

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE ES SCIENCES (PHYSIQUE)

PAR  
NICOLE PEPIN

DISCONTINUITÉS DANS LES GUIDES  
CYLINDRIQUES ET RECTANGULAIRES

MAI 2002

2128

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

# Résumé

Les discontinuités dans les guides d'onde de forme diverse et leurs applications ont fait l'objet de nombreuses études. Plusieurs approches ont été utilisées et ce, dans différents contextes dans le but d'obtenir la configuration des champs électrique et magnétique associés. L'analyse par modes des jonctions dans les guides rectangulaires à l'aide des potentiels de Hertz décrite dans l'article de Patzelt et Arndt [30] en est un exemple.

Ce travail présente une étude des discontinuités dans les guides d'onde métalliques de forme cylindrique et rectangulaire. On considère des ondes transmises en mode transversal magnétique dans le domaine des hyperfréquences. Les solutions aux discontinuités sont obtenues grâce à l'application d'une méthode d'adaptation des modes. Le développement des modes normaux de propagation permet d'obtenir l'amplitude des modes transmis  $A_i$  et réfléchis  $B_i$  en tenant compte des modes d'ordre supérieur. La construction de matrices de transmission ou de diffusion [8, p. 79], mettant en relation les ondes transmises et réfléchies, facilite la résolution des équations linéaires correspondantes.

Cette approche, basée sur l'application des conditions de continuité aux jonctions des guides, démontre une certaine simplicité et une flexibilité devenant dès lors relativement facile à programmer en utilisant un logiciel comme Maple V. Ainsi, les jonctions dans des guides cylindriques et rectangulaires métalliques de dimensions croissantes et décroissantes sont étudiées. Les axes des guides cylindriques coïncident

et le développement de part et d'autre des jonctions est effectué dans ce cas en considérant le même nombre de modes. Dans l'analyse des jonctions des guides rectangulaires, les axes ne coïncident pas nécessairement et le développement de part et d'autre des jonctions est fait en choisissant un nombre de modes qui diffère.

L'amplitude des modes transmis  $Ad_i$  au dernier guide et celle des modes réfléchis  $Bg_i$  au premier guide sont calculées dans des systèmes à une et plusieurs jonctions. Les résultats des essais effectués avec la programmation du logiciel Maple V sont présentés et font l'objet d'une analyse. Les résultats sont encourageants dans le cas des systèmes à une seule discontinuité, et pourraient sans doute être améliorés dans le cas des systèmes à plusieurs jonctions.

# Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de recherche Monsieur Louis Marchildon pour sa disponibilité et sa patience sans limite. Grâce à sa générosité dans le partage de ses connaissances, il m'a permis, durant ces années d'avancer dans le domaine de la physique et aussi au niveau personnel. Je lui suis très reconnaissante de la confiance qu'il m'a témoignée.

Je souhaite également remercier toutes les personnes qui m'ont soutenue et qui m'ont encouragée dans la réalisation de ce travail. Mon conjoint, qui a fait tout ce qu'il fallait pour me permettre de concilier travail et études à plein temps. Mes proches et amis qui m'ont conseillée et qui ont surtout respecté l'isolement nécessaire à la réalisation de ce projet.

*À ma mère, à Pierre M.*

# Table des matières

Résumé	ii
Remerciements	iv
<b>1 INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1 Guides d'onde . . . . .	1
1.2 Discontinuités dans les guides . . . . .	3
1.2.1 Méthode générale . . . . .	4
1.2.2 Méthodes des éléments de frontière et finis . . . . .	5
1.2.3 Méthode des puissances complexes . . . . .	6
1.2.4 Autres méthodes . . . . .	6
1.3 Objectif et méthodologie de recherche . . . . .	7
<b>2 Guides cylindriques</b>	<b>9</b>
2.1 Équation d'onde pour $E_z$ . . . . .	10
2.2 Discontinuité pour $R_1 < R_2$ . . . . .	11
2.2.1 Conditions sur le plan $z = \bar{z}$ . . . . .	13
2.3 Discontinuité pour $R_1 > R_2$ . . . . .	16
2.3.1 Conditions sur le plan $z = \bar{z}$ . . . . .	17
2.4 Solution . . . . .	18
2.4.1 Développement des séries pour $R_1 < R_2$ . . . . .	18

2.4.2	Construction des matrices des coefficients . . . . .	22
2.4.3	Matrices pour $R_1 > R_2$ . . . . .	24
2.4.4	Multiples jonctions . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Guides rectangulaires</b>	<b>28</b>
3.1	Équation d'onde pour $E_z$ . . . . .	29
3.2	Discontinuité pour $b_1 < b_2$ . . . . .	30
3.2.1	Conditions sur le plan $z = \bar{z}$ . . . . .	32
3.3	Discontinuité pour $b_1 > b_2$ . . . . .	35
3.3.1	Conditions sur le plan $z = \bar{z}$ . . . . .	36
3.4	Solution . . . . .	37
3.4.1	Développement des séries pour $b_1 < b_2$ . . . . .	38
3.4.2	Construction des matrices des coefficients . . . . .	42
3.4.3	Matrices pour $b_1 > b_2$ . . . . .	45
3.4.4	Multiples jonctions . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Résultats et Analyse</b>	<b>48</b>
4.1	Guides cylindriques . . . . .	48
4.2	Guides rectangulaires . . . . .	58
4.3	Discussion . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>72</b>
<b>A</b>	<b>Programme pour les guides cylindriques</b>	<b>74</b>
A.1	Zéros des fonctions de Bessel . . . . .	74
A.2	Variables d'entrée . . . . .	75
A.3	Matrices des $k$ et des $IntA$ . . . . .	76
A.4	Matrices <i>zoneg</i> et <i>zoned</i> . . . . .	77
A.4.1	$R_1 < R_2$ . . . . .	77

A.4.2	$R_1 > R_2$ . . . . .	79
A.5	Multiplication des <i>zonef</i> . . . . .	81
A.6	Formation des sous-matrices dans <i>Coefficient</i> . . . . .	82
A.6.1	Sous-matrices <i>C</i> . . . . .	82
A.6.2	Solution pour les <i>Ad</i> et <i>Bg</i> . . . . .	83
<b>B</b>	<b>Programme pour les guides rectangulaires</b>	<b>84</b>
B.1	Variables d'entrée . . . . .	84
B.2	Matrices <i>k</i> et <i>IntA</i> . . . . .	85
B.3	Matrices <i>zoneg..</i> et <i>zoned..</i> . . . . .	87
B.3.1	$b_1 < b_2$ . . . . .	87
B.3.2	$b_1 > b_2$ . . . . .	89
B.4	Formation des sous-matrices <i>C..</i> et <i>D..</i> . . . . .	90
B.4.1	Matrices <i>C..</i> , <i>D..</i> , <i>CDC</i> . . . . .	90
B.4.2	Solution pour les <i>Ad</i> et <i>Bg</i> . . . . .	91
	<b>Bibliographie</b>	<b>94</b>



# Liste des figures

1.1	Guide d'onde métallique creux. . . . .	2
1.2	Guides d'onde métalliques. . . . .	2
2.1	Discontinuité pour $R_1 < R_2$ . . . . .	11
2.2	Discontinuité pour $R_1 > R_2$ . . . . .	16
2.3	Organigramme du calcul des coefficients $A_i$ et $B_i$ . . . . .	19
2.4	Multiples jonctions, $R_i$ croissants . . . . .	26
3.1	Guide rectangulaire . . . . .	28
3.2	Discontinuité pour $b_1 < b_2$ . . . . .	30
3.3	Discontinuité pour $b_1 > b_2$ . . . . .	35
3.4	Organigramme du calcul des coefficients $A_i$ et $B_i$ dans les guides rectangulaires . . . . .	39
3.5	Multiples jonctions . . . . .	46

# Liste des tableaux

4.1	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-12}$ ).	50
4.2	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-9}$ ).	50
4.3	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour $Ag_1 = 1$ .	52
4.4	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour $Ag_1 = 1$ .	52
4.5	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour $Ag_2 = 1$ .	53
4.6	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour $Ag_2 = 1$ .	53
4.7	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour $Ag_3 = 1$ .	54
4.8	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour $Ag_3 = 1$ .	54
4.9	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des jonctions.	56
4.10	Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des jonctions.	56

4.11 Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des jonctions. Deuxième essai. . . . .	57
4.12 Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des jonctions. Deuxième essai. . . . .	57
4.13 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-12}$ ). . . . .	59
4.14 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-9}$ ). . . . .	59
4.15 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour $Ag_1 = 1$ . . . . .	61
4.16 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour $Ag_1 = 1$ . . . . .	61
4.17 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour $Ag_2 = 1$ . . . . .	62
4.18 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour $Ag_2 = 1$ . . . . .	62
4.19 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour $Ag_3 = 1$ . . . . .	63
4.20 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour $Ag_3 = 1$ . . . . .	63
4.21 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises pour 5 modes au premier guide. . . . .	65
4.22 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies pour 5 modes au premier guide. . . . .	65
4.23 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises pour 10 modes au premier guide. . . . .	66

4.24 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies pour 10 modes au premier guide. . . . .	66
4.25 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction du nombre de jonctions. . . . .	68
4.26 Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction du nombre de jonctions. . . . .	69

# Chapitre 1

## INTRODUCTION

Au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle, James Clerk Maxwell, mathématicien écossais, a largement contribué à l'élaboration et à la reconnaissance des équations décrivant le comportement des ondes électromagnétiques [6, p. 319]. Peu de temps après, Heinrich Hertz, physicien allemand, conçut un oscillateur produisant des ondes électromagnétiques se propageant dans l'espace. Ses découvertes confirmèrent définitivement la théorie de son prédécesseur. Depuis, les formes différentielle et intégrale des *Équations de Maxwell* n'ont cessé d'élargir l'horizon à un vaste champ d'applications.

### 1.1 Guides d'onde

Un siècle plus tard, alors que les développements technologiques abondent, l'avènement des télécommunications rend encore plus pressante l'élaboration de solutions particulières à ces équations. La connaissance du comportement des ondes dans les guides est essentielle afin de rendre plus efficace la transmission de signaux à haute fréquence. Dans sa forme la plus naturelle, l'ionosphère sert à guider, par réflexion, des signaux d'un point radio-transmetteur à un récepteur tous deux à la surface de la Terre [15, p. 334]. J.D. Jackson [15, p. 339] définit plus formellement un

guide d'onde comme un cylindre creux aux parois métalliques de section quelconque (Fig. 1.1). Il existe cependant plusieurs types de guide. Selon F. Gardiol [12, p.

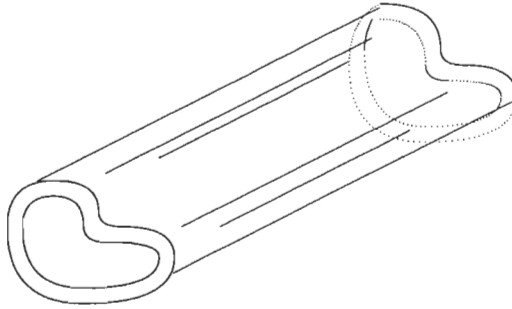


FIG. 1.1: Guide d'onde métallique creux.

18], les guides peuvent être classés en quatre catégories. La première fait référence aux guides d'onde métalliques creux de section rectangulaire, circulaire, elliptique ou autre (Fig. 1.2). Les guides rectangulaires de cette catégorie offrent la possibi-

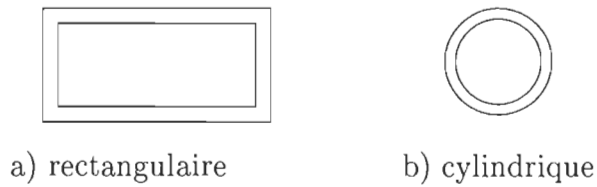


FIG. 1.2: Guides d'onde métalliques.

lité d'utiliser une large bande de fréquence avec un degré d'atténuation relativement bas [8, p. 189]. Ils servent de transmetteur de signaux en hyperfréquence, dans

la fabrication des radars et des filtres. Toujours selon Gardiol [12, p. 51], l'introduction d'arêtes métalliques ("ridged waveguide") dans un guide rectangulaire rend possible l'augmentation de la bande de fréquence dans ces mêmes applications. On peut tirer partie des propriétés des guides elliptiques dans la fabrication de raccords d'antennes. La deuxième catégorie est celle des guides chargés. Ces guides possèdent une surface métallique et sont partiellement remplis de diélectrique. Ils sont employés dans les déphaseurs. Nous trouvons ensuite la catégorie des guides d'onde diélectriques et finalement les fibres optiques. Ces deux dernières catégories font référence à des guides d'onde complètement composés de matériaux non conducteurs. Dans le domaine des télécommunications en hyperfréquence, les fibres optiques présentent l'avantage de ne pas être affectées par les perturbations radioélectriques et servent à établir des liaisons en présence de tensions élevées.

Le choix des structures dépend de l'emploi, de l'espace et des coûts de production. Un choix judicieux de la forme et des dimensions du guide permettra de transmettre un signal avec un minimum de distorsion.

## 1.2 Discontinuités dans les guides

Une discontinuité, ou jonction, est définie comme une variation dans les sections ou un changement dans l'homogénéité d'un guide. Ces discontinuités dans les guides d'onde rendent possible la fabrication de transformateurs de fréquence, de filtres ou encore d'ajusteurs d'impédance et d'admittance. Elles créent cependant des pertes de puissance et des distorsions importantes dans les signaux transmis.

Depuis des décennies des recherches ont été faites dans le but de bien comprendre et de calculer les champs associés à la diffusion électromagnétique aux discontinuités dans les guides. Ces études tiennent compte non seulement des modes fondamentaux [8, 15, 16, 19], mais aussi des modes d'ordre supérieur.

### 1.2.1 Méthode générale

Dans les années 60, H. Haskal [13] et A. Wexler [34] ont su présenter une forme générale des solutions aux discontinuités à l'aide de la méthode d'adaptation des modes normaux. Ils débutent leur analyse avec les équations de continuité des champs transversaux électrique et magnétique. Ces champs sont exprimés en terme de modes et ils obtiennent une solution pour les coefficients de transmission  $A_i$  et de réflexion  $B_i$ . Cette approche serait transférable à toutes formes de guide dont les dimensions augmentent ou diminuent et dont les axes coïncident ou non. Cette méthode est générale et devient l'amorce de travaux plus spécifiques où les configurations des champs doivent être étudiées de façon plus précise.

Dans Patzelt, Arndt [30] et Arndt, Tucholke [1] la solution aux discontinuités de guides rectangulaires avec applications aux transformateurs, aux iris et aux filtres est présentée. Cette méthode considère l'influence des champs évanescents et de la puissance transmise due à l'excitation des modes d'ordre supérieur. L'utilisation des potentiels de Hertz en modes transversal électrique ou transversal magnétique ajoute un élément nouveau dans cette démarche. Les dimensions des guides sont croissantes et à priori les axes coïncident.

De Smedt et Denturck [10] comparent les méthodes des moments et des points avec celle d'adaptation des modes appliquée aux jonctions de guides de section arbitraire.

Balaji, Vahldieck [2], Bornemann, Arndt [4] et Bornemann, Vahldieck [5] développent cette même méthode d'adaptation des modes appliquée aux discontinuités dans des guides chargés. Dans ce champ d'application, cette approche présente l'avantage d'éviter l'utilisation de systèmes de coordonnées mixtes dans l'analyse des champs électromagnétiques.

Les guides d'onde elliptiques sont reconnus pour leur grande flexibilité dans différents composants micro-ondes. Tout récemment, en 2000, Mongiardo et Tomas-



soni [27] ont présenté des résultats très satisfaisants en utilisant la méthode d'adaptation des modes aux jonctions de guides elliptiques et elliptiques-circulaires. Cette approche nécessite toutefois l'application de la solution de l'équation de Helmholtz en coordonnées elliptiques.

Déjà, en 1970, il parut essentiel de préciser les quelques faiblesses de l'approche par adaptation des modes. Lewin [23] a soulevé, pour différents types de guide, l'importance dans le choix des éléments de la discontinuité.

Il est intéressant de visualiser la configuration du champ électrique à une jonction. Moller et Macphie [26] ont su développer une méthode graphique pour ce cas.

### 1.2.2 Méthodes des éléments de frontière et finis

La méthode des éléments finis consiste en une division des régions en éléments géométriques. Les champs sont ensuite exprimés aux coins et aux points nodaux de chaque élément. Il suffit ensuite de faire la somme des contributions sur tous les éléments pour obtenir la matrice complète des valeurs des champs. Les équations différentielles du champ sont transformées en un ensemble d'équations algébriques linéaires. Cette méthode permet un traitement plus simple des guides non homogènes et des guides à structure complexe. Cependant, elle requiert plus de mémoire-ordinateur. Koshiba et Suzuki [18] reprennent la méthode des éléments finis conjointement avec une méthode analytique pour résoudre le problème des discontinuités dans des guides à tiges multiples et chargés de ferrite.

La méthode des éléments de frontière, quant à elle, décrit une région  $R$  entourée d'une frontière  $F$ . On identifie des points arbitraires  $i$  dans cette région et sur la frontière. On peut ensuite intégrer sur chaque élément en tenant compte si les points  $i$  sont sur la frontière ou non. On obtient ainsi les matrices des champs diffusés. Cette méthode nécessite moins de noeuds  $i$  et demande beaucoup moins de mémoire-ordinateur. Kagami et Fukai [17] proposent une application de la méthode

des éléments de frontière pour analyser les champs magnétiques dans le plan.

Ise et Koshiba, en 1988 [14] et Wu et al., en 1989 [35] présentent l'analyse numérique des jonctions de guides dont la section est arbitraire. Leur recherche est appliquée aux guides chargés et combine la méthode des éléments finis à celle des éléments de frontière.

### 1.2.3 Méthode des puissances complexes

Pour calculer la matrice de diffusion, Safavi et Macphie [31, 32] utilisent le développement des modes normaux pour adapter les modes du champ électrique tangentiel aux jonctions dans les guides cylindriques. Cependant, ils emploient le principe de conservation des puissances complexes pour obtenir le champ magnétique tangentiel. Leurs études s'étendent aux jonctions des guides rectangulaires. Ils obtiennent cette fois, une expression pour la matrice d'admittance.

Eleftheriades [11] utilise cette même approche avec application aux discontinuités dans les guides rectangulaires dont les axes coïncident.

### 1.2.4 Autres méthodes

Wilfrid Pascher, en 1995 [29] a repris une étude très efficace dans l'analyse des discontinuités des guides rectangulaires. La méthode des lignes consiste essentiellement en une étape de division parallèle à l'axe des  $z$  des guides, suivie de la transformation des potentiels. Finalement l'auteur effectue une adaptation des champs à la jonction. Il obtient les matrices de transmission et de diffusion.

Une étude sur la propagation des ondes dans un guide rectangulaire courbé a été effectuée par Cornet et autres [9]. Les auteurs utilisent une méthode différentielle pour décrire la propagation des champs et les équations de Maxwell sont présentées sous forme tensorielle. Ils obtiennent les mêmes matrices de transmission et de diffusion.

Navarro et Bordallo [28] nous convainquent de l'importance de considérer les modes d'ordre supérieur dans le calcul des coefficients de transmission et de réflexion. Ils utilisent la méthode FDTD ("finite-difference time-domain").

Dans les articles cités précédemment, on trouve des solutions aux problèmes des discontinuités dans les guides d'onde en hyperfréquence. Que ce soit pour des guides cylindriques, rectangulaires ou pour d'autres structures, les auteurs développent les équations qui décrivent les champs électrique ou magnétique à l'aide des modes. Aux jonctions, la méthode d'adaptation des modes tient compte des modes d'ordre supérieur. Les matrices de transmission ou de diffusion calculées permettent de résoudre  $N$  équations associées pour les  $N$  inconnues que sont les coefficients de mode  $A_i$  et  $B_i$ .

### 1.3 Objectif et méthodologie de recherche

À la lumière des différentes recherches effectuées dans le domaine, nous constatons le souci dans le développement d'une méthode efficace et ses applications. Avec l'avènement des ordinateurs et des programmes de plus en plus rapides et performants, il est maintenant relativement simple de résoudre les équations linéaires obtenues par le développement d'une telle méthode.

Nous allons traiter des guides d'onde vides homogènes à l'exception d'un nombre fini de discontinuités dans la section des guides. Aux jonctions, la méthode d'adaptation de modes est appliquée. Puisque les guides sont homogènes dans le plan, les modes normaux des champs sont bien définis dans ce dernier. Le champ électromagnétique dans chaque section est en général donné par une superposition des modes normaux. Pour obtenir ce champ en tout point, il suffit de relier les modes les uns aux autres à chaque discontinuité. En principe, cette méthode permet aussi de faire l'approximation d'une jonction continue par une suite de petits sauts. La représentation en terme de modes normaux a l'avantage d'être générale, intuitivement claire

et plus aisément programmable que la méthode des éléments finis ou la méthode des éléments de frontière.

Mon travail se divise en deux parties principales. La première traite des discontinuités dans les guides cylindriques. Quoique les ondes en mode transversal électrique TE pourraient être traitées par une méthode analogue, nous supposons une onde en mode transversal magnétique TM dans le domaine des hyperfréquences. À priori, les axes des guides coïncident et les rayons peuvent augmenter ou diminuer. Le nombre de modes dans chaque guide est identique. Un programme, réalisé avec le logiciel Maple V, permet de calculer les coefficients de mode à gauche et à droite d'une jonction. Ils sont ensuite placés dans des matrices dites de transmission et de diffusion. Le programme prévoit la multiplication des matrices dans le cas de guides à jonctions multiples. Les équations associées aux matrices peuvent être résolues pour donner les amplitudes des ondes transmises  $A_i$  et celles des ondes réfléchies  $B_i$ .

Dans la seconde partie, les discontinuités dans les guides d'onde rectangulaires sont étudiées. Il s'agit aussi d'une onde en mode TM dans la même bande de fréquence. Les axes des guides ne coïncident pas nécessairement et le nombre de modes varie d'un guide à l'autre. Les sauts dans le plan s'effectuent suivant un seul axe, où seule la hauteur  $b_i$  varie. Le même type de programmation est utilisé pour effectuer les calculs et pour obtenir les coefficients de mode.

Les résultats des essais effectués pour des systèmes à une et plusieurs jonctions sont inclus. Nous avons considéré jusqu'à vingt modes normaux. Quelques expériences ont été tentées afin d'obtenir les coefficients de mode dans l'approximation de jonctions douces par un nombre croissant de discontinuités. Nous discuterons finalement de la précision des résultats et de la flexibilité du programme Maple V utilisé pour la résolution des équations à l'aide des données d'entrée.

# Chapitre 2

## Guides cylindriques

Pour pouvoir déterminer la configuration du champ électrique  $\vec{E}$  dans un guide cylindrique de rayon  $R$ , les équations de Maxwell sont résolues en tenant compte des conditions frontières à la surface du guide. Si le guide est parfaitement conducteur, ces conditions sont que les composantes tangentielles du champ électrique ( $\vec{E}_t$ ) et la composante normale du champ magnétique ( $B_n$ ) s'annulent à la surface. Pour les guides cylindriques, les équations de Maxwell et les équations d'onde sont exprimées en coordonnées cylindriques, ce qui permet d'appliquer plus facilement ces conditions [19, p. 643].

Les variations harmoniques dans le temps s'expriment comme  $e^{\pm i\omega t}$ . Nous choisirons une dépendance en  $e^{-i\omega t}$ , qui se factorise dans l'ensemble des équations de Maxwell et que l'on peut dès lors omettre. Avec ce choix, une onde en  $e^{+ikz}$  se propagera dans la direction positive de  $z$  (vers la droite), tandis qu'une onde en  $e^{-ikz}$  se propagera dans la direction négative de  $z$  (vers la gauche).

## 2.1 Équation d'onde pour $E_z$

Soit une onde en mode transversal magnétique TM pour laquelle  $B_z = 0$ . L'onde se propage dans le vide à la vitesse de la lumière  $c$  et à la fréquence angulaire  $\omega$ . En coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$ , les équations de Maxwell impliquent l'équation suivante pour la composante  $E_z$  du champ électrique :

$$\nabla^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0$$

ou, de façon équivalente,

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} E_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0 \quad (2.1)$$

Cette équation admet des solutions sous la forme de  $E_z = f(r) \cos(n\phi) e^{ikz}$ , où  $f(r)$  satisfait à :

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} f(r) = 0$$

Cette équation, qui ne fait plus intervenir que la coordonnée  $r$ , peut s'écrire comme :

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + \gamma^2 \right\} f(r) = 0 \quad (2.2)$$

où  $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ .

Puisque l'équation (2.2) est une équation différentielle de deuxième ordre, il existe deux solutions linéairement indépendantes pour chaque valeur de  $n$ . La solu-

tion générale pour  $f(r)$  est :

$$f(r) = AJ_n(\gamma r) + BY_n(\gamma r)$$

où  $J_n$  et  $Y_n$  sont des fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre  $n$ . Cependant, le graphique de la fonction de Neumann [16, p. 255] montre que cette fonction tend vers l'infini lorsque le rayon  $r$  tend vers zéro. Cette seconde solution ne peut être utilisée dans le problème qui nous concerne puisque  $r = 0$  fait partie du domaine de  $r$ . Pour que la solution soit finie partout, la fonction  $f(r)$  doit être égale à la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ , qui dépend du coefficient de propagation  $\gamma$  et de  $r$  le long du rayon du guide. Ainsi,

$$E_z(r, \phi, z) = AJ_n(\gamma r) \cos(n\phi) e^{ikz} \quad (2.3)$$

## 2.2 Discontinuité pour $R_1 < R_2$

Supposons une onde se propageant dans un guide d'onde cylindrique de rayon  $R_1$ . À une discontinuité  $z = \bar{z}$ , une partie de l'onde sera réfléchie (coefficients de réflexion  $B_m^{(1)}$ ) et l'autre partie sera transmise (coefficients de transmission  $A_m^{(2)}$ ) dans le second guide de rayon  $R_2$  (Fig. 2.1). Les axes des guides d'onde coïncident. On

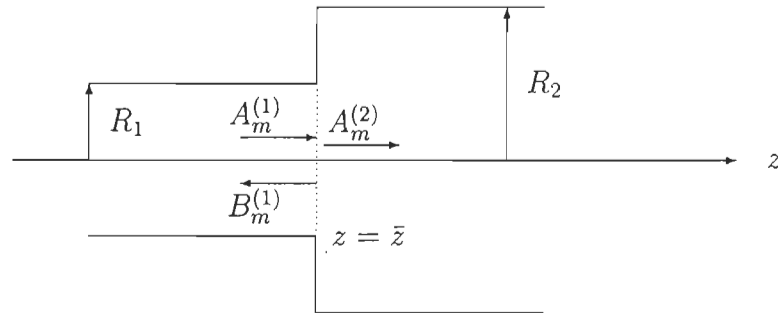


FIG. 2.1: Discontinuité pour  $R_1 < R_2$

suppose que l'ordre  $n$  de la fonction de Bessel  $J_n$  et le nombre d'onde  $k$  sont fixes. La dépendance en  $\phi$  de la composante  $E_z$  du champ électrique pourra être éliminée puisque les conditions de continuité des champs peuvent être satisfaites séparément pour chaque valeur de  $n$ . Le fait que les composantes tangentielles du champ électrique  $\vec{E}_t$  s'annulent sur un conducteur implique les conditions aux limites suivantes :

1. Pour  $z < \bar{z}$  :

$$E_z = 0, \text{ si } r = R_1 \rightarrow J_n(\gamma_{nm}^{(1)} R_1) = 0 \rightarrow \gamma_{nm}^{(1)} R_1 = \xi_{nm} \rightarrow \gamma_{nm}^{(1)} = \frac{\xi_{nm}}{R_1}$$

2. Pour  $z > \bar{z}$  :

$$E_z = 0, \text{ si } r = R_2 \rightarrow J_n(\gamma_{nm}^{(2)} R_2) = 0 \rightarrow \gamma_{nm}^{(2)} R_2 = \xi_{nm} \rightarrow \gamma_{nm}^{(2)} = \frac{\xi_{nm}}{R_2}$$

Ici  $\gamma_{nm}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) dépend du milieu et  $\xi_{nm}$  est le  $m^{\text{ème}}$  zéro de la fonction de Bessel  $J_n$ .

Dans la région où  $z < \bar{z}$ , la solution la plus générale pour  $E_z$ , correspondant à une valeur spécifique de  $n$ , est donnée par :

$$E_z = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m^{(1)} (\gamma_{nm}^{(1)})^2 e^{ik_{nm}^{(1)} z} + B_m^{(1)} (\gamma_{nm}^{(1)})^2 e^{-ik_{nm}^{(1)} z} \right\} J_n(\gamma_{nm}^{(1)} r) \cos(n\phi) \quad (2.4)$$

De même pour  $z > \bar{z}$  :

$$E_z = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m^{(2)} (\gamma_{nm}^{(2)})^2 e^{ik_{nm}^{(2)} z} + B_m^{(2)} (\gamma_{nm}^{(2)})^2 e^{-ik_{nm}^{(2)} z} \right\} J_n(\gamma_{nm}^{(2)} r) \cos(n\phi) \quad (2.5)$$

Les facteurs  $\gamma_{nm}^{(i)}$  auraient pu être incorporés dans les constantes  $A_m^{(i)}$  et  $B_m^{(i)}$ , mais ils sont tout de même ajoutés et seront simplifiés ultérieurement. Les  $A_m^{(i)}$  et  $B_m^{(i)}$  sont les coefficients que nous devons relier les uns aux autres. Ils sont en général



complexes et le carré de leur amplitude est proportionnel à l'intensité de l'onde correspondante. Leur phase est associée à celle des champs correspondants. Les  $A_m^{(i)}$  sont associés aux ondes se propageant dans la direction positive et les  $B_m^{(i)}$  aux ondes se propageant dans la direction négative dans une région  $i$ .

La relation entre  $\gamma$  et  $k$  implique que :

$$\left\{k_{nm}^{(i)}\right\}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{\gamma_{nm}^{(i)}\right\}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{\frac{1}{R_i}\xi_{nm}\right\}^2$$

et ainsi :

$$k_{nm}^{(i)} = \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \frac{1}{R_i} \xi_{nm} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) montre que pour une fréquence angulaire  $\omega$  choisie,  $k_{nm}$  est réel pour les premiers  $\xi_{nm}$ . Si on substitue cette valeur réelle de  $k_{nm}$  dans l'expression (2.5), l'onde se propagera. Par contre, pour des valeurs de  $\xi_{nm}$  d'ordre élevé, à une même fréquence  $\omega$ ,  $k_{nm}$  devient imaginaire et ainsi l'onde sera atténuée. Ainsi, seules les premières racines de  $J_n(R\gamma_{nm}) = 0$  respectent les conditions de transmission. La plus petite valeur assignée à  $n$  et à  $m$  respectivement est 0 et 1.

### 2.2.1 Conditions sur le plan $z = \bar{z}$

Lorsqu'une jonction est excitée par une onde en mode TM, les conditions de continuité sur le plan font que les modes TE ne peuvent être générés simultanément. Dans ces conditions, les composantes transversales  $\vec{E}_t$  et  $\vec{B}_t$  des champs électrique et magnétique doivent être continues à la discontinuité  $z = \bar{z}$  [34]. On peut montrer [15, p. 341] que  $\vec{E}_t$  et  $\vec{B}_t$  sont reliés au champ  $E_z$  donné à l'équation (2.3) comme :

$$\vec{E}_t = \vec{\nabla}_t \left\{ \frac{1}{\gamma_{nm}^2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\} \quad \vec{B}_t = \frac{i\omega}{c^2} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t \left\{ \frac{1}{\gamma_{nm}^2} E_z \right\} \quad (2.7)$$

À partir des équations (2.4) et (2.5), on trouve donc dans la région  $i$  :

$$\vec{E}_t = \vec{\nabla}_t \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m^{(i)} i k_{nm}^{(i)} e^{i k_{nm}^{(i)} z} + B_m^{(i)} (-i k_{nm}^{(i)}) e^{-i k_{nm}^{(i)} z} \right) J_n \left( \gamma_{nm}^{(i)} r \right) \cos(n\phi) \right\} \quad (2.8)$$

et pour le champ magnétique transversal :

$$\vec{B}_t = \frac{i\omega}{c^2} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m^{(i)} e^{i k_{nm}^{(i)} z} + B_m^{(i)} e^{-i k_{nm}^{(i)} z} \right) J_n \left( \gamma_{nm}^{(i)} r \right) \cos(n\phi) \right\} \quad (2.9)$$

Les champs  $\vec{E}_t$  et  $\vec{B}_t$  seront continus à  $z = \bar{z}$  si les quantités, entre accolades, le sont. Ceci implique que, pour  $r < R_1$  :

$$\begin{aligned} \sum_m \left\{ A_m^{(1)} e^{i k_{nm}^{(1)} \bar{z}} + B_m^{(1)} e^{-i k_{nm}^{(1)} \bar{z}} \right\} J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_1} \right) \\ = \sum_m \left\{ A_m^{(2)} e^{i k_{nm}^{(2)} \bar{z}} + B_m^{(2)} e^{-i k_{nm}^{(2)} \bar{z}} \right\} J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_m k_{nm}^{(1)} \left\{ A_m^{(1)} e^{i k_{nm}^{(1)} \bar{z}} - B_m^{(1)} e^{-i k_{nm}^{(1)} \bar{z}} \right\} J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_1} \right) \\ = \sum_m k_{nm}^{(2)} \left\{ A_m^{(2)} e^{i k_{nm}^{(2)} \bar{z}} - B_m^{(2)} e^{-i k_{nm}^{(2)} \bar{z}} \right\} J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Par ailleurs,  $\vec{E}_t$  doit s'annuler sur la paroi conductrice située à  $z = \bar{z}$  et  $R_1 < r < R_2$ .

On a donc, pour  $r > R_1$  :

$$0 = \sum_m k_{nm}^{(2)} \left\{ A_m^{(2)} e^{ik_{nm}^{(2)} \bar{z}} - B_m^{(2)} e^{-ik_{nm}^{(2)} \bar{z}} \right\} J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_2} \right) \quad (2.12)$$

On peut noter que l'équation (2.7) pour  $\vec{B}_t$  implique que la composante normale du champ magnétique  $B_n$  s'annule sur les parois circulaires des guides si  $E_z$  s'annule.

En examinant les équations (2.10), (2.11) et (2.12), on anticipe avoir recours à la relation suivante [21, p. 129] :

$$\int_0^{R_i} r J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_i} \right) J_n \left( \xi_{nl} \frac{r}{R_i} \right) dr = \delta_{ml} \frac{R_i^2}{2} \{J_{n+1}(\xi_{nm})\}^2 \quad (2.13)$$

où  $\delta_{ml}$  est le delta de Kronecker pour lequel :

$$\delta_{ml} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = l, \\ 0 & \text{si } m \neq l. \end{cases}$$

Pour obtenir les équations reliant les coefficients des deux côtés de la jonction, on multiplie l'équation (2.10), pour  $r < R_1$ , par  $r J_n \left( \xi_{nl} \frac{r}{R_1} \right)$  et on intègre entre 0 et  $R_1$ . Le membre de gauche s'écrit comme :

$$\int_0^{R_1} \sum_m \left\{ A_m^{(1)} e^{ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} + B_m^{(1)} e^{-ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} \right\} J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_1} \right) J_n \left( \xi_{nl} \frac{r}{R_1} \right) r dr \quad (2.14)$$

Utilisant l'équation (2.13), on obtient pour tout  $l$  :

$$\begin{aligned}
& \left\{ A_l^{(1)} e^{ik_{nl}^{(1)} \bar{z}} + B_l^{(1)} e^{-ik_{nl}^{(1)} \bar{z}} \right\} \frac{R_1^2}{2} [J_{n+1}(\xi_{nl})]^2 \\
&= \sum_m \left\{ A_m^{(2)} e^{ik_{nm}^{(2)} \bar{z}} + B_m^{(2)} e^{-ik_{nm}^{(2)} \bar{z}} \right\} \int_0^{R_1} r J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_2} \right) J_n \left( \xi_{nl} \frac{r}{R_1} \right) dr
\end{aligned} \tag{2.15}$$

On multiplie ensuite l'équation (2.11) et l'équation (2.12), pour  $r > R_1$ , par  $r J_n \left( \xi_{nl} \frac{r}{R_2} \right)$ . On intègre de 0 à  $R_1$  à gauche et de 0 à  $R_2$  à droite. Utilisant de nouveau l'équation (2.13) on obtient pour tout  $l$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_m k_{nm}^{(1)} \left\{ A_m^{(1)} e^{ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} - B_m^{(1)} e^{-ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} \right\} \int_0^{R_1} r J_n \left( \frac{r}{R_1} \xi_{nm} \right) J_n \left( \frac{r}{R_2} \xi_{nl} \right) dr \\
&= k_{nl}^{(2)} \left\{ A_l^{(2)} e^{ik_{nl}^{(2)} \bar{z}} - B_l^{(2)} e^{-ik_{nl}^{(2)} \bar{z}} \right\} \frac{R_2^2}{2} \{J_{n+1}(\xi_{nl})\}^2
\end{aligned} \tag{2.16}$$

### 2.3 Discontinuité pour $R_1 > R_2$

Considérons deux guides de rayons  $R_1 > R_2$  (Fig. 2.2). On trouve les mêmes

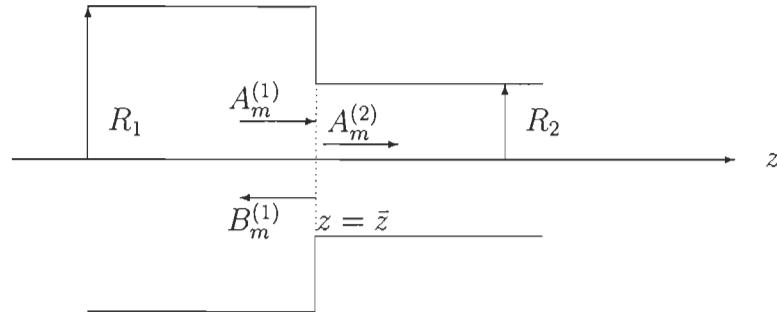


FIG. 2.2: Discontinuité pour  $R_1 > R_2$

conditions limites aux surfaces des guides 1 et 2 quand  $r = R_1$  et  $r = R_2$ . De

plus, les mêmes conditions de continuité s'appliquent sur les champs transversaux à  $z = \bar{z}$ .

### 2.3.1 Conditions sur le plan $z = \bar{z}$

Pour  $r < R_2$ , la situation à la discontinuité est la même que dans le cas précédent. Cependant la situation pour  $r > R_2$  est inversée. Les équations (2.10) et (2.11) demeurent les mêmes, tandis que (2.12) est remplacée, pour  $r > R_2$ , par :

$$\sum_m k_{nm}^{(1)} \left\{ A_m^{(1)} e^{ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} - B_m^{(1)} e^{-ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} \right\} J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_1} \right) = 0 \quad (2.17)$$

On multiplie l'équation (2.10), pour  $r < R_2$ , par  $r J_n \left( \xi_{nl} \frac{r}{R_2} \right)$  et on intègre à gauche et à droite entre 0 et  $R_2$ . On trouve pour tout  $l$  :

$$\begin{aligned} & \sum_m \left\{ A_m^{(1)} e^{ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} + B_m^{(1)} e^{-ik_{nm}^{(1)} \bar{z}} \right\} \int_0^{R_2} r J_n \left( \xi_{nm} \frac{r}{R_1} \right) J_n \left( \xi_{nl} \frac{r}{R_2} \right) dr \\ &= \left\{ A_l^{(2)} e^{ik_{nl}^{(2)} \bar{z}} + B_l^{(2)} e^{-ik_{nl}^{(2)} \bar{z}} \right\} \frac{R_2^2}{2} \{J_{n+1}(\xi_{nl})\}^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

On multiplie ensuite l'équation (2.17), pour  $r > R_2$ , et l'équation (2.11), pour  $r < R_2$ , par  $r J_n \left( \frac{r}{R_1} \xi_{nl} \right)$  et on intègre entre 0 et  $R_1$ . On trouve pour tout  $l$  :

$$\begin{aligned} & k_{nl}^{(1)} \left\{ A_l^{(1)} e^{ik_{nl}^{(1)} \bar{z}} - B_l^{(1)} e^{-ik_{nl}^{(1)} \bar{z}} \right\} \frac{R_1^2}{2} \{J_{n+1}(\xi_{nl})\}^2 \\ &= \sum_m k_{nm}^{(2)} \left\{ A_m^{(2)} e^{ik_{nm}^{(2)} \bar{z}} - B_m^{(2)} e^{-ik_{nm}^{(2)} \bar{z}} \right\} \int_0^{R_2} r J_n \left( \frac{r}{R_2} \xi_{nm} \right) J_n \left( \frac{r}{R_1} \xi_{nl} \right) dr \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.4 Solution

Si les séries des équations (2.15), (2.16), dans le cas de  $R_1 < R_2$ , et (2.18), (2.19), pour  $R_1 > R_2$ , sont tronquées à  $M$  termes, elles constituent un système de  $2M$  équations. Elles permettent d'exprimer les  $2M$  coefficients  $A_m^{(2)}$ ,  $B_m^{(2)}$  en terme des  $2M$  coefficients  $A_m^{(1)}$  et  $B_m^{(1)}$ . La résolution des  $2M$  équations sera possible à l'aide du logiciel mathématique Maple V. L'organigramme est donné à la Fig. 2.3.

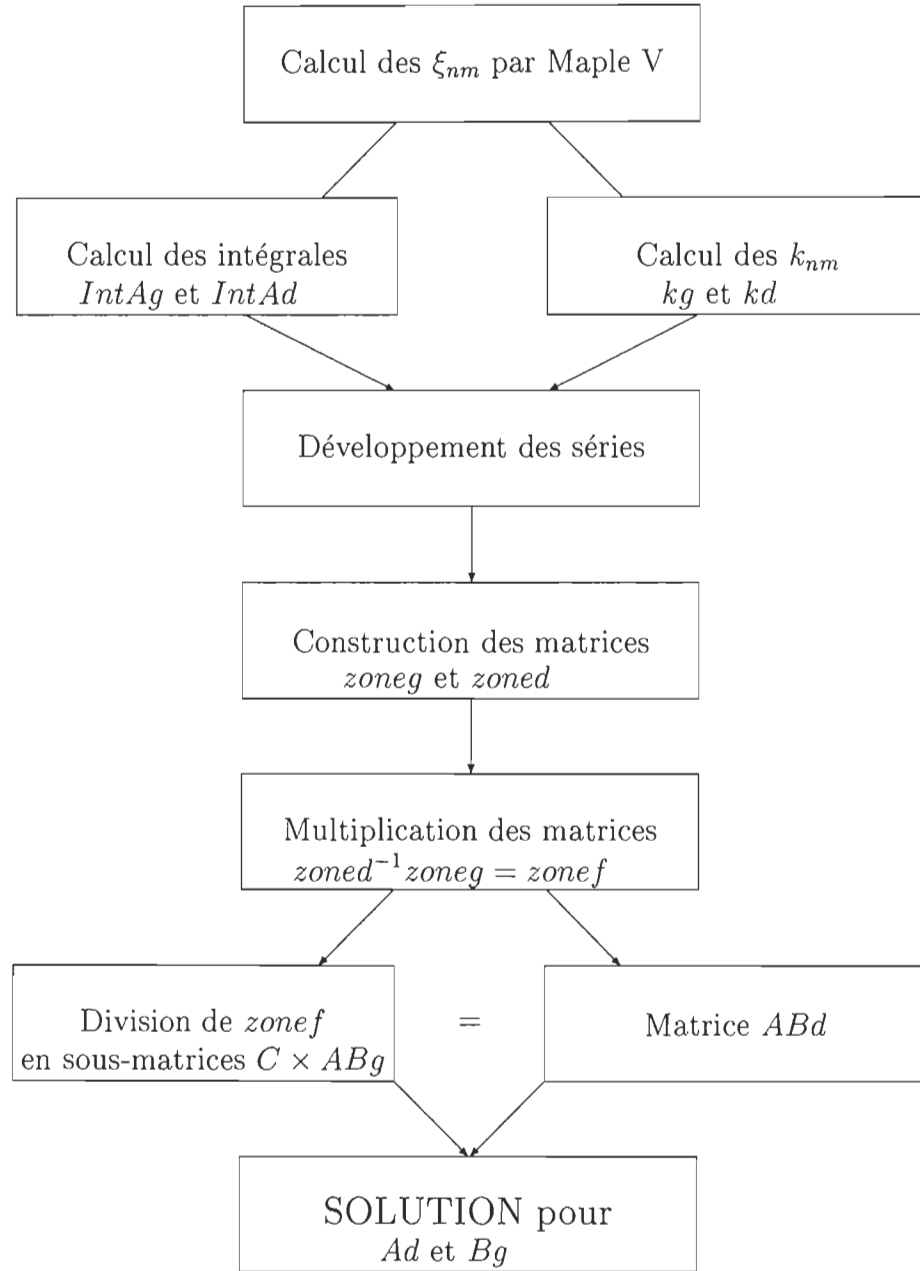
Après un examen des équations, on choisit, dans un premier temps, d'effectuer le calcul des zéros des fonctions de Bessel  $\xi_{nm}$ . Maple V calcule [7, p. 206] toutes ces valeurs à l'aide du programme inclus dans l'annexe A.1. Les résultats sont placés dans un fichier maple "zeros.m" et sont lus dans le programme principal par la commande "read". Cette partie est incluse dans l'annexe A.2.

### 2.4.1 Développement des séries pour $R_1 < R_2$

À titre d'illustration, posons que le nombre de modes  $maxM = 2$  et que l'ordre  $n = 0$  est fixe tout au long des calculs.

Pour que les équations (2.15), (2.16) et (2.18), (2.19) soient assimilables pour Maple V dans le programme principal, on choisit toutes les variables (annexe A.2), c'est-à-dire les valeurs appropriées des rayons  $R$ , des positions des jonctions  $Z$ , du nombre de discontinuités  $maxD$ , du nombre de modes  $maxM$ , de l'ordre de la fonction de Bessel  $n$  et de la fréquence angulaire  $\omega$ . Le choix de la fréquence angulaire est dicté de façon à obtenir la transmission des premiers modes. Maple V peut effectuer les calculs des  $k\mathbf{g}_{nm}$  et des  $k\mathbf{d}_{nm}$  de l'équation (2.6) et choisit si nécessaire la racine pour laquelle la partie imaginaire est positive. Notons que les lettres  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{d}$  dans les variables font référence à des valeurs à gauche et à droite de la jonction. On effectue également le calcul des intégrales  $IntAg$  et  $IntAd$ .

Toutes ces valeurs sont placées dans des matrices (annexe A.3). On trouve que les matrices :

FIG. 2.3: Organigramme du calcul des coefficients  $A_i$  et  $B_i$ .

$$kg[m] \Rightarrow \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \xi_{nm} \frac{1}{R_1} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$kd[m] \Rightarrow \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \xi_{nm} \frac{1}{R_2} \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ont la forme :

$$kg[m] := [kg_{1,1} \ kg_{1,2} \ kg_{1,m} \ \dots]$$

$$kd[m] := [kd_{1,1} \ kd_{1,2} \ kd_{1,m} \ \dots]$$

Puisque l'indice  $n$  est fixe et constant pour tous les calculs, il n'apparaît pas dans les matrices Maple. Les matrices  $IntAg[m, l]$  si  $R_1 < R_2$  et  $IntAd[m, l]$  si  $R_1 > R_2$  sont :

$$IntAg[m, l] \Rightarrow \int_0^{R_1} r J_0 \left( \frac{r}{R_2} \xi_{nm} \right) J_n \left( \frac{r}{R_1} \xi_{nl} \right) dr$$

$$IntAd[m, l] \Rightarrow \int_0^{R_2} r J_n \left( \frac{r}{R_2} \xi_{nm} \right) J_n \left( \frac{r}{R_1} \xi_{nl} \right) dr$$

et ont la forme de :

$$IntAg[m, l] := \begin{bmatrix} IntAg_{1,1} & IntAg_{1,2} & IntAg_{1,l} \\ IntAg_{2,1} & IntAg_{2,2} & IntAg_{2,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ IntAg_{m,1} & \dots & IntAg_{m,l} \end{bmatrix}$$

(2.20)

À titre d'exemple, considérons le cas d'une discontinuité quand  $R_1 < R_2$ . L'équa-



tion (2.15) devient :

Pour  $l = 1$  :

$$\begin{aligned} & \left\{ A_{l=1}^{(1)} e^{ik_{0,l=1}^{(1)} \bar{z}} + B_{l=1}^{(1)} e^{-ik_{0,l=1}^{(1)} \bar{z}} \right\} \frac{R_1^2}{2} [J_{0+1}(\xi_{0,l=1})]^2 \\ &= \left\{ A_{m=1}^{(2)} e^{ik_{0,m=1}^{(2)} \bar{z}} + B_{m=1}^{(2)} e^{-ik_{0,m=1}^{(2)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[m=1, l=1] \\ &+ \left\{ A_{m=2}^{(2)} e^{ik_{0,m=2}^{(2)} \bar{z}} + B_{m=2}^{(2)} e^{-ik_{0,m=2}^{(2)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[m=2, l=1] \end{aligned}$$

Pour  $l = 2$  :

$$\begin{aligned} & \left\{ A_{l=2}^{(1)} e^{ik_{0,l=2}^{(1)} \bar{z}} + B_{l=2}^{(1)} e^{-ik_{0,l=2}^{(1)} \bar{z}} \right\} \frac{R_1^2}{2} [J_{0+1}(\xi_{0,l=2})]^2 \\ &= \left\{ A_{m=1}^{(2)} e^{ik_{0,m=1}^{(2)} \bar{z}} + B_{m=1}^{(2)} e^{-ik_{0,m=1}^{(2)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[m=1, l=2] \\ &+ \left\{ A_{m=2}^{(2)} e^{ik_{0,m=2}^{(2)} \bar{z}} + B_{m=2}^{(2)} e^{-ik_{0,m=2}^{(2)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[m=2, l=2] \end{aligned}$$

Pour  $l = 1$  dans l'équation (2.16) :

$$\begin{aligned} & k_{0,m=1}^{(1)} \left\{ A_{m=1}^{(1)} e^{ik_{0,m=1}^{(1)} \bar{z}} - B_{m=1}^{(1)} e^{-ik_{0,m=1}^{(1)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[l=1, m=1] \\ &+ k_{0,m=2}^{(1)} \left\{ A_{m=2}^{(1)} e^{ik_{0,m=2}^{(1)} \bar{z}} - B_{m=2}^{(1)} e^{-ik_{0,m=2}^{(1)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[l=1, m=2] \\ &= k_{0,l=1}^{(2)} \left\{ A_{l=1}^{(2)} e^{ik_{0,l=1}^{(2)} \bar{z}} - B_{l=1}^{(2)} e^{-ik_{0,l=1}^{(2)} \bar{z}} \right\} \frac{R_2^2}{2} [J_{0+1}(\xi_{0,l=1})]^2 \end{aligned}$$

Pour  $l = 2$  :

$$\begin{aligned} & k_{0,m=1}^{(1)} \left\{ A_{m=1}^{(1)} e^{ik_{0,m=1}^{(1)} \bar{z}} - B_{m=1}^{(1)} e^{-ik_{0,m=1}^{(1)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[l=2, m=1] \\ &+ k_{0,m=2}^{(1)} \left\{ A_{m=2}^{(1)} e^{ik_{0,m=2}^{(1)} \bar{z}} - B_{m=2}^{(1)} e^{-ik_{0,m=2}^{(1)} \bar{z}} \right\} \text{IntAg}[l=2, m=2] \\ &= k_{0,l=2}^{(2)} \left\{ A_{l=2}^{(2)} e^{ik_{0,l=2}^{(2)} \bar{z}} - B_{l=2}^{(2)} e^{-ik_{0,l=2}^{(2)} \bar{z}} \right\} \frac{R_2^2}{2} [J_{0+1}(\xi_{0,l=2})]^2 \end{aligned}$$

On remarque que la matrice  $\text{IntAg}[m, l]$  de l'équation (2.15) devient la matrice

$IntAg[l, m]$  de l'équation (2.16). Les  $2M$  équations décrites plus haut peuvent être simplifiées et représentées schématiquement (les coefficients sont sous-entendus) par :

$$\begin{aligned}
 A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots \\
 A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots \\
 A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots \\
 A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots &= A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots
 \end{aligned}$$

On place les coefficients de  $A_m^{(1)}$ ,  $B_m^{(1)}$  et de  $A_m^{(2)}$ ,  $B_m^{(2)}$  dans les matrices *zoneg* et *zoned* comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{zoneg} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{zoned} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd}$$

### 2.4.2 Construction des matrices des coefficients

Les matrices *zoneg* et *zoned* ont les dimensions  $2M \times 2M$ . Elles contiennent les coefficients de mode à gauche et à droite d'une jonction. La procédure pour obtenir ces matrices est décrite à l'annexe A.4.1. À la fin de la procédure, on multiplie  $zoned^{-1}$  et *zoneg* pour obtenir *zonef*. Cette dernière représente la matrice des coefficients à une jonction *i*. On a ainsi :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{zoned}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\text{zoneg}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd}$$

Le programme appelle ensuite la ou les matrices  $zonef[n]$  selon qu'il existe une ou plusieurs jonctions et effectue les opérations de multiplication dans le dernier cas (annexe A.5). On obtient à la fin de la routine, une seule matrice des coefficients "Coefficient". Cette dernière matrice peut être divisée en sous-matrices  $Caa$ ,  $Cab$ ,  $Cba$  et  $Cbb$  afin que Maple V puisse gérer plus facilement les opérations (annexe A.6.1).

$$\begin{bmatrix} \text{Coefficient} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Ag \\ Bg \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} Ad \\ Bd \end{bmatrix}}_{ABd}$$

Explicitement,

$$\begin{bmatrix} Caa & Cab \\ Cba & Cbb \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} Ag \\ Bg \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} Ad \\ Bd \end{bmatrix}}_{ABd}$$

ou, de façon équivalente :

$$\begin{bmatrix} Caa Ag + Cab Bg \\ Cba Ag + Cbb Bg \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Ad \\ Bd \end{bmatrix}}_{ABd}$$

Chaque ligne de cette équation matricielle met en relation les  $A_m^{(i)}$ ,  $B_m^{(i)}$  avec les  $A_m^{(i+1)}$  et  $B_m^{(i+1)}$ . Dans la région 2,  $B_m^{(2)} = 0$  pour tout  $m$ , car il n'y a que des modes transmis. Ainsi, on trouve que :

$$Cba Ag + Cbb Bg = 0$$

Ceci signifie que :

$$Bg = -[Cbb]^{-1}Cba Ag \quad (2.21)$$

Aussi, le développement ci-haut montre que :

$$Ad = Caa Ag + Cab Bg$$

En substituant l'équation (2.21) dans l'équation précédente pour  $Ad$ , on trouve :

$$Ad = \{Caa - Cab[Cbb]^{-1}Cba\} Ag \quad (2.22)$$

Maple V calcule les  $Ad$  et les  $Bg$  en supposant qu'il y a un seul mode incident (disons  $l = \bar{l}$ ) dans la région 1. Alors  $A_l^{(1)} = 0$  si  $l \neq \bar{l}$ , et on peut poser que  $A_l^{(1)} = 1$ . Rappelons que si  $k_{nm}^{(2)}$  est réel, les ondes se propageront. Les  $2M$  équations servent donc à obtenir les coefficients de l'onde transmise ( $A_l^{(2)}$ ) et ceux de l'onde réfléchie ( $B_m^{(1)}$ ). La programmation de cette partie est décrite à l'annexe A.6.2.

### 2.4.3 Matrices pour $R_1 > R_2$

Si  $R_1 > R_2$ , la situation ou procédure de résolution pour les  $2M$  coefficients correspondant aux  $2M$  équations linéaires sera la même. Cependant les matrices de transmission et de diffusion seront légèrement différentes. Nous utilisons les équations

tions (2.18) et (2.19) pour obtenir les coefficients de modes  $A_m^{(i)}$  et  $B_m^{(i)}$ . Ainsi pour la même valeur de  $n$  et pour  $maxM = 2$ , on a besoin des mêmes matrices  $kg[m]$  et  $kd[m]$  pour le calcul des nombres d'onde, et comme mentionné précédemment, on utilise la matrice  $IntAd$ . Après le développement des équations, on obtient schématiquement :

$$\begin{aligned}
A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots \\
A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots &= A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots \\
A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots \\
A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{zoneg} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{zoned} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd}$$

et :

$$\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1}}_{zoned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{zoneg}}_{zonef} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd}$$

Dans Maple V, le programme a été développé pour tenir compte des rayons

décroissants. Cette partie est décrite à l'annexe A.4.2. À nouveau, la matrice  $zonef$  sera appelée *Coefficient* et les mêmes opérations (construction des sous-matrices et solution pour  $Ad$  et  $Bg$ ) seront effectuées.

#### 2.4.4 Multiples jonctions

Si on place plusieurs guides bout à bout (Fig. 2.4), les coefficients de mode de chaque guide peuvent s'exprimer en terme des coefficients du guide précédent. Si  $maxD$ ,

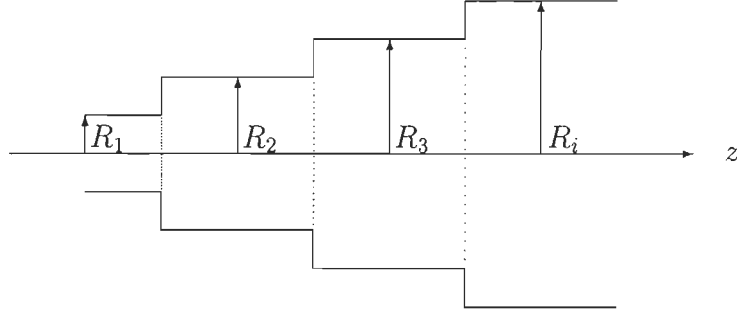


FIG. 2.4: Multiples jonctions,  $R_i$  croissants

le nombre de discontinuités dans le système, est plus grand que 1, Maple V, qui a calculé toutes les matrices  $zonef$  à chaque discontinuité, effectue la multiplication des matrices  $zonef_i$  entre elles afin d'obtenir la matrice  $zone$  (annexe A.6). Celle-ci lie les coefficients du dernier guide à ceux du premier. On a ainsi :

$$zone = zonef_{maxD} \dots \times \dots zonef_2 \times zonef_1$$

Par conséquent :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(maxD+1)} \\ A_2^{(maxD+1)} \\ B_1^{(maxD+1)} \\ B_2^{(maxD+1)} \end{bmatrix}}_{ABd} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{zone} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg}$$

Ici encore, la matrice *zone* sera appelée *Coefficient* et la routine de construction des sous-matrices se répète. Ainsi, la solution des  $2M$  équations donne la valeur des  $B_m^{(1)}$  à gauche de la première jonction et des  $A_m^{(maxD+1)}$  à droite de la  $maxD^{ème}$  jonction.

## Chapitre 3

### Guides rectangulaires

Dans ce chapitre, nous considérons des guides rectangulaires de section  $a_i$  et  $b_i$  comme illustré à la figure (3.1). La configuration du champ électrique  $\vec{E}$  est déterminée de façon similaire à celle des guides cylindriques. Puisque le guide est parfaitement conducteur, les conditions frontières demeurent identiques soit  $\vec{E}_t = 0$  et  $B_n = 0$ . Les équations de Maxwell et les équations d'onde sont toutefois exprimées en coordonnées rectangulaires.

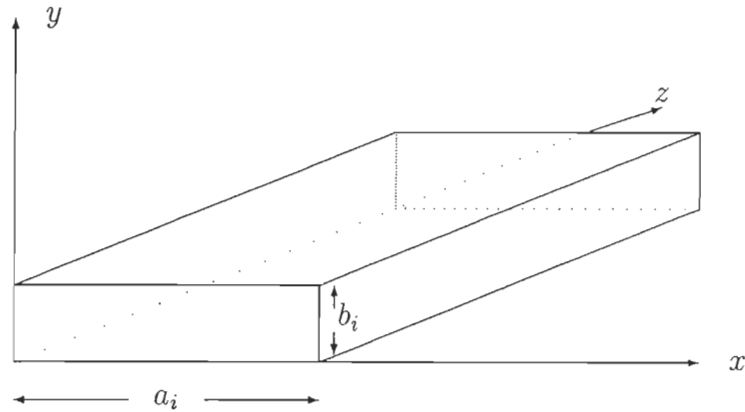


FIG. 3.1: Guide rectangulaire



### 3.1 Équation d'onde pour $E_z$

Rappelons que, comme dans la situation présentée au second chapitre, une onde se propage en mode TM dans le vide à une fréquence angulaire  $\omega$ . En coordonnées rectangulaires  $(x, y, z)$ , les équations de Maxwell impliquent une équation similaire à l'équation (2.1) pour  $E_z$  soit :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} E_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0 \quad (3.1)$$

Cette équation admet des solutions sous la forme de  $E_z = f(x, y)e^{ikz}$ , où  $f(x, y)$  satisfait à :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right\} f(x, y) = 0 \quad (3.2)$$

et  $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ .

On peut trouver des solutions séparées pour  $f(x, y)$  comme :

$$f(x, y) = C \sin[Bx] \sin[Ay]$$

Ici,  $C$  est une constante arbitraire et les constantes  $A$  et  $B$  sont contraintes par les conditions limites à la surface du guide. Pour que l'équation (3.2) soit satisfaite, on doit avoir que  $-B^2 - A^2 + \gamma^2 = 0$  [16, p. 248]. La composante du champ électrique  $E_z$  peut donc s'écrire :

$$E_z(x, y, z) = C \sin[Bx] \sin[Ay] e^{ikz} \quad (3.3)$$

Notons que  $E_z$  s'annule automatiquement sur les surfaces conductrices à  $x = 0$  et

$y = 0$ .

### 3.2 Discontinuité pour $b_1 < b_2$

Supposons une jonction entre deux guides d'onde rectangulaires. De plus, supposons que la largeur  $a_i$  des guides demeure constante mais que la hauteur  $b_1$  du premier guide devienne  $b_2$  à la discontinuité. Finalement, les guides ne sont pas nécessairement centrés sur  $z$  comme le montre la figure (3.2).

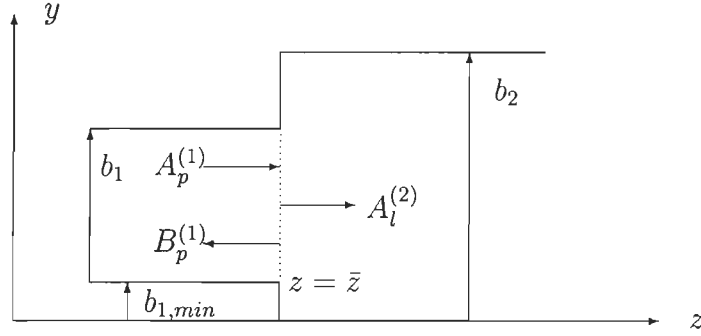


FIG. 3.2: Discontinuité pour  $b_1 < b_2$

Puisque  $\vec{E}_t$  s'annule à la surface du conducteur, on trouve les conditions limites suivantes :

1. Pour  $z < \bar{z}$  :

$$E_z = 0, \quad \text{si } x = 0, a_1 \quad \text{ou} \quad y = b_{1,min}, b_{1,min} + b_1$$

2. Pour  $z > \bar{z}$  :

$$E_z = 0, \quad \text{si } x = 0, a_1 = a_2 \quad \text{ou} \quad y = 0, b_2$$

Nous notons  $b_{i,min}$  la coordonnée  $y$  du plan inférieur du guide  $i$ . La solution séparée pour  $f(x, y)$  devient :

$$f(x, y) = C \sin \left[ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right) x \right] \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_i} \right) (y - b_{i,min}) \right] \quad (3.4)$$

où les coefficients  $A$  et  $B$  ont été exprimés en termes d'entiers positifs  $p$  et  $m$ , de manière que  $f(x, y)$  s'annule sur les plans conducteurs. L'équation (3.3) pour  $E_z$  s'écrit alors :

$$E_z(x, y, z) = C \sin \left[ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right) x \right] \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_i} \right) (y - b_{i,min}) \right] e^{ikz} \quad (3.5)$$

La largeur  $a_i$  des guides et  $m$  sont fixes. Dans la région où  $z < \bar{z}$ , la solution la plus générale pour  $E_z$ , correspondant à une valeur spécifique de  $m$  est donnée par :

$$E_z = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_p^{(1)} \left( \gamma_{mp}^{(1)} \right)^2 e^{ik_{mp}^{(1)} z} + B_p^{(1)} \left( \gamma_{mp}^{(1)} \right)^2 e^{-ik_{mp}^{(1)} z} \right\} \sin \left[ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right) x \right] \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] \quad (3.6)$$

De même, pour  $z > \bar{z}$  :

$$E_z = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ A_p^{(2)} \left( \gamma_{mp}^{(2)} \right)^2 e^{ik_{mp}^{(2)} z} + B_p^{(2)} \left( \gamma_{mp}^{(2)} \right)^2 e^{-ik_{mp}^{(2)} z} \right\} \sin \left[ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right) x \right] \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) (y) \right] \quad (3.7)$$

L'équation  $-B^2 - A^2 + \gamma^2 = 0$  implique que :

$$\begin{aligned} \left\{ k_{mp}^{(i)} \right\}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{b_i} \right)^2 \right\} \\ k_{mp}^{(i)} &= \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{b_i} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dans l'équation (3.8),  $m$  et  $p$  sont des entiers positifs et à partir des équations (3.3) et (3.5) on peut voir que si  $m$  ou  $p$  est égal à zéro, le champ le sera aussi. Ainsi, les plus petites valeurs de  $m$  et de  $p$  sont 1 [16, p. 249]. Les coefficients  $A_p^{(1)}$ ,  $B_p^{(1)}$ ,  $A_p^{(2)}$  et  $B_p^{(2)}$  sont aussi à relier entre eux et représentent des ondes transmises dans le cas des  $A_p^2$  et réfléchies dans le cas des  $B_p^1$ .

### 3.2.1 Conditions sur le plan $z = \bar{z}$

Les composantes transversales  $\vec{E}_t$  et  $\vec{B}_t$  des champs électrique et magnétique doivent à nouveau être continues à la jonction  $z = \bar{z}$ . À partir des équations (2.7) décrivant ces champs en fonction de  $E_z$  et des équations (3.6) et (3.7), on trouve :

$$\vec{E}_t = \vec{\nabla}_t \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \left( A_p^{(i)} i k_{mp}^{(i)} e^{i k_{mp}^{(i)} z} + B_p^{(i)} (-i k_{mp}^{(i)}) e^{-i k_{mp}^{(i)} z} \right) \sin \left[ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right) x \right] \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_i} \right) (y - b_{i,min}) \right] \right\} \quad (3.9)$$

et pour le champ magnétique transversal :

$$\vec{B}_t = \frac{i\omega}{c^2} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \left( A_p^{(i)} e^{i k_{mp}^{(i)} z} + B_p^{(i)} e^{-i k_{mp}^{(i)} z} \right) \sin \left[ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right) x \right] \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_i} \right) (y - b_{i,min}) \right] \right\} \quad (3.10)$$

Les conditions de continuité seront respectées à  $z = \bar{z}$  si les quantités entre les accolades sont continues. Ceci implique que pour  $0 < x < a_1$  et  $b_{1,min} < y < b_{1,min} + b_1$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_p \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} + B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] \\
&= \sum_p \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} + B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) y \right]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_p k_{mp}^{(1)} \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} - B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] \\
&= \sum_p k_{mp}^{(2)} \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} - B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) y \right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

De plus,  $\vec{E}_t$  doit s'annuler sur la paroi conductrice située à  $z = \bar{z}$  et à  $0 < y < b_{1,min}$  ;  
 $b_{1,min} + b_1 < y < b_2$ . On a donc :

$$0 = \sum_p k_{mp}^{(2)} \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} - B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) y \right] \tag{3.13}$$

Rappelons ici que l'équation (2.7) pour  $\vec{B}_t$  implique que  $B_n$  s'annule sur les parois des guides si  $E_z$  s'annule aussi.

Pour obtenir les équations reliant les coefficients des deux côtés de la jonction, multiplions l'équation (3.11) pour  $b_{1,min} < y < b_{1,min} + b_1$  par  $\sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right]$  et intégrons des deux côtés de l'équation sur la surface  $S_1 = a_1 b_1$ , donc de  $y = b_{1,min}$  à  $y = b_{1,min} + b_1$ ; on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_p \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} + B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} a_1 \\
& \int_{y=b_{1,min}}^{y=b_{1,min}+b_1} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_p \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} + B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} a_1 \\
&\int_{y=b_{1,min}}^{y=b_{1,min}+b_1} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) y \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] dy
\end{aligned} \tag{3.14}$$

L'intégrale de gauche s'annule si  $p \neq l$  et elle est égale à  $\frac{b_1}{2}$  si  $p = l$ . L'équation (3.14) devient :

$$\begin{aligned}
&\left\{ A_l^{(1)} e^{ik_{ml}^{(1)} \bar{z}} + B_l^{(1)} e^{-ik_{ml}^{(1)} \bar{z}} \right\} \frac{b_1}{2} \\
&= \sum_p \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} + B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} \\
&\int_{y=b_{1,min}}^{y=b_{1,min}+b_1} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) y \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] dy
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où  $l$  est un indice fixe associé à un mode de la région 1 et  $p$  varie sur tous les modes de la région 2.

On prend ensuite les équations (3.12) pour  $b_{1,min} < y < b_{1,min} + b_1$  et (3.13) pour  $0 < y < b_{1,min}$  et  $b_{1,min} + b_1 < y < b_2$ , que l'on multiplie par  $\sin \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) y$ . On intègre sur la surface  $S_1$  à gauche et sur la surface  $S_2$  à droite. Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\sum_p k_{mp}^{(1)} \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} - B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} a_1 \\
&\int_{y=b_{1,min}}^{y=b_{1,min}+b_1} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) y \right] dy \\
&= \sum_p k_{mp}^{(2)} \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} - B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} a_1 \\
&\int_{y=0}^{y=b_2} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) y \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) y \right] dy
\end{aligned} \tag{3.16}$$

À droite l'intégrale sur  $dy$  donne le même résultat que celle de gauche dans l'équation (3.14), à ceci près que  $b_1$  est remplacé par  $b_2$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_p k_{mp}^{(1)} \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} - B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} \\
& \int_{y=b_{1,min}}^{y=b_{1,min}+b_1} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) (y - b_{1,min}) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) y \right] dy \\
& = k_{ml}^{(2)} \left\{ A_l^{(2)} e^{ik_{ml}^{(2)} \bar{z}} - B_l^{(2)} e^{-ik_{ml}^{(2)} \bar{z}} \right\} \frac{b_2}{2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

### 3.3 Discontinuité pour $b_1 > b_2$

Considérons dans cette section, deux guides dont les dimensions sont  $a_i$  et  $b_1 > b_2$  comme le montre la figure (3.3). La largeur  $a_i$  des guides demeure fixe. Les condi-

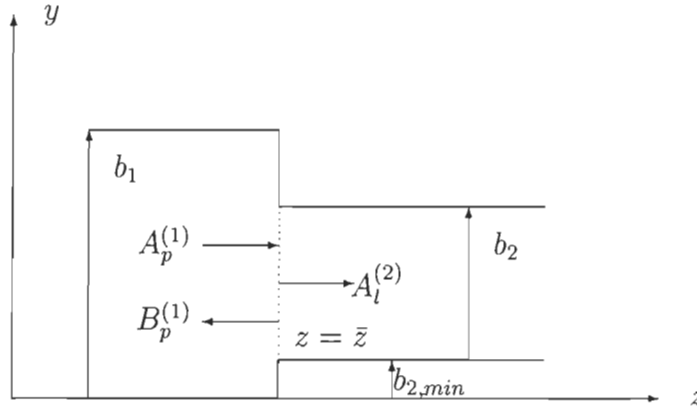


FIG. 3.3: Discontinuité pour  $b_1 > b_2$

tions limites aux surfaces des guides rectangulaires 1 et 2 et les conditions de continuité à  $z = \bar{z}$  sont similaires à celles décrites précédemment. Soit :

1. Pour  $z < \bar{z}$  :

$$E_z = 0, \quad \text{si } x = 0, a_1 \quad \text{ou} \quad y = 0, b_1$$

2. Pour  $z > \bar{z}$  :

$$E_z = 0, \quad \text{si } x = 0, a_1 = a_2 \quad \text{ou} \quad y = b_{2,min}, b_{2,min} + b_2$$

### 3.3.1 Conditions sur le plan $z = \bar{z}$

Tout comme pour les guides cylindriques les équations décrivant la composante du champ électrique  $E_z$  sont similaires mais la situation est inversée. Les équations (3.11) et (3.12) (avec les  $b_{i,min}$  appropriés) s'appliquent pour  $z = \bar{z}$  lorsque  $b_{2,min} < y < b_2 + b_{2,min}$  et l'équation (3.13) est remplacée (pour  $0 < y < b_{2,min}$  et  $b_2 + b_{2,min} < y < b_1$ ) par :

$$\sum_p k_{mp}^{(1)} \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} - B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) y \right] = 0 \quad (3.18)$$

On multiplie l'équation (3.11) pour  $b_{2,min} < y < b_2 + b_{2,min}$  par  $\sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) (y - b_{2,min}) \right]$  et on intègre sur la surface  $S_2$  à gauche et à droite de l'équation, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \sum_p \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} + B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} a_1 \\ & \int_{y=b_{2,min}}^{y=b_{2,min}+b_2} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) y \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) (y - b_{2,min}) \right] dy \\ & = \sum_p \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} + B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} a_1 \\ & \int_{y=b_{2,min}}^{y=b_{2,min}+b_2} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) (y - b_{2,min}) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) (y - b_{2,min}) \right] dy \end{aligned} \quad (3.19)$$



L'intégrale de droite s'annule si  $p \neq l$  et est égale à  $\frac{b_2}{2}$  si  $p = l$ . On a que :

$$\begin{aligned} & \sum_p \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} + B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} \\ & \int_{y=b_{2,min}}^{y=b_{2,min}+b_2} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) y \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_2} \right) (y - b_{2,min}) \right] dy \\ & = \left\{ A_l^{(2)} e^{ik_{ml}^{(2)} \bar{z}} + B_l^{(2)} e^{-ik_{ml}^{(2)} \bar{z}} \right\} \frac{b_2}{2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

On multiplie l'équation (3.12) pour  $b_{2,min} < y < b_{2,min} + b_2$  et l'équation (3.18) par  $\sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) y \right]$  et on intègre sur la surface  $S_1$  du guide 1 à gauche et sur  $S_2$  à droite, on trouve alors :

$$\begin{aligned} & \sum_p k_{mp}^{(1)} \left\{ A_p^{(1)} e^{ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} - B_p^{(1)} e^{-ik_{mp}^{(1)} \bar{z}} \right\} a_1 \\ & \int_{y=0}^{y=b_1} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_1} \right) y \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) y \right] dy \\ & = \sum_p k_{mp}^{(2)} \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} - B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} a_1 \\ & \int_{y=b_{2,min}}^{y=b_{2,min}+b_2} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) (y - b_{2,min}) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) y \right] dy \end{aligned} \quad (3.21)$$

Celle-ci devient :

$$\begin{aligned} & k_{ml}^{(1)} \left\{ A_l^{(1)} e^{ik_{ml}^{(1)} \bar{z}} - B_l^{(1)} e^{-ik_{ml}^{(1)} \bar{z}} \right\} \frac{b_1}{2} \\ & = \sum_p k_{mp}^{(2)} \left\{ A_p^{(2)} e^{ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} - B_p^{(2)} e^{-ik_{mp}^{(2)} \bar{z}} \right\} \\ & \int_{y=b_{2,min}}^{y=b_{2,min}+b_2} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_2} \right) (y - b_{2,min}) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_1} \right) y \right] dy \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.4 Solution

À la différence du programme du chapitre précédent, celui-ci peut associer à chaque guide un nombre de modes différents. En effet, *modeg* et *moded* représentent le

nombre de modes à gauche et à droite d'une jonction. Dès lors, si les séries des équations (3.15), (3.17), pour  $b_1 < b_2$ , et (3.20), (3.22), pour  $b_1 > b_2$  sont tronquées à *modeg* et à *moded* termes de part et d'autre de la discontinuité, ces équations constituent à leur tour un système de *modeg* + *moded* équations. Puisque le nombre de modes dans chaque guide n'est pas le même (*modeg*  $\neq$  *moded*), il y aura *modeg* + *moded* coefficients  $A_p^{(1)}$ ,  $A_l^{(2)}$  et autant de  $B_p^{(1)}$ ,  $B_l^{(2)}$ . La solution aux *modeg* + *moded* équations linéaires est calculée à l'aide du même logiciel Maple V et suivant la démarche que l'on peut suivre à la figure (3.4).

Cette démarche quoique similaire à celle illustrée au second chapitre, se distingue par plusieurs points. Premièrement, les calculs des *kg*, *kd*, *IntAg* et *IntAd* sont effectués à partir des équations (3.8) et (3.15) ou (3.20). Dans un deuxième temps, le programme place immédiatement les coefficients de mode dans des sous-matrices. On nomme ces sous-matrices *zonega..* et *zoneda..* dans la procédure "Nequa" et elles deviennent les matrices *C..* et *D...* Et finalement, la différence majeure se situe au niveau de la démarche permettant d'exprimer les *Bg*, *Ad* en termes des *Ag*. Les opérations sur les matrices des coefficients pour une jonction doivent être effectuées en tenant compte des *modeg* et *moded* spécifiques qui génèrent des matrices de dimension différente. Ainsi on ne peut pas produire une matrice *zonef* par la multiplication matricielle de *zoned*<sup>-1</sup>*zoneg*. L'approche utilisée pour les calculs est expliquée de façon précise à la section 3.4.2.

### 3.4.1 Développement des séries pour $b_1 < b_2$

En observant les équations (3.15) et (3.17) qui relient les coefficients entre eux, il demeure nécessaire de faire le développement des séries surtout que le nombre de modes diffère de part et d'autre des jonctions. À titre d'illustration, posons que *modeg* = 2 et que *moded* = 3 et que  $m = 1$  demeure constant dans un système à une discontinuité. Dans Maple V, on choisira toutes les autres données d'entrée. La

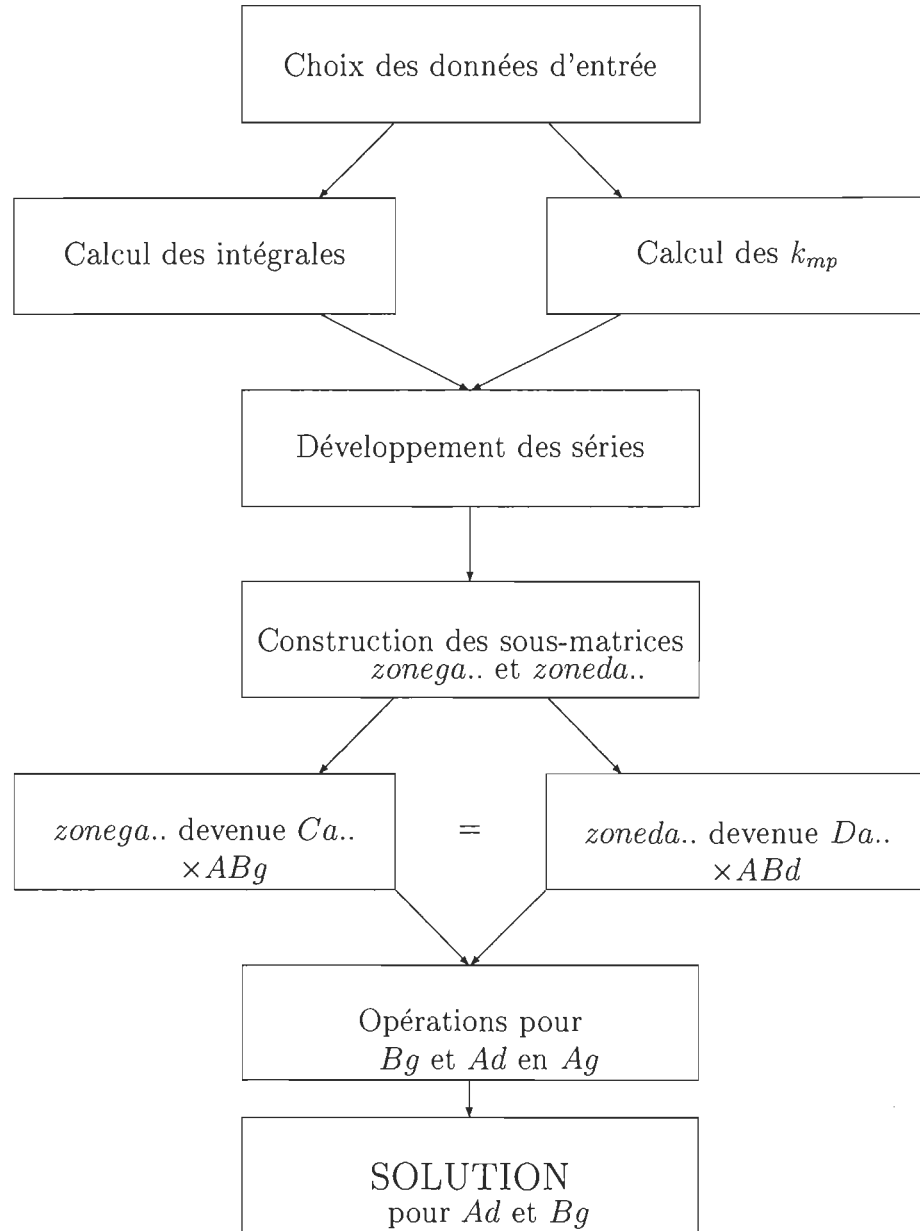


FIG. 3.4: Organigramme du calcul des coefficients  $A_i$  et  $B_i$  dans les guides rectangulaires

liste  $b$  contient les hauteurs des guides,  $hauty$  est la liste de la hauteur selon  $y$  de la base des guides et  $Z$  la liste des positions des discontinuités.  $Larg$  est la largeur des guides. Les variables d'entrée sont énumérées à l'annexe B.1.

On doit ensuite effectuer le calcul des  $kg_{mp}$  et des  $kd_{mp}$  dans les équations. Les lettres  $g$  et  $d$  qui terminent la plupart des variables signifient gauche et droite. L'indice  $m$  n'apparaît pas dans les matrices Maple puisqu'il est constant dans tous les calculs. Le calcul est aussi effectué pour les intégrales  $IntAg$  et  $IntAd$ .

Toutes ces valeurs sont placées dans des matrices (annexe B.2). On trouve que les matrices :

$$kg[p] \Rightarrow \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{b_i} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$kd[l] \Rightarrow \left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left\{ \left( \frac{m\pi}{a_i} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{b_{i+1}} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ont la forme de :

$$kg[p] := [kg_{1,1} \quad kg_{1,2} \quad kg_{1,p} \quad \dots]$$

$$kd[l] := [kd_{1,1} \quad kd_{1,2} \quad kd_{1,l} \quad \dots]$$

La matrice pour  $b_i < b_{i+1}$  :

$$IntAg[p, l] \Rightarrow \int_{S_i} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_{i+1}} \right) (y) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_i} \right) (y - b_{i,min}) \right] dy$$

et la matrice pour  $b_i > b_{i+1}$  :

$$IntAd[p, l] \Rightarrow \int_{S_{i+1}} \sin \left[ \left( \frac{p\pi}{b_i} \right) (y) \right] \sin \left[ \left( \frac{l\pi}{b_{i+1}} \right) (y - b_{i+1,min}) \right] dy$$

ont la forme de :

$$IntAg[p, l] := \begin{bmatrix} IntAg_{1,1} & IntAg_{1,2} & IntAg_{1,l} \\ IntAg_{2,1} & IntAg_{2,2} & IntAg_{2,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ IntAg_{p,1} & \dots & IntAg_{p,l} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Le développement des séries permet d'obtenir *modeg* + *moded* équations. Ces équations peuvent être simplifiées. La représentation schématique, alors que les coefficients sont sous-entendus avec *modeg* = 2 et *moded* = 3 pour  $b_1 < b_2$  devient :

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots \\ &\quad + A_3^{(2)} \dots + B_3^{(2)} \dots \\ A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots \\ &\quad + A_3^{(2)} \dots + B_3^{(2)} \dots \\ A_1^{(1)} \dots - B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots - B_2^{(1)} \dots &= A_1^{(2)} \dots - B_1^{(2)} \dots \\ A_1^{(1)} \dots - B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots - B_2^{(1)} \dots &= A_2^{(2)} \dots - B_2^{(2)} \dots \\ A_1^{(1)} \dots - B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots - B_2^{(1)} \dots &= A_3^{(2)} \dots - B_3^{(2)} \dots \end{aligned}$$

On place les coefficients de  $A_l^{(1)}$ ,  $B_l^{(1)}$  dans une matrice *zoneg* et les coefficients de

$A_p^{(2)}, B_p^{(2)}$  dans une matrice *zoned* comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\text{zoneg}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{\text{zoned}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd}$$

La routine permettant de calculer et de placer les coefficients dans les matrices est présentée à l'annexe B.3.

### 3.4.2 Construction des matrices des coefficients

Contrairement au programme Maple V pour les guides cylindriques qui place les coefficients dans les matrices *zoneg* et *zoned*, celui pour les guides rectangulaires place les coefficients au fur et à mesure dans les sous-matrices *zonegaa*, *zonegab*, etc. et *zonedaa*, *zonedab* etc. On peut représenter les sous-matrices comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{zonegaa} & \text{zonegab} \\ \text{zonegba} & \text{zonegbb} \end{bmatrix}}_{\text{zoneg}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{zonedaa} & \text{zonedab} \\ \text{zonedba} & \text{zonedbb} \end{bmatrix}}_{\text{zoned}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd} \quad (3.24)$$

La matrice *zoneg* ayant les dimensions  $(modeg + moded) \times 2modeg$  et la matrice *zoned* ayant les dimensions  $(modeg + moded) \times 2moded$  donneront des sous-matrices

dont les dimensions peuvent être groupées de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \text{modeg} \times \text{modeg} & \text{modeg} \times \text{modeg} \\ \text{moded} \times \text{modeg} & \text{moded} \times \text{modeg} \end{bmatrix}}_{\text{zoneg}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \text{modeg} \times \text{moded} & \text{modeg} \times \text{moded} \\ \text{moded} \times \text{moded} & \text{moded} \times \text{moded} \end{bmatrix}}_{\text{zoned}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd}
 \end{aligned}$$

À la fin de la procédure, Maple V appelle toutes les sous-matrices *zoneg*.. et *zoned*.. en les renommant *C*.. et *D*.. respectivement (voir annexe B.4). Chaque ligne de l'équation matricielle (3.24) met en relation les  $A_l^{(i)}$ ,  $B_l^{(i)}$  avec les  $A_p^{(i+1)}$  et  $B_p^{(i+1)}$ . Dans la région 2,  $B_p^{(2)} = 0$  pour tout  $p$ , car il n'y a que des modes transmis. Mais, plus généralement, posons que :

$$Bd = Ed Ad \quad (3.25)$$

Nous retrouvons :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Caa & Cab \\ Cba & Cbb \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} Ag \\ Bg \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} Daa & Dab \\ Dba & Dbb \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} Ad \\ Bd \end{bmatrix}}_{ABd}$$

En effectuant les opérations matricielles et en substituant l'équation (3.25) pour  $Bd$ , on obtient :

$$\begin{aligned} Caa Ag + Cab Bg &= Daa Ad + Dab Ed Ad \\ Cba Ag + Cbb Bg &= Dba Ad + Dbb Ed Ad \end{aligned} \quad (3.26)$$

Toutes les matrices ont des dimensions telles que les opérations indiquées sont bien définies. En regroupant les termes on trouve que :

$$\begin{bmatrix} Caa \\ Cba \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ag \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -Cab & Daa + Dab Ed \\ -Cbb & Dba + Dbb Ed \end{bmatrix}}_{CD} \begin{bmatrix} Bg \\ Ad \end{bmatrix}$$

Puisque  $CD$  est une matrice carrée, on peut l'inverser et obtenir :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -Cab & Daa + Dab Ed \\ -Cbb & Dba + Dbb Ed \end{bmatrix}^{-1}}_{CDC} \underbrace{\begin{bmatrix} Caa \\ Cba \end{bmatrix}}_{CC} \begin{bmatrix} Ag \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bg \\ Ad \end{bmatrix}$$

Chaque ligne de la matrice  $CDC$  relie les  $Bg$  et les  $Ad$  aux  $Ag$  comme :

$$\begin{bmatrix} Eg \\ Fg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ag \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Bg \\ Ad \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

On trouve donc les équations  $Ad = Fg Ag$  et  $Bg = Eg Ag$  qui ont la même forme que l'équation (3.25). Dans le cas présent, nous avons que  $Ed = 0$  puisque  $Bd$  (i.e., les  $B_p^{(2)}$ ) s'annule.  $Eg$  et  $Fg$  s'expriment entièrement en termes des matrices  $C..$  et  $D..$ , et sont donc calculables. Les coefficients de réflexion  $Bg$  et les coefficients de transmission  $Ad$  s'obtiennent ainsi à partir des coefficients  $Ag$  de l'onde incidente.



### 3.4.3 Matrices pour $b_1 > b_2$

Si  $b_1 > b_2$ , la situation ou procédure de résolution pour les (*modeg* + *moded*) coefficients correspondant aux (*modeg* + *moded*) équations linéaires sera semblable. Cette partie du programme se trouve à l'annexe B.3.2. Les matrices de transmission ou de diffusion changeront légèrement. Nous utilisons les équations (3.20) et (3.22) pour obtenir les coefficients de mode. Par exemple, pour *modeg* = 3 et *moded* = 2, on trouve cette représentation simplifiée :

$$\begin{aligned}
& A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots \\
& \quad + A_3^{(1)} \dots + B_3^{(1)} \dots = A_1^{(2)} \dots + B_1^{(2)} \dots \\
& A_1^{(1)} \dots + B_1^{(1)} \dots + A_2^{(1)} \dots + B_2^{(1)} \dots \\
& \quad + A_3^{(1)} \dots + B_3^{(1)} \dots = A_2^{(2)} \dots + B_2^{(2)} \dots \\
& A_1^{(1)} \dots - B_1^{(1)} \dots = A_1^{(2)} \dots - B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots - B_2^{(2)} \dots \\
& A_2^{(1)} \dots - B_2^{(1)} \dots = A_1^{(2)} \dots - B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots - B_2^{(2)} \dots \\
& A_3^{(1)} \dots - B_3^{(1)} \dots = A_1^{(2)} \dots - B_1^{(2)} \dots + A_2^{(2)} \dots - B_2^{(2)} \dots
\end{aligned}$$

On a sous la forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}}_{\text{zoneg}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \\ B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_3^{(1)} \end{bmatrix}}_{ABg} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{\text{zoned}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}}_{ABd}$$

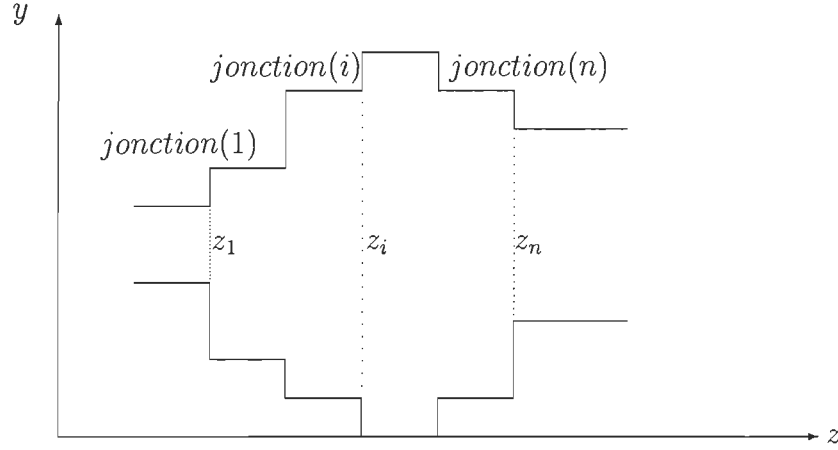


FIG. 3.5: Multiples jonctions

Les valeurs calculées sont mises au fur et à mesure dans les sous-matrices *zoneg..* et *zoned..* qui seront appelées par Maple V *C..* et *D...* La procédure pour résoudre les *Ad* et les *Bg* demeure exactement la même.

### 3.4.4 Multiples jonctions

Si on place bout à bout plusieurs guides de dimension différente comme illustrée à la figure (3.5), on trouve que les coefficients de mode du dernier guide peuvent être liés aux coefficients des guides précédents. Pour pouvoir le faire, Maple V effectue une routine à partir du dernier guide jusqu'au premier. À la  $n^{\text{ème}}$  jonction, les *Bd* s'annulent puisqu'il n'y a que des ondes transmises. Ainsi, comme dans l'exemple de la section 3.4.2, pour  $b_1 < b_2$ ,  $Ed^n = 0$ . Cependant, par les opérations décrites de (3.26) jusqu'à (3.27), on obtient une équation matricielle comme  $Eg^n \quad Ag^n = Bg^n$ . Cette équation est équivalente à  $Ed^{n-1} \quad Ad^{n-1} = Bd^{n-1}$ . Procédant de façon récursive, on obtient à chaque jonction des équations du type  $Ad^i = Fg^i \quad Ag^i$  et  $Bg^i = Eg^i \quad Ag^i$ .

Avec tous ces résultats, on trouve finalement les coefficients de réflexion et de transmission en termes des coefficients de l'onde incidente par les équations :

$$Bg^1 = Eg^1 Ag^1$$

$$\begin{aligned} Ad^n &= Fg^n Ag^n = Fg^n Ad^{n-1} \\ &= Fg^n Fg^{n-1} \dots Fg^2 Fg^1 Ag^1 \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Résultats et Analyse

La méthode d'adaptation des modes exposée dans les chapitres 2 et 3, pour les discontinuités dans les guides cylindriques et rectangulaires respectivement, a conduit aux groupes d'équations (2.15, 2.16, 2.18 et 2.19) et (3.15, 3.17, 3.20 et 3.22). Ces  $M$  équations linéaires permettent de calculer l'amplitude des modes transmis et réfléchis dans un système à  $n$  jonctions. Dans ce chapitre, les résultats des différents essais effectués à l'aide des programmes construits dans Maple V sont présentés et analysés.

### 4.1 Guides cylindriques

Un premier essai a été effectué dans le but de vérifier la logique générale du programme. Cette vérification a été conçue en examinant un système de six guides où les cinq jonctions sont infinitésimales. En effet, s'il n'y a pas de discontinuité, seul le mode incident  $l = 1$  est transmis, et aucun mode n'est réfléchi.<sup>1</sup> Ainsi, pour une jonction infinitésimale, le mode incident devrait être presque totalement transmis, et tous les autres modes infinitésimaux, soit pratiquement égaux à zéro.

---

<sup>1</sup>Tous les indices de mode correspondent à la variable  $m$  de l'équation (2.6).

Les paramètres sont les rayons  $R$ , les positions des jonctions  $Z$ , le maximum de discontinuités  $maxD$ , le nombre de modes  $maxM$ , l'ordre de la fonction de Bessel  $n$  et la fréquence angulaire  $\omega$ . Les valeurs numériques assignées pour les essais des tableaux (4.1) et (4.2) sont :

```
> R :=[0.1, 0.100000000001, 0.100000000002, 0.100000000003,
> 0.100000000004, 0.100000000005] :
> Z :=[0, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35] :
> maxD := 5:
> maxM := 5:
> n :=0:
> w := 6.0 * 1012:
```

On remarque que la fréquence angulaire est choisie de façon à ce qu'il n'y ait que des modes transmis. Pour le tableau (4.2), les paramètres d'entrée sont les mêmes à l'exception des rayons qui sont différents :

```
> R :=[0.1, 0.100000001, 0.100000002, 0.100000003, 0.100000004,
> 0.100000005] :
```

Les résultats des tableaux (4.1) et (4.2) rendent compte de l'attente précisée ci-haut. On voit que l'amplitude des modes décroît avec l'importance des discontinuités. Vu l'ordre de grandeur des jonctions, nous ne pouvons trouver d'applications pratiques. Ces discontinuités sont présentées afin de vérifier la logique interne du programme dans une situation bien contrôlée.

TAB. 4.1: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-12}$ ).

Onde incidente $Ag_1 = 1$	
Amplitudes	12 chiffres
$Ad_1$	$0,9999999999496 - 0,3201749205586 \cdot 10^{-10} i$
$Ad_2$	$0,6372606809470 \cdot 10^{-11} + 0,6176987646524 \cdot 10^{-10} i$
$Ad_3$	$-0,1996425489228 \cdot 10^{-10} + 0,2544399135509 \cdot 10^{-10} i$
$Bg_1$	$-0,5676392036162 \cdot 10^{-10} + 0,8295911852223 \cdot 10^{-13} i$
$Bg_2$	$-0,3060067536473 \cdot 10^{-12} - 0,5131074005563 \cdot 10^{-12} i$
$Bg_3$	$-0,2495920403321 \cdot 10^{-11} - 0,1292620975553 \cdot 10^{-11} i$

TAB. 4.2: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-9}$ ).

Onde incidente $Ag_1 = 1$	
Amplitudes	9 chiffres
$Ad_1$	$0,9999999496 - 0,3201748664 \cdot 10^{-7} i$
$Ad_2$	$0,6372621291 \cdot 10^{-8} + 0,6176987230 \cdot 10^{-7} i$
$Ad_3$	$-0,1996423798 \cdot 10^{-7} + 0,2544399859 \cdot 10^{-7} i$
$Bg_1$	$-0,1803602020 \cdot 10^{-9} + 0,8141826056 \cdot 10^{-10} i$
$Bg_2$	$-0,3060066508 \cdot 10^{-9} - 0,5131075862 \cdot 10^{-9} i$
$Bg_3$	$-0,2495920426 \cdot 10^{-8} - 0,1292621691 \cdot 10^{-8} i$

Les tableaux (4.3) à (4.8) nous montrent les résultats des essais effectués lorsque, pour différents choix de l'onde incidente, on fait varier le nombre de modes. Pour ces essais, les données d'entrée sont :

```
> R := [0.1, 0.15] :
> Z := [0] :
> maxD := 1:
> maxM := 5:
> n := 0:
> w := 3.0 * 1010:
```

Le nombre de modes dans chaque guide est le même mais il varie au cours des essais où  $\max M = 5, 6, 7, 10, 12, 15$  et  $20$ . La fréquence angulaire a été choisie de façon à ce que les trois premiers modes soient transmis et cette fréquence demeure constante pour cette série d'essais.

Les tableaux (4.3) et (4.4) contiennent les amplitudes des ondes transmises et réfléchies lorsque seul le mode fondamental est incident soit  $Ag_1 = 1$ . Les tableaux (4.5), (4.6) et (4.7), (4.8) donnent les valeurs des amplitudes pour  $Ag_2 = 1$  et  $Ag_3 = 1$ , respectivement.

Les amplitudes des ondes ont tendance à se stabiliser aux grands nombres de modes. Quoique la convergence vers une valeur ne soit pas parfaite, on constate qu'à partir de 10 ou 12 modes les résultats sont assez près les uns des autres.

TAB. 4.3: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour  $Ag_1 = 1$ .

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
5	$0,57359 + 0,00750 i$	$0,50742 - 0,01424 i$	$-0,04685 - 0,00281 i$
6	$0,57310 + 0,00796 i$	$0,50806 - 0,01525 i$	$-0,04547 - 0,00228 i$
7	$0,57366 + 0,00763 i$	$0,50697 - 0,01467 i$	$-0,04541 - 0,00203 i$
10	$0,57501 + 0,00741 i$	$0,50417 - 0,01426 i$	$-0,04482 - 0,00176 i$
12	$0,57562 + 0,00720 i$	$0,50292 - 0,01386 i$	$-0,04455 - 0,00163 i$
15	$0,57615 + 0,00692 i$	$0,50182 - 0,01335 i$	$-0,04433 - 0,00151 i$
20	$0,57671 + 0,00657 i$	$0,50066 - 0,01270 i$	$-0,04409 - 0,00138 i$

TAB. 4.4: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour  $Ag_1 = 1$ .

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
5	$0,00112 - 0,00263 i$	$-0,00555 + 0,01213 i$	$0,03366 - 0,05861 i$
6	$0,00164 - 0,00258 i$	$-0,00797 + 0,01186 i$	$0,04479 - 0,05638 i$
7	$0,00153 - 0,00243 i$	$-0,00749 + 0,01117 i$	$0,04298 - 0,05366 i$
10	$0,00141 - 0,00229 i$	$-0,00689 + 0,01050 i$	$0,03948 - 0,05010 i$
12	$0,00135 - 0,00219 i$	$-0,00663 + 0,01007 i$	$0,03790 - 0,04808 i$
15	$0,00130 - 0,00209 i$	$-0,00638 + 0,00960 i$	$0,03650 - 0,04598 i$
20	$0,00126 - 0,00197 i$	$-0,00614 + 0,00906 i$	$0,03511 - 0,04359 i$



TAB. 4.5: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour  $Ag_2 = 1$ .

Onde incidente $Ag_2 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
5	$-0,08821 - 0,01275 i$	$0,31377 + 0,02422 i$	$0,66340 + 0,00481 i$
6	$-0,08735 - 0,01345 i$	$0,31265 + 0,02578 i$	$0,66105 + 0,00389 i$
7	$-0,08823 - 0,01297 i$	$0,31435 + 0,02494 i$	$0,66097 + 0,00346 i$
10	$-0,09049 - 0,01262 i$	$0,31902 + 0,02432 i$	$0,66002 + 0,00295 i$
12	$-0,09152 - 0,01228 i$	$0,32115 + 0,02368 i$	$0,65959 + 0,00271 i$
15	$-0,09242 - 0,01185 i$	$0,32300 + 0,02289 i$	$0,65923 + 0,00249 i$
20	$-0,09337 - 0,01130 i$	$0,32495 + 0,02187 i$	$0,65884 + 0,00227 i$

TAB. 4.6: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour  $Ag_2 = 1$ .

Onde incidente $Ag_2 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
5	$-0,00205 + 0,00448 i$	$0,01012 - 0,02069 i$	$-0,06087 + 0,09993 i$
6	$-0,00294 + 0,00438 i$	$0,01424 - 0,02010 i$	$-0,07980 + 0,09560 i$
7	$-0,00277 + 0,00412 i$	$0,01349 - 0,01900 i$	$-0,07701 + 0,09141 i$
10	$-0,00255 + 0,00387 i$	$0,01242 - 0,01782 i$	$-0,07084 + 0,08544 i$
12	$-0,00245 + 0,00372 i$	$0,01194 - 0,01710 i$	$-0,06802 + 0,08206 i$
15	$-0,00236 + 0,00354 i$	$0,01150 - 0,01633 i$	$-0,06558 + 0,07866 i$
20	$-0,00227 + 0,00334 i$	$0,01107 - 0,01544 i$	$-0,06312 + 0,07476 i$

TAB. 4.7: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour  $Ag_3 = 1$ .

Onde incidente $Ag_3 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
5	$0,02890 + 0,02352i$	$-0,07846 - 0,04466i$	$0,05779 - 0,00897i$
6	$0,02743 + 0,02447i$	$-0,07658 - 0,04688i$	$0,06196 - 0,00712i$
7	$0,02865 + 0,02401i$	$-0,07891 - 0,04624i$	$0,06202 - 0,00627i$
10	$0,03275 + 0,02356i$	$-0,08732 - 0,04558i$	$0,06345 - 0,00504i$
12	$0,03468 + 0,02307i$	$-0,09128 - 0,04472i$	$0,06413 - 0,00452i$
15	$0,03636 + 0,02246i$	$-0,09469 - 0,04365i$	$0,06470 - 0,00405i$
20	$0,03813 + 0,02168i$	$-0,09832 - 0,04221i$	$0,06535 - 0,00358i$

TAB. 4.8: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour  $Ag_3 = 1$ .

Onde incidente $Ag_3 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
5	$0,00476 - 0,00829i$	$-0,02332 + 0,03829i$	$0,13809 - 0,18500i$
6	$0,00633 - 0,00797i$	$-0,03058 + 0,03663i$	$0,17128 - 0,17443i$
7	$0,00608 - 0,00759i$	$-0,02951 + 0,03502i$	$0,16747 - 0,16926i$
10	$0,00558 - 0,00709i$	$-0,02714 + 0,03274i$	$0,15448 - 0,15881i$
12	$0,00536 - 0,00680i$	$-0,02606 + 0,03144i$	$0,14855 - 0,15302i$
15	$0,00516 - 0,00650i$	$-0,02513 + 0,03014i$	$0,14352 - 0,14745i$
20	$0,00497 - 0,00616i$	$-0,02419 + 0,02864i$	$0,13841 - 0,14103i$

Les tableaux (4.9) et (4.10) donnent les résultats des essais qui tentent de simuler une discontinuité douce par une suite de petites discontinuités. Les paramètres pour ces essais sont principalement des rayons qui varient de 0,1 à 0,2 mètre de façon linéaire. Le nombre de modes utilisés  $maxM$  est 5 et la fréquence angulaire  $\omega = 2,3 \times 10^{11}$ , de façon à n'avoir que des modes transmis. Le nombre de jonctions  $maxD$  varie de 2 à 8 et les positions  $Z$  des jonctions sont aussi linéairement réparties de 0 à 0,2 mètre.

On constate que les résultats sont instables. À mesure que le nombre de modes augmente, les résultats ne convergent pas. De plus, on peut voir, à partir des tableaux (4.11) et (4.12), que pour les mêmes données d'entrée, le programme nous donne des résultats distincts. Le fait qu'un même programme exécuté avec les mêmes données d'entrée donne des résultats différents permet de conclure qu'il y a certaines manipulations que le logiciel n'effectue pas de la même façon. Il n'est pas clair jusqu'à quel point cette particularité est aussi responsable des instabilités. Celles-ci se retrouvent d'ailleurs dans des essais effectués avec  $maxM > 5$ , que nous n'avons pas présentés ici.

TAB. 4.9: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des jonctions.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Nb. de jonctions	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
2	$0,35690 - 0,00141i$	$0,49642 + 0,00549i$	$0,23269 - 0,00753i$
3	$0,35472 - 0,00117i$	$0,49982 + 0,00433i$	$0,23619 - 0,00778i$
4	$0,35540 - 0,00097i$	$0,49921 + 0,00230i$	$0,23469 - 0,01163i$
5	$0,35187 + 0,02684i$	$0,49766 - 0,01813i$	$0,28834 - 0,01918i$
6	$0,30051 + 0,36798i$	$0,38399 + 0,26929i$	$0,17680 - 0,05912i$
7	$0,35787 + 0,00024i$	$0,49552 + 0,00280i$	$0,23461 - 0,01315i$
8	$0,26016 + 0,03406i$	$0,31645 + 0,00832i$	$0,22775 - 0,00055i$

TAB. 4.10: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des jonctions.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Nb. de jonctions	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
2	$0,00049 - 0,00077i$	$-0,00273 + 0,00363i$	$0,03292 - 0,02320i$
3	$-0,00018 - 0,00026i$	$0,00031 + 0,00127i$	$0,02094 - 0,00769i$
4	$-0,00016 - 0,00078i$	$-0,00044 + 0,00370i$	$0,00984 - 0,02022i$
5	$0,01904 - 0,01715i$	$-0,03515 - 0,08503i$	$0,11460 + 0,00171i$
6	$0,71349 + 0,27040i$	$-0,23229 - 0,08565i$	$0,17637 + 0,04943i$
7	$-0,00039 - 0,00041i$	$0,00131 + 0,00199i$	$0,00343 - 0,01199i$
8	$-0,28098 + 0,06196i$	$0,17109 - 0,03174i$	$0,10973 - 0,00342i$

TAB. 4.11: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes transmises en fonction des jonctions. Deuxième essai.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Nb. de jonctions	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
2	$0,35690 - 0,00141 i$	$0,49642 + 0,00549 i$	$0,23269 - 0,00753 i$
3	$0,35472 - 0,00117 i$	$0,49982 + 0,00433 i$	$0,23619 - 0,00778 i$
4	$0,25240 - 0,01097 i$	$0,40921 + 0,00630 i$	$0,21330 - 0,01672 i$
5	$0,27189 + 0,07920 i$	$0,42491 + 0,03124 i$	$0,21534 + 0,02185 i$
6	$0,34081 + 0,09942 i$	$-0,05180 + 0,06524 i$	$-0,04715 + 0,00110 i$
7	$-0,33163 + 0,19446 i$	$0,03740 - 0,49773 i$	$0,04115 + 0,79426 i$
8	$0,13911 + 0,28623 i$	$-1,13666 + 0,14275 i$	$0,43395 + 0,08373 i$

TAB. 4.12: Guides cylindriques. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des jonctions. Deuxième essai.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Nb. de jonctions	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
2	$0,00049 - 0,00077 i$	$-0,00273 + 0,00363 i$	$0,03292 - 0,02320 i$
3	$-0,00018 - 0,00026 i$	$0,00031 + 0,00127 i$	$0,02094 - 0,00769 i$
4	$-0,00013 - 0,00052 i$	$-0,00144 + 0,00421 i$	$0,00953 - 0,02115 i$
5	$0,22825 + 0,03225 i$	$-0,01685 + 0,07184 i$	$0,08130 + 0,13027 i$
6	$0,45338 + 0,63277 i$	$-0,28139 + 0,16857 i$	$0,10880 - 0,13723 i$
7	$1,31146 + 0,33475 i$	$-0,11410 + 1,27221 i$	$0,65622 + 2,52004 i$
8	$-1,66840 - 0,45386 i$	$0,14462 + 0,31595 i$	$-0,10768 - 0,27642 i$

## 4.2 Guides rectangulaires

Dans les tableaux (4.13) et (4.14), nous trouvons les résultats des essais effectués dans le but de vérifier la logique générale du programme. Tout comme la démarche faite pour la logique générale du programme pour les guides cylindriques, les paramètres d'entrée sont tels que les discontinuités sont infinitésimales. Ainsi, rappelons que dans un pareil cas, les résultats donneront un mode incident presque totalement transmis et tous les autres modes infinitésimaux. Dans le tableau (4.13), les données d'entrée sont :

```
> b := [0.1, 0.100000000001, 0.100000000002, 0.100000000003,
0.100000000004, 0.100000000005] :
> Hauty := [0.000000000005, 0.000000000005, 0.000000000005,
0.000000000005, 0.000000000005] :
> Z := [0, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25 ] :
> maxD := 5:
> maxM := 5:
> Mode := [5,5,5,5,5] :
> larg := 0.2:
> w := 5*1010:
> m := 1:
```

Dans le tableau (4.14), les données d'entrée demeurent identiques sauf pour les hauteurs  $b$  des guides et les *Hauty* qui deviennent :

```
> b := [0.1, 0.100000001, 0.100000002, 0.100000003, 0.100000004,
0.100000005] :
> Hauty := [0.0000000005, 0.0000000005, 0.0000000005, 0.0000000005,
0.0000000005] :
```

Les résultats montrent bien que seul le mode incident est transmis et que les amplitudes des autres modes décroissent comme l'importance des discontinuités.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Tous les indices de mode correspondent à la variable  $p$  de l'équation (3.8).

TAB. 4.13: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-12}$ ).

Onde incidente $Ag_1 = 1$	
Amplitudes	12 chiffres
$Ad_1$	$0,9999999999793 - 0,2724042899041 \cdot 10^{-10} i$
$Ad_2$	$0,415912641527 \cdot 10^{-11} + 0,230514793023 \cdot 10^{-10} i$
$Ad_3$	$0,296048198348 \cdot 10^{-12} + 0,894227494042 \cdot 10^{-11} i$
$Bg_1$	$-0,159452929345 \cdot 10^{-12} - 0,118714880072 \cdot 10^{-12} i$
$Bg_2$	$0,294814396062 \cdot 10^{-12} + 0,109454047893 \cdot 10^{-12} i$
$Bg_3$	$-0,520051856027 \cdot 10^{-12} + 0,301309611273 \cdot 10^{-12} i$

TAB. 4.14: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes pour 5 discontinuités infinitésimales ( $10^{-9}$ ).

Onde incidente $Ag_1 = 1$	
Amplitudes	9 chiffres
$Ad_1$	$0,99999999793 - 0,2724042899 \cdot 10^{-7} i$
$Ad_2$	$0,4159190734 \cdot 10^{-8} + 0,2305147787 \cdot 10^{-7} i$
$Ad_3$	$0,2960522629 \cdot 10^{-9} + 0,8942273697 \cdot 10^{-8} i$
$Bg_1$	$-0,1593699491 \cdot 10^{-9} - 0,1187149353 \cdot 10^{-9} i$
$Bg_2$	$0,2948749676 \cdot 10^{-9} + 0,1094540361 \cdot 10^{-9} i$
$Bg_3$	$-0,5200518301 \cdot 10^{-9} + 0,3013098534 \cdot 10^{-9} i$

Les tableaux (4.15) à (4.20) donnent les résultats des essais pour différents choix de l'onde incidente soit  $Ag_i = 1, i = 1, 2, 3$ . Les données d'entrée sont :

```
> b := [0.1, 0.15] :  
> Hauty := [0.05] :  
> Z := [0 ] :  
> maxD := 1 :  
> maxM := 5 :  
> Mode := [5, 5] :  
> larg := 0.2 :  
> w := 3*1010 :  
> m := 1 :
```

Les résultats nous montrent à nouveau que les valeurs ont tendance à se stabiliser aux grands nombres de modes.



TAB. 4.15: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour  $Ag_1 = 1$ .

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
5	$0,74341 + 0,00512 i$	$0,12730 + 0,00498 i$	$-0,31267 + 0,01252 i$
6	$0,74487 + 0,00663 i$	$0,12437 + 0,00528 i$	$-0,30897 + 0,01482 i$
7	$0,74602 + 0,00529 i$	$0,12373 + 0,00529 i$	$-0,30619 + 0,01285 i$
10	$0,74618 + 0,00567 i$	$0,12428 + 0,00458 i$	$-0,30561 + 0,01202 i$
12	$0,74682 + 0,00510 i$	$0,12443 + 0,00429 i$	$-0,30391 + 0,01062 i$
15	$0,74749 + 0,00429 i$	$0,12408 + 0,00435 i$	$-0,30225 + 0,00871 i$
20	$0,74761 + 0,00394 i$	$0,12467 + 0,00392 i$	$-0,30178 + 0,00782 i$

TAB. 4.16: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour  $Ag_1 = 1$ .

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
5	$-0,00273 - 0,00335 i$	$-0,00355 - 0,00857 i$	$-0,06002 - 0,05615 i$
6	$-0,00241 - 0,00450 i$	$-0,00193 - 0,00906 i$	$-0,05399 - 0,06670 i$
7	$-0,00228 - 0,00421 i$	$-0,00161 - 0,00882 i$	$-0,05070 - 0,06408 i$
10	$-0,00204 - 0,00437 i$	$-0,00151 - 0,00793 i$	$-0,04795 - 0,06481 i$
12	$-0,00187 - 0,00423 i$	$-0,00134 - 0,00760 i$	$-0,04515 - 0,06308 i$
15	$-0,00168 - 0,00412 i$	$-0,00115 - 0,00739 i$	$-0,04224 - 0,06212 i$
20	$-0,00159 - 0,00404 i$	$-0,00102 - 0,00710 i$	$-0,04059 - 0,06123 i$

TAB. 4.17: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour  $Ag_2 = 1$ .

Onde incidente $Ag_2 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
5	$-0,02473 + 0,00722 i$	$0,57095 + 0,02626 i$	$0,23760 + 0,02043 i$
6	$-0,02561 + 0,00953 i$	$0,57269 + 0,02233 i$	$0,23765 + 0,02482 i$
7	$-0,02678 + 0,00899 i$	$0,57273 + 0,02451 i$	$0,23411 + 0,02510 i$
10	$-0,02697 + 0,00819 i$	$0,57884 + 0,02138 i$	$0,23494 + 0,02305 i$
12	$-0,02652 + 0,00771 i$	$0,58070 + 0,02014 i$	$0,23650 + 0,02169 i$
15	$-0,02586 + 0,00720 i$	$0,58084 + 0,01962 i$	$0,23819 + 0,02050 i$
20	$-0,02623 + 0,00704 i$	$0,58414 + 0,01707 i$	$0,23793 + 0,01963 i$

TAB. 4.18: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour  $Ag_2 = 1$ .

Onde incidente $Ag_2 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
5	$-0,00289 - 0,00698 i$	$-0,00501 - 0,02180 i$	$-0,09442 - 0,10923 i$
6	$-0,00157 - 0,00738 i$	$-0,00342 - 0,01991 i$	$-0,07760 - 0,10903 i$
7	$-0,00131 - 0,00718 i$	$-0,00192 - 0,02305 i$	$-0,07791 - 0,11371 i$
10	$-0,00123 - 0,00645 i$	$-0,00159 - 0,02141 i$	$-0,07273 - 0,10594 i$
12	$-0,00109 - 0,00619 i$	$-0,00136 - 0,02061 i$	$-0,06925 - 0,10256 i$
15	$-0,00093 - 0,00602 i$	$-0,00098 - 0,02048 i$	$-0,06645 - 0,10097 i$
20	$-0,00083 - 0,00578 i$	$-0,00055 - 0,01952 i$	$-0,06312 - 0,09833 i$

TAB. 4.19: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction des modes pour  $Ag_3 = 1$ .

Onde incidente $Ag_3 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
5	$0,08722 + 0,01940 i$	$0,03947 + 0,01534 i$	$0,30849 + 0,04264 i$
6	$0,09027 + 0,02574 i$	$0,03136 + 0,00669 i$	$0,31725 + 0,05220 i$
7	$0,09267 + 0,02174 i$	$0,03050 + 0,00832 i$	$0,32409 + 0,04438 i$
10	$0,09265 + 0,02146 i$	$0,03250 + 0,00166 i$	$0,32445 + 0,04142 i$
12	$0,09420 + 0,01832 i$	$0,03262 - 0,00065 i$	$0,32889 + 0,03351 i$
15	$0,09611 + 0,01425 i$	$0,03124 - 0,00069 i$	$0,33382 + 0,02385 i$
20	$0,09609 + 0,01321 i$	$0,03278 - 0,00529 i$	$0,33424 + 0,02056 i$

TAB. 4.20: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction des modes pour  $Ag_3 = 1$ .

Onde incidente $Ag_3 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
5	$-0,01905 - 0,01782 i$	$-0,03681 - 0,04258 i$	$-0,45260 - 0,33453 i$
6	$-0,01713 - 0,02117 i$	$-0,03025 - 0,04251 i$	$-0,42159 - 0,36667 i$
7	$-0,01609 - 0,02034 i$	$-0,03037 - 0,04433 i$	$-0,40989 - 0,36234 i$
10	$-0,01522 - 0,02057 i$	$-0,02835 - 0,04130 i$	$-0,39868 - 0,36438 i$
12	$-0,01433 - 0,02002 i$	$-0,02700 - 0,03998 i$	$-0,38468 - 0,36033 i$
15	$-0,01341 - 0,01972 i$	$-0,02590 - 0,03936 i$	$-0,37121 - 0,35904 i$
20	$-0,01288 - 0,01943 i$	$-0,02461 - 0,03834 i$	$-0,36268 - 0,35777 i$

Les résultats des essais correspondant aux tableaux (4.21) à (4.24) ont aussi été faits pour un système à une seule jonction. Cette fois par contre, le nombre de modes dans le premier guide a été fixé à 5 puis à 10, alors que dans le deuxième guide le nombre de modes varie de 6 à 20 et de 10 à 20. Les autres paramètres de hauteur  $b$ , de hauteur par rapport à l'axe  $y$ ,  $H_{auty}$ , la position  $Z$  des jonctions, etc., demeurent identiques à ceux utilisés lors des essais dont les résultats apparaissent aux tableaux (4.15) à (4.20).

On constate une fois de plus que les résultats se stabilisent si le nombre de modes est suffisamment grand de chaque côté de la jonction. Dans les tableaux (4.21) et (4.22), les amplitudes se stabilisent à partir de 12 modes. Dans les tableaux (4.23) et (4.24), il semble que la convergence soit déjà établie lorsque 10 modes sont utilisés dans le premier guide. On constate que l'amplitude des ondes transmises converge vers une valeur légèrement plus grande lorsque le nombre de modes utilisé est plus grand. On trouve pour  $Ad_1$  par exemple une amplitude de 0,74550 au lieu de 0,74350.

TAB. 4.21: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises pour 5 modes au premier guide.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
5-6	$0,74533 + 0,00688 i$	$0,12136 + 0,00590 i$	$-0,30838 + 0,01549 i$
5-7	$0,74482 + 0,00691 i$	$0,12070 + 0,00626 i$	$-0,30993 + 0,01576 i$
5-10	$0,74355 + 0,00768 i$	$0,12146 + 0,00625 i$	$-0,31300 + 0,01655 i$
5-12	$0,74347 + 0,00778 i$	$0,12143 + 0,00631 i$	$-0,31319 + 0,01666 i$
5-15	$0,74346 + 0,00779 i$	$0,12143 + 0,00631 i$	$-0,31321 + 0,01666 i$
5-20	$0,74345 + 0,00781 i$	$0,12143 - 0,00631 i$	$-0,31324 + 0,01668 i$

TAB. 4.22: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies pour 5 modes au premier guide.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
5-6	$-0,00239 - 0,00468 i$	$-0,00171 - 0,00958 i$	$-0,05506 - 0,06928 i$
5-7	$-0,00233 - 0,00475 i$	$-0,00124 - 0,01032 i$	$-0,05544 - 0,07190 i$
5-10	$-0,00215 - 0,00546 i$	$-0,00123 - 0,01010 i$	$-0,05537 - 0,07786 i$
5-12	$-0,00213 - 0,00556 i$	$-0,00118 - 0,01018 i$	$-0,05526 - 0,07851 i$
5-15	$-0,00213 - 0,00557 i$	$-0,00118 - 0,01018 i$	$-0,05525 - 0,07856 i$
5-20	$-0,00213 - 0,00558 i$	$-0,00118 - 0,01018 i$	$-0,05523 - 0,07866 i$

TAB. 4.23: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises pour 10 modes au premier guide.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
10-12	$0,74620 + 0,00574i$	$0,12427 + 0,00461i$	$-0,30562 + 0,01211i$
10-15	$0,74558 + 0,00623i$	$0,12404 + 0,00501i$	$-0,30720 + 0,01315i$
10-20	$0,74550 + 0,00630i$	$0,12400 + 0,00507i$	$-0,30742 + 0,01327i$

TAB. 4.24: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies pour 10 modes au premier guide.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Modes	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
10-12	$-0,00200 - 0,00442i$	$-0,00147 - 0,00797i$	$-0,04766 - 0,06508i$
10-15	$-0,00206 - 0,00469i$	$-0,00149 - 0,00839i$	$-0,04941 - 0,06771i$
10-20	$-0,00206 - 0,00474i$	$-0,00148 - 0,00845i$	$-0,04958 - 0,06815i$

Nous avons à nouveau tenté de simuler une discontinuité douce par une suite de petits sauts. Les données d'entrée sont ajustées selon le nombre de discontinuités. Les hauteurs des guides  $b$  varient entre 0,1 et 0,2 m, les hauteurs par rapport à l'axe  $y$ ;  $H_{aui}$ , varient entre 0,3 m pour le premier guide et 0,1 m pour le  $n - 1^{ème}$  guide. Les positions des jonctions  $Z$  varient de 0 à 0,2 m et finalement le nombre de modes dans chaque guide augmente de 1 à chaque fois que l'on ajoute un guide. Ainsi,  $Mode$  est égal à 5 dans le premier guide jusqu'à 20 lorsque le système atteint 15 jonctions. La fréquence angulaire  $\omega$  est choisie de manière à n'avoir que des modes transmis. Les autres paramètres sont :

```
> larg := 0.2:  
> w := 2,3*1011:  
> m := 1:
```

Les résultats pour les ondes transmises et réfléchies sont présentés dans les tableaux (4.25) et (4.26).

Une fois encore, il semble que les valeurs ne convergent pas. Toutefois, les résultats demeurent stables si l'on effectue les essais avec les mêmes paramètres d'entrée.

TAB. 4.25: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes transmises en fonction du nombre de jonctions.

Onde incidente $Ag_1 = 1$			
Nb. de jonctions	$Ad_1$	$Ad_2$	$Ad_3$
2	$0,60149 + 0,00218 i$	$-0,00050 - 0,00067 i$	$-0,36034 + 0,00541 i$
3	$-0,60276 + 0,00339 i$	$-0,08373 + 0,00562 i$	$0,34436 + 0,00466 i$
4	$0,55452 - 0,00697 i$	$-0,35497 + 0,01216 i$	$-0,14212 - 0,01590 i$
5	$0,40044 - 0,15966 i$	$-0,55038 - 0,11991 i$	$0,11567 + 0,05669 i$
6	$0,25641 - 0,01518 i$	$-0,37253 + 0,02169 i$	$0,31336 - 0,03544 i$
7	$0,09715 - 0,00775 i$	$-0,22508 - 0,00148 i$	$0,19599 - 0,02015 i$
8	$0,04437 + 0,04773 i$	$-0,14501 - 0,05221 i$	$0,07740 + 0,04674 i$
10	$-0,00266 - 0,00131 i$	$0,00572 + 0,00632 i$	$-0,00969 - 0,01044 i$
12	$-0,00091 - 0,00004 i$	$0,00148 - 0,15338 i$	$-0,00289 + 0,00015 i$
15	$-0,00215 + 0,00102 i$	$0,00241 - 0,00128 i$	$-0,00295 + 0,00019 i$



TAB. 4.26: Guides rectangulaires. Amplitudes des ondes réfléchies en fonction du nombre de jonctions.

Onde incidente $Ag_l = 1$			
Nb. de jonctions	$Bg_1$	$Bg_2$	$Bg_3$
2	$-0,00100 + 0,00033 i$	$-0,00054 - 0,00036 i$	$-0,00419 + 0,00181 i$
3	$-0,00081 + 0,00028 i$	$-0,00034 + 0,00037 i$	$-0,00330 + 0,00170 i$
4	$-0,00258 - 0,00067 i$	$0,00257 + 0,00165 i$	$-0,00874 - 0,00198 i$
5	$0,02295 + 0,00132 i$	$-0,05281 + 0,12766 i$	$0,01962 + 0,36251 i$
6	$-0,03815 - 0,09244 i$	$0,12289 + 0,11656 i$	$-0,20561 - 0,03498 i$
7	$-0,10059 + 0,05428 i$	$0,15353 - 0,01573 i$	$-0,25884 - 0,04476 i$
8	$-0,44248 + 0,52132 i$	$0,36215 + 0,07509 i$	$-0,18815 - 0,41253 i$
10	$-0,44248 + 0,00131 i$	$0,00572 + 0,00632 i$	$-0,00969 - 0,01044 i$
12	$-0,09019 - 0,09757 i$	$0,15141 - 0,01568 i$	$-0,22218 + 0,12195 i$
15	$-0,93591 + 0,28761 i$	$0,06395 + 0,18091 i$	$0,03480 - 0,00564 i$

### 4.3 Discussion

Les résultats des essais, ayant pour but de vérifier la logique du programme tant pour les discontinuités des guides cylindriques (tableaux (4.1) et (4.2)) que rectangulaires (tableaux (4.13) et (4.14)), donnent des valeurs assez précises. En effet, pour des jonctions infinitésimales de l'ordre de  $10^{-12}$  mètre, l'onde incidente est transmise avec une erreur absolue d'environ  $1,0 \times 10^{-10}$ . Les autres ondes sont infinitésimales avec des amplitudes du même ordre de grandeur. Rappelons ici que les essais ne correspondent pas à des situations réelles. Ils n'ont pour but que la vérification de la logique du programme.

Dans les tableaux (4.3) à (4.8) pour les guides cylindriques, les résultats pour les ondes transmises du premier et du second ordre se stabilisent lorsque le nombre de modes est élevé dans chaque guide. Cette convergence est précise comme  $10^{-2}$  et tend vers  $10^{-3}$  pour un nombre encore plus élevé de modes, soit 15 et 20 modes.

À partir des amplitudes des différents modes, on peut reconstruire celle des champs électriques et magnétiques, au moyen par exemple des équations (2.4), (2.5) et (2.8), (2.9).

Pour les résultats obtenus aux jonctions des guides rectangulaires (tableaux (4.15) à (4.24)), on observe sensiblement les mêmes stabilités avec le nombre croissant de modes. Ici encore, les champs peuvent être obtenus des amplitudes par les équations (3.6), (3.7), (3.9) et (3.10).

De façon générale, l'amplitude des ondes réfléchies est converge plus plus rapidement que celle des ondes transmises.

Les résultats des tableaux (4.9) à (4.12) et les résultats des tableaux (4.25) et (4.26) dans l'approximation de jonctions douces sont très peu concluants. Chaque fois que le même programme est exécuté avec les mêmes données d'entrée, les résultats sont distincts aux jonctions des guides cylindriques. Toutefois, aux jonctions

des guides rectangulaires, les résultats demeurent constants d'un essai à l'autre mais ne semblent pas converger d'aucune façon.

# Chapitre 5

## Conclusion

Le comportement des ondes électromagnétiques guidées a fait l'objet de maintes études depuis plus de quarante ans. En effet, rappelons que les guides d'ondes, par leur diversité de formes (elliptiques, cylindriques, rectangulaires, etc.) et de composés (métalliques ou non conducteurs), demeurent importants dans des champs d'applications tels que le domaine des télécommunications. Les discontinuités dans les guides font partie d'une réalité incontournable et génèrent des modifications dans les champs électrique et magnétique.

L'approche par le développement des modes décrite dans ce travail a permis d'obtenir une expression des amplitudes des ondes en mode transversal magnétique en tenant compte des modes d'ordre supérieur. En plus d'exposer le développement théorique correspondant, nous présentons un programme effectué à l'aide du logiciel mathématique Maple V. Nous avons choisi ce dernier puisqu'il présente des qualités telles la versatilité et la convivialité par exemple dans les manipulations formelles, la solution d'équations, l'inversion de matrices et les solutions d'intégrales pour ne nommer que celles-ci. Les résultats obtenus dans le calcul des amplitudes des ondes, tant pour les guides cylindriques que rectangulaires pour des systèmes à une discontinuité, sont encourageants. Dans un premier temps, nous avons ré-

solu les équations liant les amplitudes des ondes transmises et réfléchies par des commandes de substitution et de solution d'équations. De cette manière, les résultats convergeaient mal en fonction du nombre de modes. L'amplitude des ondes transmises, peu importe le choix de l'onde transmise, commençait à diverger à 10 modes et plus. Ceci étant contraire aux résultats anticipés, nous avons modifié l'algorithme pour utiliser plutôt des inversions de matrices comme cela est montré aux sections 2.4.2 et 3.4.2. La convergence s'est beaucoup améliorée. Nous constatons qu'à partir de 10 modes, les amplitudes des ondes transmises convergent autour de 0,575, 0,320 et 0,064 pour le premier, deuxième et troisième ordre respectivement dans les guides cylindriques. Pour des essais dont les conditions sont similaires, les amplitudes des ondes transmises convergent autour de 0,746, 0,580 et 0,328 dans les guides rectangulaires.

Dans l'approximation des jonctions douces, c'est-à-dire un système à plusieurs discontinuités, les essais effectués ont mené à des résultats moins satisfaisants. Malgré que les essais aient été effectués avec un nombre de modes égal et supérieur à 5, les résultats sont stables mais ne convergent pas pour les guides rectangulaires et instables pour les guides cylindriques. Il serait intéressant de voir si la stabilité des résultats serait améliorée par l'usage de logiciels compilés tels Fortran et C.

Bref, pour obtenir les amplitudes des champs aux jonctions des guides cylindriques et rectangulaires, l'approche par le développement des modes demeure pertinente. L'utilisation du logiciel mathématique Maple V limite le choix des systèmes. Il s'avère efficace pour des systèmes à une discontinuité mais il demeure peu fiable dans les systèmes à plusieurs jonctions. Dans une étude ultérieure, il serait intéressant d'appliquer cette approche, afin d'obtenir les équations du champ magnétique en mode transversal électrique. Il serait aussi possible de calculer les énergies transmises. Ceci donnait une vue plus complète des champs et des énergies dans les guides.

# Annexe A

## Programme pour les guides cylindriques

L'annexe A présente les deux programmes permettant d'obtenir les coefficients de mode aux jonctions des guides cylindriques. L'annexe A.1 inclut un programme distinct servant à calculer les zéros des fonctions de Bessel et les annexes A.2 à A.6 contiennent le programme principal divisé en parties.

### A.1 Zéros des fonctions de Bessel

Le programme qui suit sert à calculer les  $\xi_{nm}$  des fonctions de Bessel. Les résultats sont enregistrés dans un fichier "zeros.m" et seront lus par le programme principal.

```
> restart ;
> alias(J=BesselJ);
> ZerosBesselJ:=proc(maxv,maxs)
>   local ksi, incr,v,h,s;
>   ksi:=array(0..maxv,1..maxs);
>   incr:=4.0;
>   for v from 0 to maxv do
>     h:=evalf(v+1.9*v(1/3)+1);
```

```

>      if v=0 then
>          ksi[v,1]:= fsolve(BesselJ(v,x),x,2.0..3.0)
>      else
>          ksi[v,1]:= fsolve(BesselJ(v,x),x,2.0..h)
>      fi;
>      for s from 2 to maxs do
> ksi[v,s]:=fsolve(BesselJ(v,x),x,ksi[v,s-1]..ksi[v,s-1]+incr)
>      od
>  od;
> RETURN(eval(ksi))
> end:
> Digits:=20:
> ksi:=ZerosBesselJ(10,20):
> convert(ksi,matrix);

```

## A.2 Variables d'entrée

```

> restart;
> Digits:=20:
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> read zeros.m;
> #
> # Les ksi sont les zéros des fonctions de Bessel. Ils sont
compilés dans un fichier Maple, zeros.m. La commande précédente
permet de lire toutes ces valeurs et de les réutiliser dans
le programme.
> # La liste R décrit les valeurs des rayons (en mètres) des
différents guides. La liste Z décrit la position des
jonctions (en mètres) des différents guides. maxM et maxD sont
respectivement les nombres de modes et de discontinuités.
n est l'ordre de la fonction de Bessel et  $\omega$  la fréquence angulaire
en rad/s.
> #
> R:=[0.1,0.1000000000001]:
> Z:=[0]:
> maxD:=1:

```

```

> maxM:=5:
> n:=0:
> w:=3*1010:

```

### A.3 Matrices des $k$ et des $IntA$

Dans cette partie, Maple V calcule les  $kg$ ,  $kd$ ,  $IntAg$  et  $IntAd$  puis place ces valeurs dans les matrices appropriées.

```

> # La procédure "Multip" effectue les multiplications des
> différentes matrices des coefficients calculées par la sous-
> procédure "Coeff". Cette dernière calcule et place les valeurs
> dans des matrices zoneg et zoned et les multiplie
> pour donner zonef.
> #
> Multip:=proc(R,Z,maxD,maxM,n,w)
> #
>     local p,zone,Coeff,L,A,B;
>     Coeff:=proc(Rg,Rd,z,maxM,n,w)
>         local m,l,i,j,IntAg,IntAd,zoneg,zoned,zonef,kg,kd,c;
> #
> # m,l,i,j sont des variables utilitaires, IntAg et IntAd sont les
> matrices des intégrales sur les rayons respectifs des guides
> "à gauche" et "à droite" de la jonction. kg et kd sont les
> matrices des nombres d'onde et c la vitesse de la lumière en m/s.
> #
>         c:=2.99792458*108;
> #
>         kg:=array(1..maxM);
>         kd:=array(1..maxM);
> #
> # La routine suivante calcule les kg et kd en choisissant la valeur
> positive de la racine imaginaire.
> #
>         for m from 1 to maxM do
>             kg[m]:=evalf(((w2/c2)-(ksi[n,m]/Rg)2)(1/2));
>             if Im(kg[m])<0 then

```



```

>             kg[m]:=-kg[m];
>         else
>             kg[m]:=kg[m];
>         fi;
>         kd[m]:=evalf(((w2/c2)-(ksi[n,m]/Rd)2)(1/2));
>         if Im(kd[m])<0 then
>             kd[m]:=-kd[m];
>         else
>             kd[m]:=kd[m];
>         fi;
>     od;
>     eval(kg);
>     eval(kd);
> #
> # La routine suivante calcule les intégrales sur les rayons
> # Rg et Rd.
> #
>     IntAg:=array(1..maxM,1..maxM);
>     IntAd:=array(1..maxM,1..maxM);
> #
>     for m from 1 to maxM do
>         for l from 1 to maxM do
> IntAg[m,l]:=evalf(int(x*BesselJ(n,ksi[n,m]*(x/Rd))
BesselJ(n,ksi[n,l]*(x/Rg)),x=0..Rg));
> IntAd[m,l]:=evalf(int(x*BesselJ(n,ksi[n,m]*(x/Rd))
BesselJ(n,ksi[n,l]*(x/Rg)),x=0..Rd));
>         od
>     od;
>     eval(IntAg);
>     eval(IntAd);

```

## A.4 Matrices *zoneg* et *zoned*

### A.4.1 $R_1 < R_2$

```

> # zoneg et zoned sont les matrices des coefficients à gauche
> # et à droite d'une jonction.
> #

```

```

>         zoneg:=array(1..2*maxM,1..2*maxM);
>         zoned:=array(1..2*maxM,1..2*maxM);
> #
> # La routine suivante tient compte des rayons croissants et
> # calcule les coefficients de mode. Ils sont ensuite placés dans
> # les matrices zoneg et zoned.
> #
>         if Rg<Rd then
>             for i from 1 to maxM do
>                 for j from 1 to maxM do
>                     if j=1 then
> zoneg[i,j]:=evalf(exp(I*kg[i]*z)*((Rg2)/2)
> (BesselJ(n+1,ksi[n,i]))2);
>                     else
> zoneg[i,j]:=0;
>                     fi
>                     od;
>                     for j from maxM+1 to 2*maxM do
>                         if j=i+maxM then
> zoneg[i,j]:=evalf(exp((-I)*kg[i]*z)*((Rg2)/2)
> (BesselJ(n+1,ksi[n,i]))2);
>                         else
> zoneg[i,j]:=0;
>                         fi;
>                         od;
>                     od;
>                     for i from maxM+1 to 2*maxM do
>                         for j from 1 to maxM do
> zoneg[i,j]:=evalf(kg[j]*exp(I*kg[j]*z)*IntAg[i-maxM,j]);
>                         od;
>                         for j from maxM+1 to 2*maxM do
> zoneg[i,j]:=evalf(-kg[j-maxM]*exp((-I)*kg[j-maxM]*z)
> IntAg[i-maxM,j-maxM]);
>                         od;
>                     od;
>                     eval(zoneg);
> #
>         for i from 1 to maxM do
>             for j from 1 to maxM do
> zoned[i,j]:=evalf(exp(I*kd[j]*z)*IntAg[j,i]);
>             od;

```

```

>               for j from maxM+1 to 2*maxM do
> zoned[i,j]:=evalf(exp((-I)*kd[j-maxM]*z)*IntAg[j-maxM,i]);
>               od
>           od;
>           for i from maxM+1 to 2*maxM do
>               for j from 1 to maxM do
>                   if j=i-maxM then
> zoned[i,j]:=evalf(kd[j]*exp(I*kd[j]*z)*((Rd2)/2)
(BesselJ(n+1,ksi[n,j]))2);
>                   else
> zoned[i,j]:=0;
>                   fi
>               od;
>               for j from maxM+1 to 2*maxM do
>                   if j=i then
> zoned[i,j]:=evalf(-kd[j-maxM]*exp((-I)*kd[j-maxM]*z)*((Rd2)/2)
(BesselJ(n+1,ksi[n,j-maxM]))2);
>                   else
> zoned[i,j]:=0;
>                   fi
>               od;
>           od;
>           eval(zoned);
> #
>           zonef:=multiply(inverse(zoned),zoneg);
> #

```

#### A.4.2 $R_1 > R_2$

```

> # La routine suivante calcule les matrices en tenant compte des
> # rayons décroissants.
> #
>           elif Rg>Rd then
>               for i from 1 to maxM do
>                   for j from 1 to maxM do
> zoneg[i,j]:=evalf(exp(I*kg[j]*z)*IntAd[i,j]);
>                   od;
>               for j from maxM+1 to 2*maxM do
> zoneg[i,j]:=evalf(exp((-I)*kg[j-maxM]*z)*IntAd[i,j-maxM]);

```

```

>             od
>             od;
>             for i from maxM+1 to 2*maxM do
>                 for j from 1 to maxM do
>                     if j=i-maxM then
> zoneg[i,j]:=evalf(kg[j]*exp(I*kg[j]*z)*((Rg2)/2)
(BesselJ(n+1,ksi[n,j]))2);
>                     else
> zoneg[i,j]:=0;
>                     fi
>                 od;
>                 for j from maxM+1 to 2*maxM do
>                     if j=i then
> zoneg[i,j]:=evalf(-kg[j-maxM]*exp((-I)*kg[j-maxM]*z)
((Rg2)/2)*(BesselJ(n+1,ksi[n,j-maxM]))2);
>                     else
> zoneg[i,j]:=0;
>                     fi
>                 od;
>             od;
>             eval(zoneg);
> #
>             for i from 1 to maxM do
>                 for j from 1 to maxM do
>                     if j=i then
> zoned[i,j]:=evalf(exp(I*kd[j]*z)*((Rd2)/2)
(BesselJ(n+1,ksi[n,j]))2);
>                     else
> zoned[i,j]:=0;
>                     fi
>                 od;
>                 for j from maxM+1 to 2*maxM do
>                     if j=i+maxM then
> zoned[i,j]:=evalf(exp((-I)*kd[j-maxM]*z)*((Rd2)/2)
BesselJ(n+1,ksi[n,j-maxM]))2);
>                     else
> zoned[i,j]:=0;
>                     fi;
>                 od;
>             od;
>             for i from maxM+1 to 2*maxM do

```

```

>             for j from 1 to maxM do
> zoned[i,j]:=evalf(kd[j]*exp(I*kd[j]*z)*IntAd[j,i-maxM]);
>             od;
>             for j from maxM+1 to 2*maxM do
> zoned[i,j]:=evalf(-kd[j-maxM]*exp((-I)*kd[j-maxM]*z)
IntAd[j-maxM,i-maxM]);
>             od;
>             od;
>             eval(zoned);
> #
>             zonef:=multiply(inverse(zoned),zoneg);
> #
>             else print('Rg=Rd')
> fi;
> end:

```

## A.5 Multiplication des *zonef*

```

> #
> # La routine qui suit appelle la procédure ‘‘Coeff’’ pour faire le
calcul des zonef à chaque jonction.
> #
>     for p from 1 to maxD do
>         zone[p] :=Coeff(R[p],R[p+1],Z[p],maxM,n,w);
>     od;
> #
> # Ici, la multiplication des zonef est effectuée selon qu’il y ait
une jonction ou plusieurs.
> #
>     if maxD=1 then
>         A:=zone[1];print('A=',A);
>     elif maxD>1 then
>         L:=2;
>         A:=zone[1];
>         while L<maxD+1 do
>             B:=multiply(zone[L],A);
>             A:=B;
>             L:=L+1;

```

```

>         od:
>         else print('il n'y a pas de discontinuité')
>         fi;
> eval(A);
> end:
> Coefficient:=Multip(R,Z,maxD,maxM,n,w);

```

## A.6 Formation des sous-matrices dans *Coefficient*

### A.6.1 Sous-matrices *C*

```

> # La matrice Coefficient est divisée en quatre sous-matrices et
> les coefficients de mode y sont placés.
> #
> Caa :=array(1..maxM,1..maxM) :
> Cab :=array(1..maxM,1..maxM) :
> Cba :=array(1..maxM,1..maxM) :
> Cbb :=array(1..maxM,1..maxM) :
> #
> for i from 1 to maxM do
>   for j from 1 to maxM do
>     Caa[i,j] :=Coefficient[i,j];
>     Cab[i,j] :=Coefficient[i,j+maxM];
>     Cba[i,j] :=Coefficient[i+maxM,j];
>     Cbb[i,j] :=Coefficient[i+maxM,j+maxM];
>   od
> od;
> #
> # On doit créer une liste des Ag pour ensuite y substituer les
> valeurs appropriées, par exemple  $Ag_1 = 1$  et  $Ag_i = 0$  pour  $i$  différent
> de 1.
> #
> Agau :=seq(Ag.i,i=1..maxM) :
> Abab :=convert(Agau,list) :
> Ag :=sort(Abab,lexorder) :
> #
> for f from 1 to maxM do
>   if f=1 then

```

```
>      Ag :=subsop(f=1,Ag);  
>      else  
>      Ag :=subsop(f=0,Ag);  
>      fi;  
> od;
```

### A.6.2 Solution pour les $Ad$ et $Bg$

```
> # Les opérations suivantes permettent d'obtenir les  $Ad$  et les  $Bg$ .  
> # Les matrices  $Mat1$ ,  $Mat2$  et  $Mat3$  sont des matrices des résultats  
de multiplication.  
> #  
> Mat1 :=multiply(Cab,inverse(Cbb));  
> Mat2 :=multiply(Mat1,Cba);  
> Mat3 :=Caa-Mat2;  
> Ad :=multiply(Mat3,Ag);  
> Bg :=multiply(multiply((-1)*inverse(Cbb),Cba),Ag);
```

## Annexe B

# Programme pour les guides rectangulaires

L'annexe B présente le programme permettant d'obtenir les coefficients de mode aux discontinuités des guides rectangulaires.

### B.1 Variables d'entrée

```
> restart;
> Digits:=20:
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> #
> # b est la liste des hauteurs bi en mètres des guides rectangulaires
successifs.
> # Hauty est la liste contenant les hauteurs (en mètres) de la base
des guides à partir de y = 0.
> # Z est la liste des positions (en mètres) des jonctions
successives.
> #
> b:=[0.1,0.110000,0.111000]:
> Hauty:=[0.005,0.004]:
```



```

> Z:=[0.1,0.100000001,0.1100000]:
> #
> # maxD correspond au nombre de discontinuités, maxM est le plus
grand nombre de modes utilisés parmi les guides.
> # Mode est la liste des modes dans tous les guides successifs.
> # Les variables Larg,  $\omega$  et m sont respectivement la largeur fixe
ai en mètres des guides, la fréquence angulaire en rad/s et
le mode associé à ai.
> #
> maxD:=2:
> maxM:=4:
> Mode:=[2,3,4]:
> larg:=0.2:
> w:=5*1010:
> m:=1:

```

## B.2 Matrices $k$ et $IntA$

```

> # La procédure "Nequa" calcule les valeurs associées aux
coefficients et bâtit les matrices.
> #
> Nequa:=proc(hg,hd,haudy,larg,z,maxM,modeg,moded,m,w,zonegaa,
zonegab,zonegba,zonegbb,zonedaa, zonedab, zonedba, zonedbb)
> local p,l,i,j,IntAg,IntAd,zone,kg,kd,c;
> #
> # p,l,i,j sont des nombres entiers.
> # c correspond à la vitesse de la lumière en m/s.
> # kg et kd sont des matrices contenant les valeurs des nombres
d'onde à gauche et à droite des jonctions.
> # IntAg et IntAd sont des matrices contenant les valeurs des
intégrales.
> # Les matrices zonega.., zoneda.. sont celles qui contiennent tous
les paramètres nécessaires à la construction des équations
à résoudre.
> #
>     c:=2.99792458*108:
>     kg:=array(1..maxM);
>     kd:=array(1..maxM);

```

```

> # La routine suivante calcule les valeurs de kg et de kd et
> les place dans une matrice.
> #
>   for p from 1 to maxM do
> kg[p]:=evalf(((w2/c2)-((m*Pi)/larg)2 +((p*Pi)/hg)2))(1/2));
>   if Im(kg[p])< 0 then
>     kg[p] :=-kg[p];
>   else
>     kg[p] :=kg[p];
>   fi;
> #
> kd[p]:=evalf(((w2/c2)-((m*Pi)/larg)2 +((p*Pi)/hd)2))(1/2));
>   if Im(kd[p])< 0 then
>     kd[p] :=-kd[p];
>   else
>     kd[p] :=kd[p];
>   fi;
>   od;
>   eval(kg);
>   eval(kd);
> #
> # La routine suivante calcule les valeurs des intégrales et les
> place dans une matrice.
> #
>   IntAg:=array(1..maxM,1..maxM);
>   IntAd:=array(1..maxM,1..maxM);
> #
>   for p from 1 to maxM do
>     for l from 1 to maxM do
>       IntAg[p,l]:=evalf(int(sin((p*Pi)/hd)*y
sin((l*Pi)/hg)*(y-hauty),y=hauty..hauty+hg));
>       IntAd[p,l]:=evalf(int(sin((p*Pi)/hg)*y
sin((l*Pi)/hd)*(y-hauty),y=hauty..hauty+hd));
>     od
>   od;
>   eval(IntAg);
>   eval(IntAd);

```

## B.3 Matrices *zoneg..* et *zoned..*

### B.3.1 $b_1 < b_2$

```

> # Cette partie de la procédure construit les matrices de
> transmission à gauche et à droite d'une discontinuité
> selon que le guide de "gauche" est plus PETIT que
> le guide de "droite".
> #
>     zonegaa:=array(1..modeg,1..modeg);
>     zonegab:=array(1..modeg,1..modeg);
>     zonegba:=array(1..moded,1..modeg);
>     zonegbb:=array(1..moded,1..modeg);
> #
>     zonedaa:=array(1..modeg,1..moded);
>     zonedab:=array(1..modeg,1..moded);
>     zonedba:=array(1..moded,1..moded);
>     zonedbb:=array(1..moded,1..moded);
> #
>     if hg<hd then
>         for i from 1 to modeg do
>             for j from 1 to modeg do
>                 if j=i then
> zonegaa[i,j]:=evalf(exp(I*kg[i]*z)*(hg/2));
>                 else
> zonegaa[i,j]:=0;
>                 fi
>             od;
>             for j from 1 to moded do
>                 if j=i then
> zonegab[i,j]:=evalf(exp((-I)*kg[i]*z)*(hg/2));
>                 else
> zonegab[i,j]:=0;
>                 fi;
>             od;
>         od;
> #
>         for i from 1 to moded do
>             for j from 1 to modeg do
> zonegba[i,j]:=evalf(kg[j]*exp(I*kg[j]*z)*IntAg[i,j]);

```

```

>         od;
>         for j from 1 to modeg do
> zonegbb[i,j]:=evalf(-kg[j]*exp((-I)*kg[j]*z)*IntAg[i,j]);
>         od;
>     od;
>     eval(zonegaa);
>     eval(zonegab);
>     eval(zonegba);
>     eval(zonegbb);
> #
> # Et pour la matrice à droite de la jonction i:
> #
>     for i from 1 to modeg do
>         for j from 1 to moded do
> zonedaa[i,j]:=evalf(exp(I*kd[j]*z)*IntAg[j,i]);
>         od;
>         for j from 1 to moded do
> zonedab[i,j]:=evalf(exp((-I)*kd[j]*z)*IntAg[j,i]);
>         od;
>     od;
>     for i from 1 to moded do
>         for j from 1 to moded do
>             if j=i then
> zonedba[i,j]:=evalf(kd[j]*exp(I*kd[j]*z)*(hd/2));
>             else
>                 zonedba[i,j]:=0;
>             fi
>         od;
>         for j from 1 to moded do
>             if j=i then
> zonedbb[i,j]:=evalf(-kd[j]*exp((-I)*kd[j]*z)*(hd/2));
>             else
>                 zonedbb[i,j]:=0;
>             fi
>         od;
>     od;
>     eval(zonedaa);
>     eval(zonedab);
>     eval(zonedba);
>     eval(zonedbb);

```

**B.3.2**  $b_1 > b_2$ 

```

> # Cette partie calcule les matrices zonega.. et zonedaa.. quand
> "hauteur de gauche" est plus grande que "hauteur de droite".
> #
>     elif hg>hd then
>         for i from 1 to moded do
>             for j from 1 to modeg do
> zonegaa[i,j]:=evalf(exp(I*kg[j]*z)*IntAd[j,i]);
>             od;
>             for j from 1 to modeg do
> zonegab[i,j]:=evalf(exp((-I)*kg[j]*z)*IntAd[j,i]);
>             od;
>         od;
>         for i from 1 to modeg do
>             for j from 1 to modeg do
>                 if j=i then
> zonegba[i,j]:=evalf(kg[j]*(exp(I*kg[j]*z))*(hg/2));
>                 else
> zonegba[i,j]:=0
>                 fi
>             od;
>             for j from 1 to modeg do
>                 if j=i then
> zonegbb[i,j]:=evalf(-kg[j]*exp((-I)*kg[j]*z)*(hg/2));
>                 else
> zonegbb[i,j]:=0
>                 fi
>             od;
>         od;
>         eval(zonegaa);
>         eval(zonegab);
>         eval(zonegba);
>         eval(zonegbb);
> #
> # Pour la matrice à droite de la jonction i:
> #
>         for i from 1 to moded do
>             for j from 1 to moded do
>                 if j=i then
> zonedaa[i,j]:=evalf(exp(I*kd[j]*z)*(hd/2));

```

```

>           else
> zonedaa[i,j]:=0
>           fi
>           od;
>           for j from 1 to moded do
>             if j=i then
> zonedab[i,j]:=evalf(exp((-I)*kd[j]*z)*(hd/2));
>             else
> zonedab[i,j]:=0
>             fi
>           od;
>           od;
>           for i from 1 to modeg do
>             for j from 1 to moded do
> zonedba[i,j]:=evalf(kd[j]*exp(I*kd[j]*z)*IntAd[i,j]);
>             od;
>             for j from 1 to moded do
> zonedbb[i,j]:=evalf(-kd[j]*exp((-I)*kd[j]*z)*IntAd[i,j]);
>             od;
>           od;
>           eval(zonedaa);
>           eval(zonedab);
>           eval(zonedba);
>           eval(zonedbb);
> #
>     else print('hg=hd')
> fi;
> end:

```

## B.4 Formation des sous-matrices $C..$ et $D..$

### B.4.1 Matrices $C..$ , $D..$ , $CDC$

```

> # Ici on appelle la procédure "Nequa" pour calculer les matrices
> des coefficients à partir de la dernière jonction.
> #
> for n from maxD by -1 to 1 do
> Nequa(b[n],b[n+1],Hauty[n],larg,Z[n],maxM,Mode[n],Mode[n+1],m,w,

```

```

Zoneaa[n],Zoneab[n], Zoneba[n], Zonebb[n], Zoneaa[n+1],
Zoneab[n+1], Zoneba[n+1], Zonebb[n+1]);
> #
>   Caa[n] := Zoneaa[n] :
>   Cab[n] := Zoneab[n] :
>   Cba[n] := Zoneba[n] :
>   Cbb[n] := Zonebb[n] :
> #
>   Daa[n] := Zoneaa[n+1] :
>   Dab[n] := Zoneab[n+1] :
>   Db a[n] := Zoneba[n+1] :
>   Dbb[n] := Zonebb[n+1] :
> #
> # Effectuons dans la séquence suivante les opérations nécessaires
> # à l'obtention des sous-matrices  $E_g$  et  $F_g$  qui contiennent
> # tous les résultats des opérations effectuées sur les matrices  $Caa_{..}$ 
> # afin d'obtenir la solution pour les  $Ad$  et les  $Bg$ .
> #
>   CD :=array(1..Mode[n]+Mode[n+1],1..Mode[n]+Mode[n+1]) :
>   CC :=array(1..Mode[n]+Mode[n+1],1..Mode[n]) :
>   DDaE :=array(1..Mode[n],1..Mode[n]+Mode[n+1]) :
>   DDbE :=array(1..Mode[n+1],1..Mode[n+1]) :
>   CDC :=array(1..Mode[n]+Mode[n+1],1..Mode[n]) :
>   Ed[n] :=array(1..Mode[n+1],1..Mode[n+1]) :
>   Eg[n] :=array(1..Mode[n],1..Mode[n]) :
>   Fg[n] :=array(1..Mode[n+1],1..Mode[n]) :

```

### B.4.2 Solution pour les $Ad$ et $Bg$

```

>   if n=maxD then
>       for i from 1 to Mode[n+1] do
>           for j from 1 to Mode[n+1] do
>               Ed[n][i,j] :=0;
>           od;
>       od;
>       else
>           Ed[n] :=Eg[n+1];
>       fi;
>       eval(Ed) :

```

```

> #
>   for i from 1 to Mode [n] do
>     for j from 1 to Mode [n] do
>       CD[i,j] :=-Cab[n][i,j];
>     od
>   od;
> #
>   for i from Mode[n+1] to Mode[n]+Mode[n+1] do
>     for j from 1 to Mode[n] do
>       CD[i,j] :=-Cbb[n][i-Mode[n],j];
>     od
>   od;
> #
>   DDaE :=evalm(Daa[n]+(multiply(Dab[n],Ed[n])));
>   DDbE :=evalm(Dba[n]+(multiply(Dbb[n],Ed[n])));
> #
>   for i from 1 to Mode[n] do
>     for j from Mode[n]+1 to Mode[n]+Mode[n+1] do
>       CD[i,j] :=DDaE[i,j-Mode[n]];
>     od
>   od;
> #
>   for i from Mode[n]+1 to Mode[n]+Mode[n+1] do
>     for j from Mode[n]+1 to Mode[n]+Mode[n+1] do
>       CD[i,j] :=DDbE[i-Mode[n],j-Mode[n]];
>     od
>   od;
> eval(CD) :
> #
> # Ici, on construit la matrice CC.
> #
>   for i from 1 to Mode[n] do
>     for j from 1 to Mode[n] do
>       CC[i,j] :=Caa[n][i,j];
>     od
>   od;
> #
>   for i from Mode[n]+1 to Mode[n]+Mode[n+1] do
>     for j from 1 to Mode[n] do
>       CC[i,j] :=Cba[n][i-Mode[n],j];
>     od

```



```

> od;
> eval(CC) :
> #
> CDC := evalm(multiply(inverse(CD),CC)) :
> #
> for i from 1 to Mode[n] do
>   for j from 1 to Mode[n] do
>     Eg[n][i,j] := CDC[i,j] ;
>   od
> od;
> eval(Eg) :
> od;
> #
> # La séquence suivante construit une liste des Ag afin de pouvoir
> # remplacer, par exemple Agi = 1 pour i = 1, 2, 3 à la première jonction.
> #
> Agau := seq(Ag.i, i=1..Mode[1]) :
> Abab := convert(Agau, list) :
> Ag := sort(Abab, lexorder) :
> for f from 1 to Mode[1] do
>   if f=1 then
>     Ag := subsop(f=1, Ag);
>   else
>     Ag := subsop(f=0, Ag);
>   fi;
> od;
> if maxD=1 then
>   Adroite := multiply(Fg[1], Ag);
> elif maxD>1 then
>   L := 2;
>   A := Fg[1];
>   while L<(maxD+1) do
>     B := multiply(Fg[L], A);
>     A := B;
>     L := L+1;
>   od;
>   Adroite := multiply(A, Ag);
> else
>   print(Il n'y a pas de discontinuité);
> fi;
> Bgauche := multiply(Eg[1], Ag);

```

# Bibliographie

- [1] Arndt, F., Tucholke, U., Wriedt, T., “Computer-Optimized Multisection Transformers between Rectangular Waveguides of Adjacent Frequency Bands.” IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 32, no. 11, pp. 1479-1484, novembre 1984.
- [2] Balaji, U., Vahldieck, R., “Mode-Matching Analysis of Circular-Ridged Waveguide Discontinuities.” IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 46, no. 2, pp. 191-195, février 1998.
- [3] Boridy, É., *Électromagnétisme, Théorie et Applications*. Québec : Presses de l’Université du Québec, 1985.
- [4] Bornemann, J., Arndt, F., “Modal-S-Matrix Design of Optimum Stepped Ridged and Finned Waveguide Transformers.” IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 35, no. 6, pp. 561-567, juin 1987.
- [5] Bornemann, J., Vahldieck, R., “Characterization of a Class of Waveguide Discontinuities Using a Modified  $TE_{mn}^x$  Mode Approach.” IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 18, no. 9, pp. 1816-1821, 1990.
- [6] Caratini, R., *Tout en Un, L’encyclopédie des Connaissances Essentielles*. Paris : Hachette, 1993.

- [7] Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., Watt, S.M., *First Leaves : A Tutorial Introduction To Maple V*. New York : Springer-Verlag, 1992.
- [8] Collin, R.E., *Field Theory of Guided Waves*. New York : McGraw-Hill, 1960.
- [9] Cornet, P., Dusséaux, R., Chandezon, J., "Wave Propagation in Curved Waveguides of Rectangular Cross Section." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 47, no. 7, pp. 965-971, juillet 1999.
- [10] De Smedt, R., Denturck, B., "Scattering Matrix of Junctions between Rectangular Waveguides." IEE Proc., vol. 130, no. 2, pp. 183-186, mars 1983.
- [11] Eleftheriades, G.V., Omar, A.S., Katehi, L.P.B., Rebeiz, G.M., "Some Important Properties of Waveguide Junction Generalized Scattering Matrices in the Context of the Mode Matching Technique." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 42, no. 10, pp. 1896-1903, octobre 1994.
- [12] Gardiol, F., *Hyperfréquences*. Lausanne : Éditions Georgi, 1981.
- [13] Haskal, H., "Matrix Description of Waveguide Discontinuities in the Presence of Evanescent Modes." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 13, pp. 184-188, 1965.
- [14] Ise, K., Koshiba, M., "Numerical Analysis of  $H$ -Plane Waveguide Junctions by Combination of Finite and Boundary Elements." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 36, no. 9, pp. 1343-1351, septembre 1988.
- [15] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, 2<sup>ème</sup> édition. New York : Wiley, 1962.
- [16] Jordan, E.C., Balmain, K.G., *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2<sup>ème</sup> édition. New Jersey : Prentice-Hall, 1968.

- [17] Kagami, S., Fukai, I., "Application of Boundary-Element Method to Electromagnetic Field Problems." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 32, no. 4, pp. 455-461, avril 1984.
- [18] Koshiba, M., Suzuki, M., "Finite-Element Analysis of  $H$ -Plane Waveguide Junction with Arbitrarily Shaped Ferrite Post." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 34, no. 1, pp. 103-109, janvier 1986.
- [19] Kraus, J.D., *Electromagnetics*, 4<sup>ème</sup> édition. New York : McGraw-Hill, 1992.
- [20] Lalancette, P-E., *Laboratoires Maple V.*, Québec : Le Griffon d'argile, 1999.
- [21] Lebedev, N.N., *Special Fonctions and their Applications*. New York : Dover Publications Inc., 1962.
- [22] Lemelin, M., *Maple V pour les Sciences, Introduction*. Québec : Le Griffon d'argile, 1997.
- [23] Lewin, L., "On the Inadequacy of Discrete Mode-Matching Techniques in Some Waveguide Discontinuity Problems." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 18, no. 7, pp. 364-372, juillet 1970.
- [24] Lorrain, P., Corson, D.R., *Electromagnetic fields and waves*, 3<sup>ème</sup> édition. New York : Freeman, 1988.
- [25] Marcuvitz, N., *Waveguide Handbook*. London : Peter Peregrinus Ltd., 1986.
- [26] Moller, P.E., Macphie, R.H., "On the Graphical Representation of Electric Field Lines in Waveguide." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 33, no. 3, pp. 187-192, mars 1985.
- [27] Mongiardo, M., Tomassoni, C., "Modal Analysis of Discontinuities Between Elliptical Waveguides." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 48, no. 4, pp. 597-604, avril 2000.

- [28] Navarro, E.A., Bordallo, T.M., Navasquillo-Mirailles, J., "FDTD Characterization of Evanescent Modes-Multimode Analysis of Waveguide Discontinuities." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 48, no. 4, pp. 606-610, avril 2000.
- [29] Pascher, W., Pregla, R., "Analysis of Rectangular Waveguide Discontinuities by the Method of Lines." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 43, no. 2, pp. 416-419, février 1995.
- [30] Patzelt, H., Arndt, F., "Double-Plane Steps in Rectangular Wavaguides and their Application for Transformers, Irises, and Filters." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 30, no. 5, pp. 771-776, mai 1982.
- [31] Safavi-Naini, R., Macphie, R.H., " On Solving Waveguide Junction Scattering Problems by the Conservation of Complex Power Technique." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 29, no. 4, pp. 337-343, avril 1981.
- [32] Safavi-Naini, R., Macphie, R.H., " Scattering at Rectangular-to-Rectangular Waveguide Junctions." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 30, no. 11, pp. 2060-2063, novembre 1982.
- [33] Strang, G., *Linear Algebra and its Applications*, 2<sup>ème</sup> édition. New York : Academic Press, 1980.
- [34] Wexler, A., "Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 15, no. 9, pp. 508-517, septembre 1967.
- [35] Wu, K.L., Delisle, G.Y., Fang, D.G., Lecours, M., "Waveguide Discontinuity Analysis with a Coupled Finite-Boundary Element Method." IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 37, no. 6, pp. 993-998, juin 1989.