résultats seront présentés dans le troisième chapitre. Le code Fortran à la base du calcul numérique est donné à la fin de ce mémoire en appendice B.

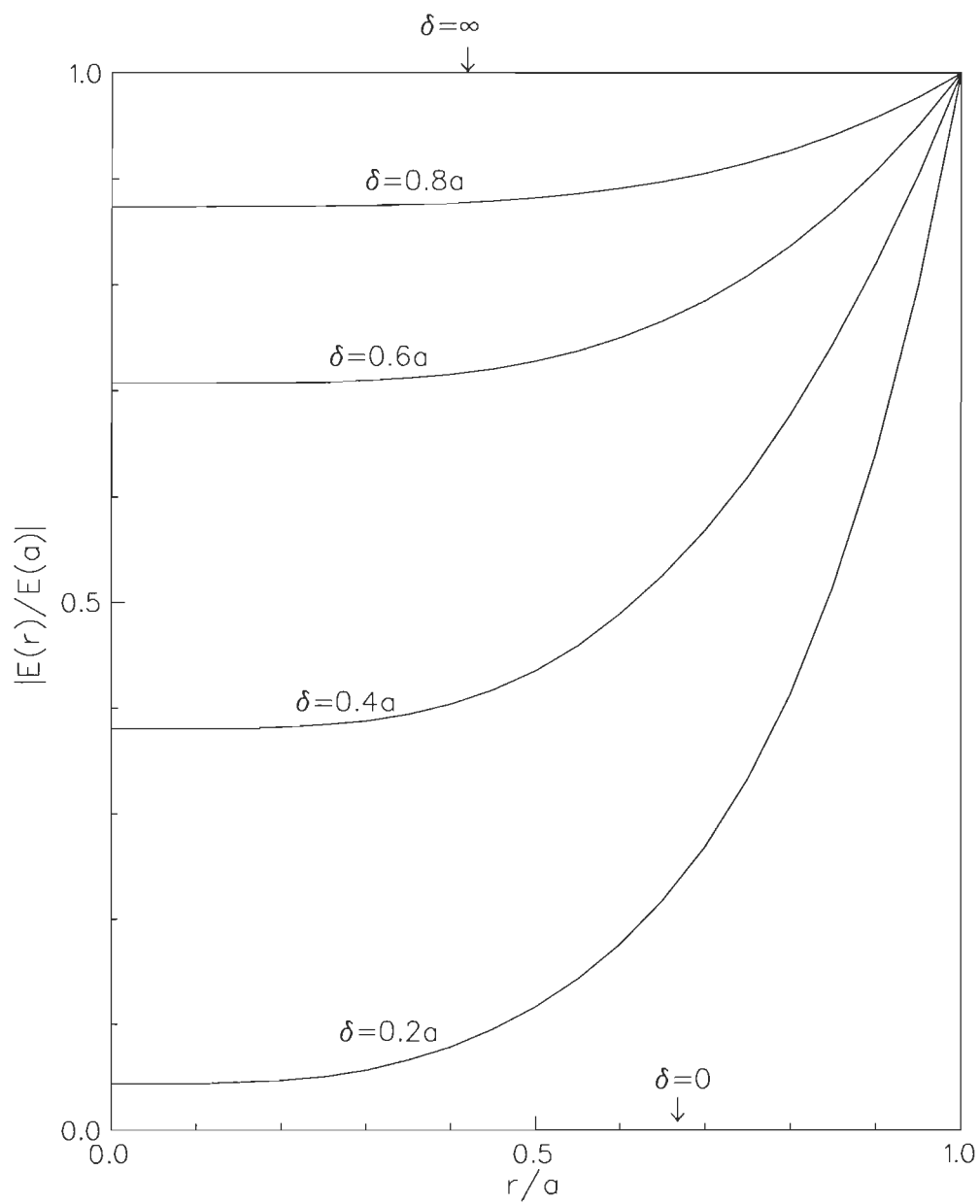


Figure 0.1 Variations relatives du module du champ électrique dans la section d'un conducteur cylindrique circulaire.

CHAPITRE I

DIFFUSION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR UN OBJET CYLINDRIQUE DE CONDUCTIVITÉ QUELCONQUE

1.1 Introduction

Dans un milieu infini, homogène, linéaire, isotrope et exempt de charges, les équations d'onde sont données par:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

où ϵ , μ et σ sont respectivement, la permittivité, la perméabilité et la conductivité du milieu.

Pour une onde électromagnétique monochromatique de fréquence angulaire ω , les équations (1.1) et (1.2) deviennent:

$$(\nabla^2 + \epsilon\mu\omega^2 - i\omega\mu\sigma) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Si l'onde électromagnétique se propage suivant l'axe des x positifs, toutes les composantes du champ électromagnétique ont $e^{i(\omega t - kx)}$ comme facteur commun. Posons:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon\mu \quad (1.4)$$

et

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \epsilon\mu\omega^2 - i\omega\mu\sigma \\ &= k^2 - i\omega\mu\sigma\end{aligned}\tag{1.5}$$

la propagation de l'onde électromagnétique est alors régie par l'équation:

$$(\nabla^2 + \gamma^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0\tag{1.6}$$

Dans ce chapitre, nous nous proposons de résoudre les équations de propagation d'une onde électromagnétique en présence d'un obstacle constitué d'un cylindre circulaire droit et infini. On considère séparément les deux types de polarisation: l'onde E et l'onde H.

1.2 Diffusion d'une onde électromagnétique plane par un cylindre circulaire droit et infini

1.2.1 Onde E

Considérons une onde électromagnétique plane, polarisée linéairement suivant z , qui se propage parallèlement à l'axe des x avec une amplitude $|E^i| = A$. Le champ électrique correspondant à l'onde incidente s'écrit:

$$\mathbf{E}^i = kAe^{i(\omega t - kx)}\tag{1.7}$$

L'onde est diffusée par un cylindre circulaire droit infini non magnétique et de rayon a , placé le long de l'axe z (figure 1.1). Ignorons la dépendance du temps $e^{i\omega t}$ commune à toutes les grandeurs physiques et trouvons une solution de l'équation d'onde (1.6) en coordonnées cylindriques (r, φ, z) . Comme le cylindre est infini, la solution est indépendante de la variable z .

Développons e^{-ikx} dans la base des fonctions de Bessel [appendice A]. On trouve:

$$E^i = Ae^{-ikx}$$

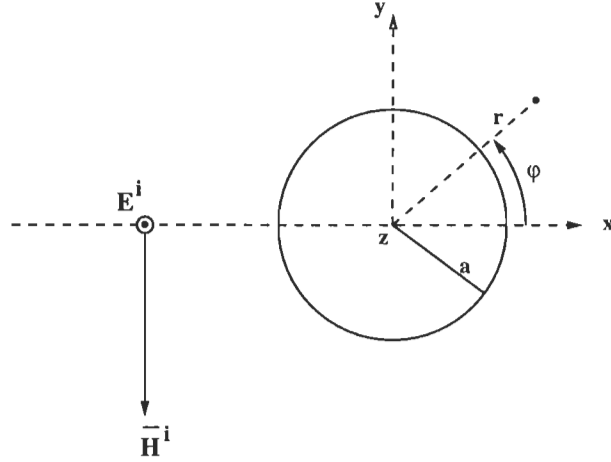


Figure 1.1 Cylindre circulaire dans le plan d'onde incident (onde E).

$$\begin{aligned}
 &= A e^{-ikr \cos \varphi} \\
 &= A \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n J_n(kr) \cos n\varphi
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

avec

$$\lambda_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2(-i)^n & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

À l'extérieur du cylindre, on a:

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^{dif} \tag{1.9}$$

où $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}^+(r, \varphi)$ et $\mathbf{E}^{dif} = \mathbf{E}^{dif}(r, \varphi)$ sont, respectivement, le champ électrique total et le champ électrique correspondant à l'onde diffusée par le cylindre. Ce dernier satisfait à l'équation suivante:

$$\nabla^2 \mathbf{E}^{dif} + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}^{dif} = \nabla^2 \mathbf{E}^{dif} + k^2 \mathbf{E}^{dif} = 0 \tag{1.10}$$

où k , μ_0 et ϵ_0 sont, respectivement, le nombre d'onde, la perméabilité et la permittivité du vide.

La méthode de séparation des variables en coordonnées cylindriques nous permet de résoudre cette équation en posant:

$$E^{dif}(r, \varphi) = R(r)\phi(\varphi) \tag{1.11}$$

La partie radiale $R(r)$ satisfait à l'équation différentielle de Bessel suivante:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (k^2 - \frac{n^2}{r^2})R = 0 \quad (1.12)$$

La solution de cette équation est [6]:

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_n H_n^{(1)}(kr) + \alpha_n H_n^{(2)}(kr)) \quad (1.13)$$

où $H_n^{(1)}(kr)$ et $H_n^{(2)}(kr)$ sont les fonctions de Hankel de première et deuxième espèces, η_n et α_n sont des coefficients à déterminer par les conditions aux limites à $r = a$. Remarquons que $H_n^{(1)}(kr)$ représente une onde entrante. Elle est donc inacceptable pour l'onde diffusée. Alors $\eta_n = 0$ et l'équation (1.13) devient:

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n^{(2)}(kr) \quad (1.14)$$

La partie angulaire $\phi(\varphi)$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 \Phi}{d^2 \varphi} + n^2 \Phi = 0 \quad (1.15)$$

dont la solution est:

$$\begin{aligned} \phi(\varphi) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pm i n \varphi} \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \cos n \varphi \pm i \sin n \varphi \end{aligned} \quad (1.16)$$

Le système doit être invariant dans la transformation $\varphi \rightarrow -\varphi$. Donc

$$\phi(\varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \cos n \varphi \quad (1.17)$$

On peut alors écrire le champ électrique de l'onde diffusée sous la forme:

$$E^{dif} = A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n^{(2)}(kr) \cos n \varphi \quad (1.18)$$

Le champ électrique de l'onde totale à l'extérieur du cylindre devient:

$$E^+ = A \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n J_n(kr) + \alpha_n H_n^{(2)}(kr)) \cos n \varphi \quad (1.19)$$

À l'intérieur du cylindre, le champ électrique de l'onde transmise satisfait à l'équation suivante:

$$\nabla^2 \mathbf{E}^- + \gamma^2 \mathbf{E}^- = 0 \quad (1.20)$$

où γ^2 est défini par l'équation (1.5). La constante γ^2 est un nombre complexe; il est réel si $\sigma=0$ (milieu non conducteur). Donc γ aussi est complexe. Posons:

$$\gamma = \gamma_r + i\gamma_i \quad (1.21)$$

où γ_r et γ_i sont des nombres réels à déterminer. Ecrivons:

$$\gamma^2 = \gamma_r^2 - \gamma_i^2 + i2\gamma_r\gamma_i \equiv \omega^2\epsilon\mu - i\sigma\omega\mu \quad (1.22)$$

D'où, en égalisant les parties réelles et les parties imaginaires:

$$\gamma_r^2 - \gamma_i^2 = \omega^2\epsilon\mu \quad (1.23)$$

$$2\gamma_r\gamma_i = -\sigma\omega\mu \quad (1.24)$$

De ces deux équations, on déduit:

$$\gamma_r = \pm \omega\sqrt{\epsilon\mu} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.25)$$

$$\gamma_i = \mp \omega\sqrt{\epsilon\mu} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

$$\gamma = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\{-i \arctan(\frac{\gamma_r}{\gamma_i})\} \quad (1.27)$$

De la même façon, l'équation (1.20) est résolue par la méthode de séparation des variables en coordonnées cylindriques. Alors, on obtient le champ électrique de l'onde transmise:

$$E^- = A \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma r) \cos n\varphi \quad (1.28)$$

où β_n sont des coefficients à déterminer par les conditions aux limites, à $r = a$, et $J_n(\gamma r)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce à argument complexe.

À la surface du cylindre, le champ électrique est continu ainsi que sa dérivée par rapport à r ,

$$E^+|_{r=a} = E^-|_{r=a} \quad (1.29)$$

$$k \frac{\partial E^+}{\partial(kr)} \Big|_{r=a} = \gamma \frac{\partial E^-}{\partial(\gamma r)} \Big|_{r=a} \quad (1.30)$$

Ces conditions donnent:

$$\lambda_n J_n(ka) = \beta_n J_n(\gamma a) - \alpha_n H_n^{(2)}(ka) \quad (1.31)$$

$$\lambda_n J'_n(ka) = \frac{\gamma}{k} J'_n(\gamma a) - \alpha_n H_n^{'(2)}(ka) \quad (1.32)$$

où $J'_n(\gamma a)$ et $H_n^{'(2)}(ka)$ sont, respectivement, les dérivées des fonctions de Bessel et Hankel par rapport à l'argument. Les deux équations ci-dessus nous donnent α_n et β_n :

$$\alpha_n = -\lambda_n \frac{\gamma J_n(ka) J'_n(\gamma a) - k J_n(\gamma a) J'_n(ka)}{\gamma H_n^2(ka) J'_n(\gamma a) - k J_n(\gamma a) H_n^{'(2)}(ka)} \quad (1.33)$$

$$\beta_n = \lambda_n \frac{k H_n^2(ka) J'_n(ka) - k J_n(ka) H_n^{'(2)}(ka)}{\gamma H_n^2(ka) J'_n(\gamma a) - k J_n(\gamma a) H_n^{'(2)}(ka)} \quad (1.34)$$

En utilisant la formule du Wronskien:

$$J_n(ka) H_n^{'(2)}(ka) - J'_n(ka) H_n^{(2)}(ka) = -\frac{i2}{\pi ka} \quad (1.35)$$

L'expression de β_n devient:

$$\beta_n = \frac{i2}{\pi} \lambda_n \frac{1}{\gamma a J'_n(\gamma a) H_n^2(ka) - ka J_n(\gamma a) H_n^{'(2)}(ka)} \quad (1.36)$$

1.2.2 Onde H

Comme dans le cas de l'onde E, considérons une onde électromagnétique plane, polarisée linéairement suivant z , qui se propage parallèlement à l'axe des x avec une amplitude $|H^i| = B$:

$$\mathbf{H}^i = \mathbf{k} B e^{i(\omega t - kx)} \quad (1.37)$$

où \mathbf{H}^i est la composante magnétique correspondant à l'onde incidente. Cette onde est diffusée par un cylindre circulaire droit infini non magnétique et de rayon a placé le long de l'axe z (figure 1.2). Comme dans le cas de l'onde E, le

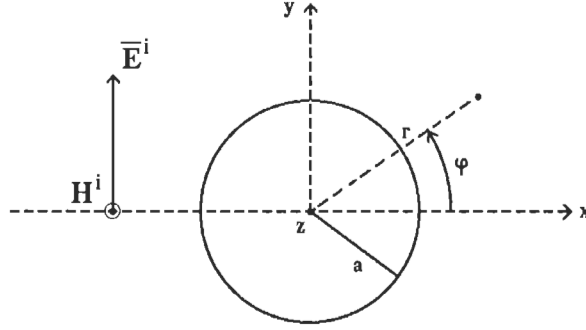


Figure 1.2 Cylindre circulaire dans le plan d'onde incident (onde H).

développement de e^{-ikx} dans la base des fonctions de Bessel [appendice A] mène à:

$$\begin{aligned} H^i &= B e^{-ikr \cos \varphi} \\ &= B \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n J_n(kr) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (1.38)$$

À l'extérieur du cylindre, on a:

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^{dif} \quad (1.39)$$

où $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^+(r, \varphi)$ et $\mathbf{H}^{dif} = \mathbf{H}^{dif}(r, \varphi)$ sont, respectivement, le champ magnétique total et le champ magnétique correspondant à l'onde diffusée par le cylindre. Ce dernier satisfait à l'équation suivante:

$$\nabla^2 \mathbf{H}^{dif} + k^2 \mathbf{H}^{dif} = 0 \quad (1.40)$$

Comme cette équation est similaire à l'équation (1.10), on peut alors écrire le champ magnétique de l'onde diffusée sous la forme

$$H^{dif} = B \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \quad (1.41)$$

où ζ_n sont des coefficients à déterminer par les conditions aux limites à $r = a$.

Le champ magnétique de l'onde totale à l'extérieur du cylindre devient:

$$H^+ = B \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n J_n(kr) + \zeta_n H_n^{(2)}(kr)) \cos n\varphi \quad (1.42)$$

À l'intérieur du cylindre, le champ magnétique de l'onde transmise satisfait à l'équation suivante:

$$\nabla^2 \mathbf{H}^- + \gamma^2 \mathbf{H}^- = 0 \quad (1.43)$$

où γ^2 est défini par l'équation (1.5). Comme cette équation est similaire à l'équation (1.20), H^- est donné par:

$$H^- = B \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma r) \cos n\varphi \quad (1.44)$$

où ξ_n sont des coefficients à déterminer par les conditions aux limites à $r = a$.

À la surface du cylindre, le champ magnétique et la composante tangentielle du champ électrique E_φ sont continus,

$$H^+|_{r=a} = H^-|_{r=a} \quad (1.45)$$

$$k \frac{Z_0}{ik} \frac{\partial H^+}{\partial(kr)}|_{r=a} = \frac{\gamma}{\sigma(1+iQ)} \frac{\partial H^-}{\partial(\gamma r)}|_{r=a} \quad (1.46)$$

où $Q = \omega\epsilon/\sigma$ est le facteur de qualité du milieu et $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 377\Omega$ est l'impédance caractéristique du vide. La deuxième condition s'écrit:

$$k \frac{\partial H^+}{\partial(kr)}|_{r=a} = \frac{ik}{Z_0\sigma(1+iQ)} \gamma \frac{\partial H^-}{\partial(\gamma r)}|_{r=a} \quad (1.47)$$

En remplaçant $Z_0\sigma/k$ par $1/Q$, on obtient:

$$k \frac{\partial H^+}{\partial(kr)}|_{r=a} = \frac{iQ}{1+iQ} \gamma \frac{\partial H^-}{\partial(\gamma r)}|_{r=a} \quad (1.48)$$

De ces conditions, on tire:

$$\lambda_n J_n(ka) = \xi_n J_n(\gamma a) - \zeta_n H_n^{(2)}(ka) \quad (1.49)$$

$$\lambda_n J'_n(ka) = \frac{iQ}{1+iQ} \gamma \xi_n J'_n(\gamma a) - \zeta_n H_n'^{(2)}(ka) \quad (1.50)$$

Les deux équations ci-dessus nous permettent d'obtenir les coefficients ζ_n et ξ_n ;

$$\xi_n = \lambda_n \frac{J'_n(ka) H_n^{(2)}(ka) - J_n(ka) H_n'^{(2)}(ka)}{\frac{iQ}{1+iQ} \gamma J'_n(\gamma a) H_n^{(2)}(ka) - J_n(\gamma a) H_n'^{(2)}(ka)} \quad (1.51)$$

$$\zeta_n = \lambda_n \frac{k J_n(\gamma a) J_n'(ka) - \frac{iQ}{1+iQ} \gamma J_n(ka) J_n'(\gamma a)}{\frac{iQ}{1+iQ} \gamma J_n'(\gamma a) H_n^{(2)}(ka) - k J_n(ka) H_n'^{(2)}(ka)} \quad (1.52)$$

En utilisant la formule du Wronskien (1.35), l'expression de ξ_n devient:

$$\xi_n = \frac{2}{\pi} \lambda_n \frac{1}{\frac{Q}{1+iQ} \gamma a J_n'(\gamma a) H_n^{(2)}(ka) + i k a J_n(\gamma a) H_n'^{(2)}(ka)} \quad (1.53)$$

1.3 Champs électromagnétiques à la surface, à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre

En présence des frontières métalliques, les champs électromagnétiques présentent un aspect pratique important. À haute fréquence, où la longueur d'onde est de l'ordre d'un mètre ou moins, l'unique voie pratique de générer et transmettre les radiations électromagnétiques nécessite une structure métallique avec des dimensions comparables aux longueurs d'ondes impliquées.

Considérons un conducteur parfait baignant dans un milieu non conducteur. Soit \mathbf{n} le vecteur unitaire sortant normal à la surface du conducteur. Comme dans le cas statique, le champ électrique est nul à l'intérieur des conducteurs. Les charges à l'intérieur d'un conducteur parfait répondent instantanément aux changements dans les champs et produisent toujours une densité surfacique de charge Σ :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \frac{\Sigma}{\epsilon} \quad (1.54)$$

pour donner un champ nul à l'intérieur d'un conducteur parfait. De la même façon, pour des champs magnétiques qui varient dans le temps, les charges surfaciques se déplacent pour créer un vrai courant de surface \mathbf{K} tel que

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{K} \quad (1.55)$$

et pour donner un champ magnétique nul à l'intérieur du conducteur. Les deux autres conditions aux limites portent sur la composante normale de \mathbf{H} et la composante tangentielle de \mathbf{E} :

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) = 0 \quad (1.56)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_c) = 0 \quad (1.57)$$

où l'indice c réfère au conducteur. De ces conditions aux limites, on déduit que juste à l'extérieur de la surface d'un conducteur parfait, seulement la composante normale de \mathbf{E} et la composante tangentielle de \mathbf{H} peuvent exister; les champs tombent rapidement à zéro à l'intérieur du conducteur.

Si le conducteur n'est pas parfait, les champs n'y sont pas nuls. Nous nous proposons de calculer ces champs et leurs composantes dans les cas de l'onde \mathbf{E} et l'onde \mathbf{H} .

1.3.1 Onde \mathbf{E}

À la surface du cylindre, le champ électrique est continu. Il est donné par l'équation (1.19) ou (1.28) en remplaçant r par a :

$$E_s = A \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi \quad (1.58)$$

$$= A \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n J_n(ka) + \alpha_n H_n^{(2)}(ka)) \cos n\varphi \quad (1.59)$$

Le champ électrique est relié au champ magnétique par l'équation de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.60)$$

qui nous permet de trouver les deux composantes H_r et H_φ du champ magnétique car

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{H} \\ &= -i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\mathbf{H} \\ &= -ikZ_0\mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.61)$$

À l'intérieur du cylindre, l'équation (1.61) devient, en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} H_\varphi^- &= \frac{1}{ikZ_0} \frac{\partial E^-}{\partial r} \\ &= A \frac{\gamma}{ikZ_0} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma r) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned}
H_r^- &= -\frac{1}{ikZ_0r} \frac{\partial E^-}{\partial \varphi} \\
&= A \frac{1}{ikrZ_0} \sum_{n=0}^{\infty} n \beta_n J_n(\gamma r) \sin n\varphi
\end{aligned} \tag{1.63}$$

À l'extérieur du cylindre, les composantes du champ magnétique sont:

$$H_\varphi^+ = \frac{A}{iZ_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n J'_n(kr) + \alpha_n H_n^{(2)'}(kr)) \cos n\varphi \tag{1.64}$$

$$H_r^+ = \frac{A}{ikZ_0r} \sum_{n=0}^{\infty} n (\lambda_n J_n(kr) + \alpha_n H_n^{(2)}(kr)) \sin n\varphi \tag{1.65}$$

Les champs à la surface s'obtiennent en remplaçant r par a dans les expressions de H_φ^- et H_r^- .

1.3.2 Onde H

À la surface du cylindre, le champ magnétique est continu. Il est donné par l'équation (1.42) ou (1.44) en remplaçant r par a :

$$H_s = B \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi \tag{1.66}$$

$$= B \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n J_n(ka) + \zeta_n H_n^{(2)}(ka)) \cos n\varphi \tag{1.67}$$

Le champ électrique est relié au champ magnétique par l'équation de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.68}$$

$$= \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.69}$$

À l'extérieur du cylindre, $\sigma = 0$, l'équation de Maxwell se réduit à:

$$\nabla \times \mathbf{H}^+ = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.70}$$

En coordonnées cylindriques, cette équation nous permet de trouver les composantes radiale E_r^+ et tangentielle E_φ^+ :

$$\begin{aligned} E_r^+ &= \frac{Z_0}{ikr} \frac{\partial H^+}{\partial \varphi} \\ &= B \frac{i}{kY_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\lambda_n J_n(kr) + \zeta_n H_n^{(2)}(kr) \right) \sin n\varphi \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi^+ &= -\frac{Z_0}{ik} \frac{\partial H^+}{\partial r} \\ &= B \frac{i}{Y_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_n J'_n(kr) + \zeta_n H_n'^{(2)}(kr) \right) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (1.72)$$

où $Y_0 = 1/Z_0$ est l'admittance du vide.

À l'intérieur du cylindre, l'équation de Maxwell (1.69) devient:

$$\nabla \times \mathbf{H}^- = (\sigma + i\epsilon\omega) \mathbf{E} \quad (1.73)$$

Les composantes du champ électrique E_r^- et E_φ^- sont données par:

$$\begin{aligned} E_r^- &= \frac{1}{(\sigma + i\epsilon\omega)r} \frac{\partial H^-}{\partial \varphi} \\ &= -B \frac{1}{(\sigma + i\epsilon\omega)r} \sum_{n=0}^{\infty} n \xi_n J_n(\gamma r) \sin n\varphi \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi^- &= -\frac{1}{(\sigma + i\epsilon\omega)} \frac{\partial H^-}{\partial r} \\ &= -B \frac{\gamma}{(\sigma + i\epsilon\omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J'_n(\gamma r) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (1.75)$$

On peut écrire, en notant que $Q = \epsilon\omega/\sigma$,

$$\begin{aligned} \sigma + i\epsilon\omega &= \sigma \left(1 + i \frac{\epsilon\omega}{\sigma} \right) \\ &= \frac{\epsilon\omega}{Q} (1 + iQ) \\ &= \omega \epsilon \left(\frac{1}{Q} + i \right) \\ &= Y_0 \epsilon_r k \left(\frac{1}{Q} + i \right) \end{aligned} \quad (1.76)$$

où ϵ_r est la permittivité relative du milieu. Les champs à la surface s'obtiennent en remplaçant r par a dans les expressions de E_φ^- et E_r^- . On obtient:

$$E_r^- = -B \frac{1}{Y_0(\frac{1}{Q} + i)\epsilon_r k a} \sum_{n=0}^{\infty} n \xi_n J_n(\gamma a) \sin n\varphi \quad (1.77)$$

$$E_\varphi^- = -B \frac{\gamma}{Y_0(\frac{1}{Q} + i)\epsilon_r k} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi \quad (1.78)$$

1.4 Impédance de surface

1.4.1 Onde E

L'impédance de surface d'un conducteur se définit comme le rapport E_t/H_t à la surface, où E_t et H_t sont, respectivement, les composantes tangentielles de **E** et **H**. Dans le cas du cylindre décrit dans la section (1.1), les composantes tangentielles de **E** et **H** sont, respectivement, E et H_φ . D'où

$$\begin{aligned} Z_s &= \frac{E|_{r=a}}{H_\varphi|_{r=a}} \\ &= i \frac{k}{\gamma} Z_0 \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi} \right) \end{aligned} \quad (1.79)$$

1.4.2 Onde H

On peut également définir l'impédance de surface d'un conducteur comme le coefficient de proportionnalité reliant la composante tangentielle du champ électrique et le courant effectif de surface \mathbf{K}_{eff} . Ce dernier est défini par:

$$\mathbf{K}_{eff} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (1.80)$$

Dans le cas de l'onde H, cette équation devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eff} &= \mathbf{n} \times \mathbf{k} H \\ &= -\mathbf{u}_\varphi H \end{aligned} \quad (1.81)$$

où \mathbf{u}_φ est le vecteur unitaire azimutal tangent à la surface du conducteur. L'impédance de surface Z_s est alors donnée par:

$$\begin{aligned} Z_s &= \frac{E_\varphi^-|_{r=a}}{-H^-|_{r=a}} \\ &= \frac{\gamma}{\sigma + i\epsilon\omega} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi} \end{aligned} \quad (1.82)$$

1.5 Courant total I induit dans le cylindre

1.5.1 Onde E

Le théorème d'Ampère nous permet de calculer le courant total induit par l'onde à $r = a$,

$$I = \oint_{r=a} \mathbf{H} d\mathbf{l} \quad (1.83)$$

$$= \int H_\varphi|_{r=a} a d\varphi = a \int_0^{2\pi} H_\varphi|_{r=a} d\varphi \quad (1.84)$$

Substituons $H_\varphi|_{r=a}$ par sa valeur dans (1.84), il vient:

$$I = A \frac{\gamma a}{ikZ_0} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi \quad (1.85)$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

on a alors:

$$I = A \frac{2\pi\gamma a}{ikZ_0} \beta_0 J'_0(\gamma a) \quad (1.87)$$

Le courant physique correspond à la partie réelle de l'expression (1.87):

$$I = A \frac{2\pi a}{kZ_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma}{i} \beta_0 J'_0(\gamma a) \right] \quad (1.88)$$

Le module du courant est:

$$|I| = A \frac{2\pi a}{kZ_0} \left| \frac{\gamma}{i} \beta_0 J'_0(\gamma a) \right| \quad (1.89)$$

1.5.2 Onde H

Dans ce cas, la densité du courant \mathbf{J} induit dans le cylindre est donnée par:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -B \frac{1}{1+iQ} \left(\mathbf{u}_\varphi \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J'_n(\gamma r) \cos n\varphi + \mathbf{u}_r \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} n \xi_n J_n(\gamma r) \sin n\varphi \right) \quad (1.90)$$

où \mathbf{u}_r est le vecteur unitaire radial.

1.6 Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion (en m^2 par m) du cylindre est définie comme le rapport de la puissance diffusée sur la densité de puissance incidente:

$$\sigma^{dif} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} r \frac{|E^{dif}|^2}{|E^i|^2} d\varphi \quad (1.91)$$

où $|E^i| = A$ et $|E^{dif}| = \left| A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \right|$. Il vient:

$$\sigma^{dif} = \lim_{r \rightarrow \infty} r \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \right|^2 d\varphi \quad (1.92)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} r \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\alpha_n|^2 |H_n^{(2)}(kr)|^2 \cos^2 n\varphi d\varphi \quad (1.93)$$

Comme le comportement asymptotique des fonctions de Hankel, quand $r \rightarrow \infty$, est:

$$H_n^{(2)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.94)$$

on a alors,

$$|H_n^{(2)}(kr)|^2 \sim \frac{2}{\pi kr} \quad (1.95)$$

et la section efficace devient:

$$\begin{aligned} \sigma^{dif} &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\alpha_n|^2 \frac{2}{\pi kr} \cos^2 n\varphi d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi k} \int_0^{2\pi} \left(|\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \cos^2 n\varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi k} \left(2\pi |\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi \right) \end{aligned} \quad (1.96)$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi = \pi \quad (1.97)$$

la section efficace de diffusion s'écrit en définitive:

$$\sigma^{dif} = \frac{4}{k} \left(|\alpha_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right) \quad (1.98)$$

Pour $n=0$ et 1 on obtient, respectivement, σ_0^{dif} et σ_1^{dif} :

$$\sigma_0^{dif} = \frac{4}{k} |\alpha_0|^2 \quad (1.99)$$

$$\sigma_1^{dif} = \frac{2}{k} |\alpha_1|^2 \quad (1.100)$$

Pour une onde H, la section efficace de diffusion est obtenue de la même façon en remplaçant, respectivement, α_0 et α_n par ζ_0 et ζ_n . On obtient, tout calcul fait:

$$\sigma^{dif} = \frac{4}{k} \left(|\zeta_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^2 \right) \quad (1.101)$$

Pour $n=0$ et 1 on obtient, respectivement, σ_0^{dif} et σ_1^{dif} :

$$\sigma_0^{dif} = \frac{4}{k} |\zeta_0|^2 \quad (1.102)$$

$$\sigma_1^{dif} = \frac{2}{k} |\zeta_1|^2 \quad (1.103)$$

1.7 Section efficace d'absorption

1.7.1 Onde E

La section efficace d'absorption (en m^2 par m) du cylindre est reliée aux pertes par effet Joule dans le conducteur. Elle est égale au rapport de la puissance absorbée dans le conducteur à la densité de puissance incidente à la surface:

$$\sigma^{abs} = - \frac{\int_s \langle \mathbf{S}^- \rangle \cdot \mathbf{n} ds}{\langle S^{inc} \rangle} \quad (1.104)$$

où $\langle \mathbf{S}^- \rangle$ est le vecteur de Poynting moyen entrant. La puissance dissipée dans le conducteur est donnée par le flux d'énergie entrant du vecteur \mathbf{S}^- :

$$- \oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.105)$$

Le vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{S}^- \rangle$ est donné par:

$$\langle \mathbf{S}^- \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}^-(x, y, z, t) dt \quad (1.106)$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Pour des champs variant de façon sinusoïdale,

$$\langle \mathbf{S}^- \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (1.107)$$

où \mathbf{H}^* est le complexe conjugué de \mathbf{H} . Substituons la valeur de $\langle \mathbf{S}^- \rangle$ dans l'expression de σ^{abs} . On obtient:

$$\sigma^{abs} = -\frac{1}{2} \frac{\text{Re} \int_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} ds}{\langle S^{inc} \rangle} \quad (1.108)$$

Calculons le terme $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n}$, où $\mathbf{n} \equiv \mathbf{u}_r$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{k} E \times (\mathbf{u}_r H_r^* + \mathbf{u}_\varphi H_\varphi^*) \cdot \mathbf{u}_r \\ &= (\mathbf{u}_\varphi E H_r^* - \mathbf{u}_r E H_\varphi^*) \cdot \mathbf{u}_r \\ &= -E H_\varphi^* \end{aligned} \quad (1.109)$$

Quant à $\langle S^{inc} \rangle$, il est donné par:

$$\begin{aligned} \langle S^{inc} \rangle &= \frac{1}{2} E^i H^{i*} \\ &= \frac{1}{2} \frac{|E^i|^2}{Z_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{|A|^2}{Z_0} \end{aligned} \quad (1.110)$$

où $|E^i| = |H^i| Z_0$.

L'élément de surface ds , par unité de longueur, est:

$$ds = a d\varphi \quad (1.111)$$

alors, la section efficace d'absorption devient:

$$\sigma^{abs} = \frac{\text{Re} \int_0^{2\pi} E H_\varphi^* a d\varphi}{2 \langle S^{inc} \rangle} \quad (1.112)$$

À $r = a$, H_φ^* et E sont donnés par:

$$H_\varphi^{-*} = i \frac{A}{Z_0} \frac{\gamma^*}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^* J_n'(\gamma a) \cos n\varphi \quad (1.113)$$

$$E^- = A \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi \quad (1.114)$$

Le produit $H_\varphi^{-*} E^-$ devient donc:

$$H_\varphi^{-*} E^- = \frac{|A|^2}{Z_0 k} \left(i \gamma^* \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^* J_m'(\gamma a) \cos m\varphi \right) \quad (1.115)$$

Substituons l'expression de ce produit et celle de $\langle S^{inc} \rangle$ dans l'expression (1.108) de σ^{abs} . On obtient:

$$\sigma^{abs} = \frac{a}{k} \int_0^{2\pi} Re \left(i \gamma^* \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m^* J_m'(\gamma a) \cos m\varphi \right) d\varphi \quad (1.116)$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = m = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases} \quad (1.117)$$

on a, en définitive:

$$\sigma^{abs} = \frac{2\pi a}{k} Re \left[i \gamma^* \left(|\beta_0|^2 J_0(\gamma a) J_0'(\gamma a) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 J_n(\gamma a) J_n'(\gamma a) \right) \right] \quad (1.118)$$

Pour $n=0$ et 1 on obtient, respectivement, σ_0^{abs} et σ_1^{abs} :

$$\sigma_0^{abs} = \frac{2\pi a}{k} Re [i \gamma^* (|\beta_0|^2 J_0(\gamma a) J_0'(\gamma a))] \quad (1.119)$$

$$\sigma_1^{abs} = \frac{\pi a}{k} Re [i \gamma^* (|\beta_1|^2 J_1(\gamma a) J_1'(\gamma a))] \quad (1.120)$$

1.7.2 Onde H

Nous avons trouvé dans la section précédente l'expression générale de la section efficace d'absorption (en m^2 par m),

$$\sigma^{abs} = -\frac{1}{2} \frac{Re \int_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} ds}{\langle S^{inc} \rangle} \quad (1.121)$$

Calculons le terme $(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n}$,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{u}_r E_r + \mathbf{u}_\varphi E_\varphi) \times \mathbf{k} H^* \cdot \mathbf{u}_r \\
 &= (-\mathbf{u}_\varphi E_r H^* + \mathbf{u}_r E_\varphi H^*) \cdot \mathbf{u}_r \\
 &= E_\varphi H^*
 \end{aligned} \tag{1.122}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \langle S^{inc} \rangle &= \frac{1}{2} E^i H^{i*} \\
 &= \frac{1}{2} Z_0 H^i H^{i*} = \frac{Z_0}{2} |B|^2
 \end{aligned} \tag{1.123}$$

la section efficace devient:

$$\sigma^{abs} = -\frac{Re \int_0^{2\pi} a E_\varphi H^* d\varphi}{2 \langle S^{inc} \rangle} \tag{1.124}$$

À $r = a$,

$$H^{-*} = B \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^* J_n^*(\gamma a) \cos n\varphi \tag{1.125}$$

$$E_\varphi^- = -B \frac{\gamma}{(\sigma + i\epsilon\omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n'(\gamma a) \cos n\varphi \tag{1.126}$$

Calculons le produit $E_\varphi^- H^{-*}$,

$$E_\varphi^- H^{-*} = -\frac{\gamma}{(\sigma + i\epsilon\omega)} |B|^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n'(\gamma a) \cos n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m'^* J_m^*(\gamma a) \cos m\varphi \right] \tag{1.127}$$

Substituons ce produit et $\langle S^{inc} \rangle$ dans l'expression (1.124) de σ^{abs} . On obtient:

$$\sigma^{abs} = Re \left[\frac{\gamma a}{Z_0(\sigma + i\epsilon\omega)} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n'(\gamma a) \cos n\varphi \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m'^* J_m^*(\gamma a) \cos m\varphi \right] \tag{1.128}$$

L'intégrale dans l'expression précédente est éliminée en utilisant (1.117). Il vient:

$$\sigma^{abs} = \frac{2\pi a}{Z_0\sigma} Re \left[\frac{\gamma}{(1 + i\frac{\epsilon\omega}{\sigma})} \left(|\xi_0|^2 J_0'(\gamma a) J_0^*(\gamma a) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 J_n'(\gamma a) J_n^*(\gamma a) \right) \right] \tag{1.129}$$

Comme $Q = \omega\epsilon/\sigma$, alors:

$$\begin{aligned}
 Z_0 \sigma &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\omega\epsilon}{Q} \\
 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_r}{Q} \\
 &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \frac{\epsilon_r}{Q} \\
 &= \frac{k\epsilon_r}{Q}
 \end{aligned} \tag{1.130}$$

où $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$. La section efficace d'absorption devient alors:

$$\sigma^{abs} = \frac{2\pi a Q}{k\epsilon_r} \text{Re} \left[\frac{\gamma}{(1+iQ)} \left(|\xi_0|^2 J'_0(\gamma a) J_0^*(\gamma a) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 J'_n(\gamma a) J_n^*(\gamma a) \right) \right] \tag{1.131}$$

Pour $n=0$ et 1 on obtient, respectivement, σ_0^{abs} et σ_1^{abs} :

$$\sigma_0^{abs} = \frac{2\pi a Q}{k\epsilon_r} \text{Re} \left[\frac{\gamma}{(1+iQ)} (|\xi_0|^2 J'_0(\gamma a) J_0^*(\gamma a)) \right] \tag{1.132}$$

$$\sigma_1^{abs} = \frac{\pi a Q}{k\epsilon_r} \text{Re} \left[\frac{\gamma}{(1+iQ)} (|\xi_1|^2 J'_1(\gamma a) J_1^*(\gamma a)) \right] \tag{1.133}$$

1.8 Conclusion

Nous avons calculé dans ce chapitre des quantités importantes comme les champs à la surface, l'impédance de surface, le courant induit et les sections efficaces de diffusion et d'absorption dans le cas d'un cylindre droit circulaire de conductivité quelconque. Dans le prochain chapitre, nous considérerons le cas particulier mais important d'un cylindre circulaire bon conducteur.

CHAPITRE II

CAS DES BONS CONDUCTEURS

2.1 Le champ électromagnétique à la limite des bons conducteurs

Il est très utile, pour des fins pratiques, de retrouver les résultats des sections précédentes dans le cas de la diffusion d'une onde électromagnétique par un cylindre non magnétique et bon conducteur.

Dans le cas d'un bon conducteur, si la fréquence du signal est élevée, le courant est confiné à sa surface. À basse fréquence, le courant traverse toute la section du conducteur. À haute fréquence, le courant circule sur une épaisseur de l'ordre de la distance de pénétration, δ , ou épaisseur de peau. L'épaisseur de la peau *diminue* si la conductivité σ , la perméabilité relative μ_r ($\mu_r = 1$ pour un matériel non magnétique) ou la fréquence augmentent ($\delta = \sqrt{2/\omega\sigma\mu}$).

Pour un bon conducteur, mais non parfait, les champs au voisinage de sa surface doivent se comporter approximativement comme dans un conducteur parfait. On sait qu'à l'intérieur d'un conducteur, les champs sont atténués exponentiellement sur une épaisseur de quelques δ .

À des fréquences moyennes, δ est une fraction de centimètre. Par conséquent, les conditions aux limites pour un conducteur parfait sont approximativement vraies pour un bon conducteur [7], à part une petite couche de transition à la surface dont l'étendue est de l'ordre de δ .

Pour examiner cette mince région de transition, il faut faire attention. En effet, la loi d'Ohm, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, montre qu'avec une conductivité finie, il n'y a pas

de couche de courant surfacique comme celle donnée par l'équation (1.55). La condition aux limites pour le champ magnétique est alors:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) = 0 \quad (2.1)$$

Les solutions pour \mathbf{H} et \mathbf{E} à l'intérieur d'un bon conducteur montrent que les champs sont parallèles à la surface et se propagent perpendiculairement à lui avec des grandeurs qui dependent seulement du champ magnétique tangentiel qui existe juste à l'extérieur du surface [8].

L'existence d'une petite composante tangentielle de \mathbf{E} à l'extérieur de la surface, en plus des composantes normale de \mathbf{E} et tangentielle de \mathbf{H} , signifie qu'il y a une puissance moyenne absorbée et cela montre qu'il y a une perte par effet Joule, par unité de surface, dans le conducteur donnée par:

$$\frac{dP_{perte}}{da} = \frac{\mu_0 \omega \delta}{4} |\mathbf{H}|^2 \quad (2.2)$$

La densité de courant \mathbf{J} est confinée à une petite épaisseur juste à l'intérieur de la surface du conducteur et qui est equivalente a un courant de surface effectif \mathbf{K}_{eff} :

$$\mathbf{K}_{eff} = \int_0^\infty \mathbf{J} dr = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (2.3)$$

Par comparaison avec $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{K}$, l'équation (2.3) montre qu'un bon conducteur se comporte comme un conducteur parfait pour lequel le vrai courant de surface est remplacé par un courant surfacique effectif équivalent, \mathbf{K}_{eff} . Il est distribué sur une très petite épaisseur près de la surface.

La puissance dissipée est donnée par:

$$\frac{dP_{perte}}{da} = \frac{1}{2\sigma\delta} |\mathbf{K}_{eff}|^2 \quad (2.4)$$

Le terme $1/\sigma\delta$ joue le rôle d'une résistance surfacique du conducteur. L'équation (2.4), où \mathbf{K}_{eff} est donné par l'équation (2.3), nous permet de calculer approximativement les pertes ohmiques dans les bons conducteurs.

Il nous faut maintenant trouver des expressions pour tous les paramètres considérés dans la section précédente tels que les champs à la surface, le courant

induit, l'impédance de surface et les sections efficaces de diffusion et d'absorption. Mais, tout d'abord, simplifions les expressions de γ et δ . L'équation (1.5) s'écrit:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \omega^2 \epsilon \mu - i \omega \sigma \mu \\ &= \mu \omega^2 \epsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)\end{aligned}\quad (2.5)$$

La quantité $i\omega\epsilon/\sigma$ apparaît comme le rapport de la densité du courant de déplacement $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ à la densité de courant de conduction $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Le *facteur de qualité* Q du milieu est le module de ce rapport:

$$Q = \left| \frac{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}{\mathbf{J}} \right| = \left| \frac{\frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t}}{\sigma \mathbf{E}} \right| = \frac{\omega \epsilon}{\sigma} \quad (2.6)$$

Dans les isolants, $Q \rightarrow \infty$. Dans des conducteurs ordinaires, σ est de l'ordre de $10^7 (\Omega.m)$. La permittivité relative ϵ_r d'un conducteur n'est pas facilement mesurable, car les effets de la polarisation sont généralement masqués par la conduction. Nous pouvons néanmoins prendre, pour les besoins des calculs, $\epsilon_r \simeq 1$ pour un bon conducteur. Pour des conducteurs ordinaires, Q est donc très petit et σ est indépendant de la fréquence [9]. Dans un bon conducteur le courant de déplacement est donc négligeable par rapport au courant de conduction aux fréquences inférieures aux fréquences optiques, qui débutent vers $10^{15} Hz$.

On a alors:

$$\gamma^2 = \mu \omega^2 \epsilon \left(1 - i \frac{1}{Q}\right) \quad (2.7)$$

En posant

$$\gamma = \gamma_r + i \gamma_i \quad (2.8)$$

on obtient:

$$\gamma_r = \pm \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

$$\gamma_i = \mp \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

$$\gamma = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\{-i \arctan(\frac{\gamma_r}{\gamma_i})\} \quad (2.11)$$

La partie réelle γ_r du nombre d'onde est égale à $2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde

dans le milieu; la partie imaginaire γ_i est l'inverse de la distance de pénétration δ : $\gamma_i = 1/\delta$.

Dans les bons conducteurs, $Q \ll 1$ et

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \pm 1 \right)^{\frac{1}{2}} &\approx \left(\frac{1}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{Q^2}{2} \pm Q \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \left(\frac{1}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{Q}{2} \right) \\ &\approx \left(\frac{1}{Q} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cette approximation est acceptable à mieux que 1% quand

$$Q = \frac{\omega\epsilon}{\sigma} \leq \frac{1}{50} \quad (2.13)$$

ce qui signifie que la densité de courant de conduction $\sigma\mathbf{E}$ vaut au moins 50 fois la densité de courant de déplacement $\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$. On définit parfois les *bons conducteurs* comme ceux pour lesquels la condition précédente est réalisée [10]. Toutefois, dans ce travail, nous utiliserons le critère de Van Bladel $ka \cdot \delta/a \leq 0,45$ où on a un facteur de qualité $Q < 0.1$.

Dans les bons conducteurs, l'équation (2.5) se réduit à:

$$\gamma^2 = -i\omega\sigma\mu \quad (2.14)$$

et

$$\gamma = (-i\omega\sigma\mu)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega\sigma\mu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - i) = \frac{1 - i}{\delta} \quad (2.15)$$

On a alors $\gamma_r = \gamma_i$ et

$$\delta = \frac{1}{\gamma_i} = \left(\frac{2}{\omega\sigma\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

Dans les très bons conducteurs, l'atténuation qui en résulte est si grande que l'onde est à peine discernable après une pénétration de quelques δ . Cette forte atténuation des ondes signifie qu'aux hautes fréquences, le courant circule seulement à la surface des conducteurs.

Il s'ensuit que dans les bons conducteurs, le champ magnétique est beaucoup plus grand que le champ électrique. La phase de champ \mathbf{E} est en avance sur celle de \mathbf{H} de 45° :

$$\frac{E}{H} = \frac{\omega\mu^2}{\sigma} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (2.17)$$

L'énergie dans de tels milieux se manifeste pratiquement entièrement sous forme magnétique.

Dans le cas d'une onde E, le courant induit dans le cylindre est:

$$I = A \frac{2\pi a}{kZ_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma}{i} \beta_0 J'_0(\gamma a) \right] \quad (2.18)$$

Pour un bon conducteur, $\gamma = (1 - i)/\delta$, et alors

$$\begin{aligned} I &= A \frac{2\pi a}{kZ_0\delta} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - i}{i} \beta_0 J'_0(\gamma a) \right] \\ &= -A \frac{2\pi a}{kZ_0\delta} \operatorname{Re} \left[(1 + i) \beta_0 J'_0(\gamma a) \right] \\ &= A \frac{2\pi a}{kZ_0\delta} \operatorname{Re} \left[(1 + i) \beta_0 J_1(\gamma a) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

où, nous avons utilisé la relation

$$J'_0(\gamma a) = -J_1(\gamma a) \quad (2.20)$$

Il est utile de connaître le comportement de I à basse fréquence et quand le cylindre devient transparent, c'est-à-dire quand $\delta \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow 0$). On trouve, à cette limite:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta_0 \approx 1 \quad (2.21)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} J_1(\gamma a) \approx \frac{\gamma a}{2} = (1 - i) \frac{a}{2\delta} \quad (2.22)$$

Alors I devient:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \frac{Aa}{Z_0} \frac{1}{k\delta} \operatorname{Re} \left[(1 + i)(1 - i) \frac{a}{2\delta} \right] \\ &= 2\pi \frac{|E^i|a}{Z_0} \frac{1}{ka} \frac{a^2}{\delta^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dans le cas de l'onde H, le courant surfacique est azimutal et il est donné par:

$$I = \int \mathbf{K}_{eff} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.24)$$

où

$$dl = -\mathbf{u}_\varphi dl = -a d\varphi \mathbf{u}_\varphi \quad (2.25)$$

est un élément de longueur d'une courbe circulaire à $r = a$ et \mathbf{K}_{eff} est le courant effectif de surface donné par:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eff} &= \mathbf{n} \times \mathbf{k} H = -\mathbf{u}_\varphi H^- & (\mathbf{n} \equiv \mathbf{u}_r) \\ &= -\mathbf{u}_\varphi B \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (2.26)$$

En reportant la valeur de \mathbf{K}_{eff} dans l'expression de I, on obtient:

$$I = Ba \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma a) \int_0^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi \quad (2.27)$$

$$= 2\pi a B \xi_0 J_0(\gamma a) \quad (2.28)$$

Le courant physique est la partie réelle de I:

$$I = 2\pi a B \operatorname{Re}(\xi_0 J_0(\gamma a)) \quad (2.29)$$

Le module de I est donné par:

$$|I| = 2\pi a B |\xi_0 J_0(\gamma a)| \quad (2.30)$$

Aux basses fréquences et quand le cylindre devient transparent, on a alors:

$$I = 2\pi a B \quad (2.31)$$

car

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi_0 \approx 1 \quad (2.32)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} J_0(\gamma a) \approx 1 \quad (2.33)$$

Dans le cas d'une onde E, on trouve l'impédance de surface d'un bon conducteur:

$$\begin{aligned} Z_s &= i \frac{k\delta}{1-i} Z_0 \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi} \right) \\ &= i(1+i) \frac{k}{2} Z_0 \delta \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Remplaçons δ par sa valeur. On obtient:

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_s}{Z_0} &= i(1+i) \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{\omega \epsilon}{2\sigma}} (1+i) i \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{Q}{2}} (1+i) i \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi} \right) \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un conducteur parfait, (δ nul, $\gamma \rightarrow \infty$), il n'est pas difficile de montrer que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi} \right) = -i \quad (2.36)$$

On retrouve alors le résultat bien connu de l'impédance de surface d'un conducteur parfait:

$$\frac{Z_s}{Z_0} = \sqrt{\frac{Q}{2}} (1+i) \quad (2.37)$$

Pour une onde H, on a vu que l'impédance de surface Z_s du cylindre est donnée par l'expression (1.82):

$$Z_s = \frac{\gamma}{\sigma(1 + i \frac{\epsilon \omega}{\sigma})} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi}$$

Pour un bon conducteur, $\sigma/\epsilon\omega \gg 1$, alors

$$1 + i \frac{\epsilon \omega}{\sigma} \approx 1 \quad (2.38)$$

L'expression de Z_s se réduit donc à:

$$\begin{aligned}
 Z_s &= \frac{\gamma}{\sigma} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi} \\
 &= \frac{1 - i}{\sigma \delta} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J'_n(\gamma a) \cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n J_n(\gamma a) \cos n\varphi} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Comme

$$\delta = \left(\frac{2}{\sigma \omega \mu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

on obtient, en notant que $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$,

$$\begin{aligned}\frac{Z_s}{Z_0} &= (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n J'_n(\gamma a)\cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n J_n(\gamma a)\cos n\varphi} \\ &= (1-i)\sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2\sigma}}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n J'_n(\gamma a)\cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n J_n(\gamma a)\cos n\varphi}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Dans le cas d'un conducteur parfait, δ est nul et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n J'_n(\gamma a)\cos n\varphi}{\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n J_n(\gamma a)\cos n\varphi} \right) = i \quad (2.41)$$

et l'on retrouve le résultat (2.37).

Les sections efficaces de diffusion des ondes E et H par un cylindre bon conducteur sont données, respectivement, par les équations suivantes:

$$\sigma^{dif} = \frac{4}{k} \left(|\alpha_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right) \quad (\text{onde E}) \quad (2.42)$$

$$\sigma^{dif} = \frac{4}{k} \left(|\zeta_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^2 \right) \quad (\text{onde H}) \quad (2.43)$$

Dans le cas d'une onde E, en remplaçant γ par sa valeur dans (1.118), on obtient la section efficace d'absorption pour un bon conducteur:

$$\sigma^{abs} = \frac{2\pi a}{k\delta} \text{Re} \left[(i-1) \left(|\beta_0|^2 J_0(\gamma a) J_0'^*(\gamma a) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 J_n(\gamma a) J_n'^*(\gamma a) \right) \right] \quad (2.44)$$

De même, pour une onde H, l'expression (1.131) de la section efficace d'absorption devient, pour un bon conducteur:

$$\sigma^{abs} = \frac{2\pi a Q}{k\epsilon_r \delta} \text{Re} \left[(1-i) \left(|\xi_0|^2 J_0'(\gamma a) J_0^*(\gamma a) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 J_n'(\gamma a) J_n^*(\gamma a) \right) \right] \quad (2.45)$$

2.2 Conclusion

Nous avons trouvé dans ce chapitre les expressions du courant induit, du courant surfacique, de l'impédance de surface et des sections efficaces de diffusion

et d'absorption dans le cas d'un bon conducteur. Dans le prochain chapitre, les résultats numériques seront présentés, accompagnés d'une discussion.

CHAPITRE III

CALCUL NUMÉRIQUE ET RÉSULTATS

3.1 Introduction

Les calculs numériques effectués portent sur des grandeurs physiques importantes comme les champs électrique et magnétique, le courant total induit dans le cylindre, l'impédance de surface et les sections efficaces de diffusion et d'absorption. Ces calculs sont faits en fonction de la fréquence et la distance de pénétration de l'onde dans le conducteur.

Les paramètres normalisés principaux dans ce calcul sont: le nombre d'onde dans le vide ka , l'épaisseur de peau δ/a et le facteur de qualité du milieu Q .

Pour un bon conducteur, nous fixons ka et nous ferons varier δ/a . Le troisième paramètre, Q , est varié automatiquement puisque il est relié aux deux autres paramètres par l'expression:

$$ka \cdot \delta/a = \sqrt{2Q} \quad (3.1)$$

Si le produit dans l'expression (3.1) est inférieur ou égal à 0,45, alors le facteur de qualité est, au maximum, égal à 0,1 c'est-à-dire que le courant de conduction est 10 fois le courant de déplacement. Il faut faire attention à la partie résistive de l'impédance de surface qui doit être toujours positive. Si ces deux conditions sont réalisées, alors on est dans le cas d'un bon conducteur.

Dans le cas d'un milieu de conductivité quelconque, nous avons suivi le même cheminement dans le calcul. L'expression qui relie les trois paramètres ka , δ/a et

Q est, dans ce cas:

$$ka \cdot \frac{\delta}{a} = \frac{2Q(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}})}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (3.2)$$

où ϵ_r est la permittivité relative du milieu. On en déduit:

$$Q = \frac{(ka)^2(\delta/a)^2\epsilon_r}{2\sqrt{1 + (ka)^2(\delta/a)^2\epsilon_r}} \quad (3.3)$$

L'impédance de surface est calculée seulement dans le cas d'un bon conducteur parce que dans le cas d'un milieu de conductivité quelconque, le courant n'est plus confiné à la surface et par conséquent la définition de l'impédance de surface n'a plus de sens.

Nous avons conçu deux programmes Fortran qui calculent toutes les grandeurs physiques impliquées. Un programme fait le calcul dans le cas d'un bon conducteur et l'autre dans le cas d'un milieu de conductivité quelconque.

Ces programmes calculent en double précision les fonctions de Bessel $J_n(x)$ et de Neumann $N_n(x)$ à arguments réel ($x = ka$) et complexe ($x = \gamma a$) ainsi que leurs dérivées par rapport à l'argument, $J'_n(x)$ et $N'_n(x)$. Les fonctions de Hankel $H_n^{(2)}(x)$ à argument réel ($x = ka$) et leurs dérivées par rapport à l'argument, $H_n'^{(2)}(x)$, sont également calculées. Toutes ces fonctions ont été calculées en utilisant une récurrence descendante en commençant par un ordre bien supérieur à celui requis par les calculs numériques des grandeurs physiques d'intérêt. La précision ainsi obtenue par les fonctions des Bessel est au moins égale à celle donnée par Abramowitz et Segun [11].

En ce qui concerne les séries représentant les grandeurs physiques, leur convergence a été vérifiée dans chaque cas et contrôlée par un nombre largement suffisant de termes.

Dans ce chapitre, nous comparons nos résultats avec ceux de Van Bladel [12, 13] là où c'est possible. Ce dernier a représenté les composantes du champ électromagnétique et les grandeurs physiques qui en découlent par les deux premiers termes de leurs représentations sérielles. Il a donné à chaque terme un ordre; par exemple, σ_0^{dif} et σ_1^{dif} représentent, respectivement, la section efficace

de diffusion pour $n = 0$ et 1 dans la série. Dans notre cas, les grandeurs mentionnées sont représentées par des séries complètes.

Van Bladel a limité son calcul au cas d'un cylindre circulaire bon conducteur et à un intervalle de fréquences allant de $ka = 0,03$ à $ka = 1$, tandis que notre calcul couvre des milieux quelconques aussi bien aux basses qu'aux hautes fréquences. Nous avons également traité les deux cas de polarisation : l'onde E et l'onde H.

3.2 Résultats et discussion

Les résultats numériques présentés dans cette section portent sur le courant induit dans le cylindre, les sections efficaces d'absorption et de diffusion, l'impédance de surface pour un bon conducteur et les champs électrique et magnétique.

3.2.1 Le courant induit par l'onde

La figure 3.1 montre le module du courant total (axial) induit et normalisé dans le cylindre dans le cas d'un bon conducteur et d'un milieu de conductivité quelconque pour une onde E en fonction de δ/a et pour des ka différents. Dans le cas d'un bon conducteur, ce module décroît quand ka augmente ou quand δ/a augmente.

La figure 3.2 montre le module du courant surfacique normalisé dans le cas d'un bon conducteur pour une onde H. Ce module du courant décroît quand ka augmente et croît quand δ/a augmente.

Dans le cas d'un milieu quelconque et quand le produit $ka \cdot \delta/a$ devient $\geq 0,45$, le courant de déplacement n'est plus négligeable par rapport au courant de conduction.

Les cassures dans le module de la partie réelle du courant dans la figure 3.3 montrent que le courant change de sens dans les couches à l'intérieur du milieu. Il commence à changer de sens à partir de $ka = 2,2$ pour quelques δ/a dans le conducteur et il change complètement de sens à $ka = 2,6$ pour l'onde E.

Une comparaison de nos résultats avec ceux de Van Bladel dans le cas de l'onde E et pour un bon conducteur montre un accord parfait pour des petites valeurs de δ/a . Mais quand ka augmente et lorsque la condition d'un bon conducteur n'est plus respectée, les courbes ne suivent pas la loi de l'inverse du carré et les courbes que Van Bladel a extrapolées dans la figure 3.4 ne sont pas correctes comme le montre la figure 3.1.

La figure 3.5 montre la partie réelle du courant normalisé en fonction de ka pour l'onde E. L'amplitude du courant physique est très élevée pour des petits δ/a surtout à des $ka \leq 1,5$. Pour les δ/a élevés, le courant oscille autour de zéro. Quand ka augmente, l'amplitude du courant diminue et on s'attend à des valeurs extrêmement petites pour des ka très élevés.

La figure 3.6 présente le module normalisé de la partie réelle du courant total induit normalisé dans le cylindre en fonction de δ/a pour l'onde E. Enfin, la figure 3.7 montre le module du courant total(axial) induit normalisé dans le cylindre en fonction de ka à des δ/a différents pour l'onde E.

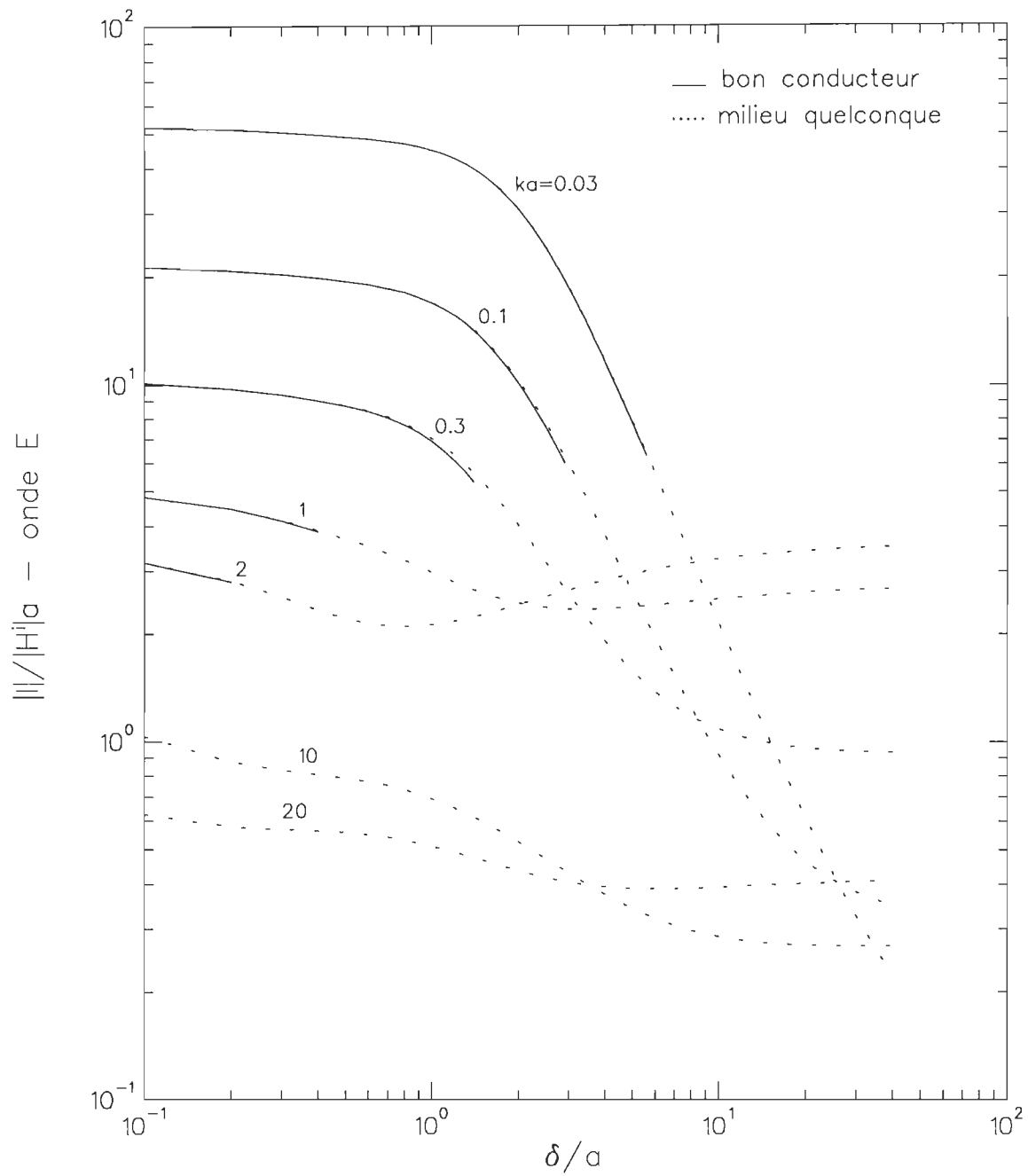


Figure 3.1 Module du courant total(axial) induit et normalisé en fonction de δ/a à des ka différents pour l'onde E.

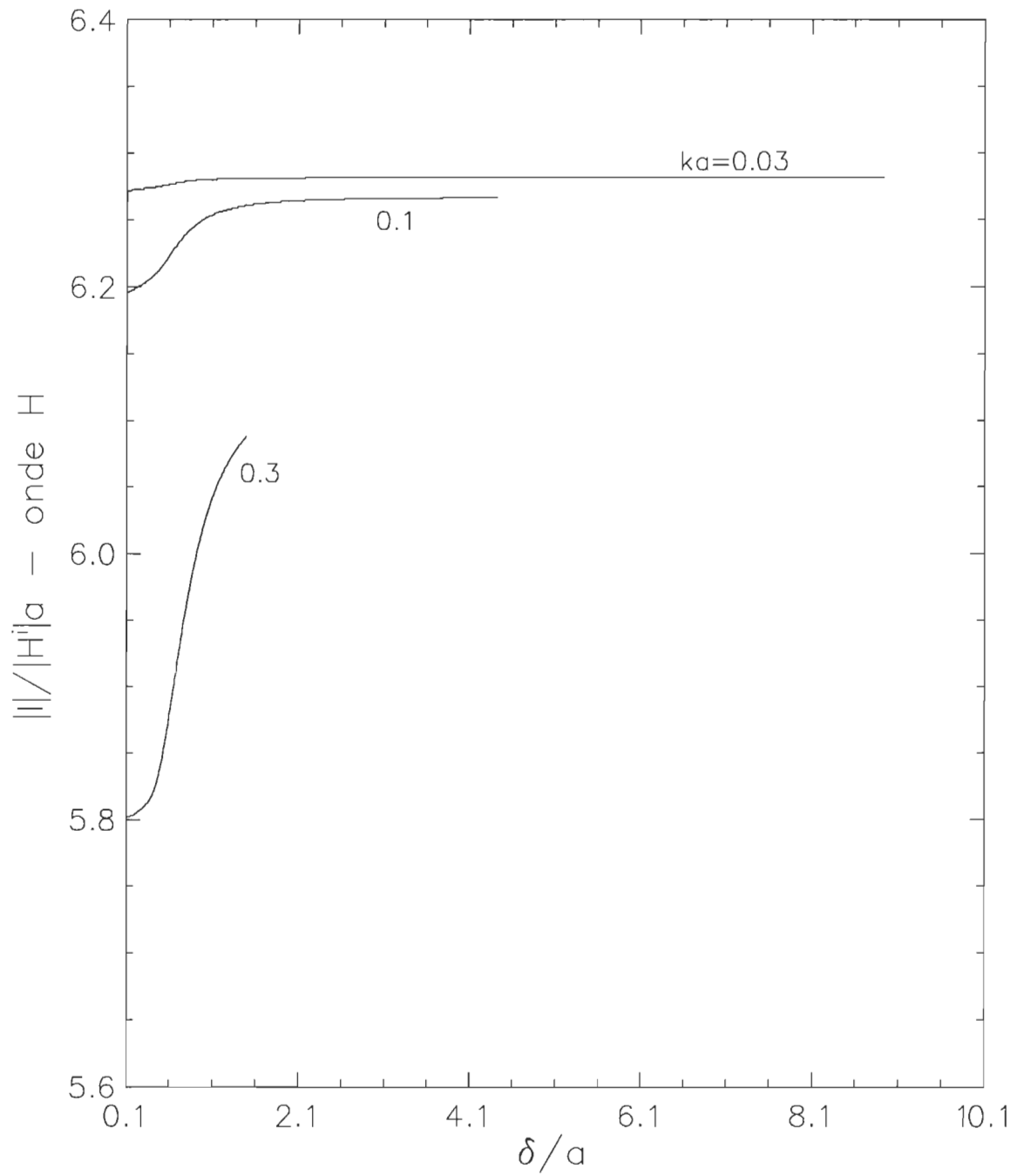


Figure 3.2 Module du courant surfacique induit et normalisé en fonction de δ/a à des différents ka pour l'onde H.

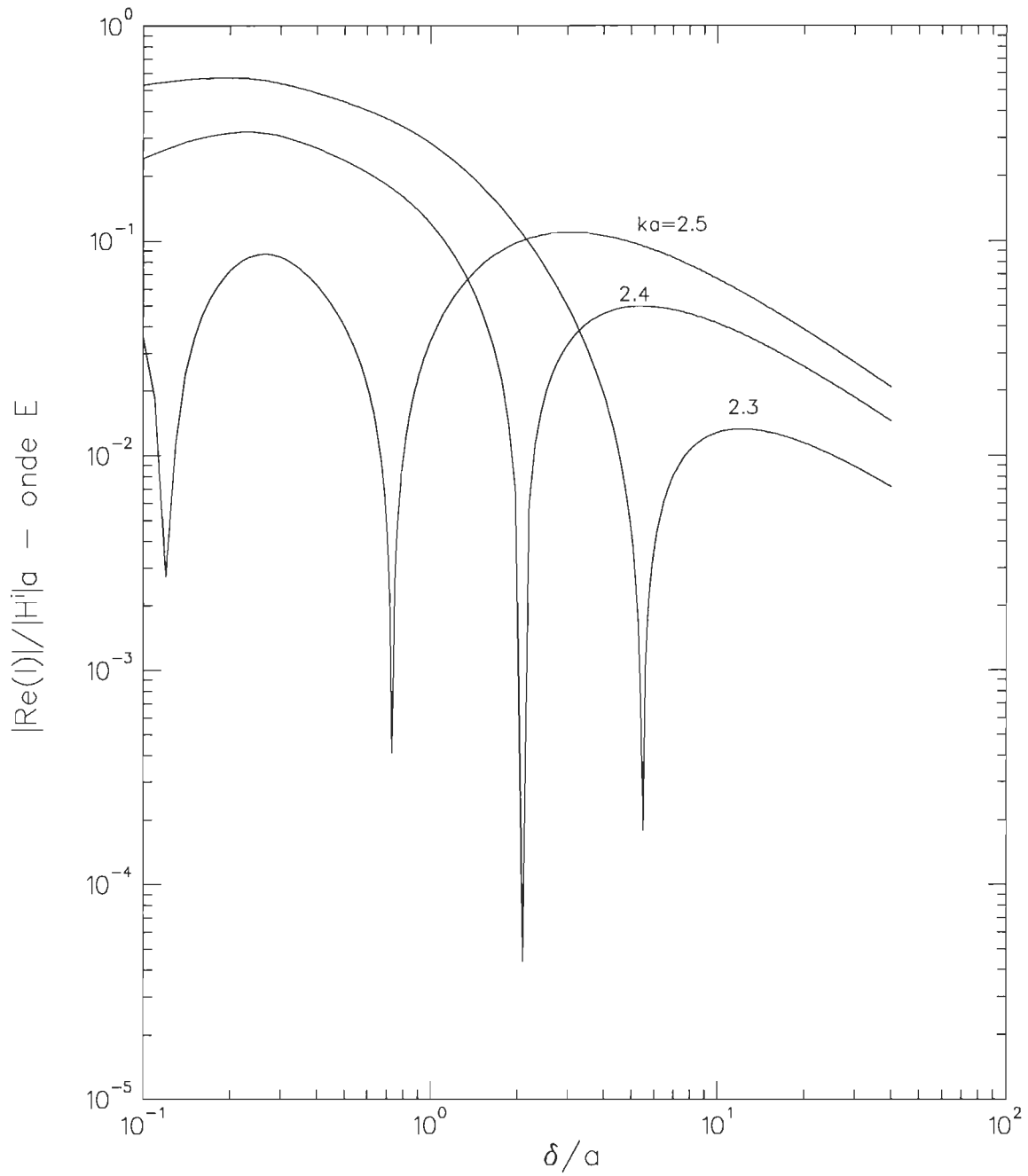


Figure 3.3 Module de la partie réelle du courant total induit et normalisé en fonction de δ/a pour l'onde E à des différents ka .

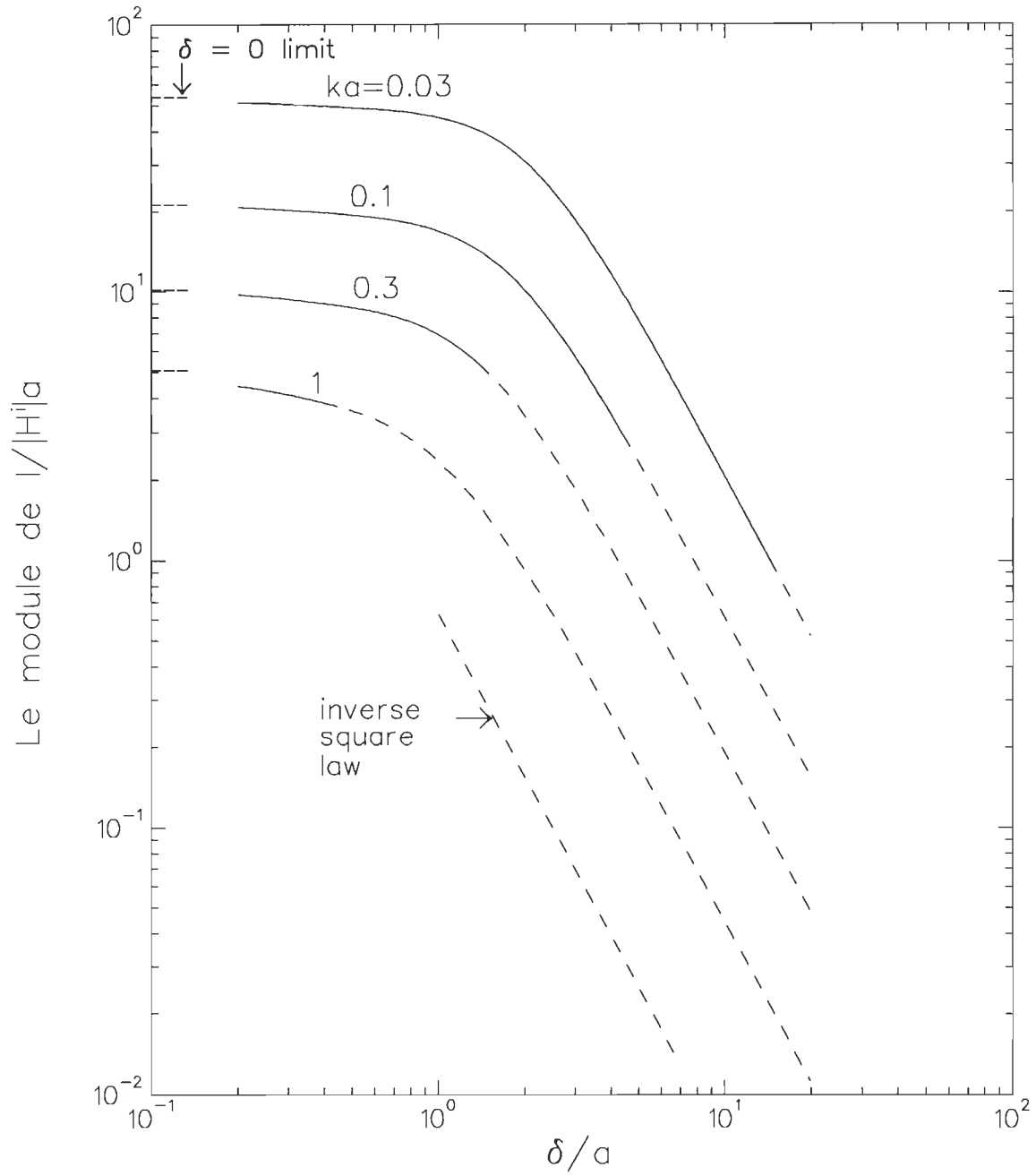


Figure 3.4 Module du courant total induit et normalisé en fonction de δ/a pour l'onde E à des différents ka selon Van Bladel et reproduit par notre calcul.

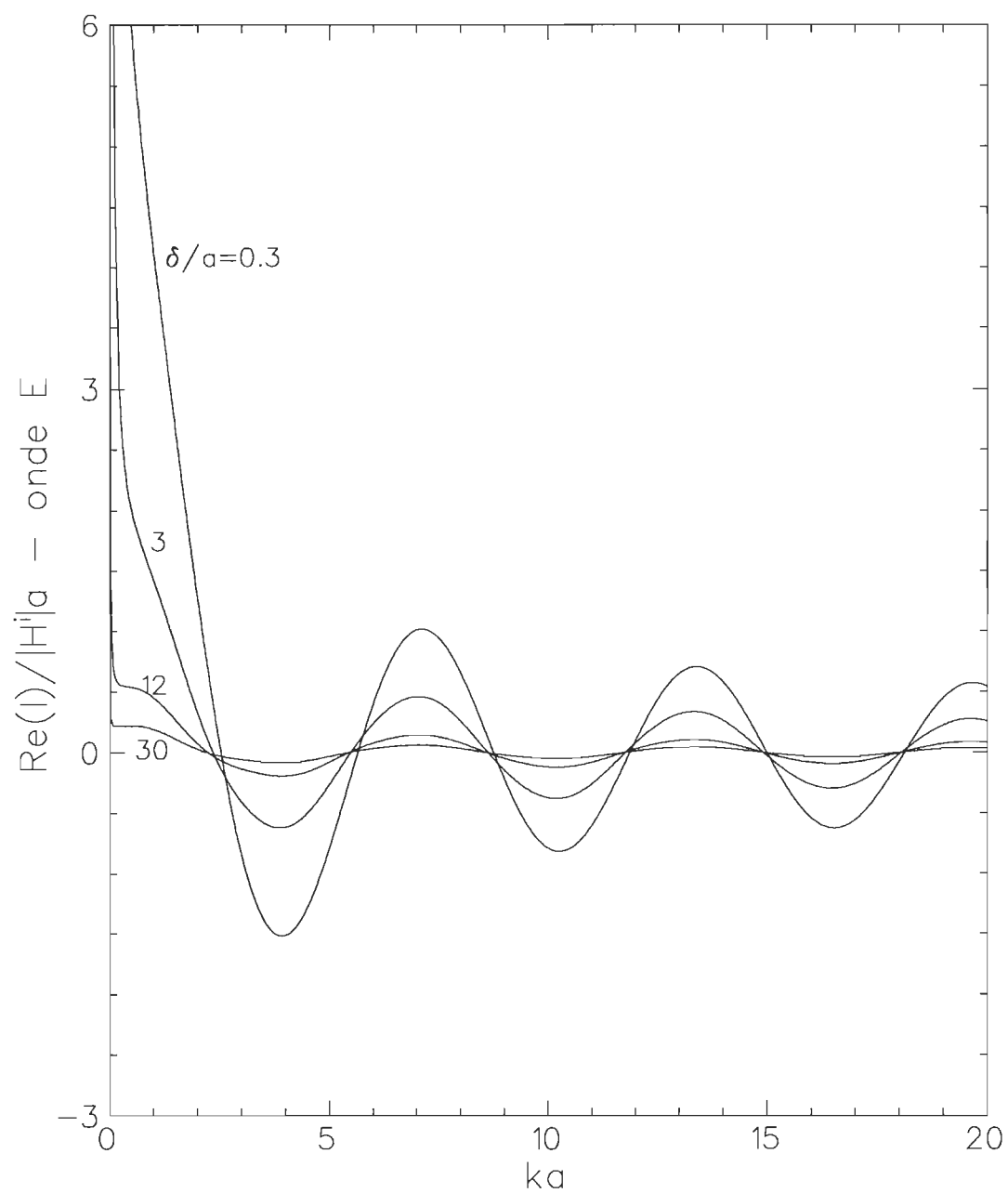


Figure 3.5 Partie réelle du courant total induit normalisé en fonction de ka pour l'onde E à des différents δ/a .

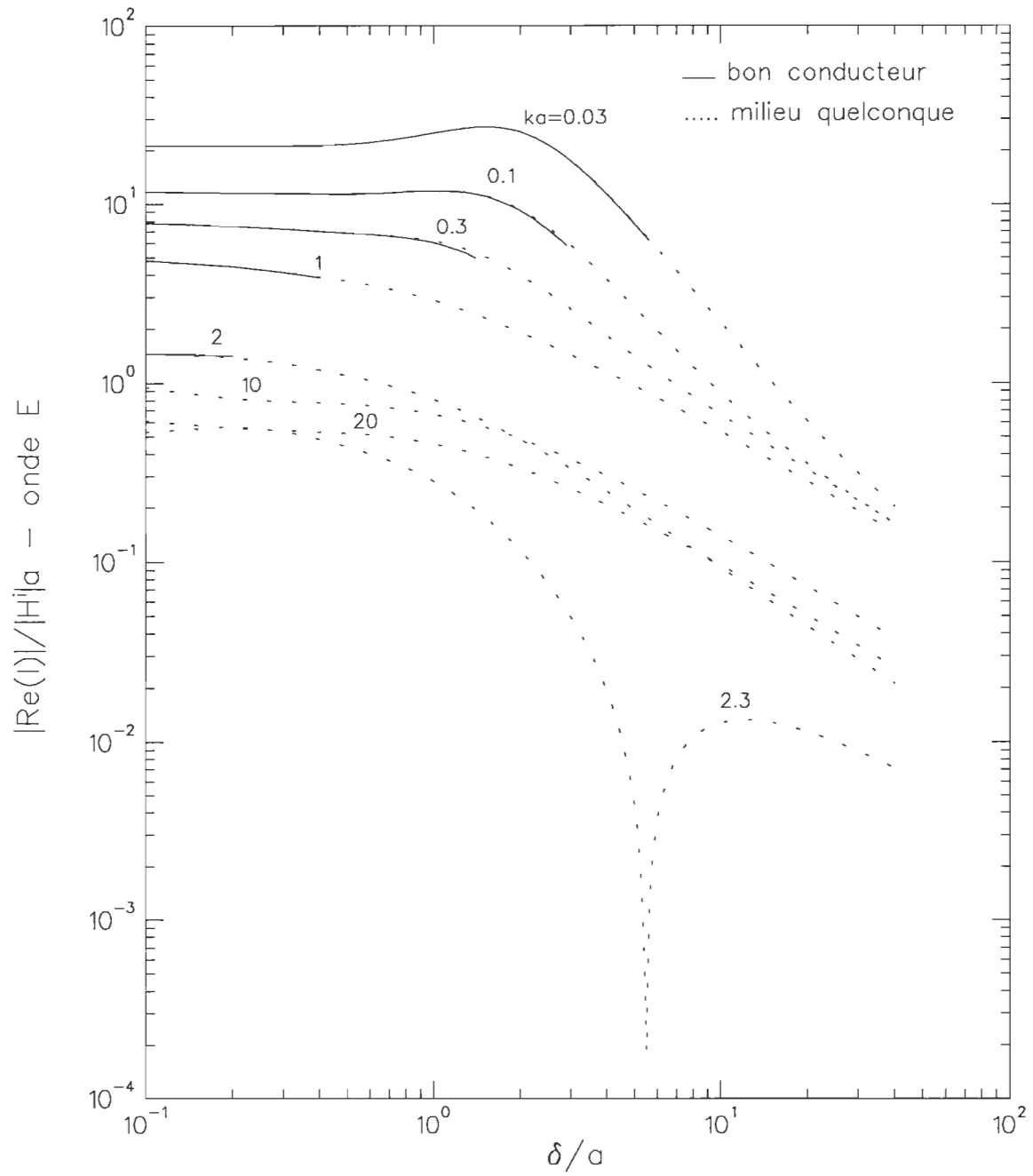


Figure 3.6 Module de la partie réelle du courant total induit normalisé en fonction de δ/a pour l'onde E à des différents ka .

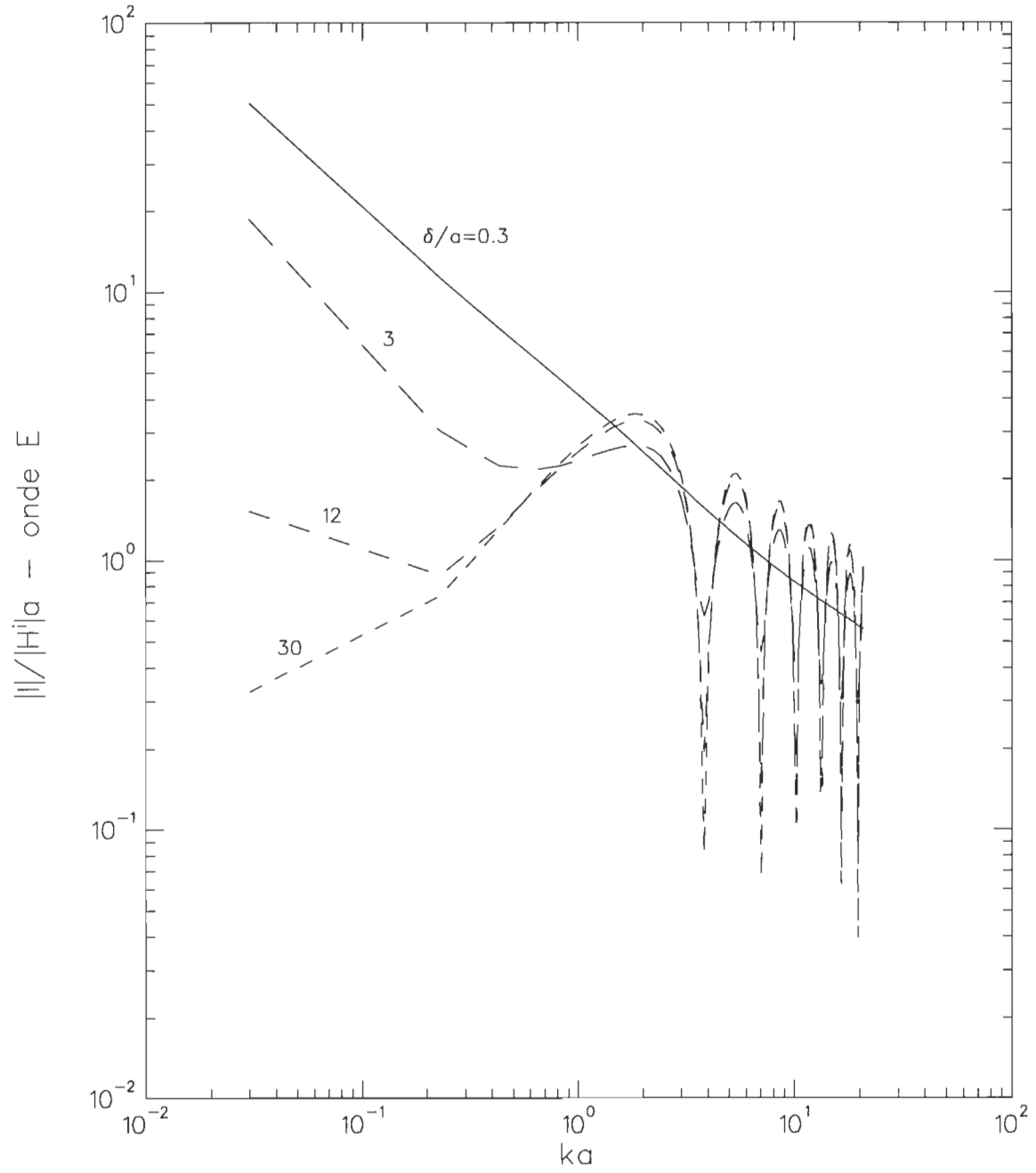


Figure 3.7 Module du courant total(axial) induit normalisé en fonction de ka à des δ/a différents pour l'onde E.

3.2.2 Sections efficaces de diffusion et d'absorption

Les figures 3.8 et 3.9 montrent, respectivement, les sections efficaces de diffusion σ^{dif}/a normalisées en fonction de δ/a pour les ondes E et H à des ka différents.

La section efficace de diffusion ne varie pas de la même façon pour les deux ondes. Dans le cas de l'onde E, σ^{dif}/a diminue quand ka augmente contrairement à l'onde H où σ^{dif}/a croît quand ka augmente. Dans les deux cas, σ^{dif}/a décroît en fonction de δ/a . Pour des petits ka , σ^{dif}/a de l'onde E est beaucoup plus élevé que celui de l'onde H. Par exemple, à $ka = 0,03$ la section efficace de diffusion de l'onde E est plus grand par 5 ordres de grandeur que celle de l'onde H. Quand ka augmente ($ka \geq 1$), les sections efficaces ont des valeurs très proches et varient de la même façon.

Pour l'onde H et pour un bon conducteur, σ^{dif}/a varie très peu en fonction de δ/a .

Nos résultats de la section efficace de diffusion sont en accord avec celles de Van Bladel pour l'onde E. Mais pour respecter, selon notre critère, la notion de bon conducteur à des ka petits ($ka < 0,2$), il faut que la partie résistive de l'impédance de surface reste toujours positive. Par exemple, à $ka = 0,03$, avec la condition $ka \cdot \delta/a \leq 0,45$ pour un bon conducteur, la ligne pleine doit être arrêtée à $\delta/a = 14,6$ au lieu de $\delta/a = 5,6$. Par contre, pour $ka > 0,2$ les deux conditions se réalisent simultanément.

Les figures 3.10 et 3.11 présentent, respectivement, la section efficace d'absorption normalisée des ondes E et H en fonction de δ/a à des ka différents.

La section efficace d'absorption est beaucoup plus grande dans le cas de l'onde E pour des ($ka < 1$) et cela signifie que les pertes par effet Joule sont plus considérables. Elle passe par un maximum qui se déplace vers les petits δ/a quand ka augmente tandis que celle de l'onde H passe par des maxima et minima pour des $ka < 0,3$. Pour $ka \geq 1$, l'allure des courbes est la même dans les deux cas. À des ka plus élevés, la section efficace prend des valeurs très proches dans les deux cas.

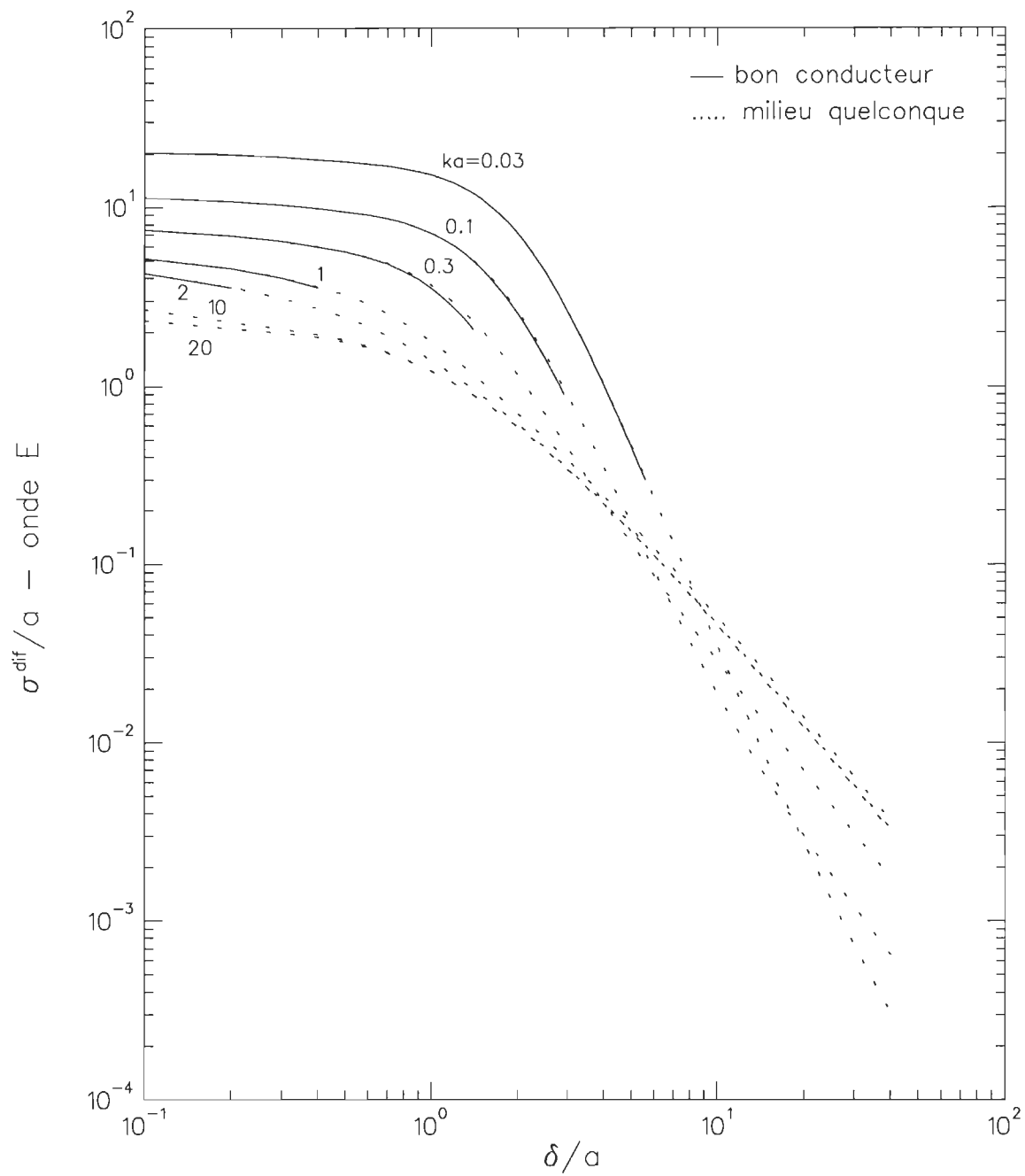


Figure 3.8 Section efficace de diffusion normalisée de l'onde E en fonction de δ/a à des ka différents.

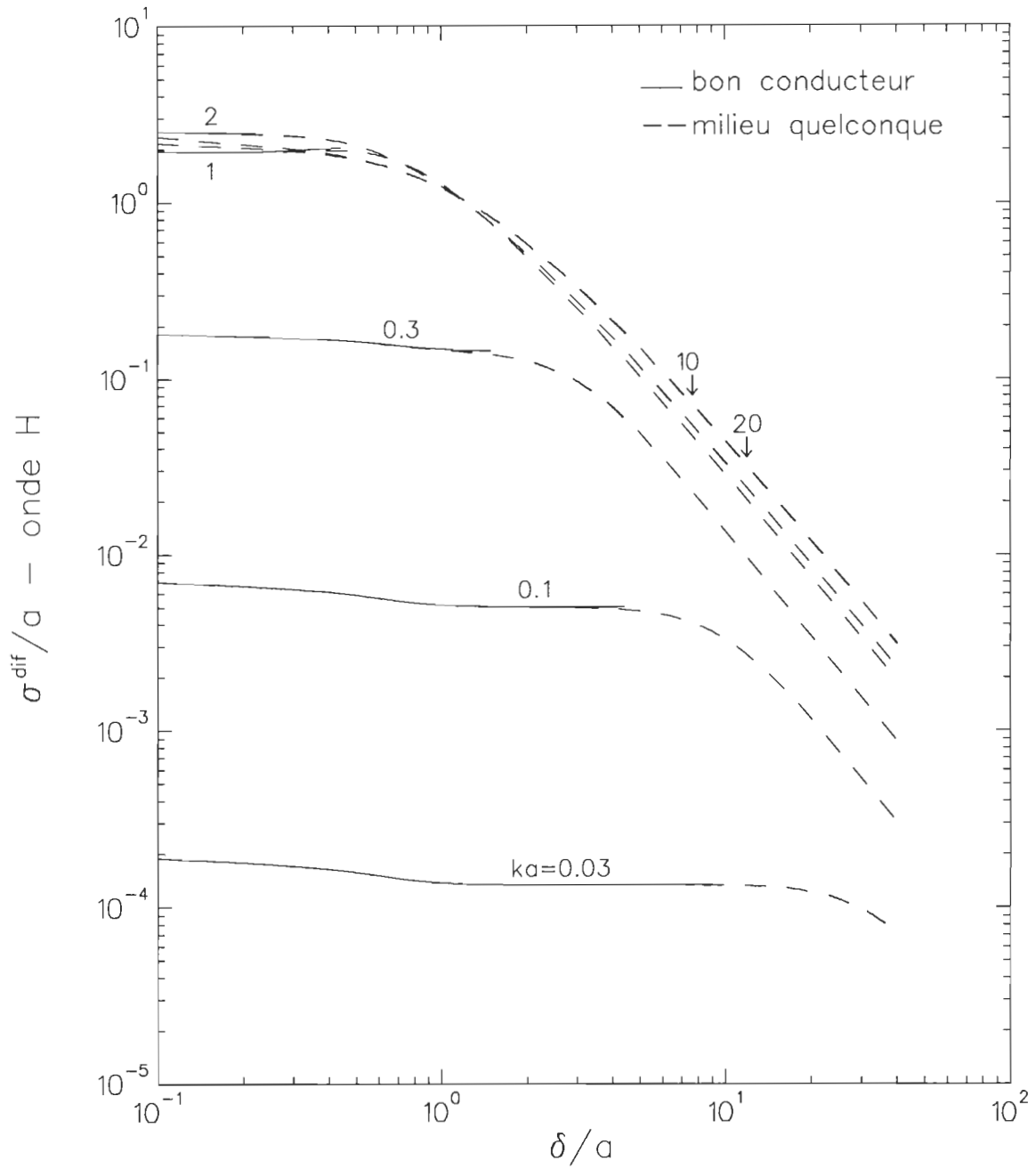


Figure 3.9 Section efficace de diffusion normalisée de l'onde H en fonction de δ/a à des ka différents.

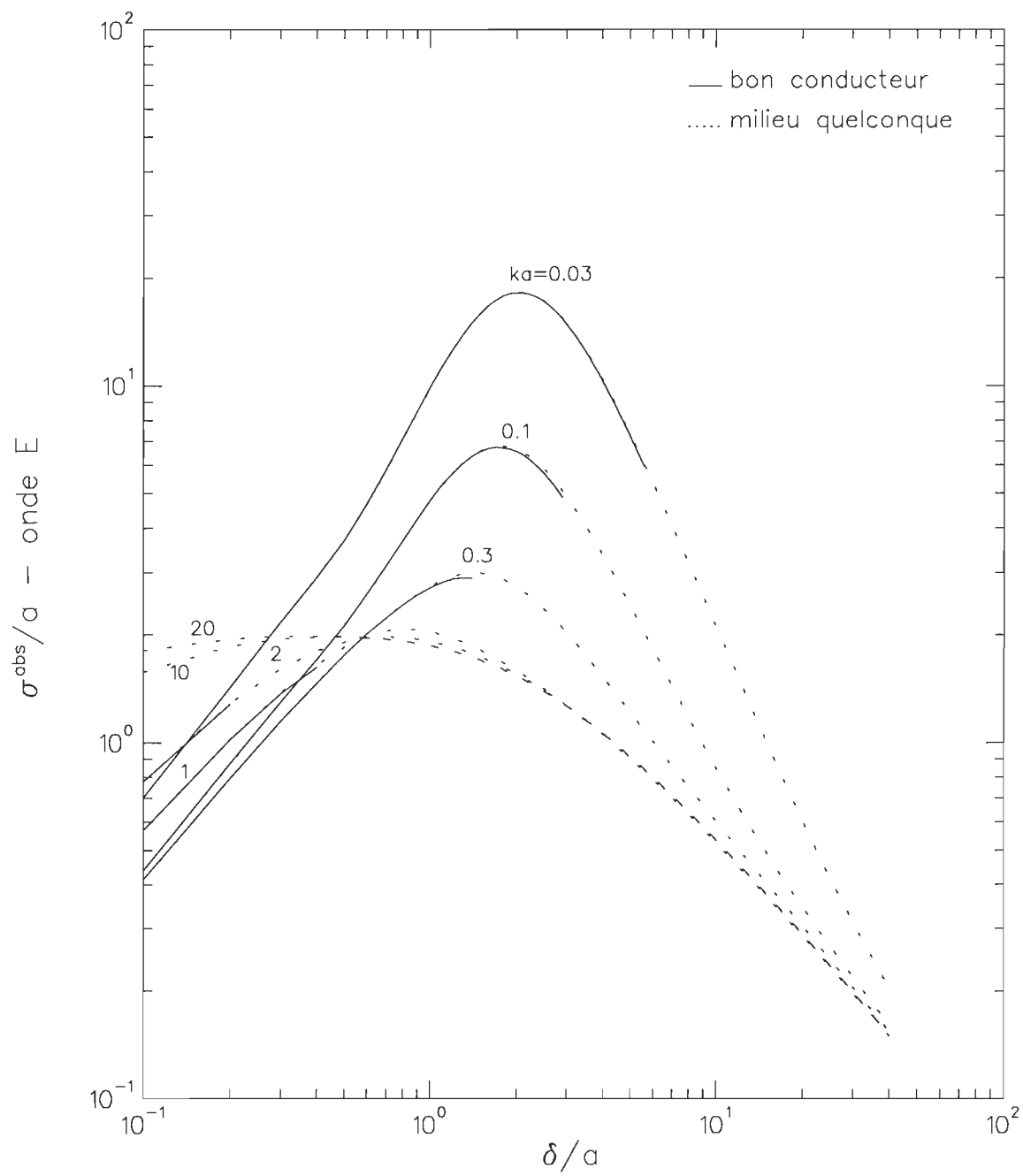


Figure 3.10 Section efficace d'absorption normalisée de l'onde E en fonction de δ/a à des ka différents.

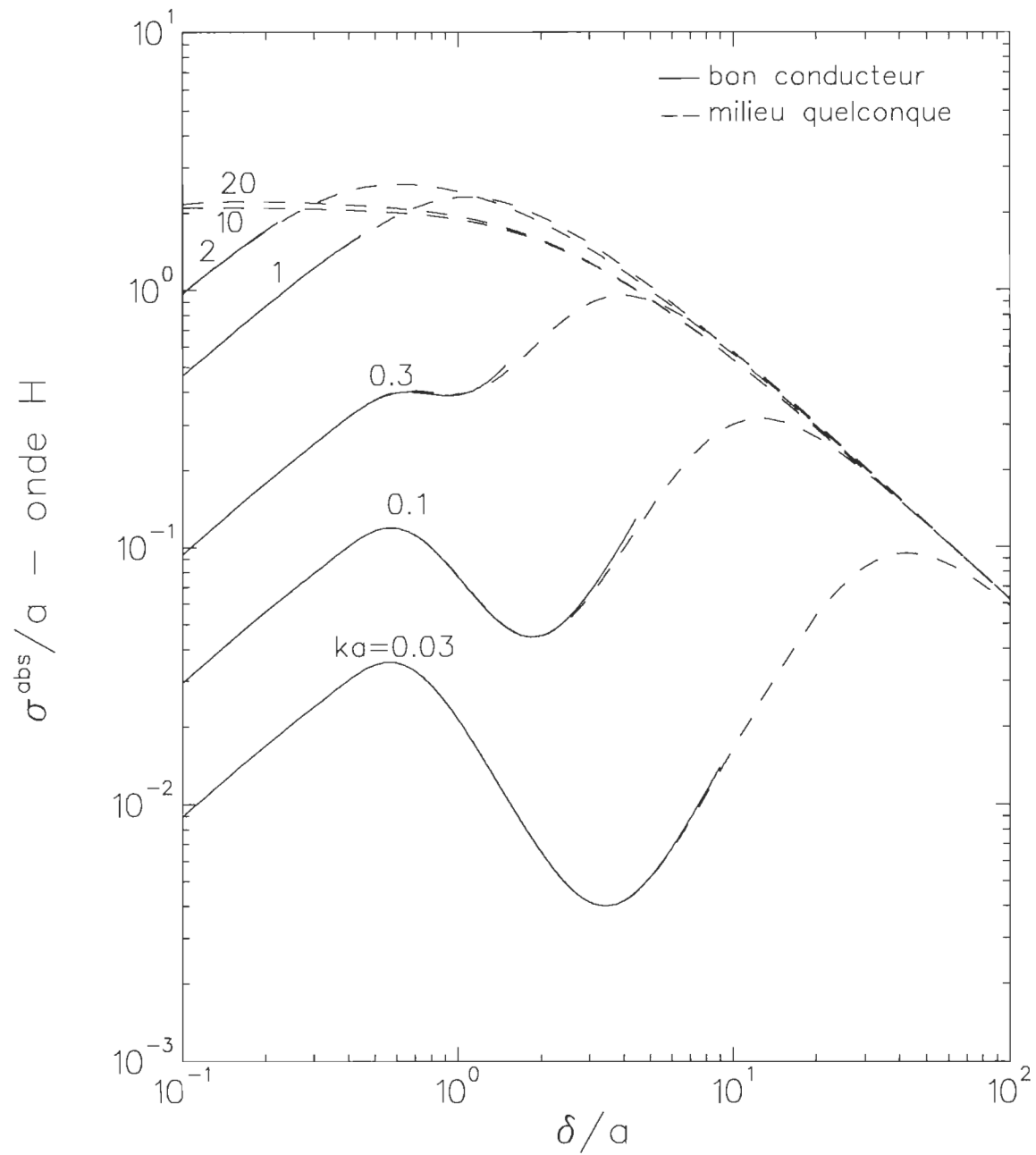


Figure 3.11 Section efficace d'absorption normalisée de l'onde H en fonction de δ/a à des ka différents.

3.2.3 Impédance de surface

Les figures 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15 présentent le module de l'impédance de surface Z_s à un δ/a donné et pour des ka différents en fonction de l'angle azimutal φ dans le cas d'un bon conducteur pour les ondes E et H.

Le module de l'impédance de surface est beaucoup plus élevé pour l'onde E. Il est également plus élevé pour des φ petits pour une onde E, tandis que dans le cas de l'onde H, on observe le contraire: quand φ est grand le module de l'impédance est plus élevé. Pour des ka petits, le module de l'impédance varie très peu.

Lorsque les conditions de bon conducteur ne sont plus satisfaites, la partie résistive de l'impédance de surface devient négative, à partir de $\delta/a = 8,9$ pour $ka = 0,03$ pour l'onde H, tandis que celles de l'ondes E s'arrêtent à $\delta/a = 5,6$ pour $ka = 0,03$. Pour cette valeur, le module de l'impédance de surface atteint son maximum de 8,667 pour l'onde E, c'est-à-dire que la composante tangentielle du champ électrique à la surface du bon conducteur devient très grande par rapport à la composante tangentielle du champ magnétique.

Les figures 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19 montrent le module de l'impédance de surface réduite pour des ka et φ donnés en fonction de l'épaisseur de peau δ/a pour les ondes E et H.

Pour l'onde E, à $ka = 0,03$, on observe des valeurs extrêmement élevées à $\varphi = 45^\circ$ et 80° (fig. 3.16). Pour $\delta/a \leq 1,5$, le module ne dépend pas de φ . À $ka = 1$, le module de l'impédance de surface dépend de φ à des petits δ/a . Il croît d'une façon continue quand δ/a augmente et les valeurs les plus élevées sont obtenues pour les φ les plus petits (fig. 3.17).

Pour l'onde H, à $ka = 0,03$ et pour $\delta/a \leq 0,4$ le module de l'impédance de surface ne dépend pas de φ (fig. 3.18). Quand δ/a augmente, la dépendance en φ devient de plus en plus remarquable. Entre $\delta/a \sim 0,4$ et $\delta/a \sim 4$, le module décroît brutalement, et il approche zéro pour un certain φ puis il croît. À $ka = 1$, le module de l'impédance de surface dépend de φ à des petits δ/a . Il décroît d'une façon continue quand δ/a augmente et les valeurs les plus élevées sont obtenues pour les φ les plus élevés (fig. 3.19).

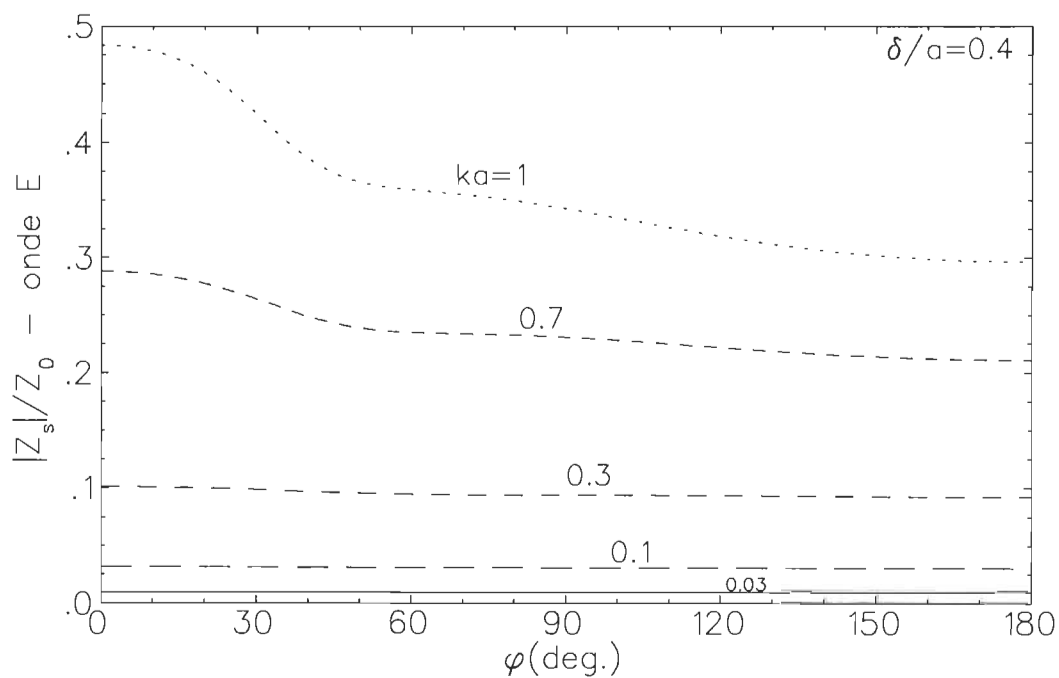
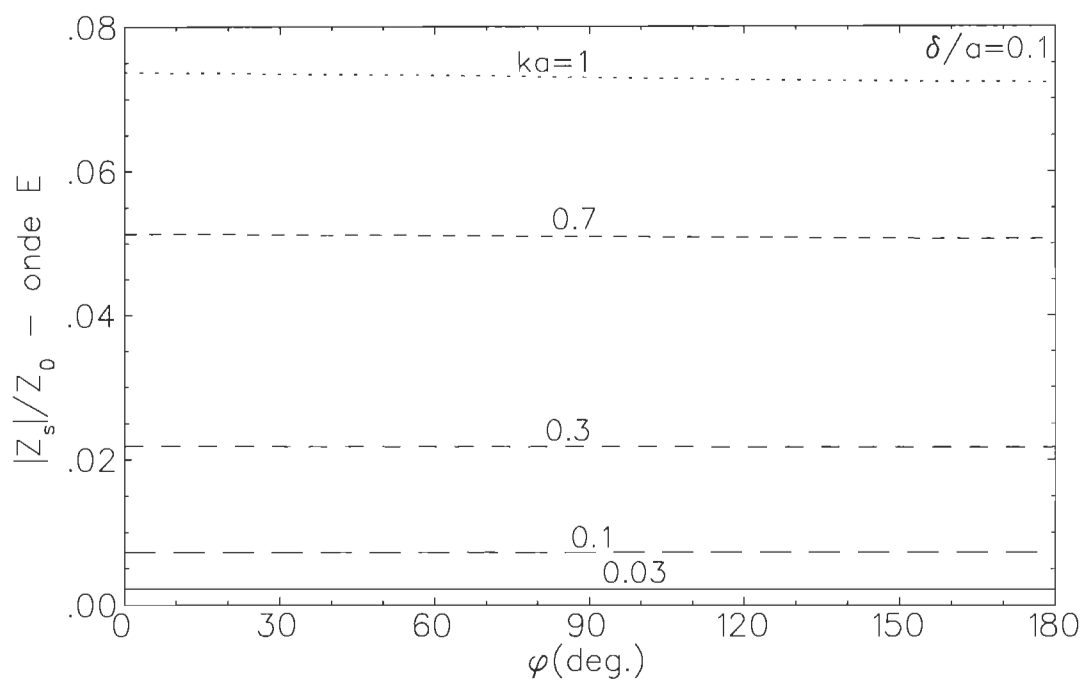


Figure 3.12 Module de l'impédance de surface de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents.

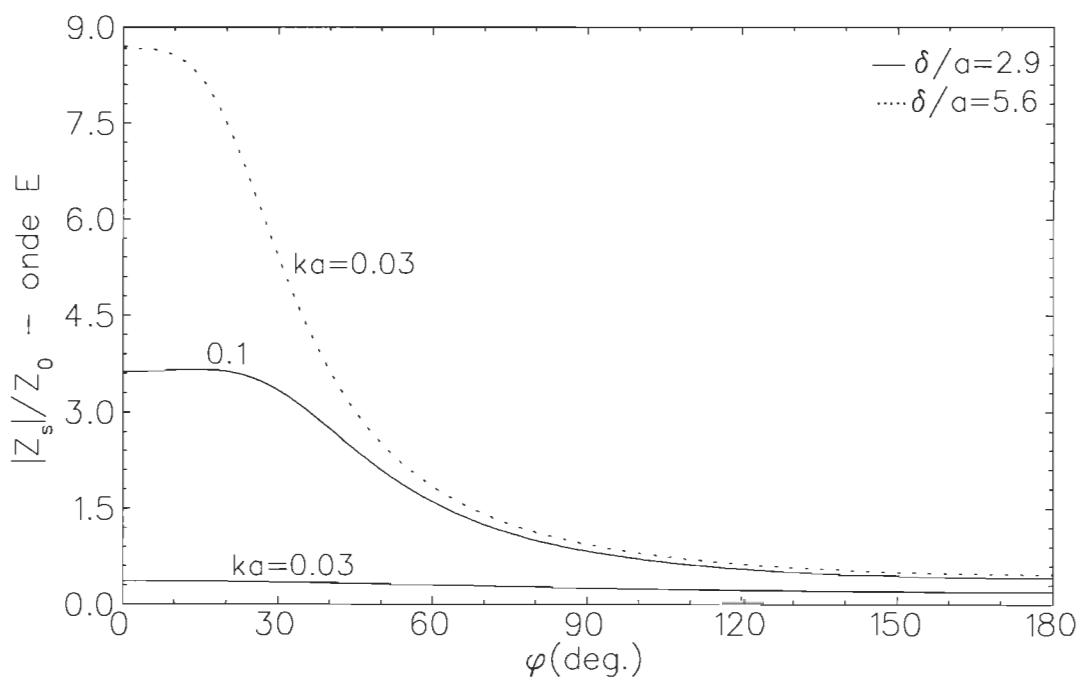
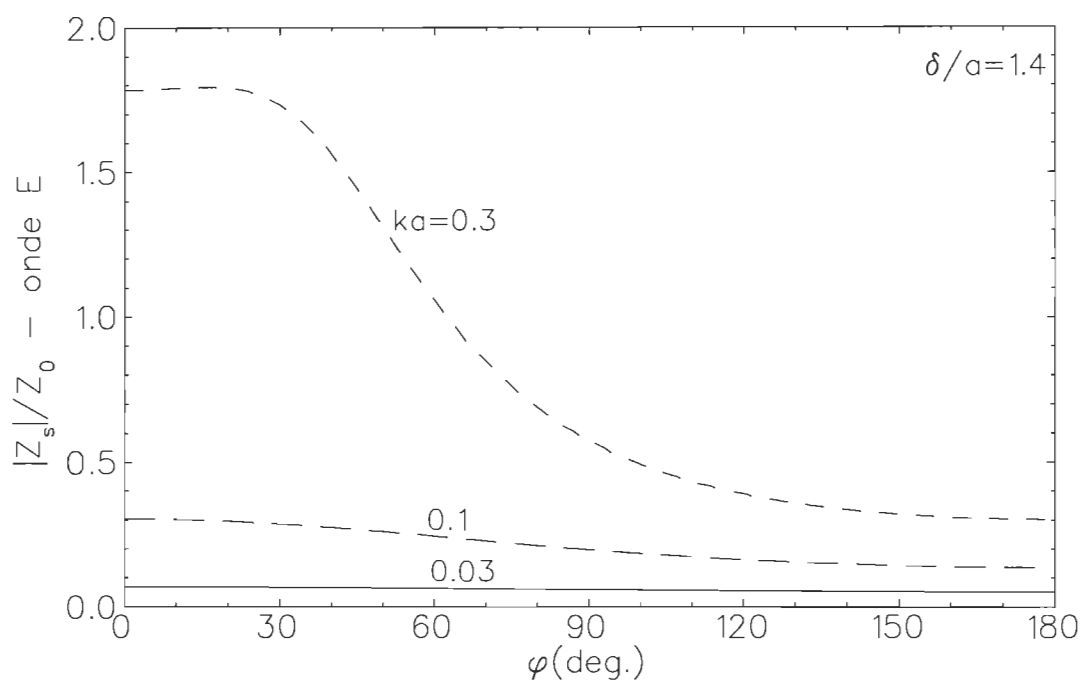


Figure 3.13 Module de l'impédance de surface de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents.

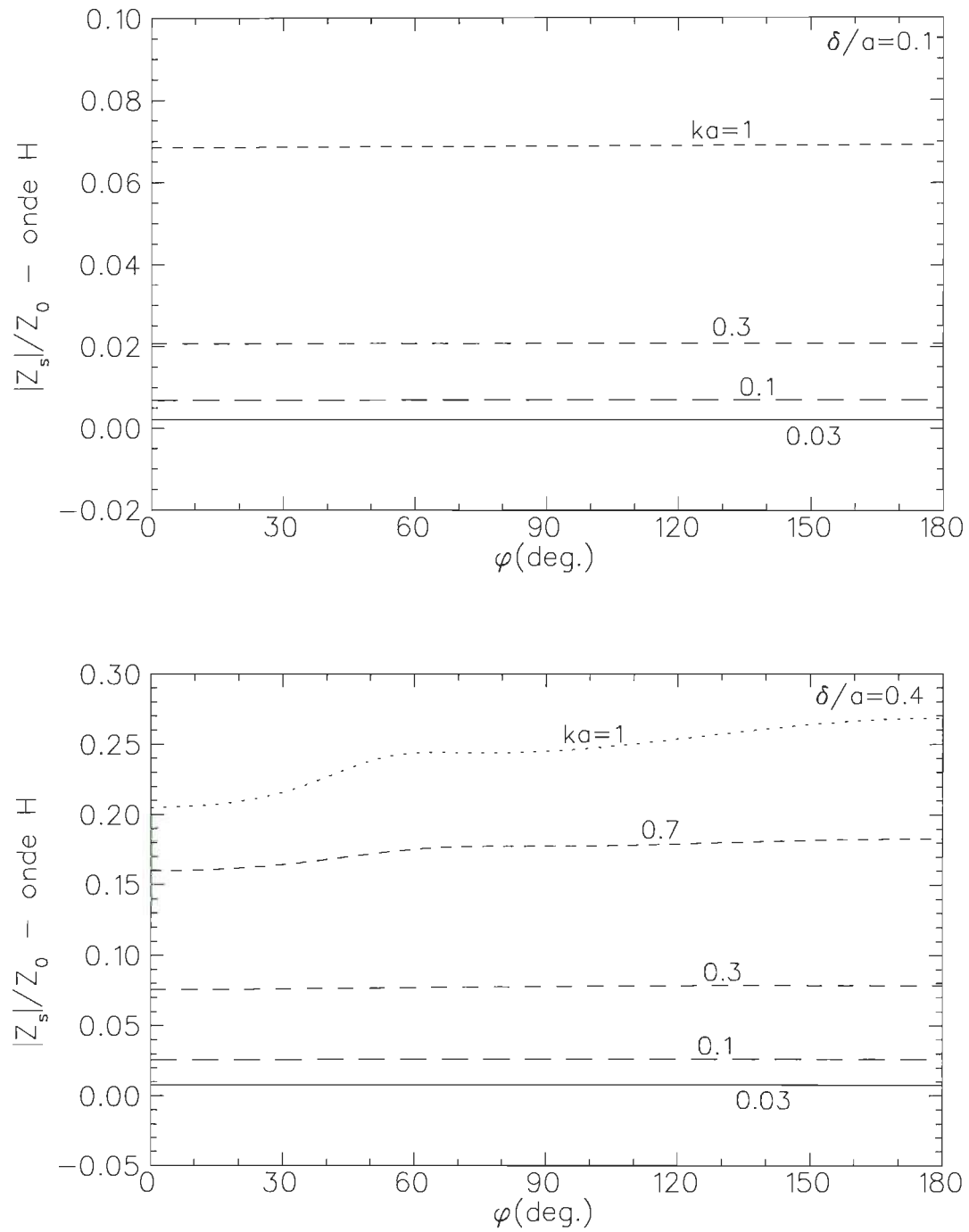


Figure 3.14 Module de l'impédance de surface de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents.

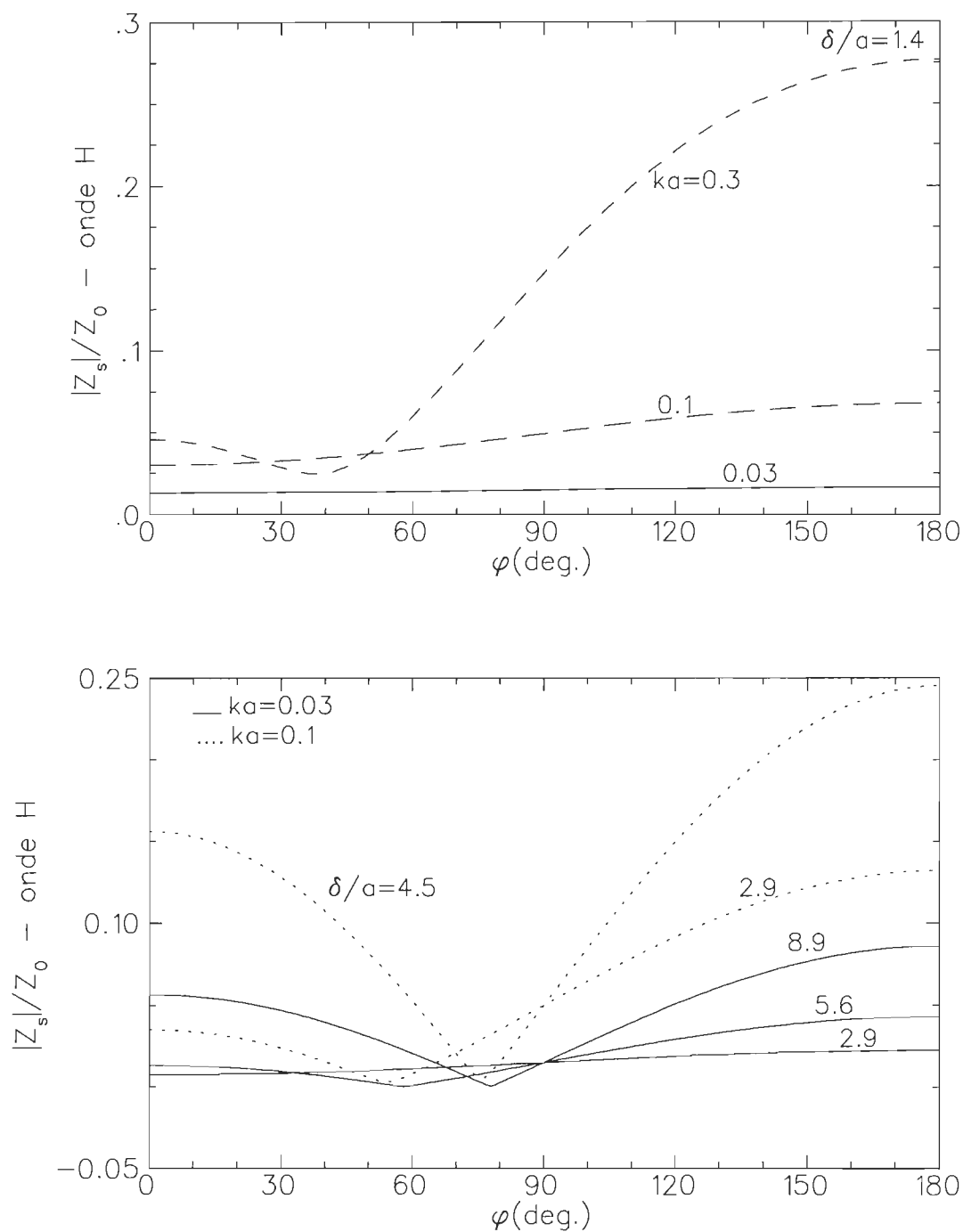


Figure 3.15 Module de l'impédance de surface de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de φ pour δ/a donné et à des ka différents.

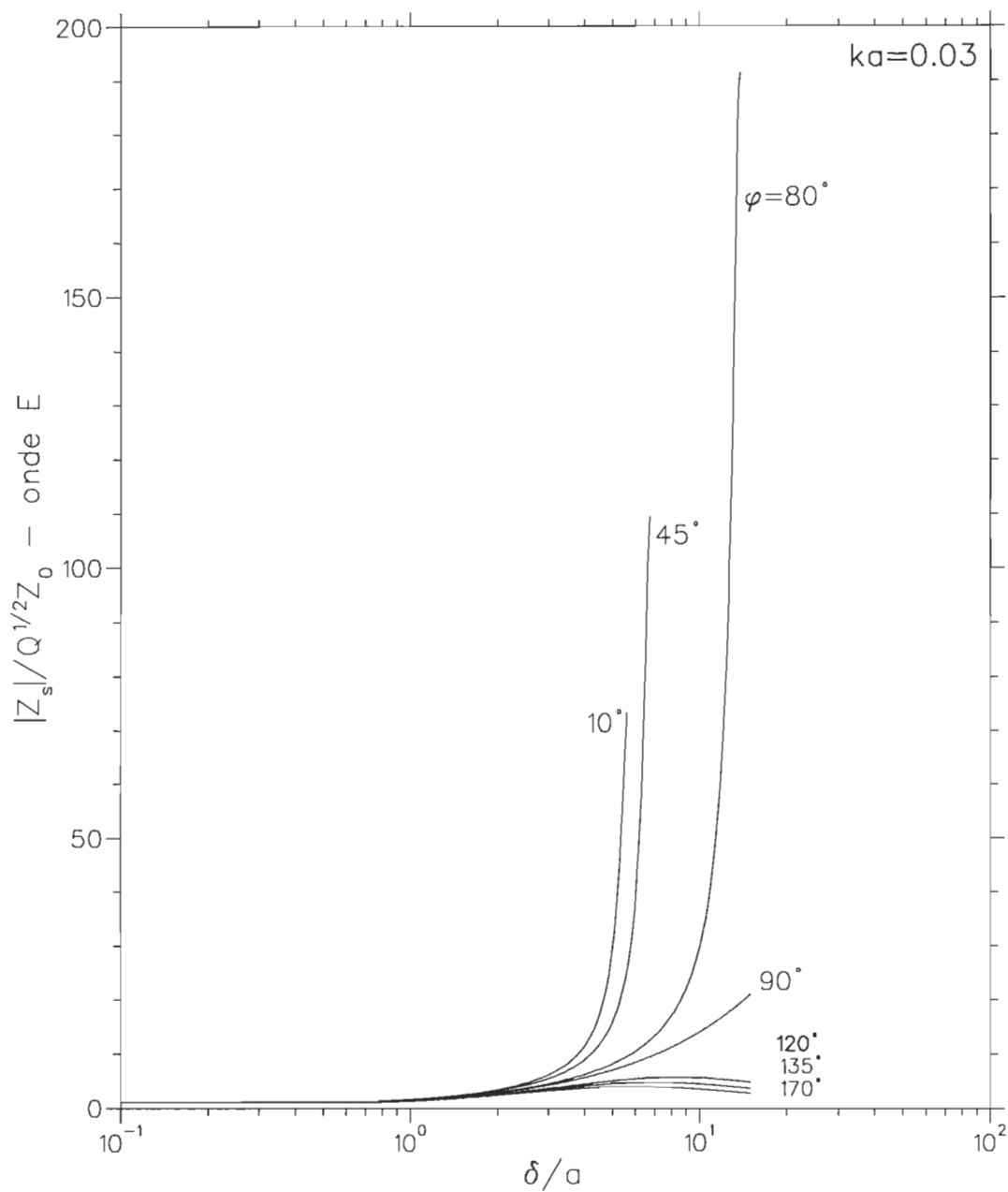


Figure 3.16 Module de l'impédance de surface réduite de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 0,03$.

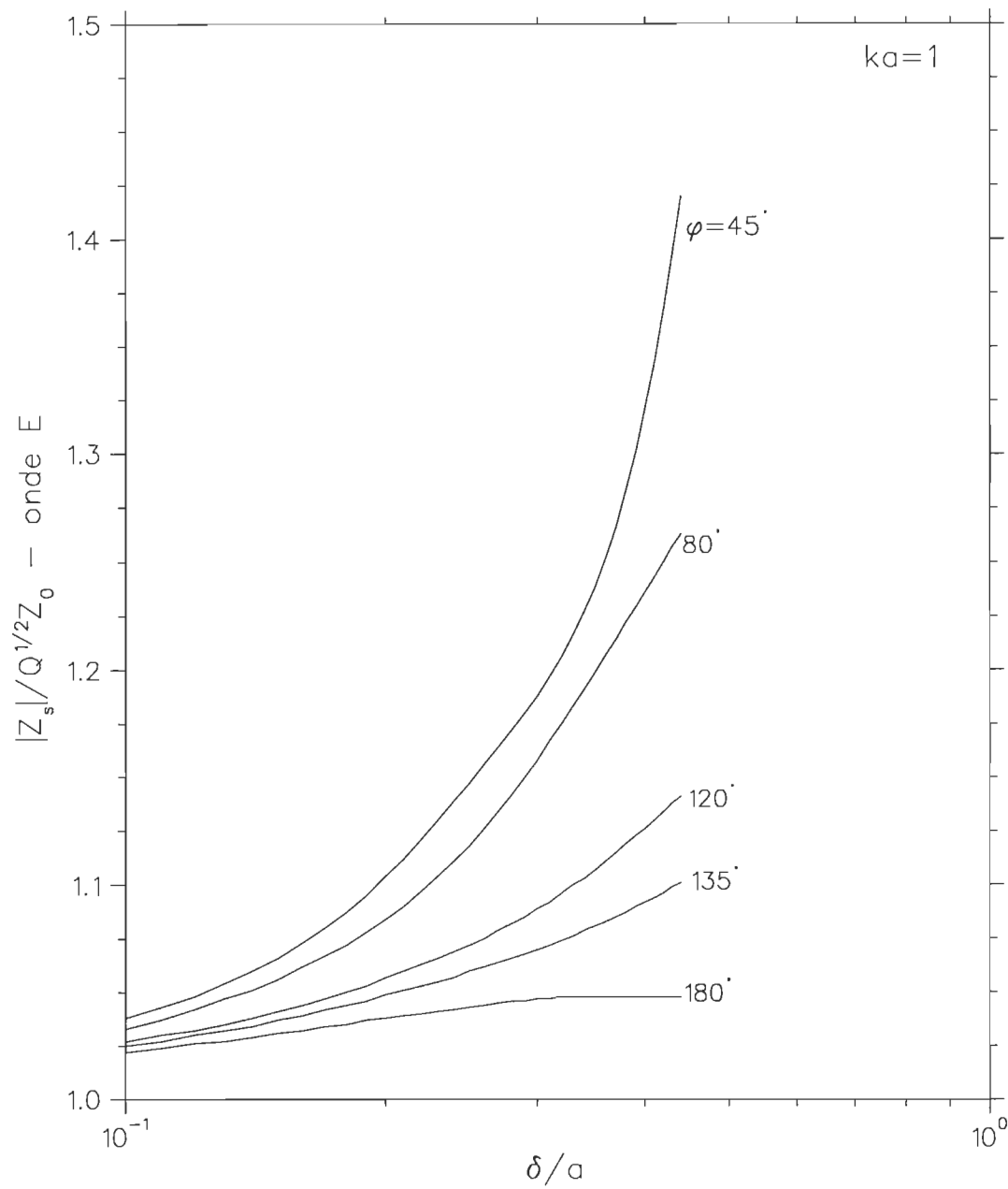


Figure 3.17 Module de l'impédance de surface réduite de l'onde E d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 1$.

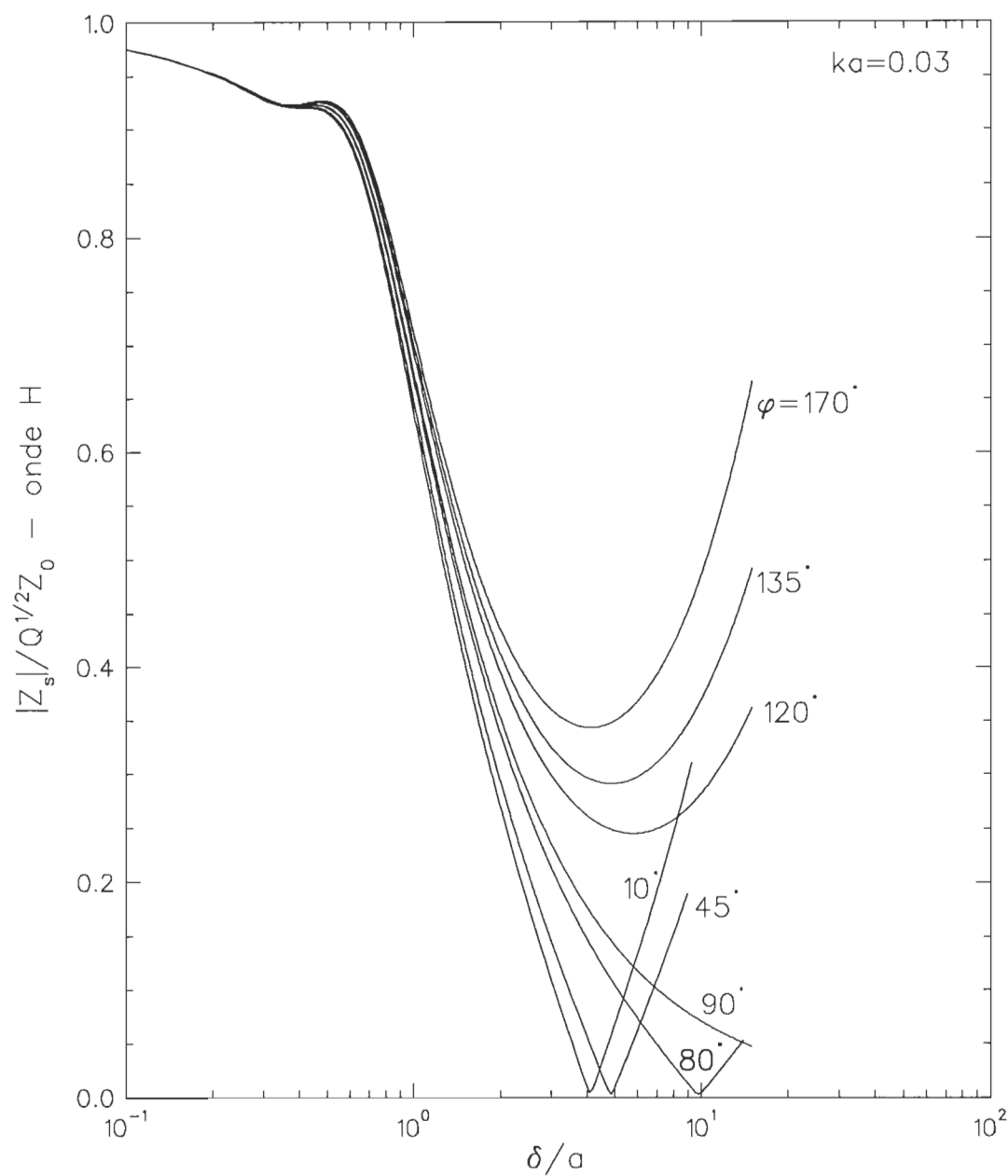


Figure 3.18 Module de l'impédance de surface réduite de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 0,03$.

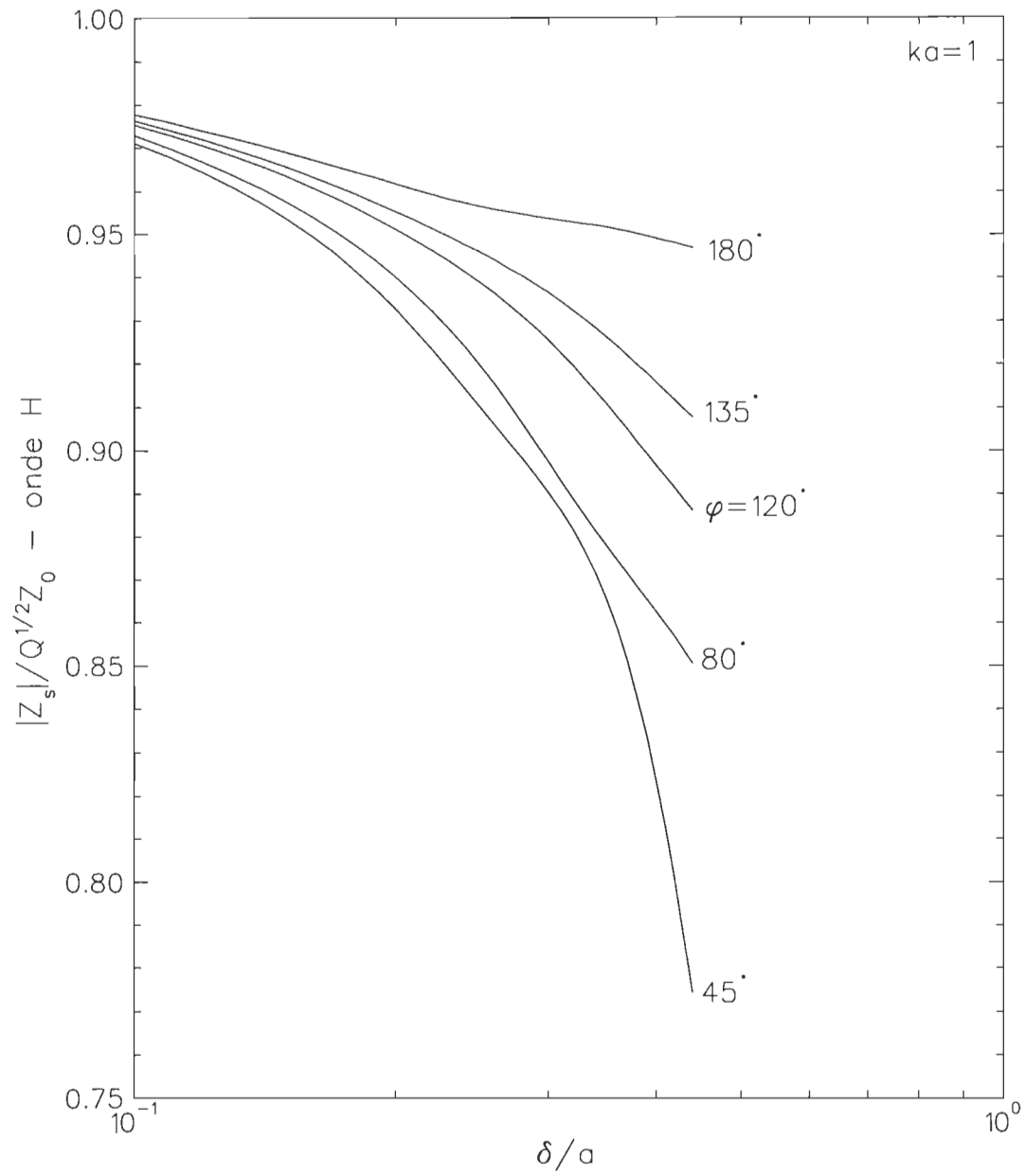


Figure 3.19 Module de l'impédance de surface réduite de l'onde H d'un bon conducteur en fonction de δ/a pour différents φ et à $ka = 1$.

3.2.4 Champs à la surface

Les figures 3.20 et 3.21 (3.22 et 3.23) montrent les variations du module de la partie réelle du champ électrique (champ magnétique) à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à différents δ/a pour l'onde E (l'onde H). Pour ka petit, ce module est presque constant. Quand la fréquence augmente ($ka = 1$) toutes les courbes du champ électrique ont la même allure avec un maximum à $\varphi \sim 90^\circ$ sauf pour les petits δ/a où on voit des cassures dans les courbes. Pour l'onde H, le module du champ magnétique passe par un maximum autour de $\varphi \sim 90^\circ$.

À $\varphi = 0$, on voit que le module du champ magnétique le plus élevé est obtenu pour δ/a le plus petit, mais c'est le contraire pour le champ électrique. Pour des petits φ , le module du champ magnétique est plus élevé à des grands δ/a et quand φ devient plus grand que $\sim 90^\circ$, le module correspondant à des δ/a plus petits est plus élevé.

Quand la fréquence augmente encore ($ka = 10$), les modules des champs électrique et magnétique varient de la même façon.

Les figures 3.24 et 3.25 montrent le module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H. Il varie d'une façon différente que dans le cas de l'onde E. À ka et δ/a petits, les variations sont très petites mais quand δ/a devient grand, l'allure des courbes change complètement et celles-ci passent par un maximum. À des grands ka , le champ oscille de la même façon que dans le cas de l'onde E.

Les figures 3.26 et 3.27 montrent le module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E. Ce module diminue quand ka augmente. Pour ka petit, ce module est constant à δ/a très grand. L'allure des courbes est identique à celle du module de champ magnétique de l'onde H pour des $ka \geq 1$.

Les figures 3.28, 3.29 et 3.30 montrent la variation avec δ/a de quelques quantités à différentes permittivités relatives ϵ_r . Les courbes gardent la même allure

lorsque ϵ_r varie. Pour ka et δ/a petits, la variation de ϵ_r n'affecte pas les valeurs numériques obtenues, ce qui n'est pas le cas quand δ/a augmente. Aussi, quand ka augmente ($ka = 10$), on enregistre une nette différence dans les résultats obtenues à des différents ϵ_r , même à des petits δ/a .

La phase du champ électrique par rapport au champ magnétique en fonction de δ/a est donnée dans la figure 3.31 pour une onde E. Cette phase est de 135° pour un bon conducteur. Donc, on peut voir clairement à l'aide de cette figure quand le milieu n'est plus un bon conducteur.

Le module du courant relatif en fonction de la distance radiale normalisée r/a est donné dans la figure 3.32 pour $ka = 1$ et à différents δ/a .

Les tableaux 3.1 à 3.14 donnent des valeurs numériques des différentes grandeurs physiques considérées.

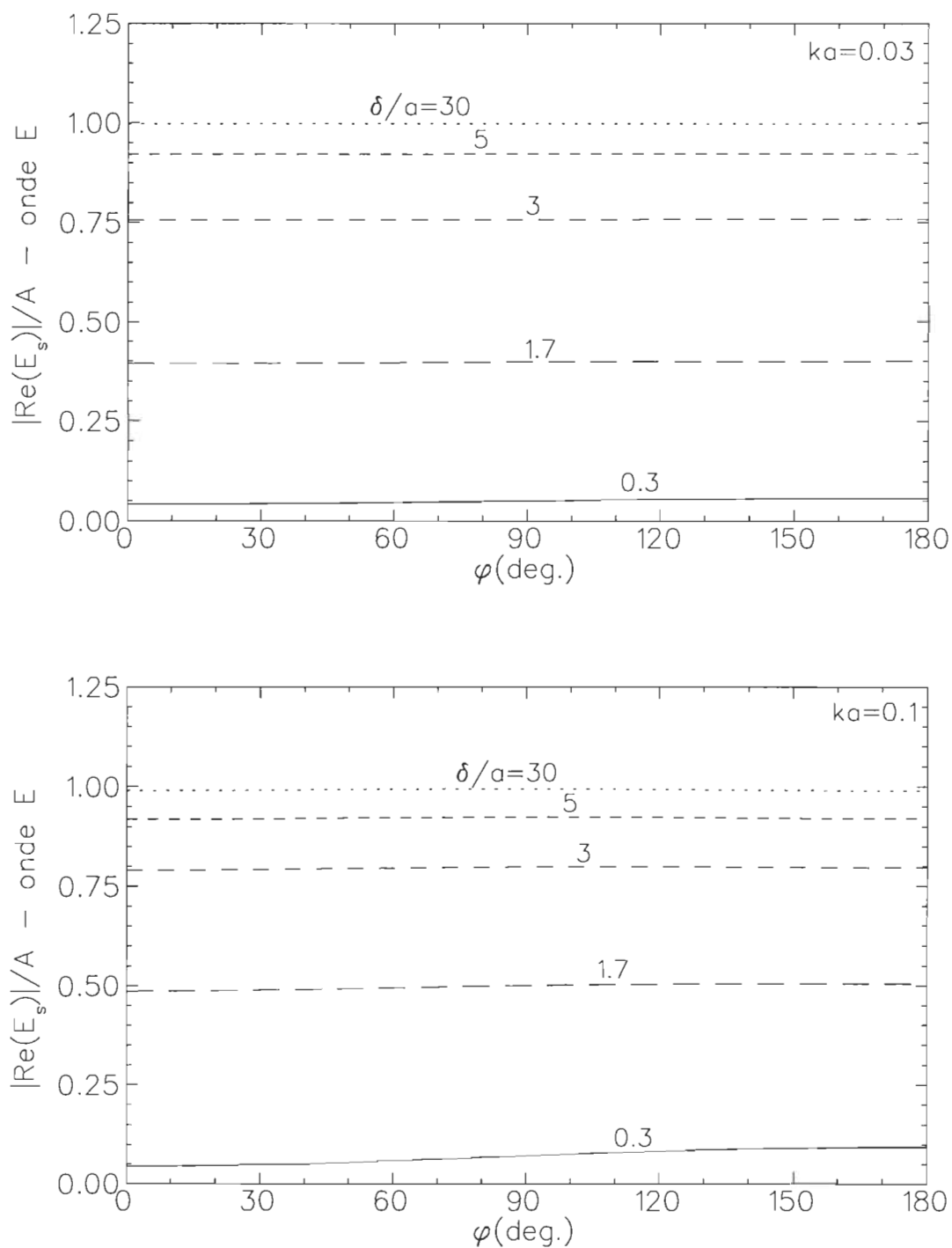


Figure 3.20 Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.

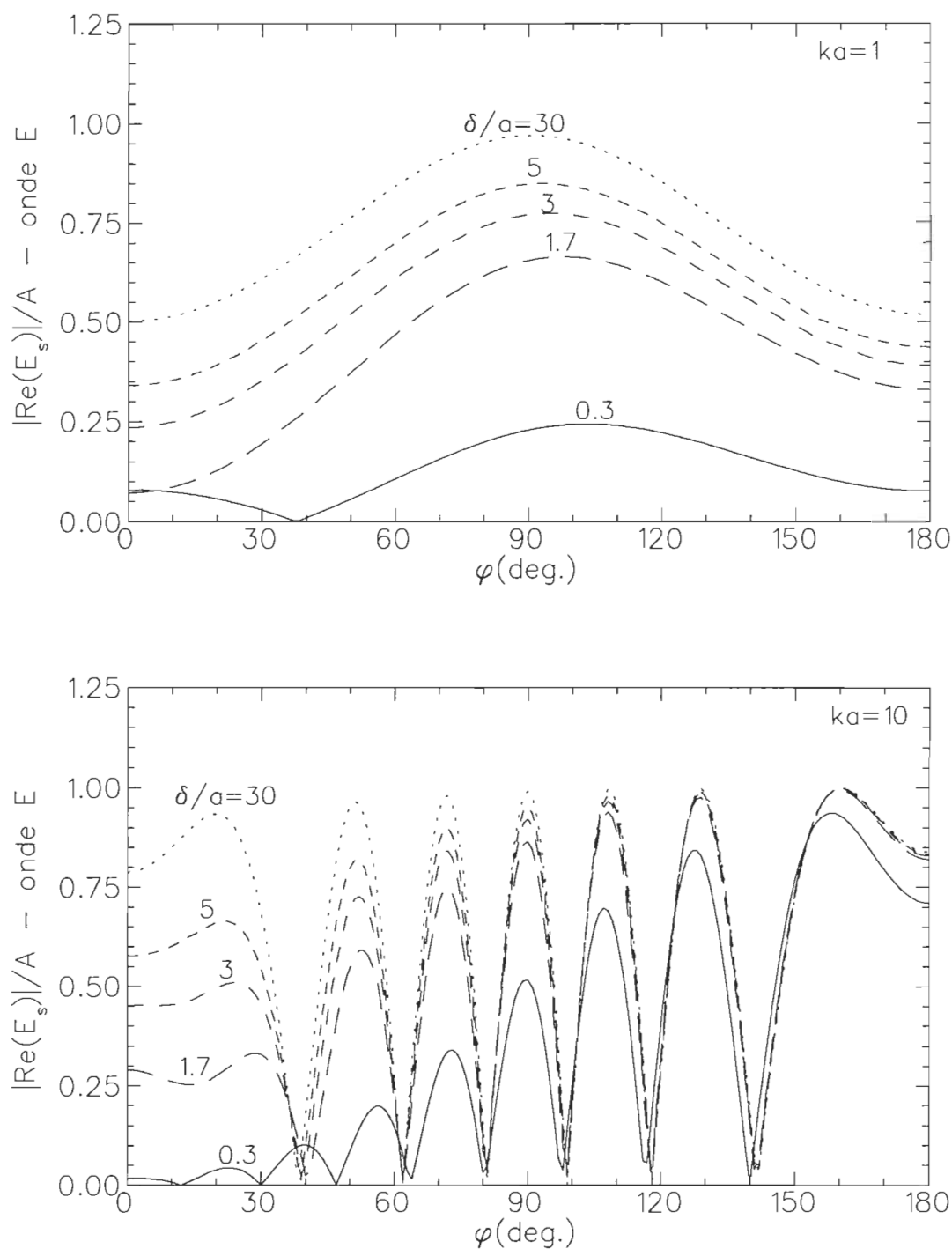


Figure 3.21 Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.

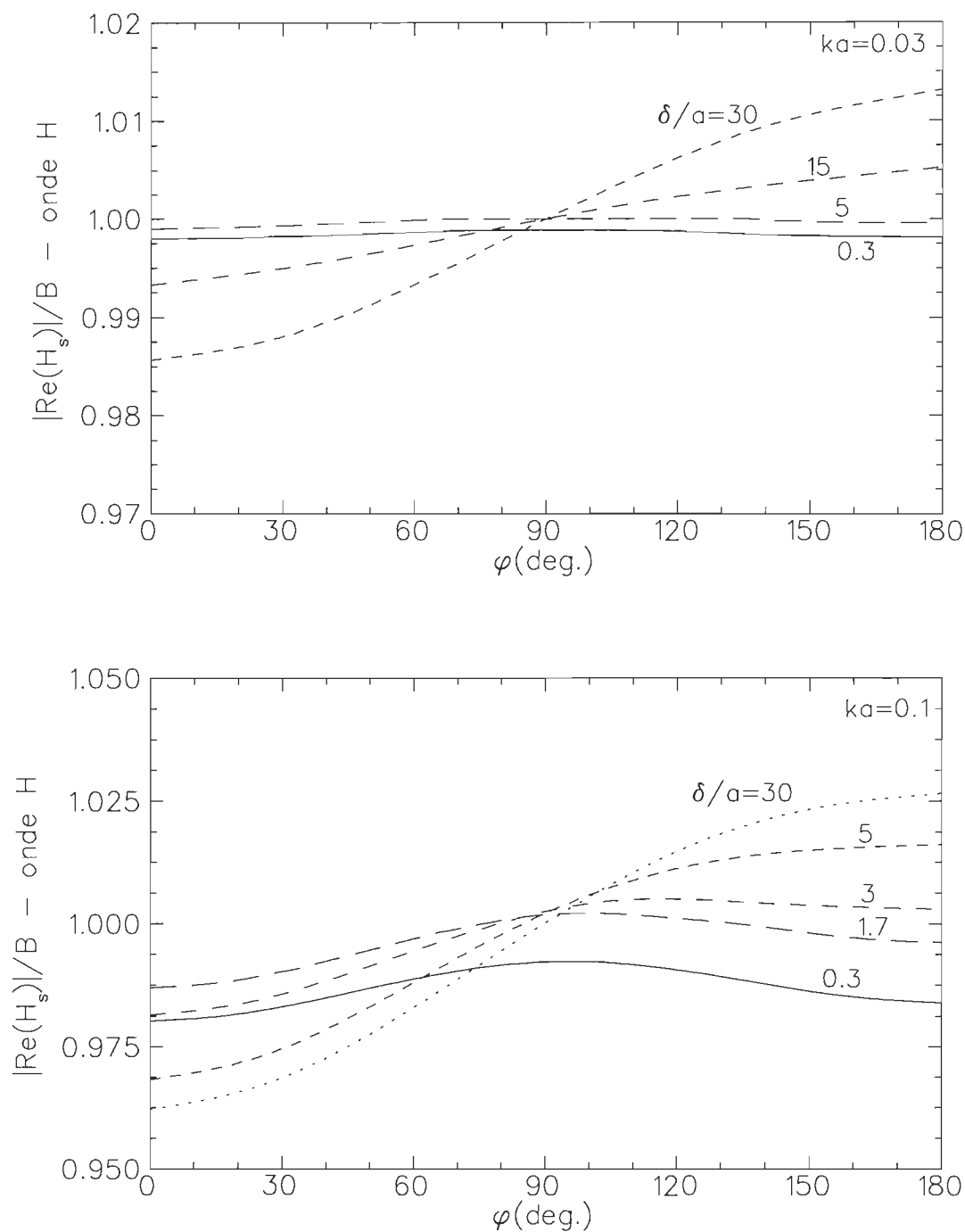


Figure 3.22 Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.

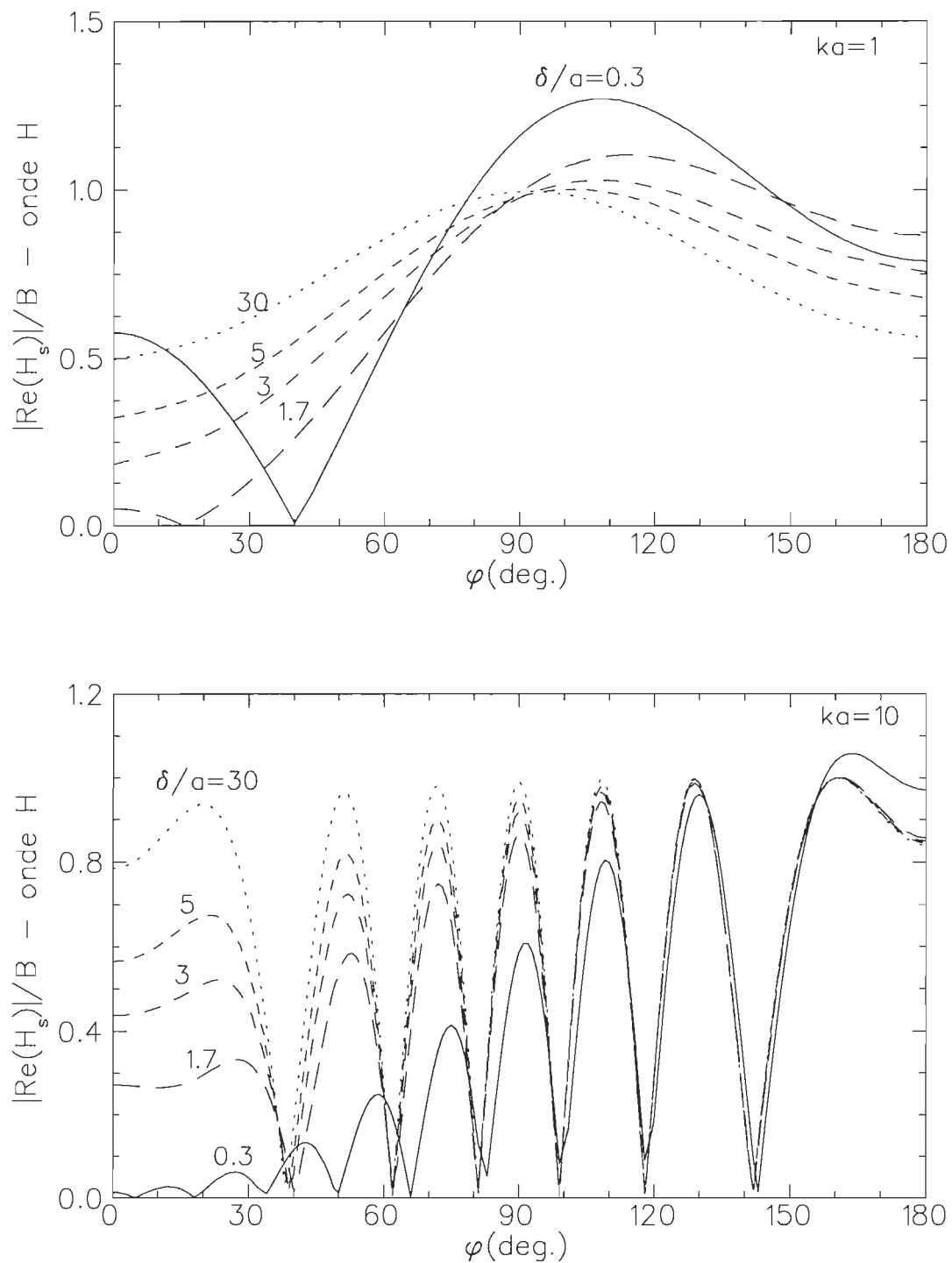


Figure 3.23 Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.

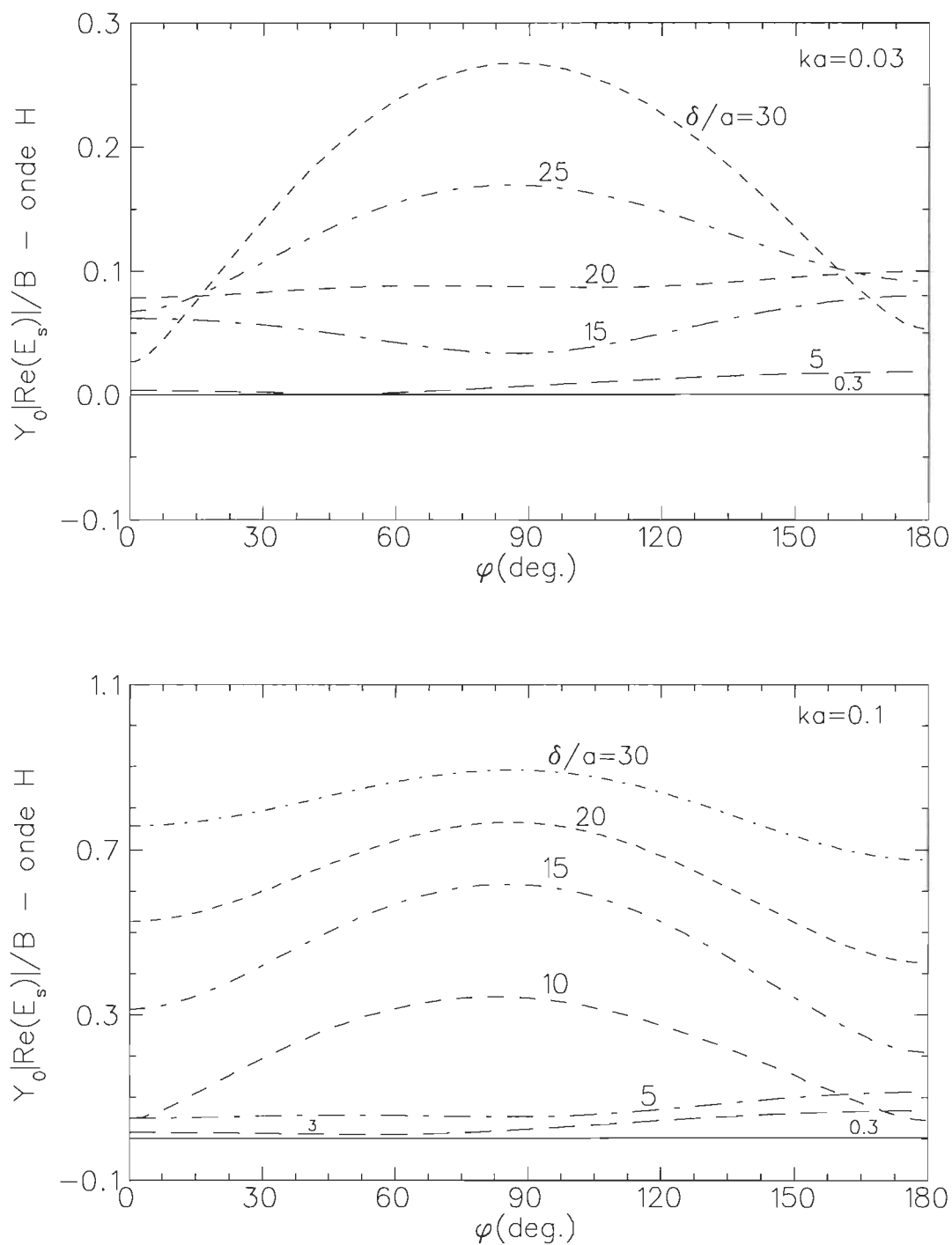


Figure 3.24 Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.

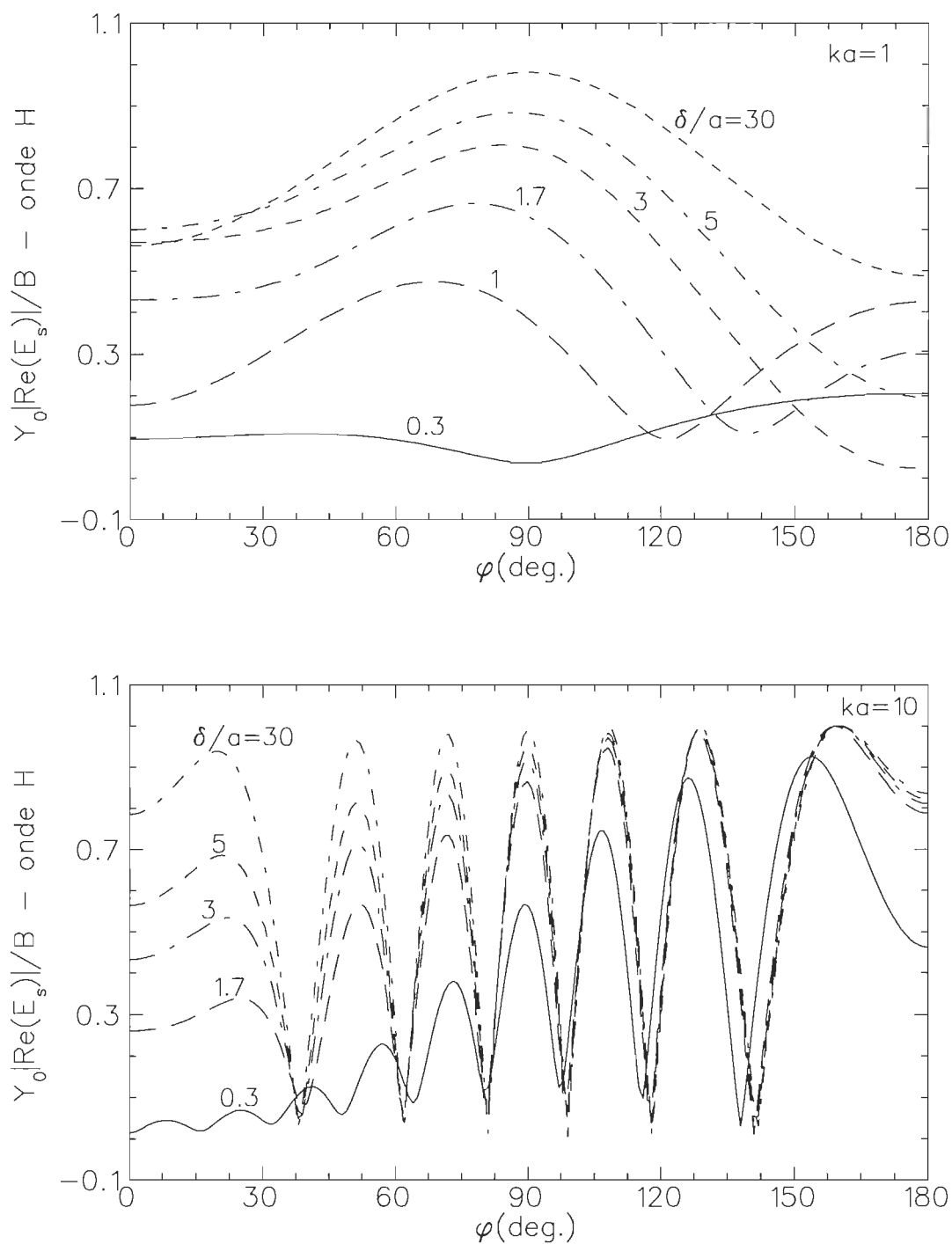


Figure 3.25 Module de la partie réelle du champ électrique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde H.

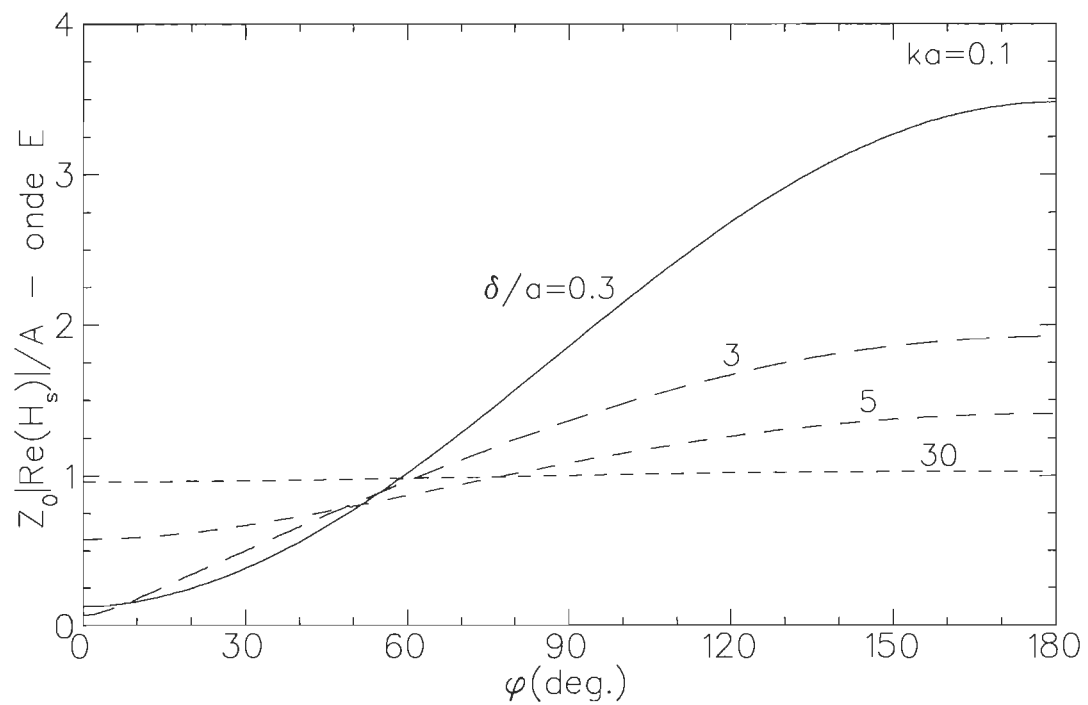
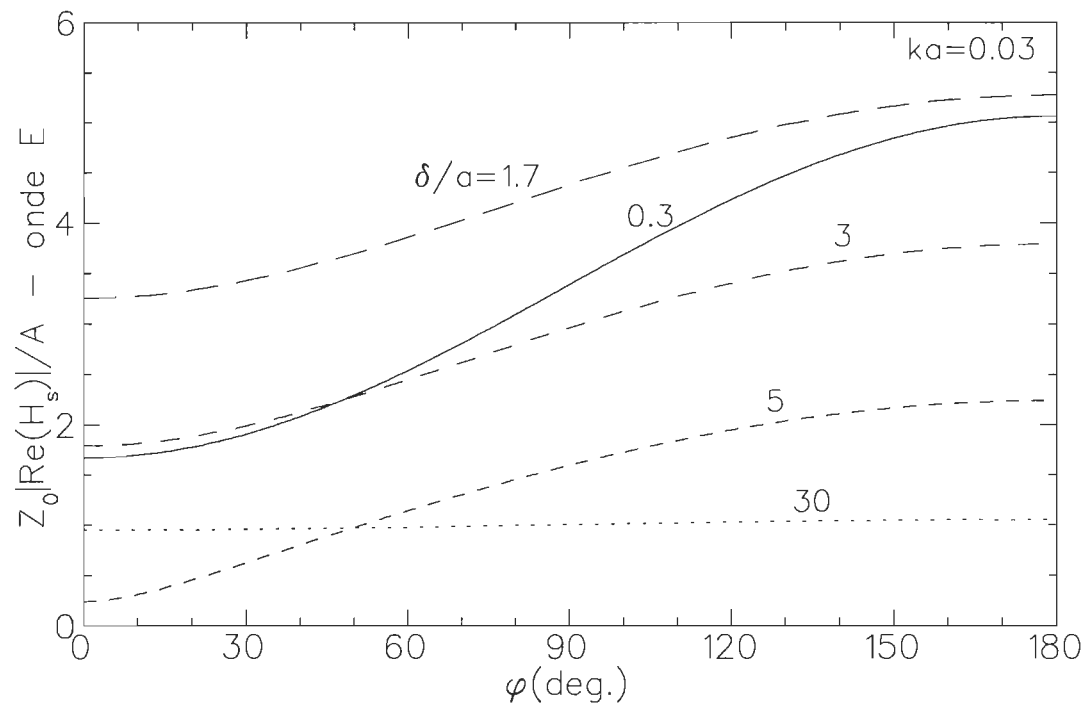


Figure 3.26 Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.

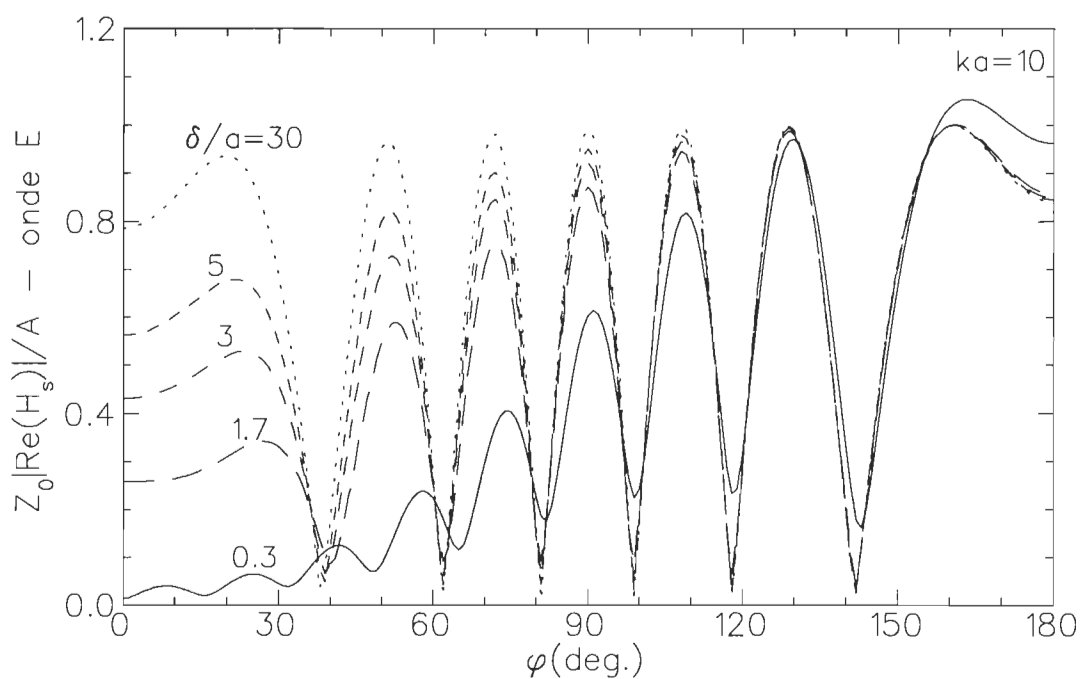
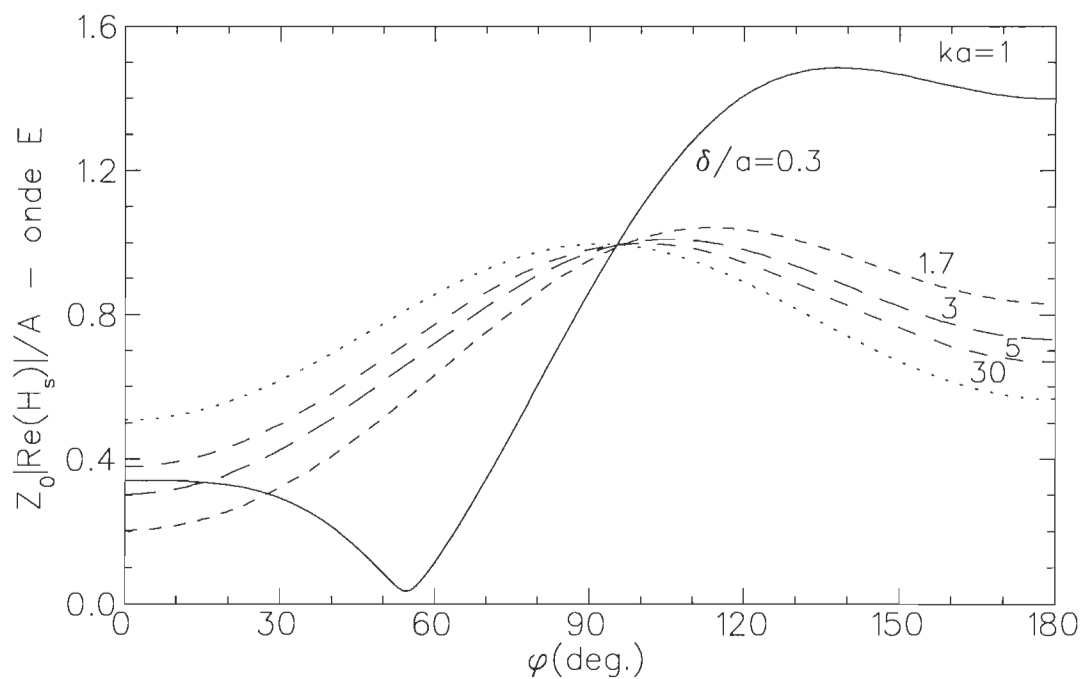


Figure 3.27 Module de la partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre en fonction de l'angle azimutal φ à un ka donné et à des δ/a différents pour l'onde E.

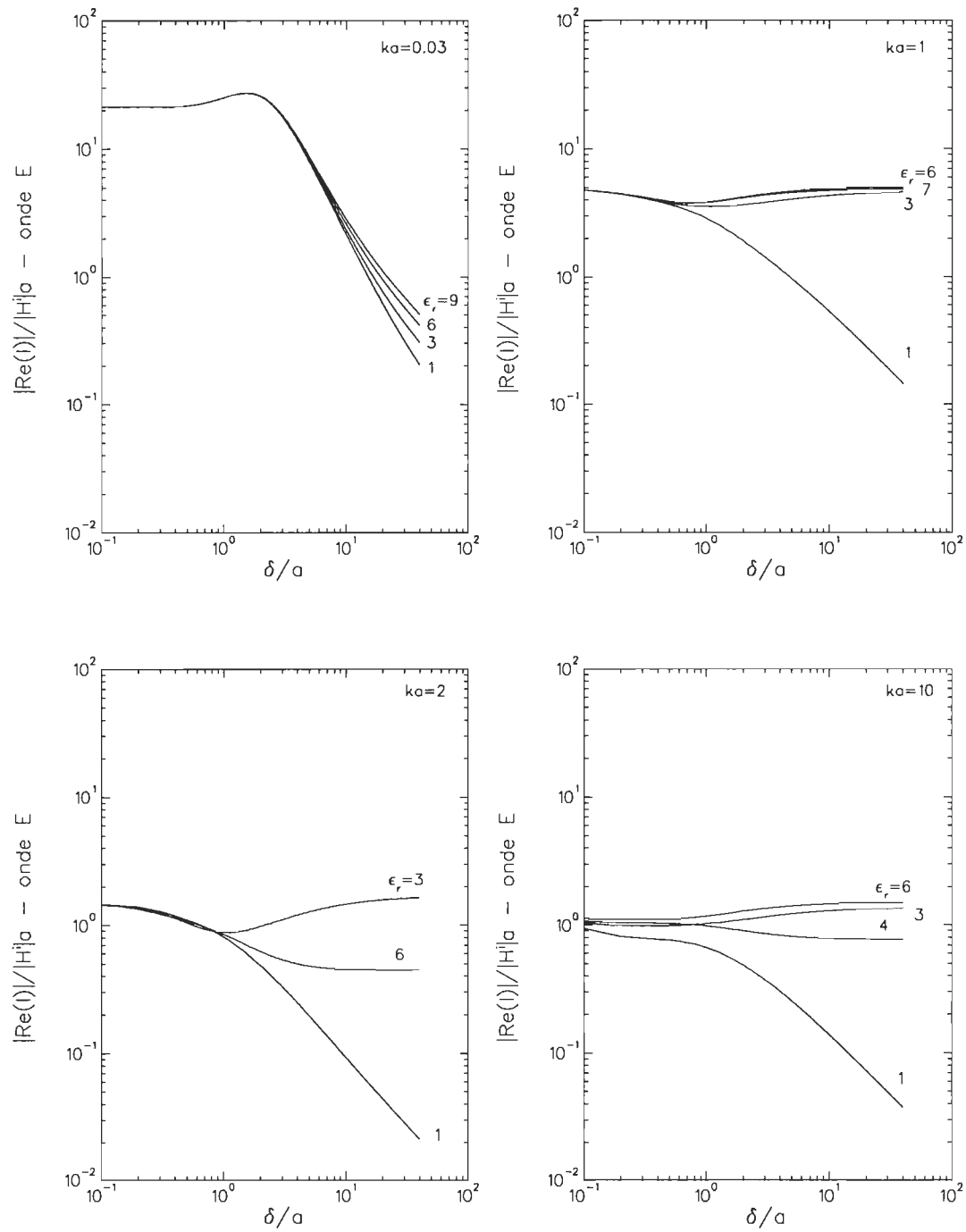


Figure 3.28 Module de la partie réelle du courant induit normalisé en fonction de δ/a à un ka donné et à des ϵ_r différents pour l'onde E

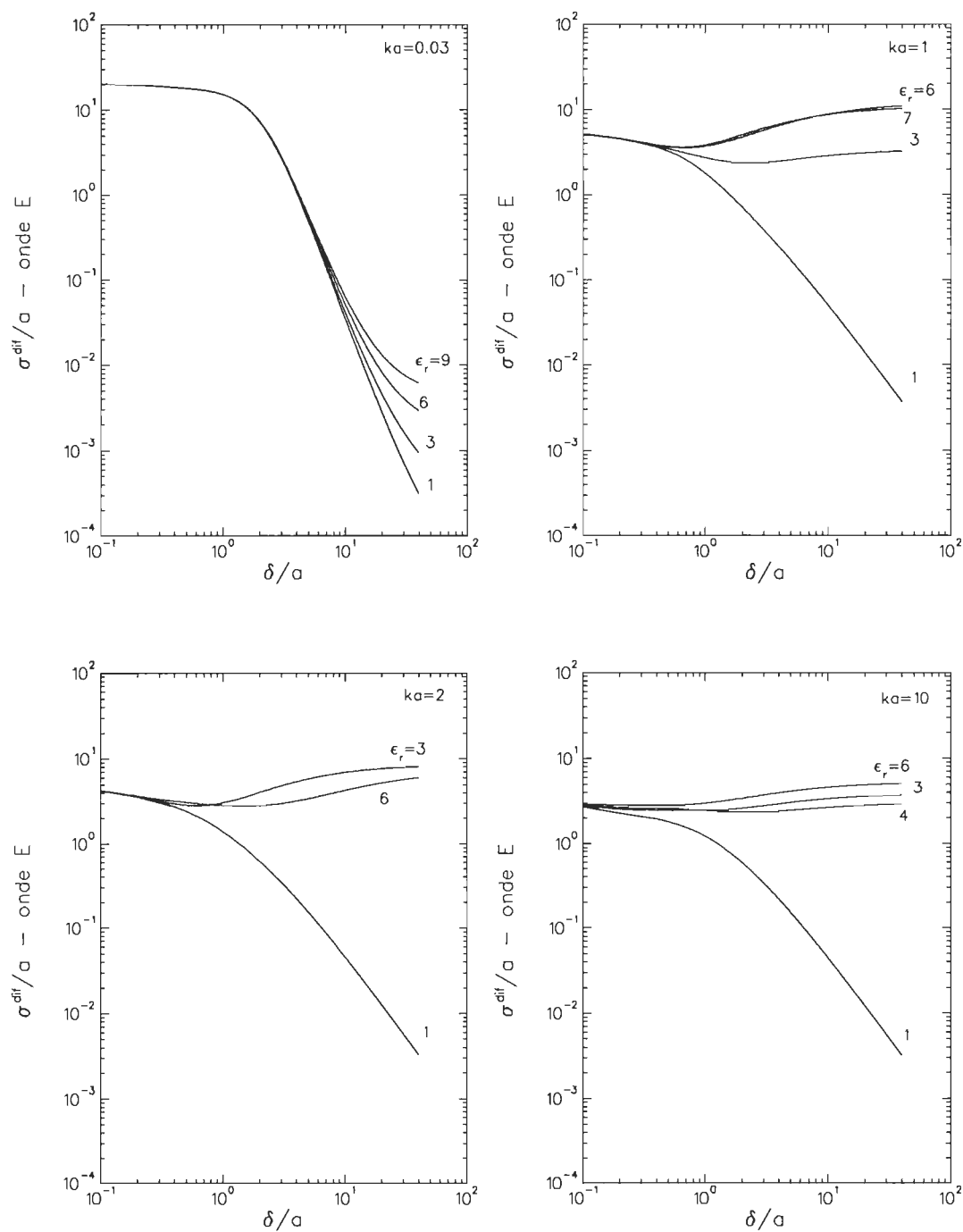


Figure 3.29 Section efficace de diffusion normalisée en fonction de δ/a à un ka donné et des ϵ_r différents pour l'onde E.

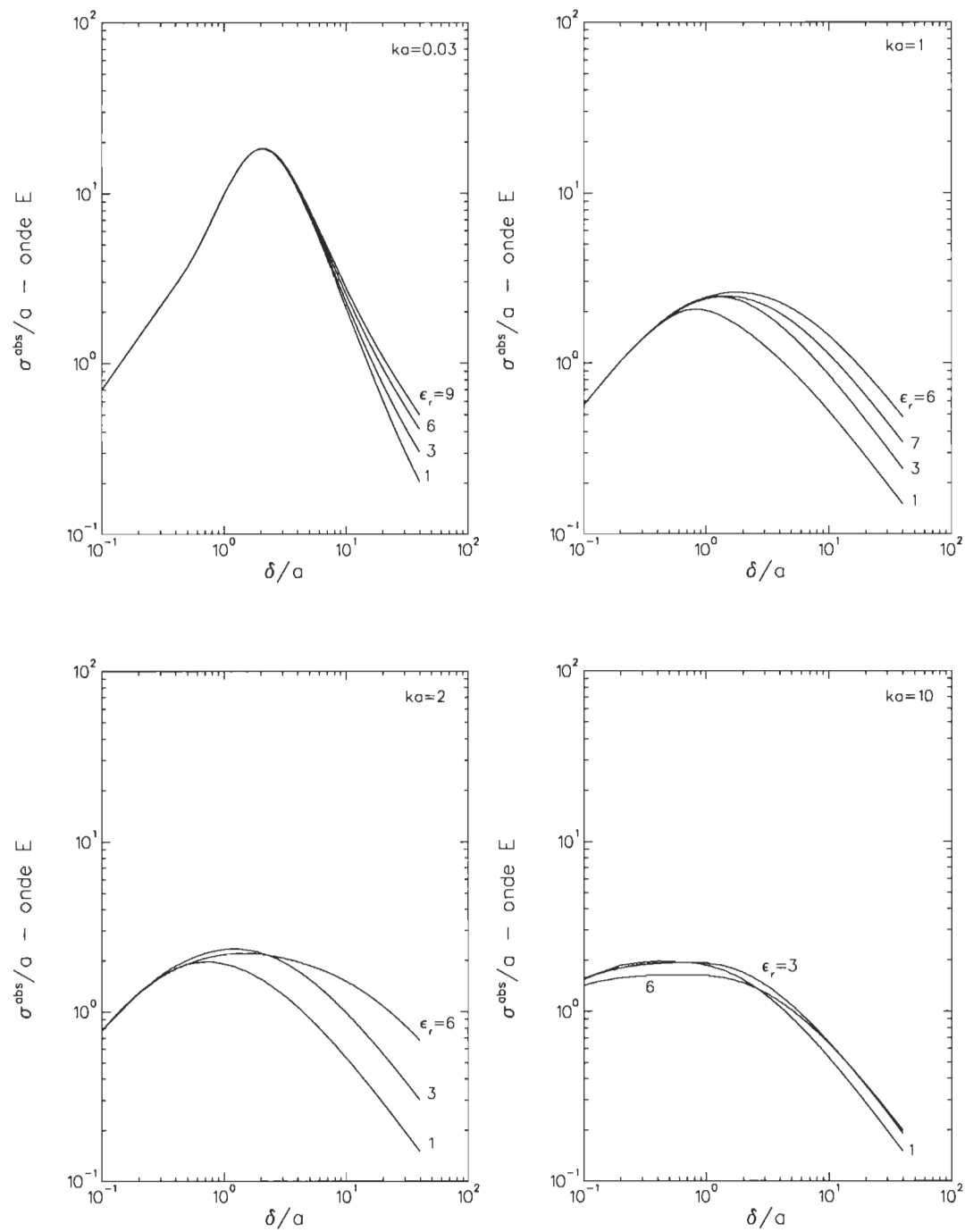


Figure 3.30 Section efficace d'absorption normalisée en fonction de δ/a à un ka donné et des ϵ_r différents pour l'onde E.

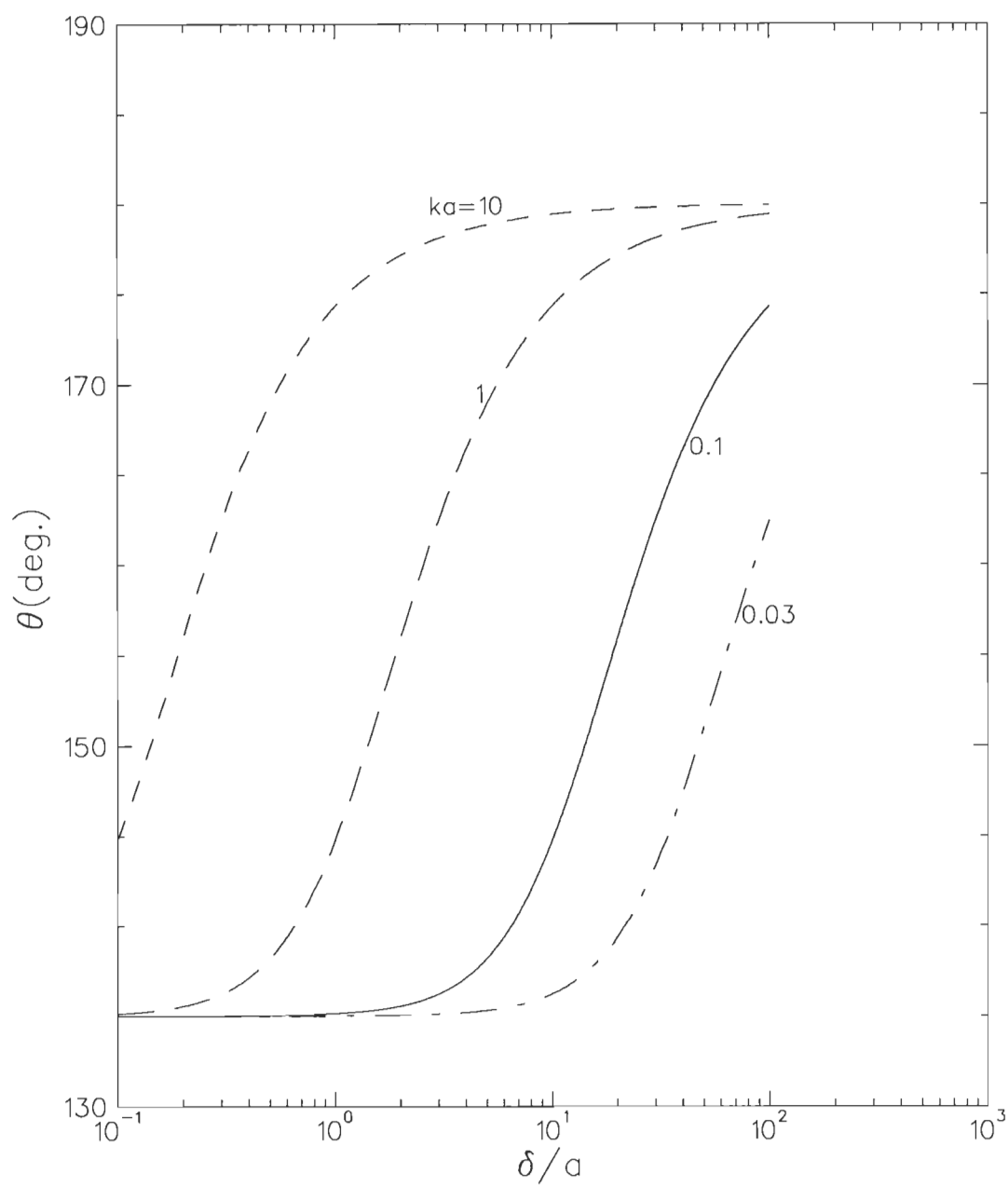


Figure 3.31 Phase du champ électrique par rapport au champ magnétique pour une onde E.

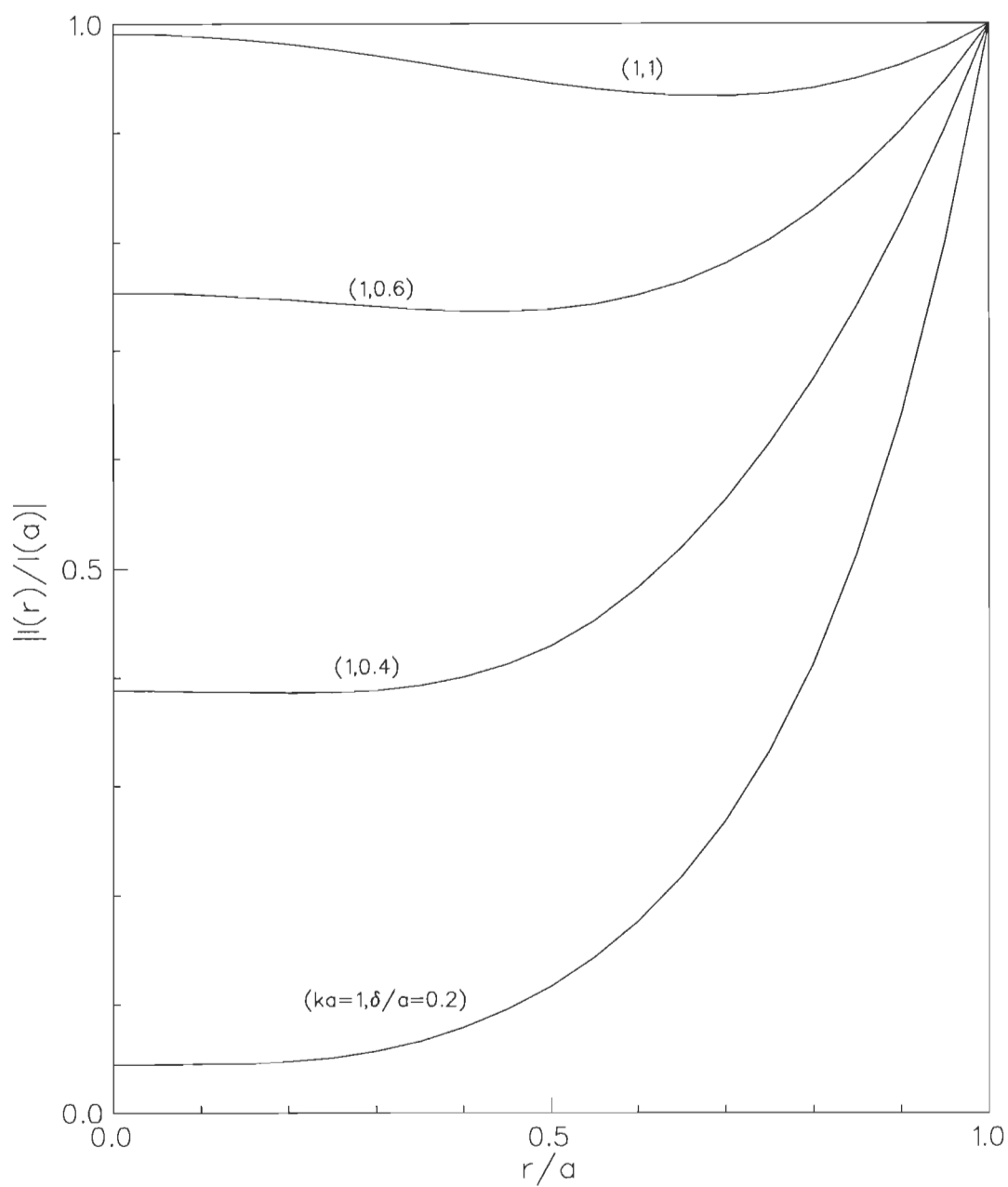


Figure 3.32 Module du courant relatif en fonction de r/a pour $ka = 1$ et δ/a différents dans le cas de l'onde E.

Tableau 3.1 Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde E en fonction de δ/a à $ka = 0,03$.

$ka = 0.03, \epsilon_r = 1$ - Onde E						
δ/a	σ^{dif}/a	σ_0^{dif}/a	σ_1^{dif}/a	σ^{abs}/a	σ_0^{abs}/a	σ_1^{abs}/a
0.1	20.40823	20.40812	1.08×10^{-4}	0.7014	0.6836	0.01783
0.2	19.7279	19.72781	8.91×10^{-5}	1.425	1.391	0.0337
0.5	17.97131	17.97127	4.66×10^{-5}	3.687	3.618	0.0694
0.8	16.46996	16.46995	1.57×10^{-5}	7.096	7.038	0.0576
1	15.16825	15.16825	7.44×10^{-6}	9.895	9.852	0.0422
1.5	11.09681	11.09681	1.61×10^{-6}	15.97	15.95	0.0204
2	7.149414	7.149413	5.18×10^{-7}	18.21	18.20	0.0117
6	0.2375815	0.2375815	6.6×10^{-9}	5.361	5.360	1.33×10^{-3}
10	0.0346414	0.0346414	9×10^{-10}	2.113	2.113	4.91×10^{-4}
20	2.77×10^{-3}	2.77×10^{-3}	7×10^{-11}	0.6050	0.6048	1.37×10^{-4}
40	3.12×10^{-4}	3.12×10^{-4}	8×10^{-12}	0.2038	0.2038	4.6×10^{-5}

Tableau 3.2 Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde H en fonction de δ/a à $ka = 0,03$.

$ka = 0.03, \epsilon_r = 1$ - Onde H						
δ/a	σ^{dif}/a	σ_0^{dif}/a	σ_1^{dif}/a	σ^{abs}/a	σ_0^{abs}/a	σ_1^{abs}/a
0.1	1.88×10^{-4}	5.4×10^{-5}	1.3×10^{-4}	8.93×10^{-3}	8.9×10^{-3}	1.62×10^{-5}
0.2	1.78×10^{-4}	4.4×10^{-5}	1.3×10^{-4}	1.69×10^{-2}	1.6×10^{-2}	3.08×10^{-5}
0.5	1.57×10^{-4}	2.3×10^{-5}	1.3×10^{-4}	3.47×10^{-2}	3.4×10^{-2}	6.50×10^{-5}
0.8	1.41×10^{-4}	7.9×10^{-6}	1.3×10^{-4}	2.9×10^{-2}	2.8×10^{-2}	1.19×10^{-4}
1	1.37×10^{-4}	3.7×10^{-6}	1.3×10^{-4}	2.1×10^{-2}	2.1×10^{-2}	1.77×10^{-4}
1.5	1.34×10^{-4}	8×10^{-7}	1.3×10^{-4}	1.06×10^{-2}	1.02×10^{-2}	3.85×10^{-4}
2	1.34×10^{-4}	2.6×10^{-7}	1.3×10^{-4}	6.53×10^{-3}	5.8×10^{-3}	6.81×10^{-4}
6	1.33×10^{-4}	3.3×10^{-9}	1.3×10^{-4}	6.7×10^{-3}	6.6×10^{-4}	6.02×10^{-3}
10	1.32×10^{-4}	4.5×10^{-10}	1.3×10^{-4}	1.64×10^{-2}	2.4×10^{-4}	1.62×10^{-2}
20	1.20×10^{-4}	3.5×10^{-11}	1.2×10^{-4}	5.33×10^{-2}	6.7×10^{-5}	5.32×10^{-2}
40	7.20×10^{-5}	3.9×10^{-12}	7.2×10^{-5}	9.4×10^{-2}	2.3×10^{-5}	9.4×10^{-2}

Tableau 3.3 Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde E en fonction de δ/a à $ka = 1$.

$ka = 1, \epsilon_r = 1$ - Onde E						
δ/a	σ^{dif}/a	σ_0^{dif}/a	σ_1^{dif}/a	σ^{abs}/a	σ_0^{abs}/a	σ_1^{abs}/a
0.1	5.166	3.588	1.550	0.569	0.193	0.287
0.2	4.538	3.261	1.257	1.023	0.350	0.522
0.5	3.226	2.512	0.709	1.845	0.645	1.024
0.8	2.253	1.886	0.365	2.071	0.847	1.118
1	1.775	1.535	0.239	2.038	0.932	1.027
1.5	1.061	0.598	0.102	1.810	0.994	0.770
2	0.7068	0.651	0.055	1.590	0.959	0.597
6	0.1232	0.117	5.9×10^{-3}	0.7888	0.567	0.211
10	0.0501	0.048	2.1×10^{-3}	0.5248	0.389	0.129
20	0.0138	0.013	5.4×10^{-4}	0.2859	0.217	0.065
40	0.0036	0.003	1.3×10^{-4}	0.1497	0.115	0.033

Tableau 3.4 Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde H en fonction de δ/a à $ka = 1$.

$ka = 1, \epsilon_r = 1$ - Onde H						
δ/a	σ^{dif}/a	σ_0^{dif}/a	σ_1^{dif}/a	σ^{abs}/a	σ_0^{abs}/a	σ_1^{abs}/a
0.1	1.944	0.775	1.108	0.4629	0.143	0.277
0.2	1.932	0.628	1.235	0.8675	0.261	0.521
0.5	1.941	0.354	1.515	1.752	0.511	1.012
0.8	1.558	0.182	1.320	2.202	0.559	1.287
1	1.267	0.119	1.104	2.298	0.513	1.399
1.5	0.7603	0.051	0.686	2.182	0.385	1.439
2	0.4931	0.027	0.452	1.934	0.298	1.335
6	0.0740	2.9×10^{-3}	0.069	0.8876	0.105	0.669
10	0.0285	1.07×10^{-3}	0.027	0.5684	0.064	0.435
20	0.0075	2.71×10^{-4}	7.1×10^{-3}	0.2987	0.032	0.231
40	0.0019	6.84×10^{-5}	1.8×10^{-3}	0.1531	0.016	0.119

Tableau 3.5 Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde E en fonction de δ/a à $ka = 10$.

$ka = 10, \epsilon_r = 1$ - Onde E						
δ/a	σ^{dif}/a	σ_0^{dif}/a	σ_1^{dif}/a	σ^{abs}/a	σ_0^{abs}/a	σ_1^{abs}/a
0.1	2.684	0.1447	0.1634	2.684	0.08289	0.1654
0.2	2.278	0.1064	0.1999	1.860	0.0944	0.1887
0.5	1.805	0.0927	0.2012	1.972	0.099	0.1978
0.8	0.7337	0.08106	0.1747	1.922	0.0987	0.198
1	1.218	0.072	0.1544	1.866	0.0975	0.1962
1.5	0.8312	0.0523	0.1114	1.700	0.0923	0.1867
2	0.5927	0.0386	0.0818	1.536	0.0856	0.1738
6	0.1113	0.00775	0.01646	0.8011	0.04793	0.0982
10	0.0448	0.00316	0.00673	0.533	0.0324	0.0666
20	0.0122	8.709×10^{-4}	1.85×10^{-3}	0.2889	0.0178	0.0367
40	3.19×10^{-3}	2.286×10^{-4}	4.882×10^{-4}	0.1506	9.33×10^{-3}	0.01927

Tableau 3.6 Sections efficaces de diffusion et d'absorption normalisées de l'onde H en fonction de δ/a à $ka = 10$.

$ka = 10, \epsilon_r = 1$ - Onde H						
δ/a	σ^{dif}/a	σ_0^{dif}/a	σ_1^{dif}/a	σ^{abs}/a	σ_0^{abs}/a	σ_1^{abs}/a
0.1	2.358	0.0817	0.3193	2.162	0.0827	0.1658
0.2	2.120	0.0999	0.2316	2.213	0.0943	0.1889
0.5	1.769	0.1006	0.1929	2.116	0.0988	0.1982
0.8	1.411	0.0873	0.1659	2.010	0.0989	0.1979
1	1.202	0.0771	0.1466	1.935	0.0981	0.1956
1.5	0.8195	0.0556	0.1058	1.744	0.0933	0.1850
2	0.5834	0.0409	0.0777	1.566	0.0869	0.1716
6	0.1089	8.22×10^{-3}	0.0155	0.8066	0.0491	0.0958
10	0.04387	3.36×10^{-3}	6.32×10^{-3}	0.5352	0.0333	0.0648
20	0.01191	9.28×10^{-4}	1.74×10^{-3}	0.2895	0.0183	0.0355
40	0.00312	2.44×10^{-4}	4.56×10^{-4}	0.1507	9.63×10^{-3}	0.01866

Tableau 3.7 Module du courant total induit et de sa partie réelle pour l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$.

$ka = 0.03 \ \epsilon_r = 1$ - Onde E								
δ/a	0.1	0.2	0.5	1	1.5	2	6	40
$ Re(I) / H^i a$	21.10	21.13	21.6	25.04	27.08	25.38	5.608	0.2045
$ I / H^i a$	52.17	51.30	48.96	44.98	38.47	30.88	5.630	0.2248

Tableau 3.8 Module du courant total induit et de sa partie réelle pour l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 1$.

$ka = 1 \ \epsilon_r = 1$ - Onde E								
δ/a	0.1	0.2	0.5	1	1.5	2	10	40
$ Re(I) / H^i a$	4.793	4.453	3.681	2.873	2.297	1.909	0.532	0.145
$ I / H^i a$	4.812	4.463	3.689	2.978	2.610	2.447	2.510	2.686

Tableau 3.9 Module du courant total induit et de sa partie réelle pour l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 10$.

$ka = 10 \ \epsilon_r = 1$ - Onde E								
δ/a	0.1	0.2	0.5	1	1.5	2	10	40
$ Re(I) / H^i a$	0.943	0.817	0.762	0.668	0.568	0.487	0.139	0.037
$ I / H^i a$	1.034	0.878	0.791	0.692	0.598	0.525	0.285	0.269

Tableau 3.10 Module du courant surfacique induit et de sa partie réelle pour l'onde H en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$ et $ka = 1$.

$ka = 0.03 \ \epsilon_r = 1$ - Onde H								
δ/a	0.1	0.2	0.5	0.8	1	2	8	8.1
$ Re(I) / H^i a$	6.272	6.273	6.275	6.279	26.280	6.281	6.282	—
$ I / H^i a$	6.272	6.273	6.275	6.279	26.280	6.281	6.282	—
$ka = 1 \ \epsilon_r = 1$ - Onde H								
δ/a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	—	—	—
$ Re(I) / H^i a$	3.912	3.925	3.928	3.926	—	—	—	—
$ I / H^i a$	4.363	4.276	4.198	4.125	—	—	—	—

Tableau 3.11 Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$.

$ka = 0,03, \epsilon_r = 1$ - Onde E						
δ/a	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$
	$\varphi = 10^\circ$	45°	80°	90°	135°	170°
0.1	1.026	1.026	1.025	1.025	1.025	1.025
0.2	1.053	1.052	1.051	1.051	1.049	1.049
0.5	1.114	1.104	1.090	1.086	1.047	1.070
0.8	1.391	1.354	1.284	1.262	1.177	1.147
1	1.662	1.611	1.514	1.483	1.363	1.319
1.5	2.462	2.367	2.194	2.140	1.936	1.863
2	3.423	3.241	2.926	2.833	2.498	2.383
5	29.57	15.95	8.194	7.060	4.503	3.940
5.6	72.01	25.35	9.542	7.907	4.646	3.996
6.7	—	107.9	12.47	9.459	4.758	3.979
8	—	—	17.12	11.29	4.721	3.841
12	—	—	66.42	16.91	4.144	3.195
13.7	—	—	190.2	19.28	3.857	2.934
15	—	—	—	21.07	3.648	2.753

Tableau 3.12 Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde E en fonction de δ/a et à $ka = 1$.

$ka = 1, \epsilon_r = 1$ - Onde E						
δ/a	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$
	$\varphi = 10^\circ$	45°	80°	90°	135°	170°
0.1	1.041	1.038	1.033	1.032	1.025	1.022
0.2	1.122	1.104	1.084	1.077	1.049	1.038
0.3	1.280	1.188	1.158	1.140	1.070	1.048
0.4	1.691	1.321	1.236	1.211	1.092	1.050

Tableau 3.13 Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde H en fonction de δ/a et à $ka = 0,03$.

$ka = 0.03, \epsilon_r = 1$ - Onde H					
δ/a	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$
	$\varphi = 10^\circ$	45°	90°	135°	170°
0.1	0.9752	0.9753	0.9754	0.9755	0.9755
0.2	0.9512	0.9514	0.9518	0.9523	0.9525
0.5	0.9151	0.9169	0.9211	0.9251	0.9265
0.8	0.7657	0.7732	0.7920	0.8103	0.8173
1	0.6355	0.6463	0.6733	0.7000	0.7103
1.5	0.4050	0.4224	0.4666	0.5105	0.5276
2	0.2692	0.2927	0.3524	0.4119	0.4351
6	0.1332	0.0625	0.1178	0.2977	0.3682
8	0.2465	0.1521	0.0883	0.3280	0.4218
8.9	0.2932	0.1881	0.0794	0.3459	0.4502
9.2	0.3083	—	0.0786	0.3523	0.4600
12	—	—	0.0589	0.4172	0.5572
14	—	—	0.0505	0.4673	0.6300
15	—	—	0.0471	0.4929	0.6667

Tableau 3.14 Module de l'impédance de surface réduite dans le cas de l'onde H en fonction de δ/a et à $ka = 1$.

$ka = 1, \epsilon_r = 1$ - Onde H					
δ/a	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$	$\frac{ Z }{Q^{1/2}Z_0}$
	$\varphi = 10^\circ$	45°	90°	135°	170°
0.1	0.9693	0.9711	0.9734	0.9763	0.9777
0.2	0.9248	0.9327	0.9425	0.9552	0.9613
0.3	0.8615	0.8903	0.9029	0.9365	0.9527
0.4	0.7286	0.8232	0.8662	0.9156	0.9470

CONCLUSION

L'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique par un cylindre circulaire est un problème important pour des fins pratiques. Nous avons trouvé des expressions pour la pénétration "progressive" du courant dans un cylindre circulaire. Aussi, des résultats numériques ont été obtenus pour les champs électrique et magnétique à la surface, l'impédance de surface, le courant induit et les sections efficaces de diffusion et d'absorption.

Le calcul est fait aux basses et aux hautes fréquences. Nous avons comparé nos résultats avec ceux de Van Bladel, là où c'est possible, dans le cas d'un bon conducteur et à basse fréquence. Un bon accord est obtenu pour les sections efficaces de diffusion et d'absorption et, à δ/a petit, pour le courant induit. Nous avons calculé exactement le module du courant induit pour δ/a quelconque.

Pour des δ/a grands, le désaccord dans le module du courant induit vient du fait que Van Bladel a défini un bon conducteur comme celui qui réalise la condition $ka \cdot \delta/a \leq 0,45$. Mais cette condition n'est pas suffisante. Il faut arrêter le calcul quand la partie résistive de l'impédance de surface devient négative parce que les résultats obtenus ne sont plus physiques.

Pour les petits ka ($ka < 1$), on peut représenter les sections efficaces de diffusion et d'absorption par les deux premiers termes de leurs représentations sérielles comme cela a été fait par Van Bladel.

Les résultats numériques obtenus sont utiles en pratique comme, par exemple, dans la détection radar d'un objet conducteur de forme cylindrique entouré par un milieu diélectrique.

Ces résultats nous permettent d'étudier la perte du blindage au voisinage du centre du cylindre à la suite de l'augmentation de δ . Ils peuvent aussi servir de guide général pour des phénomènes analogues dans les cylindres de section similaire, elliptique, par exemple, de faible excentricité.

APPENDICE A

DÉVELOPPEMENT DE $e^{-ix \cos \varphi}$ DANS LA BASE DES FONCTIONS DE BESSEL

La fonction génératrice des fonctions de Bessel modifiées $I_n(x)$ s'écrit:

$$e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(x) t^n \quad (\text{A.1})$$

Posons $t = e^{-i\varphi}$, alors

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} &= e^{x \cos \varphi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(x) e^{-in\varphi} \\ &= I_0(x) + I_1(x) e^{-i\varphi} + I_{-1}(x) e^{i\varphi} + I_2(x) e^{2i\varphi} + I_{-2}(x) e^{-2i\varphi} + \dots \end{aligned}$$

or,

$$I_n(x) = I_{-n}(x) \quad (\text{A.2})$$

Alors,

$$\begin{aligned} e^{x \cos \varphi} &= I_0(x) + I_1(x)(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}) + I_2(x)(e^{-2i\varphi} + e^{2i\varphi}) + \dots \\ &= I_0(x) + 2I_1(x) \cos \varphi + 2I_2(x) \cos 2\varphi + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Remplaçons x par $-ix$ dans A.3, on obtient:

$$e^{-ix \cos \varphi} = I_0(-ix) + 2I_1(-ix) \cos \varphi + 2I_2(-ix) \cos 2\varphi + \dots \quad (\text{A.4})$$

On a aussi,

$$I_n(-ix) = i^{-n} J_n(x) \quad (\text{A.5})$$

Alors $e^{-ix \cos \varphi}$ devient:

$$\begin{aligned} e^{-ix \cos \varphi} &= J_0(x) - 2iJ_1(x) \cos \varphi - 2J_2(x) \cos 2\varphi + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n J_n(x) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où

$$\lambda_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2(-i)^n & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

APPENDICE B

LE CODE FORTRAN

Nous présentons ici le code Fortran qui calcule les champs électrique et magnétique à la surface, le courant induit et les sections efficaces de diffusion et d'absorption pour un objet cylindrique circulaire de longueur infinie et de conductivité quelconque. Toutes les quantités mentionnées peuvent être calculées à basse et haute fréquence. Les deux cas sont considérés : ondes E et H.

L'impédance de surface est calculée seulement dans le cas d'un bon conducteur dans les deux cas de polarisation. Le courant surfacique, pour l'onde H, est calculé pour un bon conducteur.

Dans le cas d'un bon conducteur γa et Q sont donnés par:

$$\gamma a = (1 - i)a/\delta$$

$$Q = (ka)^2 \cdot (\delta/a)^2/2$$

```
PROGRAM MASTER
C *****
C * Ce programme calcule plusieurs grandeurs physiques dans *
C * le cas d'un cylindre circulaire non magnétique aux basses *
C * et hautes fréquences dans le cas des ondes E et H. *
C *****
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
DIMENSION BES(501),FNEU(501),DBESR(501),DFNEU(501),CHAMPME(501),
+ CHAMPMH(501),CHAMPM(501),HMOD(501),EMOD(501)
```

```

COMPLEX*16 FHANK(501),CBES(501),DEHANK(501),DBESC(501),HPhi(501),
+ ALPHC(501),BETAC(501),ECHAMP(501),HCHAMP(501),GAMMAA,HRHO(501),
+ EPHI(501),ERHO(501),COUR11,ZETAC(501),XIC(501)
OPEN(3,FILE = 'data3.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(12,FILE = 'data4.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(15,FILE = 'data5.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(16,FILE = 'data6.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(17,FILE = 'data7.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(18,FILE = 'data8.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(19,FILE = 'data9.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(20,FILE = 'data10.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
OPEN(21,FILE = 'data11.dat',STATUS='UNKNOWN',ACCESS='SEQUENTIAL',
+ FORM='FORMATTED')
200 CONTINUE
PRINT *, 'ENTREZ UNE VALEUR DE  $ka$ ,  $\epsilon_r$ '
READ *, X, EPSR
D=0.1D0
C D =  $\delta/a$  est l'epaisseur de peau.
WRITE(3,227) X,EPSR
WRITE(12,227) X,EPSR
WRITE(15,227) X,EPSR
WRITE(16,228) X,EPSR
WRITE(17,228) X,EPSR
WRITE(18,228) X,EPSR
WRITE(19,227) X,EPSR
WRITE(20,227) X,EPSR
WRITE(21,228) X,EPSR
227 FORMAT(/,2X,'ka=',F8.4,3X,' $\epsilon_r$  =',F8.4,2X,'Onde E')
228 FORMAT(/,2X,'ka=',F8.4,3X,' $\epsilon_r$  =',F8.4,2X,'Onde H')
WRITE(3,216)
WRITE(12,219)
WRITE(15,320)
WRITE(16,321)
WRITE(17,322)
WRITE(18,260)
WRITE(19,261)
WRITE(20,266)
WRITE(21,267)
270 CONTINUE
FACT02=(X**2*D**2)*EPSR/2.0D0
FACT03=DSQRT(1.0D0+(EPSR*X**2*D**2))
Q=FACT02/FACT03

```

```

C      Q est le facteur de qualité du milieu
      FACT11=(1/2.0D0)*DSQRT(1+(1/(Q**2)))
      FACT12=DSQRT((1/2.0D0)+FACT11)
      ALPHAA=X*DSQRT(EPSR)*FACT12
      FACT13=2.0D0*Q*FACT12
      BETAA=-X*DSQRT(EPSR)/FACT13
      VER=1.0D0/BETAA
      TETA= DATAN2(BETAA,ALPHAA)
      TETA1=TETA*180.0D0/PI
      GAMMAA=DCMPLX(ALPHAA,BETAA)
C      GAMMAA = gamma*a est le nombre d'onde complexe.
      Y=CDABS(GAMMAA)
      CALL BESSEL(X,BES,NMAX)
      CALL FNEUMAN0(X,BES,NMAX,FNEU0)
      CALL FNEUMAN(X,BES,NMAX,FNEU0,FNEU)
      CALL FHANKEL(BES,NMAX,FNEU,FHANK)
      CALL CBESSEL(Y,CBES,NMAX1,TETA)
      CALL DERBESR(BES,NMAX,DBESR)
      CALL DERFNEU(FNEU,NMAX,DFNEU)
      CALL DERHANK(DBESR,DFNEU,NMAX,DEHANK)
      CALL DERBESC(CBES,NMAX1,DBESC)
      CALL ALPHA(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,ALPHC,
+      NMAX1,GAMMAA)
      CALL ZETA(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,
+      ZETAC,NMAX1,GAMMAA,Q)
      CALL BETA(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,BETAC,NMAX1,
+      GAMMAA)
      CALL XI(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,
+      XIC,NMAX1,GAMMAA,Q)
      CALL COURANT(X,BETAC(1),DBESC(1),COURANE,COUREMO,
+      GAMMAA,CBES(1),COUR11)
      CALL SECDIFF(X,ALPHC,ZETAC,SIGMAD,SIGMADH,NMAX,NMAX1,SIGM0,
+      SIGM1,SIGMADH0,SIGMADH1)
      CALL SECABS(X,CBES,DBESC,BETAC,XIC,SIGMAAE,SIGMAAH,NMAX,
+      NMAX1,Q,EPSR,GAMMAA,SIGE0,SIGE1,SIGH0,SIGH1)
      CALL CHAMPE(X,BES,FHANK,ALPHC,CBES,BETAC,NMAX1,NMAX,ECHAMP,
+      CHAMPME,HPhi,HRHO,DBESC,GAMMAA,HMOD)
      CALL CHAMPH(X,BES,FHANK,ZETAC,CBES,XIC,NMAX1,NMAX,HCHAMP,
+      EPSR,CHAMPMH,EPhi,ERHO,Q,GAMMAA,DBESC,EMOD)
      K=MIN(NMAX1+1,NMAX+1)
      WRITE(15,130)(TETA1,D,COUR11)
      WRITE(20,131)(D,SIGM0,SIGM1,SIGE0,SIGE1)
      WRITE(21,131)(D,SIGMADH0,SIGMADH1,SIGH0,SIGH1)
131  FORMAT(1X,F8.4,2X,D16.7,2X,D11.4,2X,D11.4,2X,D11.4)
320  FORMAT(/'TETA(EN DEG.)',4X,'D',15X,'I(E)',/)
321  FORMAT(/,2X,' $\sigma_{tH}^{dif}$ ',8X,' $\sigma_{tH}^{abs}$ ',5X,' $\delta/a$ ',/)
266  FORMAT(/,2X,' $\delta/a$ ',10X,' $\sigma_{0E}^{dif}$ ',8X,' $\sigma_{1E}^{dif}$ ',8X,' $\sigma_{0E}^{abs}$ ',10X,
*    ' $\sigma_{1E}^{abs}$ ',/)
267  FORMAT(/,2X,' $\delta/a$ ',7X,' $\sigma_{0H}^{dif}$ ',6X,' $\sigma_{1H}^{dif}$ ',6X,

```

```

      *      ' $\sigma_{0H}^{abs}$ ',8X,' $\sigma_{1H}^{abs}$ ',/)
260  FORMAT(/,1X,' $\varphi$ ',4X,'|Re(E)|(H)',7X,'COMP.TANG.DE E(H)',9X,
      *      'COMP.RAD.DE E(H)',5X,' $\delta/a$ ',/)
261  FORMAT(/,1X,' $\varphi$ ',4X,'|Re(H)|(E)',7X,'COMP.TANG.DE H(E)',9X,
      *      'COMP.RAD.DE H(E)',5X,' $\delta/a$ ',/)
      WRITE(18,323)(J-1,EMOD(J),EPHI(J),ERHO(J),D,J=1,181)
323  FORMAT(1X,I3,2X,D11.4,2X,D11.4,2X,D10.3,2X,D10.3
      *      ,2X,D10.3,1X,F8.3)
      WRITE(19,323)(J-1,HMOD(J),HPhi(J),HRHO(J),D,J=1,181)
130  FORMAT(F8.3,5X,F7.3,3X,D10.4,2X,D10.4,3X,D10.4,2X,D10.4)
      WRITE(12,127) (J-1,CHAMPME(J),ECHAMP(J),D,Q,J=1,181)
      WRITE(17,127) (J-1,CHAMPMH(J),HCHAMP(J),D,Q,J=1,181)
127  FORMAT(2X,I3,3X,D11.4,2X,D11.4,2X,D11.4,2X,F6.3,2X,F11.5)
      WRITE(3,215) COURANE,COUREMO,SIGMAD,SIGMAAE,D,Q
      WRITE(16,229)SIGMADH,SIGMAAH,D
229  FORMAT(D12.4,2X,D12.4,2X,F7.2)
216  FORMAT(/,2X,'|Re(I)|(E)',4X,'|I|(E)',6X,' $\sigma_{tE}^{dif}$ ',8X,
      *      ' $\sigma_{tE}^{abs}$ ',7X,' $\delta/a$ ',4X,'Q',/)
215  FORMAT(D12.4,2X,D12.4,2X,D16.7,2X,D12.4,2X,F7.2,2X,D9.4)
219  FORMAT(/,2X,' $\varphi$ ',4X,'|Re(E)|(E)',9X,'CHAMP ELECTRIQUE',5X,
      *      ' $\delta/a$ ',6X,'Q',/)
322  FORMAT(/,2X,' $\varphi$ ',4X,'|Re(H)|(H)',9X,'CHAMP MAGNETIQUE',5X,
      *      ' $\delta/a$ ',8X,'Q',/)
      D=D+0.1D0
      IF (D.GE.2.1D0) THEN
      D=D+1.9D0
      END IF
      IF (D.GT.40.1D0) GO TO 333
      GO TO 270
333  CONTINUE
      PRINT*, 'MORE (0=NO,1=YES)?'
      READ*, REPONSE
      IF (REPONSE.NE.0) GO TO 200
      CLOSE(3)
      CLOSE(12)
      CLOSE(15)
      CLOSE(16)
      CLOSE(17)
      CLOSE(18)
      CLOSE(19)
      CLOSE(20)
      CLOSE(21)
      END
C      *****
C      * Calcul des fonctions de Bessel d'argument x et d'ordre      *
C      * n=0,1,2..nmax-1. Noter que Bes(1) correspond à l'ordre 0      *
C      *****
      SUBROUTINE BESSEL (X,BES,NMAX)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION BES(501),B(503)

```

```

DO 002 I=1, 503
  B(I)=0.0D0
002  CONTINUE
      NMAX=6
      IF (X.LT.1.D-20) GO TO 008
      IF (X.GE.0.001D0) NMAX=6+400*X
      IF (X.GE.0.010D0) NMAX=8+20*X
      IF (X.GE.0.100D0) NMAX=9+14*X
      IF (X.GE.1.000D0) NMAX=21+2*X
      IF (X.GE.5.000D0) NMAX=23+1.6*X
      IF (X.GE.30.00D0) NMAX=32+1.3*X
      IF (X.GE.100.0D0) NMAX=47+1.15*X
      K=NMAX+2
003  B(K+2)=0.0D0
      B(K+1)=1.0D0
      DO 004 I=1,K
        B(I)=0.0D0
004  CONTINUE
      DO 005 I=1,K
        II=-I
        B(K+II+1)=2.0D0*(K+II+1)*B(K+II+2)/X - B(K+II+3)
005  CONTINUE
      SUM=B(1)
      DO 006 I=1, K/2
        SUM=SUM+2.0D0*B(2*I+1)
006  CONTINUE
      DO 007 I=1,K
        BES(I)=B(I)/SUM
007  CONTINUE
      GO TO 010
008  BES(1)=1.0D0
      DO 009 I=2,K
        BES(I)=0.0D0
009  CONTINUE
010  CONTINUE
      RETURN
      END
C *****
C * Calcul de la fonction de Neumann d'ordre 0. *
C *****
SUBROUTINE FNEUMAN0(X,BES,NMAX,FNEU0)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION BES(501)
PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0,PUN=0.5772156649015329D0)
K=NMAX+2
A=2.0D0/PI
BD=DLOG(X/2.0D0)+PUN
CD=A*BD*BES(1)
SUM1=0.0D0
DO 015 I=1,K

```

```

      FD=(-1)**I*BES(2*I+1)/I
      SUM1 = SUM1+FD
015  CONTINUE
      PD=(4.0D0/PI)*SUM1
      FNEU0=CD-PD
      RETURN
      END
C *****
C * Calcul des fonctions de Neumann à argument réel. *
C *****
      SUBROUTINE FNEUMAN(X,BES,NMAX,FNEU0,FNEU)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION BES(501),FNEU(501)
      PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
      FNEU(1)=FNEU0
      FNEU(2)=(BES(2)*FNEU(1)-2.0D0/(PI*X))/BES(1)
      K=NMAX+2
      DO 020 I=3,K
020  FNEU(I)=(2.0D0*(I-2)/X)*FNEU(I-1)-FNEU(I-2)
      CONTINUE
      RETURN
      END
C *****
C * Calcul des fonctions de Hankel à argument réel. *
C *****
      SUBROUTINE FHANKEL(BES,NMAX,FNEU,FHANK)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION BES(501),FNEU(501)
      COMPLEX*16 FHANK(501)
      K=NMAX+2
      DO 025 I=1,K
025  FHANK(I)=DCMPLX(BES(I),-FNEU(I))
      CONTINUE
      RETURN
      END
C *****
C * Calcul des fonctions de Bessel à argument complexe. *
C *****
      SUBROUTINE CBESSEL(Y,CBES,NMAX1,TETA)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMPLEX*16 CBES(501),CB(503),SUM,FACT
      CC1=DCOS(TETA)
      CC2=-DSIN(TETA)
      FACT=DCMPLX(CC1,CC2)
      DO 030 I=1,503
030  CB(I)=(0.0D0,0.0D0)
      CONTINUE
      NMAX1=6
      IF (Y.LT.1.D-20) GO TO 080

```



```

IF (Y.GE.0.001D0) NMAX1=6+400*Y
IF (Y.GE.0.010D0) NMAX1=8+20*Y
IF (Y.GE.0.100D0) NMAX1=9+14*Y
IF (Y.GE.1.000D0) NMAX1=21+2*Y
IF (Y.GE.5.000D0) NMAX1=23+1.6*Y
IF (Y.GE.30.00D0) NMAX1=32+1.3*Y
IF (Y.GE.100.0D0) NMAX1=47+1.15*Y
L=NMAX1+2
CB(L+2)=(0.0D0,0.0D0)
CB(L+1)=(1.0D0,0.0D0)
DO 040 I=1,L
CB(I)=(0.0D0,0.0D0)
040 CONTINUE
DO 050 I=1,L
II=-I
CB(L+II+1)=2.0D0*(L+II+1)*FACT*CB(L+II+2)/Y-CB(L+II+3)
050 CONTINUE
SUM=CB(1)
DO 060 I=1,L/2
SUM=SUM+2.0D0*CB(2*I+1)
060 CONTINUE
DO 070 I=1,L
CBES(I)=CB(I)/SUM
070 CONTINUE
GO TO 090
080 CBES(1)=(1.0D0,0.0D0)
DO 011 I=2,L
CBES(I)=0.0D0
011 CONTINUE
090 CONTINUE
RETURN
END
C *****
C * Calcul de la dérivée des fonctions de Bessel à argument réel. *
C *****
SUBROUTINE DERBESR(BES,NMAX,DBESR)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION BES(501),DBESR(501)
DBESR(1)=-BES(2)
DO 122 I=2,NMAX
DBESR(I)=(1.0D0/2.0D0)*(BES(I-1)-BES(I+1))
122 CONTINUE
RETURN
END
C *****
C * Calcul de la dérivée des fonctions de Neumann à argument réel. *
C *****
SUBROUTINE DERFNEU (FNEU,NMAX,DFNEU)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION FNEU(501),DFNEU(501)

```

```

      DFNEU(1)=-FNEU(2)
      DO 133 I=2,NMAX
      DFNEU(I)=(1.0D0/2.0D0)*(FNEU(I-1)-FNEU(I+1))
133    CONTINUE
      RETURN
      END
C      *****
C      * Calcul de la dérivée des fonctions de Hankel à argument réel.      *
C      *****
      SUBROUTINE DERHANK(DBESR,DFNEU,NMAX,DEHANK)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION DBESR(501),DFNEU(501)
      COMPLEX*16 DEHANK(501)
      DO 144 I=1,NMAX
      DEHANK(I)=DCMPLX(DBESR(I),-DFNEU(I))
144    CONTINUE
      RETURN
      END
C      *****
C      *Calcul de la dérivée des fonctions de Bessel à argument complexe.      *
C      *****
      SUBROUTINE DERBESC(CBES,NMAX1,DBESC)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMPLEX*16 CBES(501),DBESC(501)
      DBESC(1)=-CBES(2)
      DO 155 I=2,NMAX1
      DBESC(I)=(1.0D0/2.0D0)*(CBES(I-1)-CBES(I+1))
155    CONTINUE
      RETURN
      END
C      *****
C      *Calcul des coefficients  $\alpha_n$  dans le cas de l'onde E      *
C      *****
      SUBROUTINE ALPHA(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,
+    ALPHC,NMAX1,GAMMAA)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION BES(501),DBESR(501)
      COMPLEX*16 CBES(501),DBESC(501),FHANK(501),DEHANK(501),
+    FACT,FACT1,ALPHC(501),ANUM,DENUM,GAMMAA
      PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
      FACT1=(0.0D0,1.0D0)
      ANUM=GAMMAA*BES(1)*CBES(2)-X*CBES(1)*BES(2)
      DENUM=GAMMAA*FHANK(1)*CBES(2)-X*CBES(1)*FHANK(2)
      ALPHC(1)=-ANUM/DENUM
      K=MIN(NMAX,NMAX1)
      DO 166 I=2,K
      ANUM=X*CBES(I)*DBESR(I)-GAMMAA*BES(I)*DBESC(I)
      DENUM=GAMMAA*DBESC(I)*FHANK(I)-X*CBES(I)*DEHANK(I)
      ALPHC(I)=(2.0D0/(FACT1**(I-1)))*ANUM/DENUM
166    CONTINUE

```

```

      RETURN
      END
C *****
C *Calcul des coefficients  $\zeta_n$  dans le cas de l'onde H *
C *****
      SUBROUTINE ZETA(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,
+ ZETAC,NMAX1,GAMMAA,Q)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION BES(501),DBESR(501)
      COMPLEX*16 CBES(501),DBESC(501),FHANK(501),DEHANK(501),
+ FACT,FACT1,ZETAC(501),ANUM,DENUM,GAMMAA,FACT2,FACT3
      PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
      FACT2=DCMPLX(1.0D0,Q)
      FACT1=(0.0D0,1.0D0)
      FACT3=FACT1/FACT2
      ANUM=-GAMMAA*Q*FACT3*BES(1)*CBES(2)+X*CBES(1)*BES(2)
      DENUM=-GAMMAA*Q*FACT3*FHANK(1)*CBES(2)+X*CBES(1)*FHANK(2)
      ZETAC(1)=ANUM/DENUM
      K=MIN(NMAX,NMAX1)
      DO 166 I=2,K
      ANUM=X*CBES(I)*DBESR(I)-GAMMAA*Q*FACT3*BES(I)*DBESC(I)
      DENUM=GAMMAA*Q*FACT3*DBESC(I)*FHANK(I)-X*CBES(I)*DEHANK(I)
      ZETAC(I)=(2.0D0/(FACT1**(I-1)))*ANUM/DENUM
166  CONTINUE
      RETURN
      END
C *****
C * Calcul des coefficients  $\beta_n$  dans le cas de l'onde E *
C *****
      SUBROUTINE BETA(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,
+ BETAC,NMAX1,GAMMAA)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION BES(501),DBESR(501)
      COMPLEX*16 CBES(501),DBESC(501),FHANK(501),DEHANK(501),
+ FACT,FACT1,FACT2,BETAC(501),GAMMAA,DENUM
      PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
      FACT1=(0.0D0,1.0D0)
      K=MIN(NMAX1,NMAX)
      DENUM=GAMMAA*FHANK(1)*CBES(2)-X*CBES(1)*FHANK(2)
      BETAC(1)=(-2*FACT1/PI)/DENUM
      DO 177 I=2,K
      FACT2=(4.0D0/(FACT1**(I-2)))/PI
      DENUM=GAMMAA*FHANK(I)*DBESC(I)-X*CBES(I)*DEHANK(I)
      BETAC(I)=FACT2/DENUM
177  CONTINUE
      RETURN
      END
C *****
C *Calcul des coefficients  $\xi_n$  dans le cas de l'onde H *
C *****

```

```

SUBROUTINE XI(X,BES,DBESR,CBES,DBESC,FHANK,DEHANK,NMAX,
+ XIC,NMAX1,GAMMAA,Q)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION BES(501),DBESR(501)
COMPLEX*16 CBES(501),DBESC(501),FHANK(501),DEHANK(501),
+ FACT4,FACT3,FACT,FACT1,FACT2,XIC(501),GAMMAA,DENUM
PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
FACT1=(0.0D0,1.0D0)
FACT3=DCMPLX(1.0D0,Q)
FACT4=1.0D0/FACT3
K=MIN(NMAX1,NMAX)
DENUM=GAMMAA*Q*FACT4*FHANK(1)*CBES(2)+FACT1*X*CBES(1)*FHANK(2)
XIC(1)=(-2.0D0/PI)/DENUM
DO 177 I=2,K
FACT2=(4.0D0/(FACT1**(I-1)))/PI
DENUM=GAMMAA*Q*FACT4*FHANK(I)*DBESC(I)+FACT1*X*CBES(I)*DEHANK(I)
XIC(I)=FACT2/DENUM
177 CONTINUE
RETURN
END
C *****
C * Calcul du courant total induit dans le cylindre dans le cas de l'onde E*
C *****
SUBROUTINE COURANT(X,BETAC,DBESC,COURANE,COUREMO,GAMMAA,CBES,
* COUR11)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMPLEX*16 COUR1,BETAC,DBESC,GAMMAA,FACT,FACT1,CBES,COUR11
PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
FACT1=(0.0D0,-1.0D0)
C CALCUL DU COURANT TOTAL INDUIT(ONDE E ) DANS LE CYLINDRE NORMALISE
C PAR RC/AA
COUR1=(GAMMAA/X)*FACT1*BETAC*DBESC
COUR11=2.0D0*PI*COUR1
COURANE=2.0D0*PI*DABS(DREAL(COUR1))
COUREMO=2.0D0*PI*CDABS(COUR1)
RETURN
END
C *****
C *Calcul de la section efficace de diffusion dans le cas de l'onde E *
C *et l'onde H *
C *****
SUBROUTINE SECDDIFF(X,ALPHC,ZETAC,SIGMAD,SIGMADH,NMAX,NMAX1,SIGM0
* ,SIGM1,SIGMADH0,SIGMADH1)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMPLEX*16 ALPHC(501),ZETAC(501)
K=MIN(NMAX1,NMAX)
SUM=(CDABS(ALPHC(1)))**2
SUM1=(CDABS(ZETAC(1)))**2
DO 188 I=2,K
SUM=SUM+(1.0D0/2.0D0)*(CDABS(ALPHC(I)))**2

```

```

SUM1=SUM1+(1.0D0/2.0D0)*(CDABS(ZETAC(1)))**2
188 CONTINUE
SIGMAD=(4.0D0/X)*SUM
SIGMADH=(4.0D0/X)*SUM1
SIGM0=(4.0D0/X)*(CDABS(ALPHC(1)))**2
SIGM1=(2.0D0/X)*(CDABS(ALPHC(2)))**2
SIGMADH0=(4.0D0/X)*(CDABS(ZETAC(1)))**2
SIGMADH1=(2.0D0/X)*(CDABS(ZETAC(2)))**2
RETURN
END
C *****
C *Calcul de la section efficace d'absorption dans le cas de l'onde *
C *E et l'onde H. *
C *****
* SUBROUTINE SECABS(X,CBES,DBESC,BETAC,XIC,SIGMAAE,SIGMAAH,
+ NMAX,NMAX1,Q,EPSR,GAMMAA,SIGE0,SIGE1,SIGH0,SIGH1)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMPLEX*16 CBES(501),DBESC(501),BETAC(501),GAMMAA,FACT1,FACT77
+ FACT66,XIC(501),SUM,SUM1,FACT2,FACT3,FACT4,FACT,FACT12,FACT13
C CALCUL DE LA SECTION EFFICACE D'ABSORBTION DIVISEE PAR A.
PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
FACT1=(0.0D0,1.0D0)
FACT5=1.0D0/2.0D0
FACT12=DCMPLX(1.0D0,Q)
K=MIN(NMAX+1,NMAX1+1)
FACT=(CDABS(BETAC(1)))**2
FACT66=(CDABS(XIC(1)))**2
FACT77=(CDABS(XIC(2)))**2
SUM=FACT*CBES(1)*DCONJG(DBESC(1))
SUM1=FACT66*DBESC(1)*DCONJG(CBES(1))
DO 199 I=2,K
SUM=SUM+FACT5*(CDABS(BETAC(I)))**2*CBES(I)*DCONJG(DBESC(I))
199 CONTINUE
C Section efficace totale d'absorption (onde E)  $\sigma_{iE}^{abs}/a$ 
SIGMAAE=(2.0D0*PI/X)*DREAL(FACT1*DCONJG(GAMMAA)*SUM)
FD=2.0D0*PI/X
C Section efficace d'absorption (onde E)  $\sigma_{0E}^{abs}/a$  pour n=0
SIGE0=FD*DREAL(FACT1*DCONJG(GAMMAA)*FACT*CBES(1)*DCONJG(DBESC(1))
FACT3=(CDABS(BETAC(2)))**2
FACT4=(1.0D0/2.0D0)*FACT1*DCONJG(GAMMAA)
C Section efficace d'absorption (onde E)  $\sigma_{1E}^{abs}/a$  pour n=1
SIGE1=FD*DREAL(FACT4*FACT3*CBES(2)*DCONJG(DBESC(2)))
DO 188 I=2,K
SUM1=SUM1+FACT5*(CDABS(XIC(I)))**2*DBESC(I)*DCONJG(CBES(I))
188 CONTINUE
FACT13=(GAMMAA/FACT12)*SUM1
C Section efficace totale d'absorption (onde H)  $\sigma_{iH}^{abs}/a$ 
SIGMAAH=(2.0D0*PI*Q/(X*EPSR))*DREAL(FACT13)
FD1=2.0D0*PI*Q/(X*EPSR)
FD2=PI*Q/(X*EPSR)

```

```

C      Section efficace d'absorption (onde H)  $\sigma_{0H}^{abs}/a$  pour n=0
      SIGH0=FD1*DREAL(GAMMAA*FACT66*DBESC(1)*DCONJG(CBES(1))/(FACT12))
      SIGH1=FD2*DREAL(GAMMAA*FACT77*DBESC(2)*DCONJG(CBES(2))/(FACT12))
      RETURN
      END
C      *****
C      *Calcul du champ électrique, de son module, et du module de la      *
C      * partie réelle du champ magnétique à la surface du cylindre      *
C      * pour l'onde E.                                                    *
C      *****
      SUBROUTINE CHAMPE(X,BES,FHANK,ALPHC,CBES,BETAC,NMAX1,NMAX,ECHAMP,
*      CHAMPME,HPhi,HRHO,DBESC,GAMMAA,HMOD)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMPLEX*16 CBES(501),BETAC(501),ECHAMP(501),SUM,FHANK(501),SUM1,
*      SUM2,ALPHC(501),E0,E1,FACT,HPhi(501),
*      HRHO(501),DBESC(501),GAMMAA
      DIMENSION BES(501),CHAMPME(501),HMOD(501),HPhi1(501),HPhi11(501),
*      HRHO1(501),HRHO11(501)
      PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
      FACT=(0.0D0,-1.0D0)
C      E0 est le champ électrique pour n=0
      E0=BES(1)+ALPHC(1)*FHANK(1)
C      E1 est le champ électrique pour n=1
      E1=2*FACT*BES(2)+ALPHC(2)*FHANK(2)
      K=MIN(NMAX1,NMAX)
      DA=1.D0
      DANGLE=0.D0
      J=1
138      CONTINUE
      SUM=(0.0D0,0.0D0)
      SUM1=(0.0D0,0.0D0)
      SUM2=(0.0D0,0.0D0)
      DO 137 I=1,K
      DANG=(DANGLE*PI/180.D0)*(I-1)
      SUM=SUM+BETAC(I)*CBES(I)*DCOS(DANG)
      SUM1=SUM1+BETAC(I)*DBESC(I)*DCOS(DANG)
      SUM2=SUM2+(I-1)*BETAC(I)*CBES(I)*DSIN(DANG)
137      CONTINUE
      ECHAMP(J)=SUM
C      La composante du champ magnétique suivant  $\mathbf{u}_\varphi(H_\varphi * Z_0/a)$ 
      HPhi(J)=((FACT*GAMMAA)/X)*SUM1
      HPhi1(J)=DREAL(HPhi(J))
      HPhi11(J)=(DABS(HPhi1(J)))**2
C      La composante du champ magnétique suivant  $\mathbf{u}_r(H_r * Z_0/a)$ 
      HRHO(J)=(FACT/X)*SUM2
      HRHO1(J)=DREAL(HRHO(J))
      HRHO11(J)=(DABS(HRHO1(J)))**2
C      HMOD est le module de la partie réelle du champ H de l'onde E
      HMOD(J)=DSQRT(HPhi11(J)+HRHO11(J))
C      CHAMPME(J) est le module de la partie réelle du champ électrique pour l'onde E

```

```

CHAMPME(J)=DABS(DREAL(ECHAMP(J)))
DANGLE=DANGLE+DA
IF(DANGLE.GT.180.D0) GO TO 139
J=J+1
GO TO 138
139 CONTINUE
RETURN
END
C *****
C *Calcul du champ magnétique, de son module et du module de la *
C * partie réelle du champ électrique à la surface du *
C * cylindre pour l'onde H. *
C *****
SUBROUTINE CHAMPH(X,BES,FHANK,ZETAC,CBES,XIC,NMAX1,NMAX,
* HCHAMP,EPSR,CHAMPMH,EPHI,ERHO,Q,GAMMAA,DBESC,EMOD)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMPLEX*16 CBES(501),XIC(501),HCHAMP(501),SUM,FHANK(501),
* SS1,ZETAC(501),EPHI(501),ERHO(501),SUM1,SUM2,FACT,DBESC(501)
* ,GAMMAA
DIMENSION BES(501),CHAMPMH(501),EMOD(501),ERHO1(501),ERHO11(501)
* ,EPHI1(501),EPHI11(501)
PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
FACT=(0.0D0,1.0D0)
K=MIN(NMAX1,NMAX)
SS1=DCMPLX(1/Q,1.0D0)
DA=1.0D0
DANGLE=0.D0
J=1
141 CONTINUE
SUM=(0.0D0,0.0D0)
SUM1=(0.0D0,0.0D0)
SUM2=(0.0D0,0.0D0)
DO 142 I=1,K
DANG=(DANGLE*PI/180.D0)*(I-1)
SUM=SUM+XIC(I)*CBES(I)*DCOS(DANG)
SUM1=SUM1+(I-1)*XIC(I)*CBES(I)*DSIN(DANG)
SUM2=SUM2+XIC(I)*DBESC(I)*DCOS(DANG)
142 CONTINUE
C La composante tangentielle du champ électrique ( $E_\varphi * Y_0/B$ )
EPHI(J)=-(GAMMAA/(EPSR*X*SS1))*SUM2
EPHI1(J)=DREAL(EPHI(J))
EPHI11(J)=(DABS(EPHI1(J)))**2
C La composante radiale du champ électrique ( $E_r * Y_0/B$ )
ERHO(J)=(-1/(EPSR*X*SS1))*SUM1
ERHO1(J)=DREAL(ERHO(J))
ERHO11(J)=(DABS(ERHO1(J)))**2
C Module de la partie réelle du champ électrique pour l'onde H EMOD(J)
EMOD(J)=DSQRT(EPHI11(J)+ERHO11(J))
HCHAMP(J)=SUM
C Module du partie réelle de champ magnétique pour l'onde H CHAMPMH(J)

```

```

CHAMPMH(J)=DABS(DREAL(HCHAMP(J)))
DANGLE=DANGLE+DA
IF(DANGLE.GT.180.D0) GO TO 140
J=J+1
GO TO 141
140 CONTINUE
RETURN
END

```

Pour un bon conducteur, nous présentons ici les parties concernant l'impédance de surface pour les ondes E et H ainsi que la sous-routine qui calcule le courant surfacique dans le cas de l'onde H :

```

C *****
C *****
C * Cette partie du programme principal calcule l'impédance de *
C * surface vs l'angle azimutal  $\varphi$  pour un bon conducteur *
C * dans le cas de l'onde H *
C *****
C *****
C
FACT=(1.0D0,-1.0D0)
DA=1.0D0
DANGLE=0.0D0
J=1
232 CONTINUE
SUM=(0.0D0,0.0D0)
SUM1=(0.0D0,0.0D0)
DO 233 I=1,K
DANG=(DANGLE*PI/180.0D0)*(I-1)
SUM=SUM+BETACH(I)*CBES(I)*DCOS(DANG)
SUM1=SUM1+BETACH(I)*DBESC(I)*DCOS(DANG)
233 CONTINUE
SURIMPC=FACT*(SUM1/SUM)
SURIMP(J)=DSQRT(Q/2.0D0)*SURIMPC
SIMP(J)=DSQRT(Q/2.0D0)*CDABS(SURIMPC)
REA(J)=DREAL(SURIMP(J))
IF(REA(J).LT.0.D0) GO TO 333
IF(DANGLE.GT.180.D0) GO TO 222
DANGLE=DANGLE+DA
J=J+1
GO TO 232
222 CONTINUE
C *****
C * Cette partie du programme principal calcule l'impédance de *
C * surface vs l'angle azimutal  $\varphi$  pour un bon conducteur *
C * dans le cas de l'onde E *
C *****
C *****

```



```

FACT=(1.0D0,1.0D0)
FACT1=(0.0D0,1.0D0)
DA=1.0D0
DANGLE=0.0D0
J=1
232  CONTINUE
      SUM=(0.D0,0.0D0)
      SUM1=(0.0D0,0.0D0)
      DO 233 I=1,K
        DANG=(DANGLE*PI/180.0D0)*(I-1)
        SUM=SUM+BETAC(I)*CBES(I)*DCOS(DANG)
        SUM1=SUM1+BETAC(I)*DBESC(I)*DCOS(DANG)
233  CONTINUE
      SURIMPC=FACT*FACT1*(SUM/SUM1)
      SURIMP(J)=DSQRT(Q/2.0D0)*SURIMPC
      SIMP(J)=DSQRT(Q/2.0D0)*CDABS(SURIMPC)
      REA(J)=DREAL(SURIMP(J))
      IF(REA(J).LT.0.D0) GO TO 333
      IF(DANGLE.GT.180.D0) GO TO 222
      DANGLE=DANGLE+DA
      J=J+1
      GO TO 232
222  CONTINUE
C      *****
C      *Sous-routine qui calcule le courant surfacique pour un bon      *
C      *conducteur dans le cas de l'onde H                            *
C      *****
      SUBROUTINE COURANT(BETACH,CBES,COURAN,COURMO)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMPLEX*16 COUR,BETACH,CBES
      PARAMETER (PI=3.141592653589793238D0)
      COUR=BETACH*CBES
      COURAN=(2.0d0*PI)*dabs(DREAL(COUR))
      COURMO=(2.0d0*PI)*CDABS(COUR)
      RETURN
      END

```

LISTE DES RÉFÉRENCES

- [1] Van Bladel, J. 1985. - *Electromagnetic fields*, revised printing. Washington, DC: Hemisphere Publ. Co., p. 304, 368, 380.
- [2] Matthaei, G. L., Kiziloglu, K., Dagli, N., and Long, S.I. 1990. - "*The nature of the charges, currents, and fields in and about conductors having cross-sectional dimensions of the order of a skin-depth*", *IEEE Trans. Microwave Theory Technol.*, vol. 38, 1031-1035.
- [3] Kaden, H. 1959. - *Wirbelströme und schirmung in der nachrichtentechnik*, Berlin: Springer, p. 13
- [4] Kaden, H. 1970. - *Wirbelstromverluste in leitern elliptischen querschnitts* Archiv. El. Übertragung, vol.24, p. 317-322
- [5] Rolicz, P. 1985. - *Eddy currents generated in a elliptic conductor by a transverse alternating magnetic field*, Archiv. für elektrotechnik, vol. 68, p. 423-431
- [6] Curriss C. J. 1965. - *Field and wave electrodynamics*, Mc Graw-Hill.
- [7] Jackson, J. D. 1963. - *Classical Electrodynamics*, second edition (New York: Wiley).
- [8] Boyer, T. H. 1974. - *Penetration of the electric and magnetic velocity fields of a nonrelativistic point charge into a conducting plane*, *Physical Review A*, vol. 9, 68.
- [9] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. 1960. - *Electrodynamics of continuous media*. Oxford: Pergamon-Addison-Wesley, 186-195.
- [10] Lorrain, P. et Corson D. R. 1979. - *Champs et ondes électromagnétiques*, Librairie Armand Colin, Paris, 495.

- [11] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1965. - *Handbook of mathematical functions.*, New York: Dover Publications, Inc., p 390-433.
- [12] Van Bladel, J. 1995. - *Penetration of a low-frequency E-wave into a conducting circular cylinder*, IEEE transactions on electromagnetic compatibility, vol. 37, n° 4.
- [13] Van Bladel, J. 1995. - *Penetration of a low-frequency H-wave into a conducting circular cylinder*, IEEE transactions on electromagnetic compatibility, vol. 38, n° 3.