

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
RACHID BENTOUMI

ÉTUDE ET ESTIMATION DE CERTAINES MESURES DE RISQUE MULTIVARIÉES
AVEC APPLICATIONS EN FINANCE

JUIN 2011

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

REMERCIEMENTS

Premièrement, j'aimerais bien exprimer mes chaleureux remerciements à mon directeur de recherche M. Mhamed Mesfioui, professeur titulaire au Département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières. Son apport scientifique, ses conseils judicieux et sa grande disponibilité ont grandement contribué à la réussite de ma maîtrise.

Je suis très reconnaissant envers mes chers parents, mes sœurs, mes frères et ma femme pour leur soutien tout au long de mes études.

J'adresse mes vifs remerciements à M. Ismaïl Biskri et M. Boucif Amar Bensaber, professeurs au Département de mathématiques et d'informatiques de l'UQTR, pour avoir accepter de lire et d'évaluer mon mémoire.

Une partie de mes travaux a été financée par des octrois individuels accordés à M. Mhamed Mesfioui, par le *Conseil de Recherche en Science Naturelles et en Génie du Canada*, ainsi que par une bourse du Département de mathématiques et d'informatique de l'UQTR. Je remercie également, Le *Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies* pour la bourse de maîtrise qu'il m'a accordée.

Table des matières

LISTE DES TABLEAUX	vi
LISTE DES FIGURES	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. MESURES DE RISQUE UNIVARIÉES FINANCIERS	3
1.1 Notions de base de risque	3
1.1.1 Définition de risque.....	3
1.1.2 Facteur de risque	3
1.1.3 Analyse du risque.....	4
1.1.4 Gestion des risques.....	4
1.2 Valeur-à-Risque	5
1.2.1 Définition de la VaR.....	5
1.2.2 Formulation mathématique de la VaR	6
1.2.3 Propriétés de la VaR.....	6
1.2.4 Exemples de calcul de la VaR	8
1.3 Valeur-à-Risque conditionnelle.....	17
1.3.1 Définition de la Valeur-à-Risque conditionnelle	17
1.3.2 Propriétés de la Valeur-à-Risque conditionnelle	17
1.3.3 Exemples de calcul de la VAR conditionnelle.....	23
1.3.4 Principe de la méthode de Monte-Carlo	27
CHAPITRE 2. MÉTHODES D'ESTIMATION DE LA VaR	30
2.1 Étapes de calcul de la VaR	31
2.1.1 Historique des prix.....	31
2.1.2 Modèle d'évaluation	32

2.1.3	Choix de la méthode d'estimation	32
2.1.4	Estimation de la distribution des pertes et profils et de la VaR.....	33
2.2	Simulation Historique.....	34
2.2.1	Étapes de la Simulation Historique	34
2.2.2	Application de la Simulation Historique	35
2.2.3	Avantages et limites de la Simulation Historique	42
2.3	Méthode de Variance-Covariance.....	43
2.3.1	Étapes de la méthode de Variance-Covariance.....	43
2.3.2	Application de la méthode de Variance-Covariance.....	47
2.3.3	Avantages et limites de la méthode de Variance-Covariance.....	48
2.4	Simulation de Monte Carlo	49
2.4.1	Cas d'un portefeuille constitué de deux facteurs de risque	49
2.4.2	Étapes de la Simulation de Monte Carlo.....	52
2.4.3	Application de la Simulation de Monte Carlo.....	54
2.4.4	Avantages et limites de la Simulation de Monte Carlo.....	63
2.6	Méthode basée sur des tests d'adéquation	64
2.6.1	Test d'adéquation de khi-deux	64
2.6.2	Test de Kolmogorov-Smirnov	66
2.6.3	Étapes de la méthode basée sur des tests d'adéquation	68
2.6.4	Principe de la méthode du maximum de vraisemblance (MV)	69
2.6.5	Application de la méthode basée sur des tests d'adéquation	72
CHAPITRE 3. THÉORIE DES COPULES.....		79
3.1	Généralités sur les copules.....	79
3.2	Théorème de Sklar.....	81
3.3	Propriétés fondamentales des copules	81
3.4	Familles usuelles de copules.....	85
3.4.1	Copule Gaussienne	85
3.4.2	Copule Student	86
3.4.3	Copules Archimédiennes	88
3.4.4	Copules Archimax.....	89

3.5	Modélisation par les copules	90
3.6	Exemples de construction de copules.....	90
	CHAPITRE 4. VALEURS-À-RISQUE BIVARIÉE.....	93
4.1	Introduction	93
4.2	La VaR bivariée orthant inférieure et supérieure	94
4.3	Bornes de la VaR bivariée orthant inférieure et supérieure	104
4.4	Illustrations	111
	CONCLUSION	117
	RÉFÉRENCES	121

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 – Valeurs de la VaR et la ES, en fonction de α , d'une variable aléatoire de loi exponentielle avec $\lambda = 2$	25
Tableau 2 – Valeurs de la VaR et la ES d'une variable aléatoire de loi normale.....	28
Tableau 3 – Historique des prix de clôtures ajustées.....	31
Tableau 4 – Cours historiques.....	36
Tableau 5 – Variations relatives.....	37
Tableau 6 – Valeurs estimées pour les prochaines périodes.....	38
Tableau 7 – Valeurs futures du portefeuille et pertes subies.....	40
Tableau 8 – Classement des valeurs de ΔP par ordre croissant	41
Tableau 9 – Variations relatives générées	59
Tableau 10 – Valeurs futures des facteurs de risque.....	60
Tableau 11 – Valeurs futures du portefeuille et distributions des pertes et profits	61
Tableau 12 – Classement de ΔP par ordre croissant	62
Tableau 13 – Classes des valeurs observées et théoriques	65
Tableau 14 – Valeurs des pertes et profits.....	73
Tableau 15 – Résultats des tests d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov.....	76
Tableau 16 – Valeurs de la VaR par différentes méthodes d'estimation	78
Tableau 17 – Familles classiques de copules archimédiennes.....	88

LISTE DES FIGURES

Figure 1 – Courbes de la VaR en fonction de α , d'une variable aléatoire de loi exponentielle avec $\lambda = 1,2,3$	12
Figure 2 – Courbes de la VaR, en fonction de α , d'une variable aléatoire de loi logistique avec $\nu = 0$ et $\xi = 1,2,3$	16
Figure 3 – Courbes de la VaR et la ES, en fonction de α , d'une variable aléatoire de loi exponentielle avec $\lambda = 2$	25
Figure 4 – Courbes de la VaR et la ES d'une variable aléatoire de loi normale.	28
Figure 5 – Étapes d'estimation de la VaR	30
Figure 6 – Estimation de la densité de Δ_1	55
Figure 7 – Estimation de la densité de Δ_2	56
Figure 8 – Estimation de la densité de Δ_3	57
Figure 9 – Histogramme des pertes et profits.....	74
Figure 10 – Ajustement des pertes et profits par des densités	75
Figure 11 – Ajustement des pertes et profits par des fonctions de repartitions	76
Figure 12 – Simulation des variables aléatoires u et v , en fonction de ρ , pour une copule Gaussienne bivariée.....	85
Figure 13 – Simulation d'une copule gaussienne bivariée avec $\rho = 0.99$	86
Figure 14 – Simulation des variables aléatoires u , et v , en fonction de ρ , pour une copule Student bivariée avec $\nu = 1$	87
Figure 15 – Simulation d'une copule Student bivariée avec $\rho = 0.99$ et $\nu = 1$	87
Figure 16 – Simulation d'une copule de Frank avec $\theta = 2$	89
Figure 17 – Courbes de la $\underline{\text{VaR}}_{0.95,x_1}(X)$ pour $\tau = 0.01, 0.5, 0.9$	113
Figure 18 – Bornes inférieures de la $\overline{\text{VaR}}_{0.95,x_1}(X)$ pour $\mu_1 = 4, \mu_2 = 10, \sigma_1 = 50$ et $\sigma_2 = 55$	115
Figure 19 – Bornes inférieures de la $\overline{\text{VaR}}_{0.95,x_1}(X)$ pour $\nu_1 = 5, \nu_2 = 7, \xi_1 = 57$ et $\xi_2 = 25$	116

INTRODUCTION

La finance en tant que discipline est fondée sur trois piliers à savoir la valeur de l'argent durant le temps, l'évaluation des actifs et la gestion des risques. Les méthodes utilisées pour gérer les risques de marché, dans les années 80, étaient peu satisfaisantes et ne permettaient pas d'effectuer des comparaisons entre différentes évaluations. L'accroissement de la volatilité des marchés financiers, le développement des produits dérivés et en particulier, une série de désastres ont poussé les instituts financiers à rechercher un indicateur global pour mesurer les risques financiers. Ces dernières années, la gestion des risques a connu un développement exponentiel. Ainsi, de nouveaux outils de gestion des risques financiers ont vu le jour récemment. En particulier, la Valeur-à-Risque est devenu un indicateur pratique permettant de mesurer les risques d'un portefeuille. Le concept de la Valeur-à-Risque, nous permet d'exprimer en un seul chiffre le montant à risque d'un portefeuille, même si celui-ci est composé de plusieurs classes d'actifs, actions, obligations, options, devises, etc. On pourra alors dire, avec un niveau de confiance donné, si le portefeuille est trop risqué ou non en fonction du chiffre obtenu, de la valeur du portefeuille et de l'aversion au risque de l'investisseur.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons à l'étude et l'estimation de la Valeur-à-Risque multivariée. Plus spécifiquement, nous allons examiner en détail la Valeur-à-Risque bivariée orthant inférieure et supérieure. Ces nouvelles mesures

permettent d'évaluer le risque d'un vecteur de risques tout en tenant compte de la dépendance entre ses composantes.

Ce mémoire est structuré comme suit. Au deuxième chapitre, nous allons présenter d'abord, des notions de base sur les risques financiers et des mesures de risque univariées. En particulier, nous examinerons en détail la Valeur-à-Risque et la Valeur-à-Risque conditionnelle. Ensuite, des exemples de calcul desdites mesures seront effectués et ce, en faisant référence aux modèles probabilistes les plus utilisés. Le troisième chapitre s'attachera à une étude détaillée sur les méthodes classiques d'estimation de la Valeur-à-Risque à savoir : Simulation Historique, Simulation de Monte Carlo, méthode Variance-Covariance et méthode basée sur des tests d'ajustement. Pour chacune de ces techniques, nous allons estimer la Valeur-à-Risque d'un portefeuille constitué de trois actions. Afin d'opérer un choix méthodologique, les avantages et les inconvénients pour chacune des méthodes envisagées seront présentés. Dans le quatrième chapitre, nous présenterons une introduction à la théorie des copules et son lien avec l'estimation de la Valeur-à-Risque multivariée. En outre, des exemples de simulation de familles usuelles de copules seront illustrés. Le dernier chapitre sera consacré à la Valeur-à-Risque multivariée orthant inférieure et supérieure. Dans un premier temps, nous allons proposer dans le cas bivarié, une nouvelle formulation, plus souple, de ces nouvelles mesures pour lesquelles nous introduirons plusieurs propriétés intéressantes. Dans un deuxième temps, des bornes explicites faciles à calculer de ces mesures seront établies. Des illustrations numériques faisant intervenir certaines familles de copules seront présentées.

CHAPITRE 1

MESURES DE RISQUE UNIVARIÉES FINANCIERS

1.1 Notions de base de risque

1.1.1 Définition de risque

Dans la littérature et au sein de l'industrie, le risque est la valeur potentielle d'une conséquence négative non désirée d'un événement ou d'une activité.

1.1.2 Facteur de risque

Un facteur de risque est un élément qui déclenche une perte en constituant l'origine d'un risque ou d'un ensemble de risques. On retrouve parmi les exemples classiques de facteurs de risque, la complexité des applications, la taille d'un projet donné, les nouveautés techniques, le manque d'expérience etc.

Dans la plupart des méthodes de gestion des risques on retrouve également, des listes de contrôle des risques lesquelles aident à identifier les facteurs de risque pouvant s'appliquer à un projet donné.

1.1.3 Analyse du risque

L'analyse du risque consiste à expliquer le phénomène du risque pour mieux définir des avenues de solution. Elle comporte une mise en contexte, un énoncé qui met en relation le risque et les facteurs de risque, des caractéristiques du risque, etc. Généralement, on peut retrouver des exemples d'analyse du risque dans la Banque des risques.

1.1.4 Gestion des risques

La gestion des risques est un processus qui comprend plusieurs étapes bien définies favorisant alors une meilleure prise de décision et ce, du fait qu'elle fournit une meilleure information sur les risques et leurs impacts. La gestion des risques est centrée sur l'identification et le traitement des facteurs de risque. De plus, elle a pour objectif d'ajouter le maximum de valeur durable à chaque activité de l'organisation en mobilisant la compréhension des aléas positifs ou négatifs qui dérivent de tous les facteurs pouvant affecter l'organisation. Ladite gestion augmente la probabilité de succès et réduit donc la probabilité d'échec et l'incertitude qui s'y attache. La gestion des risques est devenue en particulier, l'une des grandes responsabilités d'un gestionnaire d'entreprise et c'est pour cette raison, une attention particulière est portée sur la modélisation des fluctuations du marché sous un angle statistique.

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires, où X_i peut représenter, à titre d'exemple un actif, une action, une valeur mobilière, un rendement d'un placement détenu par un particulier ou une institution. En finance, le vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) représente alors, un portefeuille.

Pour un gestionnaire d'entreprise, la volatilité est un indicateur primordial pour la fluidité du marché. En termes statistiques, la volatilité d'un portefeuille est définie comme étant l'écart type des rendements de ce portefeuille. L'écart type est l'outil le plus connu pour mesurer la dispersion par rapport à une moyenne.

Nous verrons dans la section qui suit que la Valeur-à -Risque, se situe au centre de nombreux systèmes de gestion des risques, du fait qu'elle représente un indice important pour mesurer le risque associé à un portefeuille.

1.2 Valeur-à-Risque

1.2.1 Définition de la VaR

La VaR est un outil très répandu dans les marchés financiers dû à sa promesse implicite d'améliorer la gestion des risques en offrant une mesure complète des risques. La valeur-à-risque a comme fonction de donner une information synthèse sur le risque d'un titre financier ou d'un portefeuille de titres financiers. Elle se définit comme la perte maximale espérée à l'intérieur d'un horizon temporel étant donné un niveau de confiance. L'horizon temporel peut être journalier, hebdomadaire, semestriel, annuel, etc., et le niveau de confiance peut être 90%,

95%, 99%, etc. La dimension temporelle et le degré de confiance de la VaR sont généralement déterminés par le gestionnaire de portefeuille ou l'entreprise.

Afin de donner un bon estimé de la VaR d'un point de vue méthodologique, on fait appel à des notions avancées de probabilité, statistique et stochastique.

1.2.2 Formulation mathématique de la VaR

Soit X , une variable aléatoire dont la fonction de répartition est

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (1.1)$$

La Valeur-à-Risque de X au niveau α est définie comme suit :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha). \quad (1.2)$$

Cette définition signifie qu'avec une certitude de $(100\alpha)\%$, le montant du risque ne devrait pas dépasser la $\text{VaR}_\alpha(X)$. Autrement dit,

$$P\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} = \alpha, \quad (1.3)$$

où bien,

$$P\{X > \text{VaR}_\alpha(X)\} = 1 - \alpha.$$

1.2.3 Propriétés de la VaR

Propriété 1.1

Soit X une variable aléatoire continue et k une constante réelle alors,

$$\text{VaR}_\alpha(X + k) = \text{VaR}_\alpha(X) + k. \quad (1.4)$$

Démonstration

En utilisant (1.3) on aura

$$\begin{aligned} P\{X + k \leq \text{VaR}_\alpha(X + k)\} &= \alpha, \\ \Rightarrow P\{X \leq \text{VaR}_\alpha(X + k) - k\} &= \alpha. \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.3) et (1.5) on conclut que

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X + k) - k.$$

Ainsi,

$$\text{VaR}_\alpha(X + k) = \text{VaR}_\alpha(X) + k.$$

Propriété 1.2

Soit X une variable aléatoire continue et k une constante réelle alors :

$$\text{VaR}_\alpha(kX) = \begin{cases} k\text{VaR}_\alpha(X) & \text{si } k \geq 0 \\ k\text{VaR}_{1-\alpha}(X) & \text{si } k < 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Démonstration

i) si $k = 0$ il est toujours vrai que

$$\text{VaR}_\alpha(kX) = k\text{VaR}_\alpha(X).$$

ii) si $k > 0$ alors,

$$P\{kX \leq \text{VaR}_\alpha(kX)\} \Rightarrow P\left\{X \leq \frac{\text{VaR}_\alpha(kX)}{k}\right\} = \alpha.$$

De (1.3) on peut conclure que

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \frac{\text{VaR}_\alpha(kX)}{k},$$

donc,

$$\text{VaR}_\alpha(kX) = k\text{VaR}_\alpha(X).$$

iii) si $k < 0$ on aura :

$$\begin{aligned} P\{kX \leq \text{VaR}_\alpha(kX)\} &\Rightarrow P\left\{X \geq \frac{\text{VaR}_\alpha(kX)}{k}\right\} = \alpha, \\ &\Rightarrow P\left\{X < \frac{\text{VaR}_\alpha(kX)}{k}\right\} = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

cela veut dire que

$$\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = \frac{\text{VaR}_\alpha(kX)}{k},$$

ainsi,

$$\text{VaR}_\alpha(kX) = k\text{VaR}_{1-\alpha}(X).$$

1.2.4 Exemples de calcul de la VaR

Nous présentons dans cette partie quelques calculs de la Valeur-à-Risque associés aux densités de probabilité les plus connues. Des graphiques seront également illustrés pour montrer l'influence des paramètres de ces lois sur le comportement de la $\text{VaR}_\alpha(X)$.

Exemple 1.1 (VaR et loi normale)

Soit X , une variable aléatoire qui suit une loi normale, de moyenne μ et de variance σ^2 , notée $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. En utilisant (1.1), on a :

$$\begin{aligned} F_{\mu, \sigma}(x) &= P(X \leq x) \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Si on pose $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ alors, la variable aléatoire Z , suit une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1$, notée $Z \sim N(0,1)$. Cette loi est appelée la loi normale centrée réduite, et sa fonction de répartition est définie par :

$$\varphi(x) = P(Z \leq x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} F_{\mu, \sigma}(\text{VaR}_{\alpha, \mu, \sigma}(X)) &= P(X \leq \text{VaR}_{\alpha, \mu, \sigma}(X)) = \alpha, \\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\text{VaR}_{\alpha, \mu, \sigma}(X) - \mu}{\sigma}\right) &= \varphi\left(\frac{\text{VaR}_{\alpha, \mu, \sigma}(X) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha. \end{aligned}$$

D'après la dernière équation on aura

$$\frac{\text{VaR}_{\alpha, \mu, \sigma}(X) - \mu}{\sigma} = \varphi^{-1}(\alpha).$$

Ce qui nous permet de conclure finalement que

$$\text{VaR}_{\alpha, \mu, \sigma}(X) = \sigma\varphi^{-1}(\alpha) + \mu. \quad (1.7)$$

Comme $\varphi^{-1}(\alpha)$ est la Valeur-à-Risque de la variable aléatoire Z au niveau α , il s'en suit que

$$\text{VaR}_{\alpha, \mu, \sigma}(X) = \sigma\text{VaR}_{\alpha}(Z) + \mu.$$

Exemple 1.2 (VaR et loi normale bivariée)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues qui suivent une loi normale bivariée de moyenne (μ_1, μ_2) , de variance (σ_1^2, σ_2^2) et de coefficient de corrélation ρ . Calculons la VaR de la somme pondérée S définie de cette façon :

$$S = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2, \text{ avec } \omega_1 + \omega_2 = 1. \quad (1.8)$$

D'abord, nous devons trouver la loi univariée de moyenne μ_s et de variance σ_s^2 selon laquelle la somme pondérée S est distribuée.

De (1.8), on calcule l'espérance de S qui nous donne la moyenne μ_s :

$$\mu_s = E(S) = E(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2) = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2.$$

La variance de la somme pondérée S se calcule par :

$$\sigma_s^2 = \text{var}(S) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho.$$

Comme $S \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$, il s'ensuit de l'équation (1.7) que

$$\text{VaR}_\alpha(S) = \sigma_s \varphi^{-1}(\alpha) + \mu_s. \quad (1.9)$$

Si on suppose que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, cela veut dire que le coefficient de corrélation $\rho = 0$, et si on suppose en plus que $\mu_1 = \mu_2 = 0$ on aura

$$\mu = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_s^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2.$$

Dans ce cas, la Valeur-à-Risque de la somme pondérée S est

$$\text{VaR}_\alpha(S) = \sigma_s \varphi^{-1}(\alpha) = \sqrt{\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2} \varphi^{-1}(\alpha). \quad (1.10)$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} (\text{VaR}_\alpha(S))^2 &= (\omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2) (\varphi^{-1}(\alpha))^2 \\ &= \omega_1^2 \sigma_1^2 (\varphi^{-1}(\alpha))^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 (\varphi^{-1}(\alpha))^2 \\ &= \omega_1^2 (\sigma_1 \varphi^{-1}(\alpha))^2 + \omega_2^2 (\sigma_2 \varphi^{-1}(\alpha))^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Or, d'après (1.7) on a

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{\alpha,0,\sigma_1}(X_1) &= \sigma_1 \varphi^{-1}(\alpha) + \mu_1 \\ &= \sigma_1 \varphi^{-1}(\alpha),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{\alpha,0,\sigma_2}(X_2) &= \sigma_2 \varphi^{-1}(\alpha) + \mu_2 \\ &= \sigma_2 \varphi^{-1}(\alpha).\end{aligned}$$

Nous remplaçons ces deux dernières équations dans (1.11) et on trouve

$$\left(\text{VaR}_{\alpha,0,\sigma_1}(S)\right)^2 = \omega_1^2 \left(\text{VaR}_{\alpha,0,\sigma_1}(X_1)\right)^2 + \omega_2^2 \left(\text{VaR}_{\alpha,0,\sigma_2}(X_2)\right)^2. \quad (1.12)$$

Exemple 1.3 (VaR et loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ , notée $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. La densité de cette loi est définie par :

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)}, \quad x \geq 0 \text{ et } \lambda > 0.$$

La fonction de répartition de cette distribution est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}F_\lambda(x) &= \int_0^x f_\lambda(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)} dt. \\ &= \left[-e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)} \right]_0^x \\ &= -e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)} + 1.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F_{\lambda}^{-1}(x) = -\lambda \ln(1-x). \quad (1.13)$$

De (1.2) et (1.13) on trouve la valeur-à-Risque pour la loi exponentielle

$$\text{VaR}_{\alpha}(X) = -\lambda \ln(1-\alpha). \quad (1.14)$$

Le graphique suivant trace la Valeur-à-Risque en fonction de α pour $\lambda = 1, 2, 3$.

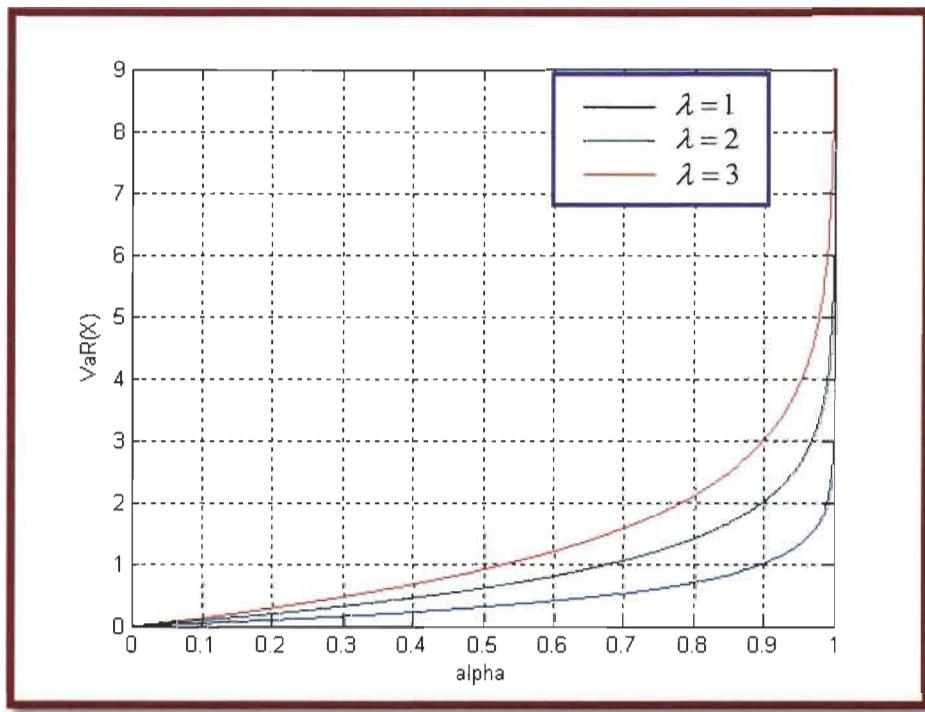


Figure 1 – Courbes de la VaR en fonction de α , d'une variable aléatoire de loi exponentielle avec $\lambda = 1, 2, 3$

À partir de ce dernier graphe, nous pouvons conclure que lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle, la VaR est une fonction croissante de la volatilité.

Exemple 1.4 (VaR et loi uniforme)

Soit X , une variable aléatoire continue qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, notée $X \sim U[a, b]$, où $a < b$. La densité de la loi uniforme est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Selon cette distribution, l'espérance et la variance sont données respectivement par les formules suivantes :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

La fonction de répartition de la variable X , selon la loi uniforme est

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$F^{-1}(x) = (b-a)x + a, \quad \text{si } a \leq x \leq b. \quad (1.15)$$

De (1.2) et (1.15), on déduit la Valeur-à-Risque selon cette distribution

$$\text{VaR}_{\alpha, a, b}(X) = (b-a)\alpha + a.$$

Il s'ensuit que

$$\text{VaR}_{\alpha, a, b}(X) = \sqrt{12 \text{var}(X)}\alpha + a. \quad (1.16)$$

Dans le cas particulier où $X \sim U[0,1]$, on obtient selon (1.16)

$$\text{VaR}_{\alpha, 0, 1}(X) = \alpha. \quad (1.17)$$

Exemple 1.5 (VaR et loi de Cauchy)

Soit X , une variable aléatoire qui suit une loi de Cauchy. Sa densité est définie par

$$f_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \left(1 + \left(\frac{x-k}{\varepsilon} \right)^2 \right)^{-1}, \quad x, k \in \mathbb{R} \text{ et } \varepsilon > 0.$$

La fonction de répartition selon cette loi est calculée comme suit :

$$F_{k,\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^x f_{k,\varepsilon}(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi\varepsilon} \left(1 + \left(\frac{t-k}{\varepsilon} \right)^2 \right)^{-1} dt.$$

On trouve

$$F_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-k}{\varepsilon} \right).$$

Par conséquent,

$$F_{k,\varepsilon}^{-1}(x) = \varepsilon \tan \left\{ \pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right\} + k. \quad (1.18)$$

De (1.2) et (1.18), on déduit la Valeur-à-Risque selon cette distribution

$$\text{VaR}_{\alpha,k,\varepsilon}(X) = \varepsilon \tan \left\{ \pi \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \right\} + k. \quad (1.19)$$

Exemple 1.6 (VaR et loi logistique)

Soit X , une variable aléatoire qui suit une loi logistique de paramètre ν et ξ dont la densité est

$$f_{\nu,\xi}(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\nu}{\xi}\right)}}{\left(1 + e^{-\left(\frac{x-\nu}{\xi}\right)}\right)^2}, \quad x, \nu \in \mathbb{R} \text{ et } \xi > 0.$$

Son espérance et sa variance sont données par les formules suivantes :

$$E(X) = \nu \text{ et } \text{var}(X) = \frac{\xi^2 \pi^2}{3}.$$

La fonction de répartition de cette loi est

$$F_{\nu, \xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\nu, \xi}(t) dt = \left(1 + e^{-\left(\frac{x-\nu}{\xi} \right)} \right)^{-1}.$$

Par conséquent,

$$F_{\nu, \xi}^{-1}(x) = -\xi \ln \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + \nu. \quad (1.20)$$

Ainsi, de (1.2) et (1.20), la Valeur-à-Risque selon cette distribution est

$$\text{VaR}_{\alpha, \nu, \xi}(X) = -\xi \ln \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) + \nu. \quad (1.21)$$

La figure qui suit rapporte la Valeur-à-Risque lorsque la variable aléatoire X suit la loi logistique et ce, pour $\nu = 0$ et $\xi = 1, 2, 3$.

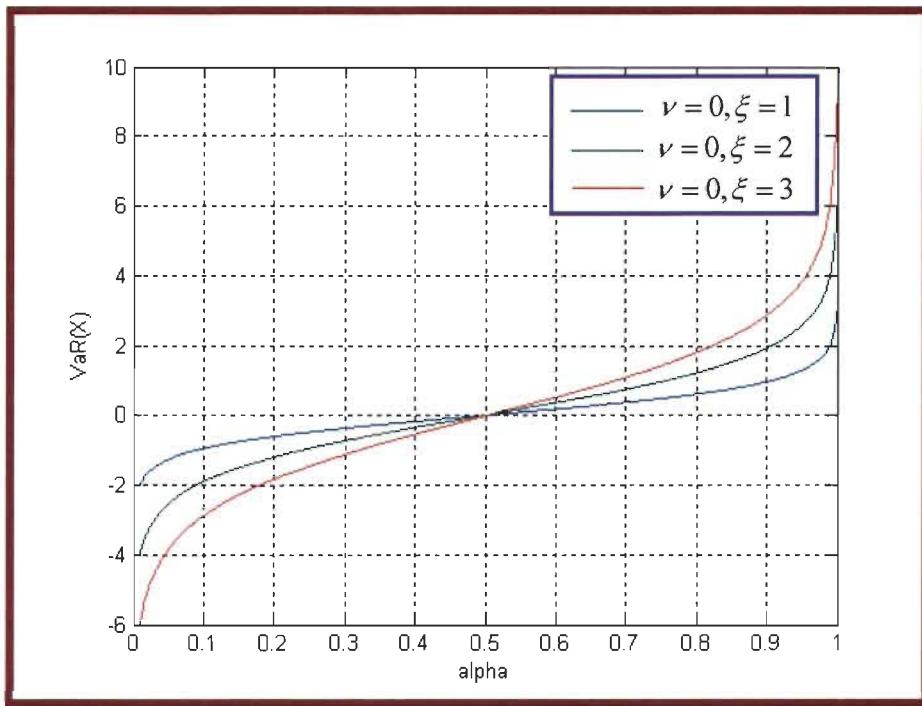


Figure 2 – Courbes de la VaR, en fonction de α , d'une variable aléatoire de loi logistique avec $v = 0$ et $\xi = 1,2,3$

Suite un article publié par Artzner et Coll. (1999), la VaR n'est plus considérée comme une méthodologie adéquate pour allouer un capital économique dans les institutions financières et ce, par sa violation du principe de sous-additivité. À cet égard, Artzner et ses collaborateurs proposent une nouvelle mesure de risque appelée la Valeur-à-Risque conditionnelle.

Dans la section suivante nous allons définir la Valeur-à-Risque conditionnelle, notée $ES_\alpha(X)$, appelée aussi Expected Shortfall, ainsi qu'étudier plusieurs propriétés intéressantes de cette nouvelle mesure de risque. Également, de

nombreuses illustrations numériques et graphiques, basées sur des modèles probabilistes classiques, y seront traités.

1.3 Valeur-à-Risque conditionnelle

1.3.1 Définition de la Valeur-à-Risque conditionnelle

Soit X une variable aléatoire représentant le risque associé à un portefeuille donné.

La Valeur-à-Risque conditionnelle de X notée $ES_\alpha(X)$ est une mesure de risque alternative à la $VaR_\alpha(X)$ que l'on définit comme suit :

$$ES_\alpha(X) = E\{X | X > VaR_\alpha(X)\}, \quad \forall \alpha \in [0,1]. \quad (1.22)$$

Parmi les avantages de la Valeur-à-Risque conditionnelle figure la sous additivité.

Ce qui signifie que

$$ES_\alpha\left(\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{i=n} ES_\alpha(X_i^C), \quad (1.23)$$

où, $X_1^C, X_2^C, \dots, X_n^C$, sont des risques comonotones et de même loi marginale que les risques X_1, X_2, \dots, X_n . Cette propriété sera démontrée dans la suite.

1.3.2 Propriétés de la Valeur-à-Risque conditionnelle

Dans cette section, nous allons examiner plusieurs propriétés de cette nouvelle mesure de risque. Nous allons commencer par mettre en relief une relation entre la VaR conditionnelle et la VaR classique.

Propriété 1.3

Pour tout risque X , $ES_\alpha(X)$ peut s'écrire en terme de la $VaR_\alpha(X)$ comme suit :

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha}^1 VaR_u(X) du \quad \forall u \in [0,1]. \quad (1.24)$$

Démonstration

Le risque X est une variable aléatoire de densité $f(x)$ et de fonction de répartition $F(x)$. Par définition on a :

$$ES_\alpha(X) = E\{X | X > VaR_\alpha(X)\}, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

En fonction de la densité $f(x)$, cette dernière équation devient :

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha}^{\infty} xf(x) dx. \quad (1.25)$$

Posons $u = F(x)$, ce qui veut dire que la variable u est de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. De ce fait, on aura alors

$$\begin{aligned} du &= dF(x) = f(x) dx, \\ F^{-1}(u) &= VaR_u(x) = x, \\ x \rightarrow \infty &\Rightarrow u \rightarrow F(\infty) = 1, \\ &\text{et} \\ x \rightarrow VaR_\alpha(X) &\Rightarrow u \rightarrow F(VaR_\alpha(X)) = \alpha. \end{aligned}$$

Nous remplaçons ces transformations dans l'équation (1.25) et on trouve :

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha}^1 VaR_u(X) du, \quad \forall u \in [0,1]. \quad (1.26)$$

Propriété 1.4

La mesure $ES_\alpha(X)$ est invariante par translation, ce qui signifie que

$$ES_\alpha(X+c) = ES_\alpha(X) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (1.27)$$

Démonstration

De la propriété 1, on a :

$$ES_\alpha(X+c) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(X+c) du, \quad \forall u \in [0,1].$$

Or,

$$\text{VaR}_u(X+c) = \text{VaR}_u(X) + c.$$

Donc,

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X+c) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 (\text{VaR}_u(X) + c) du \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(X) du + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 c du \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(X) du + \frac{c}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 1 du. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$ES_\alpha(X+c) = ES_\alpha(X) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Remarque

- Cette propriété montre que si l'on ajoute ou l'on retranche un montant c dans les comptes du centre de profit, le besoin en capital décroît ou augmente du même montant c .

Propriété 1.5

La mesure $ES_\alpha(X)$ est positivement homogène, de sorte que

$$ES_\alpha(cX) = cES_\alpha(X), \quad \forall c \geq 0. \quad (1.28)$$

Démonstration

La propriété 1.4 nous donne :

$$ES_\alpha(cX) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(cX) du, \quad \forall u \in [0,1].$$

Or,

$$\text{VaR}_u(cX) = c\text{VaR}_u(X),$$

donc,

$$\begin{aligned} ES_\alpha(cX) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 c\text{VaR}_u(X) du \\ &= \frac{c}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(X) du. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$ES_\alpha(cX) = cES_\alpha(X), \quad \forall c \geq 0.$$

Remarque

- Le résultat suivant montre une décomposition convexe de l'espérance du risque en fonction de la mesure $ES_\alpha(X)$.

Propriété 1.6

Pour tout risque X , on a :

$$E(X) = (1-\alpha)ES_\alpha(X) - \alpha ES_{1-\alpha}(-X). \quad (1.29)$$

Démonstration

On sait que

$$\begin{aligned} E(X) &= E\{X | X > \text{VaR}_\alpha(X)\} P\{(X > \text{VaR}_\alpha(X))\} \\ &\quad + E\{X | X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} P\{(X \leq \text{VaR}_\alpha(X))\}, \end{aligned}$$

cela revient à dire que

$$E(X) = (1-\alpha)E\{X | X > \text{VaR}_\alpha(X)\} + \alpha E\{X | X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\}. \quad (1.30)$$

Or,

$$E\{X | X > \text{VaR}_\alpha(X)\} = \text{ES}_\alpha(X), \quad (1.31)$$

et,

$$E\{X | X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} = -E\{-X | -X \geq -\text{VaR}_\alpha(X)\}.$$

De la propriété (1.4) on a :

$$-\text{VaR}_\alpha(X) = \text{VaR}_{1-\alpha}(-X).$$

Donc,

$$\begin{aligned} E\{X | X \leq \text{VaR}_\alpha(X)\} &= -E\{-X | -X \geq \text{VaR}_{1-\alpha}(-X)\} \\ &= -\text{ES}_{1-\alpha}(-X). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Nous introduisons les équations (1.31) et (1.32) dans l'équation (1.30) et nous trouvons que

$$E(X) = (1-\alpha)\text{ES}_\alpha(X) - \alpha\text{ES}_{1-\alpha}(-X).$$

Propriété 1.7

Pour tout risque X , la propriété suivante est une conséquence du résultat précédent :

$$\text{ES}_\alpha(cx) = -c\text{ES}_\alpha(-X). \quad (1.33)$$

Démonstration

La propriété 1.5 peut s'écrire de la manière suivante

$$E(X) = \alpha \text{ES}_{1-\alpha}(X) - (1-\alpha) \text{ES}_\alpha(-X),$$

autrement dit,

$$\text{ES}_\alpha(-X) = \frac{\alpha \text{ES}_{1-\alpha}(X) - E(X)}{(1-\alpha)}. \quad (1.34)$$

Sachant que,

$$\text{ES}_\alpha(cX) = \text{ES}_\alpha\{-(-cX)\},$$

ainsi, en utilisant (1.34) on aura

$$\text{ES}_\alpha\{-(-cX)\} = \frac{\alpha \text{ES}_{1-\alpha}(-cX) - E(-cX)}{(1-\alpha)}.$$

De la propriété 1.3 et l'équation (1.34), nous trouvons que

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha\{-(-cX)\} &= \frac{-c(\alpha \text{ES}_{1-\alpha}(X) - E(X))}{(1-\alpha)} \\ &= -c \text{ES}_\alpha(-X). \end{aligned}$$

Finalement nous pouvons conclure que

$$\text{ES}_\alpha(cX) = -c \text{ES}_\alpha(-X).$$

Propriété 1.8

Si X_1, X_2, \dots, X_n désignent des risques comonotones, alors

$$\text{ES}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{ES}_\alpha(X_i). \quad (1.35)$$

Démonstration

Par définition on a :

$$\text{ES}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \text{VaR}_u\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right) du \quad \forall u \in [0,1]. \quad (1.36)$$

Puisque les risques sont comonotones alors

$$\text{VaR}_u\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{VaR}_u(X_i).$$

L'équation (1.36) devient :

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \text{VaR}_u(X_i) du \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 \text{VaR}_u(X_i) du. \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{ES}_\alpha\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{ES}_\alpha(X_i).$$

1.3.3 Exemples de calcul de la VAR conditionnelle

Dans cette partie, nous illustrerons numériquement et graphiquement les valeurs de $\text{ES}_\alpha(X)$, basées sur des modèles probabilistes classiques, ainsi nous exploiterons la méthode de Monte-Carlo pour faire une approche de la $\text{ES}_\alpha(X)$ où cette dernière ne peut être calculée explicitement.

Exemple 1.7 (ES_α(X) et loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle d'espérance $λ$. Nous avons démontré pour ce modèle de probabilité que

$$\text{VaR}_u(X) = F_{\lambda}^{-1}(\alpha) = -\lambda \ln(1-u). \quad (1.37)$$

Par définition on a :

$$\text{ES}_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(X) du, \quad \forall u \in [0,1].$$

Nous introduisons (1.37) dans cette dernière équation et on nous trouvons

$$\text{ES}_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 -\lambda \ln(1-u) du. \quad (1.38)$$

Si on pose $v = 1 - u$ alors,

$$\begin{aligned} u \rightarrow 1 &\Rightarrow v \rightarrow 0, \\ u \rightarrow \alpha &\Rightarrow v \rightarrow 1-\alpha, \\ &\text{et,} \\ du &= -dv. \end{aligned}$$

L'équation (1.38) devient après ce changement de variable comme suit :

$$\begin{aligned} \text{ES}_{\alpha}(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{1-\alpha}^0 -\lambda \ln(v) (-dv) \\ &= \frac{-\lambda}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} \ln(v) dv. \end{aligned}$$

L'intégrale par partie de la dernière équation nous donne

$$\begin{aligned} \text{ES}_{\alpha}(X) &= \frac{-\lambda}{1-\alpha} \left\{ \left[v \ln(v) \right]_0^{1-\alpha} - \int_0^{1-\alpha} 1 dv \right\} \\ &= \frac{-\lambda}{1-\alpha} \left\{ \left[v \ln(v) \right]_0^{1-\alpha} - [v]_0^{1-\alpha} \right\} \\ &= \frac{-\lambda}{1-\alpha} \left\{ [(1-\alpha) \ln(1-\alpha)] - [1-\alpha] \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$ES_{\alpha}(X) = \lambda - \lambda \ln(1 - \alpha). \quad (1.39)$$

α	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$VaR_{\alpha}(X)$	4,816	5,051	5,319	5,627	5,991	6,438	7,013	7,824	9,210
$ES_{\alpha}(X)$	6,816	7,051	7,319	7,627	7,991	8,438	9,013	9,824	11,210

Tableau 1 – Valeurs de la VaR et la ES, en fonction de α d'une variable aléatoire de loi exponentielle avec $\lambda = 2$

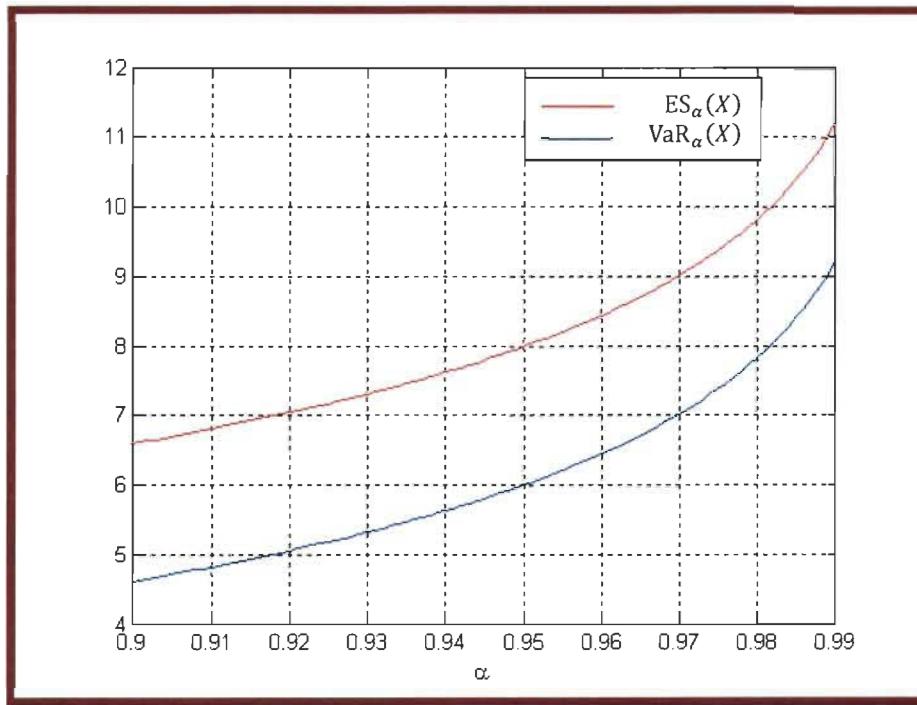


Figure 3 – Courbes de la VaR et la ES, en fonction de α , d'une variable aléatoire de loi exponentielle avec $\lambda = 2$

Remarque

- A partir de ce dernier graphe nous pouvons conclure que, lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle, la $\text{VaR}_\alpha(X)$ et la $\text{ES}_\alpha(X)$ sont des fonctions croissantes. En effet, elles augmentent lorsque λ , augmente aussi.

Exemple 1.8 ($\text{ES}_\alpha(X)$ et loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. On a montré selon cette distribution que $\text{VaR}_{u,a,b}(X) = (b-a)u + a$. Dans le cas particulier où $X \sim U[0,1]$, on aura $\text{VaR}_{u,0,1}(X) = u$. De ce fait, $\forall u \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\text{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_a^1 \text{VaR}_u(X) du \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_a^1 u du \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{u^2}{2} \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1-\alpha^2}{2} \right].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1+\alpha}{2}. \quad (1.40)$$

Remarque

- Notons qu'il n'est pas toujours possible de calculer explicitement la valeur de la VaR conditionnelle. Dans telles situations, on doit avoir recours à la méthode de Monte-Carlo pour déterminer cette valeur. Il s'agit d'une méthode probabiliste permettant d'approcher des intégrales.

Dans la section suivante, nous allons illustrer la méthode de Monte-Carlo pour calculer la $ES_\alpha(X)$ lorsque X suit une loi normale.

1.3.4 Principe de la méthode de Monte-Carlo

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. La méthode de Monte-Carlo donne une approximation raisonnable de l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$. Cette méthode consiste à générer une suite de variables aléatoires u_1, u_2, \dots, u_n , indépendantes et uniformément distribuées sur $[a, b]$. On peut ensuite approcher l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\{a + (b-a)u_i\}. \quad (1.41)$$

Nous allons appliquer cette approximation dans l'exemple suivant pour calculer la $ES_\alpha(X)$ où la variable X suit une loi normale.

Exemple 1.9 (ES $_\alpha(X)$ et loi normale)

Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, de fonction de répartition $F(x)$. Soit $\varphi(x)$ la fonction de répartition associée à la loi normale centré réduite $N(0,1)$. On a montré que lorsque $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, la valeur-à-Risque est calculée par

$$VaR_{u, \mu, \sigma}(X) = \sigma\varphi^{-1}(u) + \mu.$$

En utilisant (1.26) et la dernière équation, la Valeur-à-Risque conditionnelle peut s'écrire comme suit :

$$ES_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 (\sigma\varphi^{-1}(u) + \mu) du. \quad (1.42)$$

Dans cet exemple, il nous serait impossible de calculer la $ES_\alpha(X)$ explicitement. À cet effet, la méthode de Monte-Carlo décrite précédemment nous donne l'approximation suivante :

$$ES_\alpha(X) \approx \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \varphi^{-1} \left\{ \alpha + (1-\alpha)u_i \right\} + \mu.$$

Le tableau suivant donne des valeurs approchées de la $ES_\alpha(X)$ et de la $VaR_\alpha(X)$ lorsque la variable X suit une loi normale.

α	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$VaR_\alpha(X)$	1,341	1,405	1,476	1,555	1,645	1,751	1,881	12,054	2,326
$ES_\alpha(X)$	1,801	1,855	1,915	1,982	2,060	2,151	2,265	2,418	2,663

Tableau 2 – Valeurs de la VaR et la ES d'une variable aléatoire de loi normale

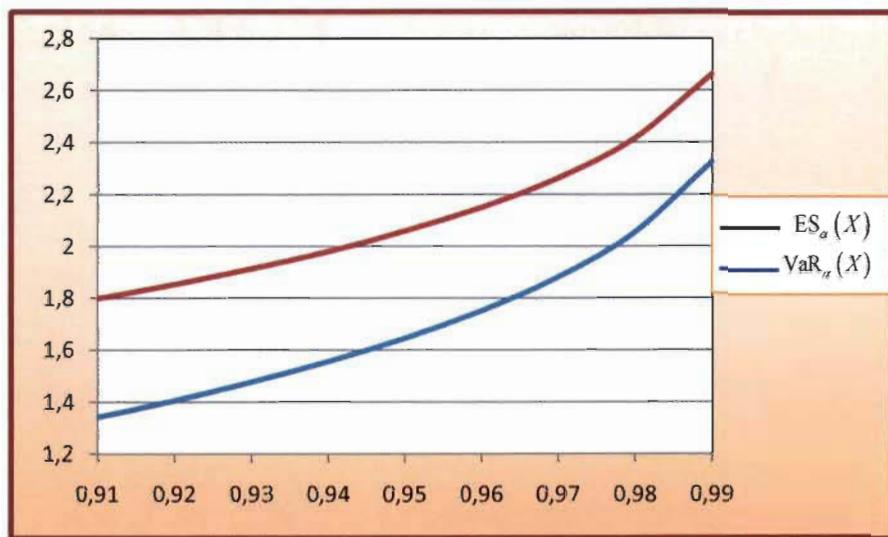


Figure 4 – Courbes de la VaR et la ES d'une variable aléatoire de loi normale.

Remarque

- *A partir de ce dernier graphie nous pouvons conclure que, lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi normale, la $\text{VaR}_\alpha(X)$ et la $\text{ES}_\alpha(X)$ sont des fonctions croissantes. Elles augmentent lorsque α augmente également.*

CHAPITRE 2

MÉTHODES D'ESTIMATION DE LA VaR

L'étape critique dans le calcul de la Valeur-à-Risque d'un portefeuille, est l'estimation de la distribution des pertes et profils de ce dernier. La problématique générale de l'estimation de la distribution des changements de la valeur du portefeuille et de la VaR peut se résumer par le schéma de la figure suivante :

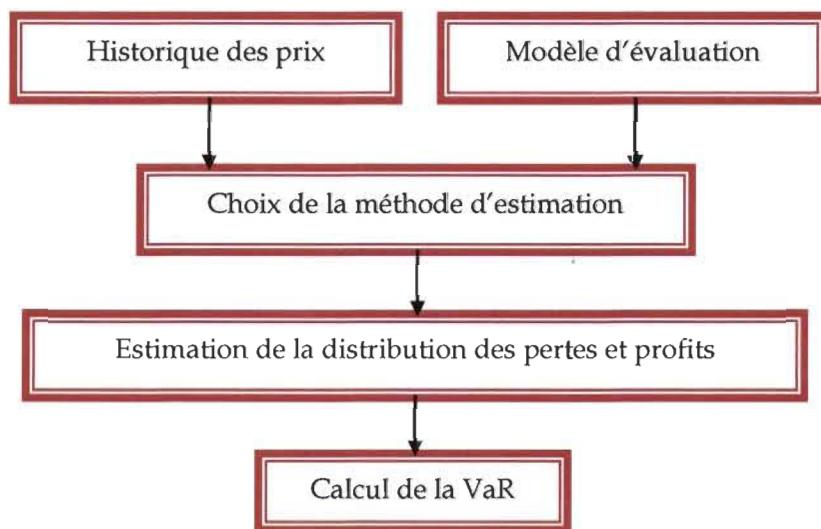


Figure 5 – Étapes d'estimation de la VaR

Nous examinerons dans ce qui suit, les différentes étapes de calcul de la VaR d'un portefeuille selon ESCH, L. KIEFFER, R. LOPEZ T., (1997), [4].

2.1 Étapes de calcul de la VaR

2.1.1 Historique des prix

L'historique des prix représente les observations des différents actifs pour un certain nombre de périodes passées. Cette étape est fondamentale pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. À titre d'exemple, le tableau suivant présente l'historique des prix de clôtures ajustées des indices Dow Jones Transportation Averag, Nasdaq composite et S&P 500 INDEXRTH et ce, pour la période du 4 janvier 2010 au 31 décembre 2010.

jour	date	Dow Jones Transportation Averag	Nasdaq composite	S&P 500 INDEXRTH
252	31 déc. 2010	5106.75	2217.42	1257.64
251	30 déc. 2010	5108.60	2254.23	1257.88
250	29 déc. 2010	5104.46	2261.80	1259.78
249	28 déc. 2010	5090.43	2289.09	1258.51
248	27 déc. 2010	5095.69	2309.80	1257.54
.
.
.
3	6 janv. 2010	4147.30	2301.09	1137.14
2	5 janv. 2010	4172.64	2308.71	1136.52
1	4 janv. 2010	4130.82	2308.42	1132.99

Tableau 3 – Historique des prix de clôtures ajustées¹

¹ <http://fr-ca.finance.yahoo.com/>

2.1.2 Modèle d'évaluation

Le risque de marché est le risque auquel est confronté l'investisseur en raison de sa méconnaissance de l'évolution future des variables fondamentales du marché que sont les cours des titres, les taux d'intérêts, les taux de change,... Ces variables, également appelées facteurs de risque, déterminent le prix des titres, des actifs conditionnels, des portefeuilles,...

Si on désigne par P_p le prix d'un portefeuille et par X_1, X_2, \dots, X_n les facteurs de risque qui expliquent le prix, on a la relation générale suivante :

$$P_p = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \varepsilon,$$

où,

- f est une fonction qui décrit le modèle d'évaluation;
- ε est le résidu représentant l'écart existant entre le prix effectif P_p et la fonction d'évaluation f .

Ainsi, la première étape consiste à choisir le modèle d'évaluation adéquat f , qui pourrait être linéaire comme des actions et non-linéaire comme des obligations et des options.

2.1.3 Choix de la méthode d'estimation

Les principales méthodes de l'approche classique de calcul de la VaR peuvent être classées en quatre catégories Simulation Historique, méthode de Variance-Covariance, Simulation de Monte Carlo, et méthode basée sur des tests d'ajustement. Le choix entre ces techniques d'estimation n'est pas une tâche facile

pour le gestionnaire de risque. En effet, son choix se base sur les capacités de chaque méthode à répondre à ses besoins.

Pour choisir entre ces différentes méthodes de calcul de la VaR, Linsmeier et Pearson (1996) énumèrent les critères suivants :

- La capacité de la méthode à capter les risques liés aux produits dérivés comme des options par exemple;
- La facilité dans l'implantation de la méthode choisie;
- La facilité dans la communication des résultats de la méthode à des utilisateurs internes et externes;
- La fiabilité des résultats obtenus;
- La flexibilité de la méthode à incorporer des hypothèses alternatives choisies par le gestionnaire de risque (ajustement du niveau de corrélation, de volatilité,...).

2.1.4 Estimation de la distribution des pertes et profils et de la VaR

Une fois la série historique des prix est obtenue, le modèle d'évaluation est spécifié et le choix de la méthode d'estimation est déterminé, nous passons à l'étape qui consiste à estimer la distribution des pertes et profits laquelle nous servira à la déduction de la valeur de la VaR d'un portefeuille.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les méthodes classiques d'estimation de la VaR, les applications y associées ainsi que les limites de chacune de ces techniques.

2.2 Simulation Historique

La méthode d'estimation de la VaR par Simulation Historique, connue également sous le nom Analyse Historique, est une méthode simple dans sa conception et sa mise en œuvre, puisque elle ne fait aucune hypothèse sur la forme de la distribution des pertes et profits. Il suffit alors, de disposer de la série des données historiques des rendements du portefeuille dont on souhaite calculer la VaR, à partir de laquelle il est possible de construire la distribution empirique des pertes et profits et d'en déduire la VaR au quantile désiré.

2.2.1 Étapes de la Simulation Historique

1. On détermine les différents facteurs de risques X_1, X_2, \dots, X_n qui peuvent être indices, cours de titres, taux d'intérêt, taux de change,... et qui expriment la valeur du portefeuille P_p par la relation suivante :

$$P_p = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (2.1)$$

2. En utilisant la série historique des prix, on calcule les variations relatives $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ associées aux facteurs de risques X_1, X_2, \dots, X_n par la formule suivante :

$$\Delta_k(t) = \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0 \quad (2.2)$$

3. À partir des valeurs observées des prix $X_k(t=0)$, $k = 1, 2, \dots, n$, on estime pour la prochaine période des valeurs futures $Y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, par :

$$Y_k(t) = X_k(0) \cdot (1 + \Delta_k(t)), \quad t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0. \quad (2.3)$$

4. On déduit alors, par le même modèle d'évaluation, la distribution du prix futur du portefeuille P_{pf} comme suit :

$$P_{pf}(t) = f(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)), \quad t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0. \quad (2.4)$$

5. On évalue le prix actuel du portefeuille $P_p(t = 0)$, et on estime la distribution des pertes et profits ΔP par :

$$\Delta P(t) = P_{pf}(t) - P_p(0), \quad t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0. \quad (2.5)$$

6. Nous classons les valeurs correspondantes aux pertes et profits par ordre de grandeur croissante;
7. Finalement, pour calculer la Valeur-à-Risque du portefeuille P_p à $\alpha\%$, il faut trouver la perte qui correspond au rang :

$$r = (1 - \alpha) \times T\%.$$

2.2.2 Application de la Simulation Historique

En utilisant les données historiques du tableau 2.1, nous appliquons la méthode de Simulation Historique pour calculer la VaR du portefeuille linéaire P_p composé des actions Dow Jones Transportation Averag, Nasdaq composite et S&P 500 INDEXRTH lesquels deviennent dès lors les facteurs de risque X_1, X_2 et X_3 respectivement.

Les démarches d'estimation de la VaR du portefeuille P_p , suite à l'application de cette technique, sont présentées dans ce qui suit.

Étape 1

La valeur du portefeuille linéaire P_p s'exprime par la relation suivante :

$$P_p = f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3.$$

Le tableau suivant retrace les observations des facteurs de risque X_1, X_2 et X_3 , extraites du tableau 2.1, à 252 époques (de -251 à 0, on aura donc $T = -251$).

t	$X_1(t)$	$X_2(t)$	$X_3(t)$
-251	5106.75	2217.42	1257.64
-250	5108.60	2254.23	1257.88
-249	5104.46	2261.80	1259.78
-248	5090.43	2289.09	1258.51
-247	5095.69	2309.80	1257.54
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
-2	4147.30	2301.09	1137.14
-1	4172.64	2308.71	1136.52
0	4130.82	2308.42	1132.99

Tableau 4 – Cours historiques

Étape 2

Nous calculons les variations relatives $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$ et $\Delta_3(t)$ associées aux valeurs de $X_1(t)$, $X_2(t)$ et $X_3(t)$, pour $t = -250, -249, \dots, 0$ et ce, par la formule (2.2).

t	$\Delta_1(t)$	$\Delta_2(t)$	$\Delta_3(t)$
-250	0.0004	0.0166	0.0002
-249	-0.0008	0.0034	-0.0015
-248	-0.0027	0.0121	-0.0010
-247	0.0010	0.0090	-0.0008
.	.	.	.
.	.	.	.
-2	0.0028	0.0005	-0.0040
-1	0.0061	0.0033	-0.0005
0	-0.0100	-0.0001	-0.0031

Tableau 5 – Variations relatives

Étape 3

Les valeurs estimées pour les prochaines périodes $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, et $Y_3(t)$ sont calculées par (2.3), pour $t = -250, -249, \dots, 0$.

t	$Y_1(t)$	$Y_2(t)$	$Y_3(t)$
-250	4132.3	2346.7	1133.2
-249	4127.5	2316.2	1134.7
-248	4119.5	2336.3	1131.8
-247	4135.1	2329.3	1132.1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
-2	4142.4	2309.5	1128.5
-1	4156.1	2316.1	1132.4
0	4089.4	2308.1	1129.5

Tableau 6 – Valeurs estimées pour les prochaines périodes

Étape 4

En utilisant le même modèle d'évaluation, nous évaluons les valeurs futures du portefeuille pour $t = -250, -249, \dots, 0$:

$$P_{pf}(t) = f(Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)) = Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t).$$

Les estimations de P_{pf} seront présentées dans le tableau 2.4.

Étape 5

La valeur actuelle du portefeuille P_p à $t = 0$ est

$$\begin{aligned} P_p(0) &= X_1(0) + X_2(0) + X_3(0) \\ &= 4130.82 + 2308.42 + 1132.99 \\ &= 7572.23 \text{ $.} \end{aligned}$$

Le tableau suivant regroupe les valeurs futures du portefeuille P_{pf} et la distribution des pertes et profits ΔP , calculée par (2.5).

t	$P_{pf}(t)$	$\Delta P(t)$
-250	7612. 2633	-40.0333
-249	7578. 3457	-6.1157
-248	7587. 5864	-15.3564
-247	7596. 5100	-24.2801
.	.	.
.	.	.
.	.	.
-2	7580. 2946	-8.0647
-1	7604. 4958	-32.2658
0	7527. 0201	45.2099

Tableau 7 – Valeurs futures du portefeuille et pertes subies

Étape 6

Dans cette étape, nous classons les valeurs estimées des pertes et profits par ordre croissant (de la plus petite -370.1964 correspondant en fait à une perte à la plus grande 357.5808 représentant un profit).

rang	ΔP
1	-370.1964
2	-266.9064
3	-259.6342
4	-254.1294
5	-245.9461
6	-238.8690
7	-212.7731
8	-203.7300
.	.
.	.
13	-144.6886
.	.
.	.
.	.
.	.
249	301.9385
250	349.8324
251	357.5808

Tableau 8 – Classement des valeurs de ΔP par ordre croissant

Étape 7

La VaR du portefeuille P_p à 95% correspond alors, à la valeur de la perte au rang :

$$r = 251 \times 5\% = 12.55 \approx 13.$$

Ainsi, d'après les résultats du dernier tableau, la Valeur-à-Risque du portefeuille P_p , correspondant au ledit rang, par la méthode d'Analyse Historique est

$$\text{VaR}_{0.95}^{AH} = -144.6886 \text{ $.}$$

2.2.3 Avantages et limites de la Simulation Historique

La méthode de Simulation Historique est une approche non paramétrique, ne retient aucune hypothèse concernant la distribution des pertes et profits. Elle repose, en particulier, sur l'utilisation des séries journalières passées des facteurs de risques qui influencent sur le portefeuille. Par ailleurs, le système est aisément à implémenter et ses principes sont faciles à comprendre à tous les niveaux de l'entreprise.

Malgré la facilité de compréhension et d'explication de cette méthode, plusieurs limites existent :

- L'hypothèse que la VaR future se comporte comme la VaR passée;
- La série des données historiques qui peut aller jusqu'à plusieurs observations;
- La grande sensibilité des résultats par rapport à la longueur de l'horizon de temps et la période de temps;
- Le problème de cohérence des données collectées.

2.3 Méthode de Variance-Covariance

La méthode de Variance-Covariance, appelée aussi Delta-Normale, a été introduite par *JP Morgan* avec son système RiskMetrics. Elle tire son nom du fait qu'elle mesure la VaR sur la base de l'estimation de la matrice variances-covariances des variations des facteurs de risque lesquelles composent le portefeuille. Cette méthode repose sur la normalité de la distribution des facteurs de risque, la normalité de la distribution des pertes et profits, la stationnarité des prix ou des rendements de la position objet de l'estimation pour l'horizon retenu de calcul de la VaR et repose également sur la linéarité de la relation entre les prix de ces positions et les facteurs de risque.

2.3.1 Étapes de la méthode de Variance-Covariance

1. On identifie les différents facteurs de risques X_1, X_2, \dots, X_n , exprimant la valeur du portefeuille P_p , de valeurs linéaires par la relation suivante :

$$P_p = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n, \quad (2.6)$$

où, a_i est le nombre d'actions $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ par exemple;

2. Pour $k = 1, 2, \dots, n$ et $t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0$, on calcule la variation de la valeur du portefeuille

$$\begin{aligned} \Delta P(t) &= P_p(t) - P_p(t-1) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k X_k(t) - \sum_{k=1}^n a_k X_k(t-1) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (X_k(t) - X_k(t-1)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $k = 1, 2, \dots, n$ et $t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0$ on a :

$$\Delta P(t) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(t-1) \frac{(X_k(t) - X_k(t-1))}{X_k(t-1)}. \quad (2.7)$$

Pour $k = 1, 2, \dots, n$ et $t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0$, posons :

$$x_k(t-1) = a_k X_k(t-1) \text{ et } \Delta_k(t) = \frac{X_k(t) - X_k(t-1)}{X_k(t-1)},$$

où,

- $a_k X_k(t-1)$ désigne le montant investi en $(t-1)$ dans le k -ème facteur de risque;
- $\Delta_k(t)$ représente la variation relative associée au facteur de risque X_k .

Alors, la relation (2.7) pour $k = 1, 2, \dots, n$ et $t = -T + 1, -T + 2, \dots, 0$ devient :

$$\Delta P(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t-1) \Delta_k(t). \quad (2.8)$$

Dans cette deuxième étape, nous procédons à calculer les positions actuelles pour les différents facteurs de risque $x_k(0)$, $k = 1, 2, \dots, n$ que nous noterons désormais x_k , $k = 1, 2, \dots, n$.

À partir de l'historique, nous déterminons l'estimation des variations relatives moyennes pour tous les facteurs de risque par :

$$E(\Delta_k(1)) = E_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

3. L'espérance des pertes et profits se déduit aisément par (2.8) et (2.9)

$$E(\Delta P_p(t=1)) = E\left(\sum_{k=1}^n x_k(0) \Delta_k(1)\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Pour simplifier l'écriture, on pose dans toute la suite $x_k = x_k(0)$. Ainsi, pour $k = 1, 2, \dots, n$, l'espérance des pertes et profits peut s'écrire de la forme suivante :

$$\begin{aligned} E(\Delta P(1)) &= \sum_{k=1}^n x_k E(\Delta_k(1)) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k E_k, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que

$$E(\Delta P(1)) = x^t E, \quad (2.10)$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}.$$

Nous calculons ensuite la matrice variance-covariance V , des variations relatives Δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\text{var}(\Delta_k) = \sigma^2_k = \sigma_{kk}, \text{ et } \text{cov}(\Delta_k, \Delta_l) = \sigma_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Ceci, nous permet de calculer la variance des pertes et profits telle que

$$\begin{aligned} \sigma^2(\Delta P(1)) &= \text{var}(\Delta P(1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_k x_l \sigma_{kl}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sigma^2(\Delta P) = x^t V x, \quad (2.11)$$

où,

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{21}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

4. La méthode de Variance-Covariance repose sur la normalité de la distribution des pertes et profits. De ce fait, $\Delta P(1) \sim N(E(\Delta P), \sigma^2(\Delta P))$.

Ainsi, la VaR_{α}^{VC} du portefeuille P_p se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} P(\Delta P(1) \leq \text{VaR}_{\alpha}^{VC}) &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow P\left(\frac{\Delta P(1) - E(\Delta P)}{\sigma(\Delta P)} \leq \frac{\text{VaR}_{\alpha}^{VC} - x^T E}{\sigma(\Delta P)}\right) &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Or,

$$Z = \frac{\Delta P(1) - E(\Delta P)}{\sigma(\Delta P)} \sim N(0, 1).$$

Ce qui montre que

$$\frac{\text{VaR}_{\alpha}^{VC} - E(\Delta P)}{\sigma(\Delta P)} = Z_{1-\alpha}, \quad (2.12)$$

où $Z_{1-\alpha}$ est le quantile de la distribution normale centrée réduite.

Puisque $Z_{1-\alpha} = -Z_{\alpha}$ alors, l'expression (2.12) devient

$$\text{VaR}_{\alpha}^{VC} = E(\Delta P) - z_{\alpha} \sigma(\Delta P).$$

Par (2.10) et (2.11), on aura

$$\text{VaR}_{\alpha}^{VC} = x^T E - z_{\alpha} \sqrt{x^T V x}. \quad (2.13)$$

2.3.2 Application de la méthode de Variance-Covariance

Les étapes permettant de calculer la Valeur-à-Risque du portefeuille linéaire P_p par de la méthode de Variance-Covariance, sont illustrées dans ce qui suit.

Étape 1

Le portefeuille P_p , composé de valeurs linéaires s'écrit en fonction des facteurs de risque X_1, X_2 et X_3 :

$$P_p = X_1 + X_2 + X_3.$$

Étape 2

Les positions actuelles en les différents facteurs de risque, $x_1(0)$, $x_2(0)$ et $x_3(0)$ sont calculées par (2.7) :

$$x = \begin{pmatrix} 4130,82 \\ 2308,42 \\ 1132,99 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le tableau 2.4 et (2.8), nous obtenons l'estimation des variations relatives moyennes E_1, E_2 et E_3 et la matrice variance-covariance des variations relatives des facteurs de risque Δ_1, Δ_2 et Δ_3 :

$$E = 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.7299 \\ 0.2623 \\ -0.3514 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.23074 & 0.1624 & 0.1584 \\ 0.1624 & 0.2053 & 0.1269 \\ 0.1584 & 0.1269 & 0.1292 \end{pmatrix}.$$

Étape 3

L'estimation de l'espérance $E(\Delta P)$ et la variance $\sigma^2(\Delta P)$ des pertes et profits se déduisent respectivement par (2.10) et (2.11) :

$$E(\Delta P) = -2.8078 \quad \text{et} \quad \sigma^2(\Delta P) = 10442.1147.$$

Étape 4

La VaR du portefeuille au niveau de confiance 95%, en utilisant la méthode de Variance-Covariance, est calculée par (2.13) :

$$\text{VaR}_{0.95}^{VC} = -170.89 \text{ $.}$$

2.3.3 Avantages et limites de la méthode de Variance-Covariance

L'approche Variance-Covariance est une méthode paramétrique, utilise la série historique des données pour estimer la distribution de rendement du marché. Cette technique est flexible et simple dans sa conception.

Cependant, cette méthode souffre des faiblesses aux hypothèses restrictives suivantes :

- La linéarité des rendements des portefeuilles;
- La normalité des changements dans les facteurs de marché.
- L'existence d'une matrice de covariance qui caractérise les données historiques.

De plus, l'hypothèse de normalité des distributions des variations des facteurs de risque n'est pas toujours satisfaisante mais permet une grande simplicité dans les calculs.

Notons également, que les techniques basées sur la méthode Variance-Covariance sous-estiment le risque d'un portefeuille quand la distribution est aplatie et inclinée du côté gauche.

2.4 Simulation de Monte Carlo

La méthode de Simulation de Monte Carlo est une approche statistique utilisée lorsqu'il est très difficile de déterminer l'expression mathématique de la loi de probabilité des pertes et profits. Elle consiste à construire la distribution des pertes et profits en générant un grand nombre d'échantillons pseudo aléatoire issus d'une distribution connue.

2.4.1 Cas d'un portefeuille constitué de deux facteurs de risque

Soit X_1 et X_2 deux facteurs de risque exprimant le prix du portefeuille P_p par la relation suivante :

$$P_p = f(X_1, X_2).$$

On désire générer deux vecteurs Δ_1 et Δ_2 suivant une loi donnée, qui représentent les valeurs des variations relatives, de la manière qui suit :

$$\begin{aligned} E(\Delta_1) &= \mu_1, \quad \text{var}(\Delta_1) = \sigma_1^2, \\ E(\Delta_2) &= \mu_2, \quad \text{var}(\Delta_2) = \sigma_2^2. \end{aligned}$$

La covariance de ces deux vecteurs est définie par :

$$\text{cov}(\Delta_1, \Delta_2) = \sigma_{12}.$$

On génère deux autres variables δ_1 et δ_2 , indépendantes, obéissant à la même loi théorique telles que

$$E(\delta_1) = 0, \quad \text{var}(\delta_1) = 1,$$

$$E(\delta_2) = 0 \text{ et } \text{var}(\delta_2) = 1.$$

Pour obtenir des variables Δ_1 et Δ_2 ayant les propriétés voulues, il suffit de définir

$$\Delta_1 = \sigma_1 \delta_1 + \mu_1,$$

$$\Delta_2 = \sigma_2 \rho \delta_1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \delta_2 + \mu_2,$$

où, le coefficient de corrélation ρ est calculé par :

$$\rho = \text{corr}(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

La définition des variables Δ_1 et Δ_2 peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Si on pose

$$L = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix},$$

alors,

$$\begin{aligned} LL^T &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \rho \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \rho^2 + \sigma_2^2 (1 - \rho^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$LL^T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice LL^T , désigne la matrice des variances-covariances des variations relatives et la matrice L s'en déduit donc par décomposition de Choleski².

Si on pose :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

La relation (2.14) devient

$$\Delta = L \delta + \mu. \quad (2.15)$$

Une fois les variables Δ_1 et Δ_2 sont générées :

$$\Delta_k(t), \quad k = 1, 2 \quad \text{et} \quad t = 1, 2, \dots, M,$$

on détermine les valeurs futures des facteurs de risque $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ à partir des valeurs observées actuellement $X_1(0), X_2(0)$:

$$Y_k(t) = X_k(0) \cdot (1 + \Delta_k(t)), \quad k = 1, 2 \quad t = 1, 2, \dots, M.$$

De là, l'estimation de la distribution du prix futur du portefeuille se déduit par

$$P_{pf}(t) = f(Y_1(t), Y_2(t)), \quad t = 1, 2, \dots, M,$$

ainsi que, par différence avec le prix actuelle du portefeuille

$$P_p(0) = f(X_1(0), X_2(0)),$$

² La décomposition de Cholesky consiste à déterminer une matrice triangulaire inférieure L telle que : $A = LL^T$ où A est matrice symétrique définie positive.

nous obtenons l'estimation de la distribution des pertes et profits par :

$$\Delta P(t) = P_{pf}(t) - P_p(0), \quad t = 1, 2, \dots, M. \quad (2.16)$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter dans le cas général de n facteurs de risque les différentes étapes de Simulation de Monte Carlo pour déterminer la VaR_{α}^{MC} d'un portefeuille.

2.4.2 Étapes de la Simulation de Monte Carlo

1. On identifie les facteurs de risques X_1, X_2, \dots, X_n , qui expriment la valeur du portefeuille en déterminant le modèle d'évaluation :

$$P_p = f(X_1, X_2, \dots, X_n);$$

2. L'utilisation de l'historique des prix permet de calculer les variations relatives $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, associées aux facteurs de risques X_1, X_2, \dots, X_n et ce, par (2.2);
3. Par des tests statistiques adéquats, on estime la densité de la distribution de chaque variation relative Δ_k , par des lois de probabilités connues;
4. On construit la matrice des variances-covariances des variations relatives, à partir de laquelle on déduit par décomposition de Choleski, la matrice des coefficients L ;
5. L'utilisation des modèles probabilistes et des paramètres des distributions déterminés à l'étape 3, permet de construire par Simulation de Monte Carlo un grand nombre $M = (500 \text{ à } 10000)$ d'échantillons pseudo-aléatoires extraits de chacune des distributions des variations des facteurs de risque en question. En effet, pour la première itération $t = 1$, on génère des variables

$\delta_k, k = 1, 2, \dots, n$ de même lois théoriques obtenues à l' étapes 3, indépendantes, de moyenne nulle et de variance égale à 1. À cette première itération, nous utilisons (2.15) dans le cas de plusieurs facteurs de risque pour trouver le vecteur Δ lequel est composé des variations relatives générées $\Delta g_k(t = 1), k = 1, 2, \dots, n$.

Ainsi, dans le cas de M itérations on aura :

$$\Delta g_k(t), k = 1, 2, \dots, n \text{ et } t = 1, 2, \dots, M;$$

6. Les valeurs futures des facteurs de risque $Y_k, k = 1, 2, \dots, n$, s'obtiennent à partir des valeurs observées actuellement $X_k(0), k = 1, 2, \dots, n$:

$$Y_k(t) = X_k(0) \cdot (1 + \Delta g_k(t)), \quad t = 1, 2, \dots, M; \quad (2.15)$$

7. Les résultats de ces simulations sont alors introduits dans les relations de comportement du portefeuille en fonction des facteurs communs de risque. Ces relations peuvent être très simples (facteur de risque équivalent à l'actif par exemple) ou beaucoup plus complexes (dans le cas des actifs optionnels par exemple). Elles permettent de simuler les distributions des prix futurs des différents actifs.

Ainsi, nous calculons la valeur du portefeuille en fonction de la valeur de ses éléments constitutifs pour chacune des M simulations par :

$$P_{pf}(t) = f(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)), \quad t = 1, 2, \dots, M. \quad (2.16)$$

La confrontation avec la valeur du portefeuille actuellement

$$P_p(0) = f(X_1(0), X_2(0), \dots, X_n(0)), \quad (2.17)$$

permet d'estimer la distribution des pertes et profits

$$\Delta P(t) = P_{pf}(t) - P_p(0) \quad t = 1, 2, \dots, M. \quad (2.18)$$

8. On classe les M valeurs des pertes et profits par ordre croissant.
9. Finalement, pour calculer la VaR_{α}^{MC} , il suffit d'identifier la valeur qui correspond au rang

$$r = (1 - \alpha) \times T\%. \quad (2.19)$$

2.4.3 Application de la Simulation de Monte Carlo

Nous utilisons les données historiques du tableau 2.1 pour calculer la Valeur-à-Risque du portefeuille P_p en appliquant la méthode de Simulation de Monte Carlo. Les étapes d'estimation de la VaR_{α}^{MC} sont illustrées comme suit :

Étape 1

La valeur du portefeuille linéaire P_p s'exprime par la relation suivante :

$$P_p = f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3.$$

Étape 2

Pour $t = -250, -249, \dots, 0$, les variations relatives $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$ et $\Delta_3(t)$, associées aux facteurs de risque $X_1(t)$, $X_2(t)$ et de $X_3(t)$, sont calculées par (2.2) et elles sont présentées au tableau 2.3.

Étape 3

Par des tests d'adéquations qui seront bien détaillés plus loin, nous estimons les lois de probabilités et les paramètres associés aux distributions des variations relatives Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 .

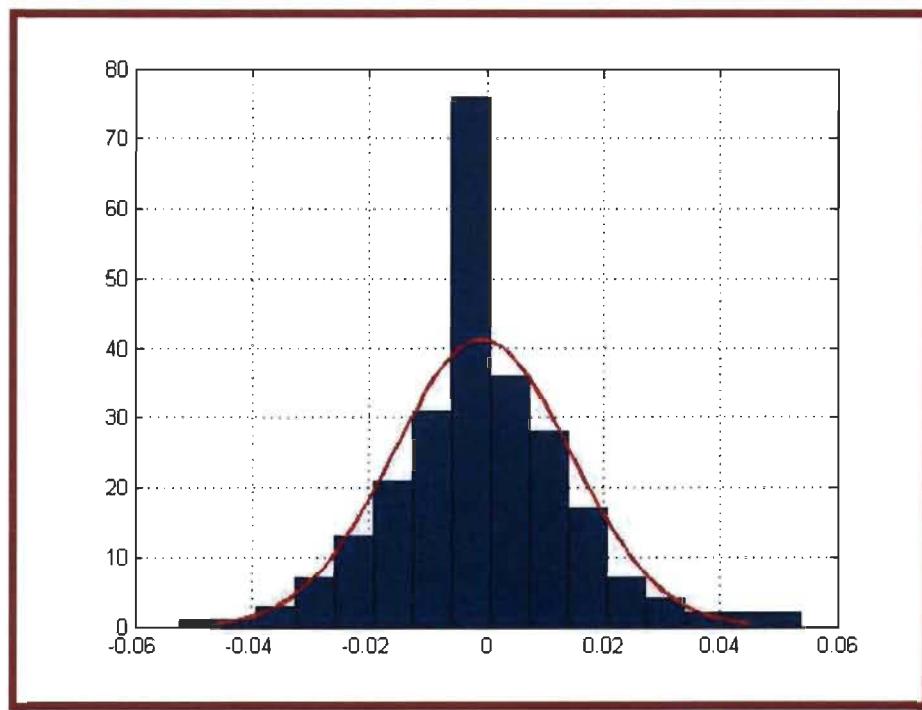


Figure 6 – Estimation de la densité de Δ_1

La densité de la variation relative Δ_1 est estimée par la loi normale. Ainsi, les paramètres associés à cette densité sont :

$$\mu_1 = -7.2993 \cdot 10^{-4} \text{ et } \sigma_1^2 = 2.3074 \cdot 10^{-4}.$$

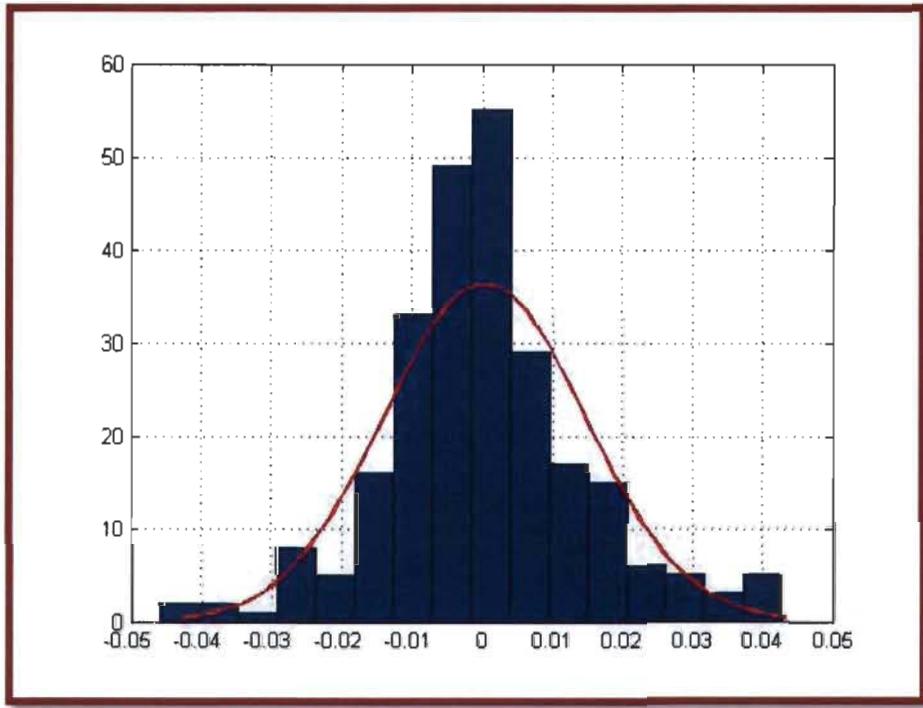


Figure 7 - Estimation de la densité de Δ_2

La densité de la variation relative Δ_2 est estimée par la loi normale. La moyenne et la variance de cette distribution sont :

$$\mu_2 = 2.6233 \cdot 10^{-4} \text{ et } \sigma_2^2 = 2.0533 \cdot 10^{-4}.$$

La figure suivante illustre l'estimation de la densité de la variation relative Δ_3 et ce, par la loi normale.

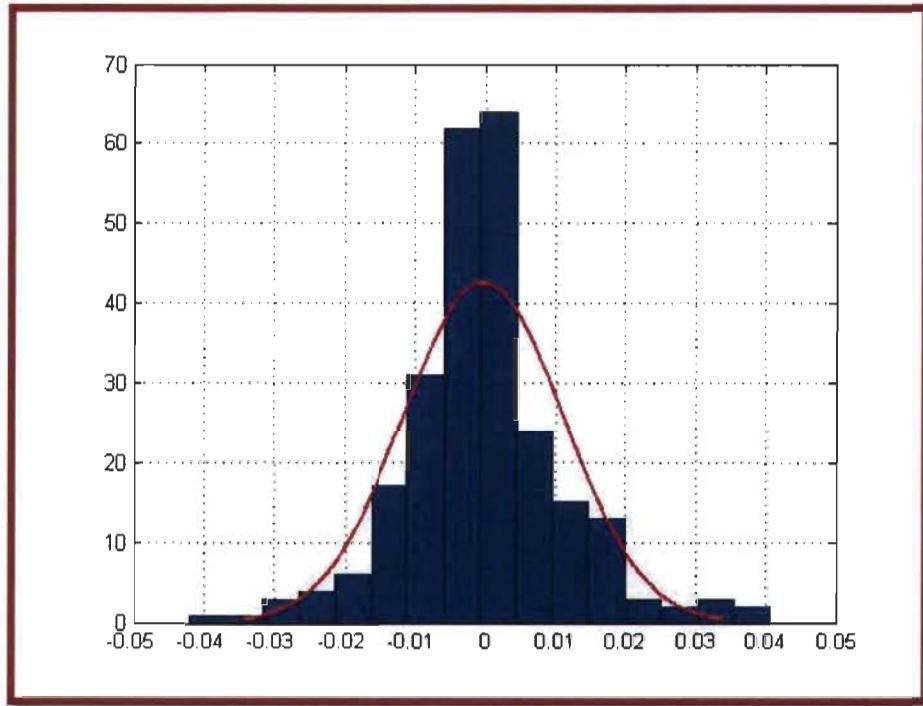


Figure 8 – Estimation de la densité de Δ_3

La moyenne et la variance de cette distribution sont :

$$\mu_3 = -3.5147 \cdot 10^{-4} \text{ et } \sigma_3^2 = 1.2925 \cdot 10^{-4}.$$

Étape 4

La matrice variances-covariances notée A des variations relatives Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 est :

$$A = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.2307 & 0.1624 & 0.1584 \\ 0.1624 & 0.2053 & 0.1269 \\ 0.1584 & 0.1269 & 0.1292 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de *Choleski* appliquée à la matrice A , nous donne la matrice des coefficients L :

$$L = \begin{pmatrix} 0.0151 & 0 & 0 \\ 0.0106 & 0.0095 & 0 \\ 0.0104 & 0.0016 & 0.0042 \end{pmatrix}.$$

Étape 5

Dans cette étape, nous utilisons comme nombre de simulation $M = 10000$.

En outre, pour chaque itération, on génère trois variables δ_1, δ_2 , et δ_3 de mêmes lois théoriques obtenues à l' étapes 2, indépendantes, de moyenne nulle et de variance égale à 1.

En utilisant (2.15), nous obtenons trois vecteurs qui représentent des variations relatives générées $\Delta g_1(t), \Delta g_2(t)$ et $\Delta g_3(t)$, $t = 1, 2, \dots, M$, lesquelles sont illustrées dans le tableau suivant.

t	$\Delta g_1(t)$	$\Delta g_2(t)$	$\Delta g_3(t)$
1	0,0074	0,0235	-0,0013
2	0,0123	0,0125	0,0036
3	-0,0073	-0,0011	0,0108
4	0,0413	0,0170	0,0391
5	0,0102	0,0074	0,0101
6	-0,0038	-0,0031	0,0036
7	0,0206	0,0288	0,0194
8	-0,0190	-0,0058	-0,0048
.	.	.	.
.	.	.	.
9998	-0.0008	0.0048	-0.0054
9999	-0.0205	-0.04425	-0.01417
10000	-0.0011	0.0005	-0.0055

Tableau 9 – Variations relatives générées

Nous utilisons ces variations relatives simulées pour évaluer les valeurs futures des facteurs de risque dans l'étape qui suit.

Étape 6

Les valeurs futures des facteurs de risque $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, et $Y_3(t)$ sont calculées par (2.15) pour $t = 1, 2, \dots, 10000$.

t	$Y_1(t)$	$Y_2(t)$	$Y_3(t)$
1	4161,5427	2362,6765	1131,469
2	4181,9051	2337,3273	1137,0934
3	4100,5973	2305,8660	1145,2464
4	4301,5838	2347,6688	1177,3938
5	4173,3230	2325,5442	1144,4733
6	4114,9433	2301,2324	1137,0834
7	4216,2200	2375,0119	1155,0486
8	4052,0363	2295,0102	1127,4493
•	•	•	•
•	•	•	•
9998	4127,2701	2319,6026	1126,7896
9999	4045,9163	2206,2573	1116,9293
10000	4126,1575	2309,7018	1126,6464

Tableau 10 – Valeurs futures des facteurs de risque

Étape 7

En utilisant (2.16) et le même modèle d'évaluation décrit à étape 1, nous calculons d'abord, les valeurs futures du portefeuille P_{pf} . Ensuite, par (2.18) nous estimons la distribution des pertes et profits ΔP .

t	$P_{pf}(t)$	$\Delta P(t)$
1	7655,6883	83,4583
2	7656,3258	84,0958
3	7551,7098	-20,5201
4	7826,6464	254,4164
5	7643,3406	71,1106
6	7553,2592	-18,9707
7	7746,2807	174,0507
8	7474,4959	-97,7340
.	.	.
.	.	.
.	.	.
9998	7573,6624	1,4324
9999	7369,1030	-203,1269
10000	7562,5057	-9,7242

Tableau 11 – Valeurs futures du portefeuille et distributions des pertes et profits

Étape 8

Nous classons les valeurs des pertes et profits, estimées à l'étape précédente par ordre croissant, lesquelles sont présentées dans ce tableau :

rang	ΔP
1	415,8781
2	-388,4422
3	-332,5785
4	-331,4157
5	-329,5886
6	-327,7329
7	-324,1645
8	-320,7909
.	.
.	.
500	-171,6487
.	.
.	.
9998	394,5343
9999	414,8895
10000	438,2524

Tableau 12 – Classement de ΔP par ordre croissant

Étape 9

D'après les résultats du dernier tableau, la Valeur-à-Risque du portefeuille P_p à 95%, par la Simulation de Monte Carlo, correspond à la valeur de rang $r = 500$ lequel est calculé par (2.19).

Ainsi,

$$\text{VaR}_{0.95}^{MC} = -171.6487\text{$.}$$

2.4.4 Avantages et limites de la Simulation de Monte Carlo

La méthode de la Simulation de Monte Carlo est une approche qui n'exige pas de modèles spécifiques, permet a priori de calculer la VaR lorsque les autres méthodes n'y parviennent pas. En outre, les résultats peuvent être améliorés en choisissant un grand nombre de simulation. De plus, cette méthode est applicable aux portefeuilles non-linéaires.

Néanmoins, la Simulation Mont Carlo possède plusieurs inconvénients :

- La mise en œuvre peut être très lourde;
- Les distributions des pertes et profits doivent toujours être spécifiées;
- Le temps de calcul peut être très long.

2.6 Méthode basée sur des tests d'adéquation

La méthode basée sur des tests d'adéquation est une approche paramétrique qui consiste à estimer la distribution des pertes et profits par des modèles probabilistes connus. Elle s'appuie, en particulier, sur le test d'adéquation du khi-deux et celui de Kolmogorov-Smirnov.

Afin de mieux comprendre et appliquer cette méthode, nous étudierons d'abord les procédures de ces deux derniers tests et ensuite, nous ferons référence au test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov pour déterminer la loi de probabilité qui estime le mieux possible la distribution des pertes et profits.

2.6.1 Test d'adéquation de khi-deux

Le test d'adéquation du khi-deux, noté χ^2 , est particulièrement utilisé comme un test d'ajustement d'une série de données statistiques à une loi de probabilité définie a priori (comme une loi normale ou une loi de Poisson par exemple).

❖ Procédure du test

On cherche à savoir si un modèle théorique particulier est susceptible de représenter adéquatement les observations recueillies. Ceci revient à vérifier si la distribution de fréquences observées s'apparente à une distribution théorique particulière. Ainsi, les hypothèses à tester sont :

- ✓ H_0 : La variable à l'étude suit une loi spécifiée,
- ✓ H_1 : La variable à l'étude ne suit pas la loi spécifiée.

Supposons que les observations ont été reparties en k classes (cas continu) ou k valeurs (cas discret).

	Classe 1	Classe 2	...	Classe k	Total
Fréquence absolue observée	f_{01}	f_{02}	...	f_{0k}	n
Fréquence relative théorique	p_1	p_2	...	p_k	1
Fréquence absolue théorique	$f_{t1} = np_1$	$f_{t2} = np_2$...	$f_{tk} = np_k$	n

Tableau 13 – Classes des valeurs observées et théoriques

❖ Statistique du test

Les écarts entre les fréquences observées et théoriques sont résumés par la statistique de khi-deux telle que

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_{0i} - f_{ti})^2}{f_{ti}}.$$

Si l'hypothèse H_0 est vraie alors, la statistique χ^2 suit une loi de khi-deux à $k - 1$ degrés de liberté, notée χ^2_{k-1} .

❖ Règle de décision

Avec un risque d'erreur α , on rejette l'hypothèse H_0 si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, k-1}$.

2.6.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'hypothèse non paramétrique couramment utilisé pour déterminer si une série de données statistiques suit une loi donnée connue par sa fonction de répartition continue. Il repose sur les propriétés de la fonction de répartition empirique et permet également, de vérifier si deux échantillons proviennent de la même loi de probabilité.

❖ Procédure du test de Kolmogorov- Smirnov sur un échantillon

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon aléatoire à valeurs réelles (suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d)) de fonction de répartition continue, notée F . Nous voulons tester les hypothèses suivantes :

- ✓ $H_0 : F(x) = F_0(x),$
- ✓ $H_1 : F(x) \neq F_0(x),$

où F_0 est une fonction de répartition connue.

❖ Statistique du test

La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov est définie par

$$D_n = \sqrt{n} \sup |F_n(x) - F_0(x)|, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

où F_n est la fonction de répartition empirique de l'échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{] \infty, x]}(X_i). \quad (2.21)$$

La fonction de répartition empirique $F_n(x)$ est un processus qui prend ses valeurs dans l'espace des fonctions croissantes comprises entre 0 et 1. Grâce à ses propriétés, on a la convergence suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n \leq x) = H(x) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 x^2}. \quad (2.22)$$

❖ Règle du décision

Au seuil de signification α , on rejette l'hypothèse H_0 si

$$D_n > H^{-1}(1 - \alpha). \quad (2.23)$$

❖ Procédure du test de Kolmogorov-Smirnov sur deux échantillons

Soit (X_1, X_2, \dots, X_m) un échantillon aléatoire à valeurs réelles (i.i.d), de fonction de répartition F_1 et (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) un échantillon aléatoire à valeurs réelles (i.i.d), de fonction de répartition F_2 .

Nous voulons vérifier si ces deux échantillons proviennent de la même loi de probabilité. Ainsi, les hypothèses à tester sont :

- ✓ $H_0 : F_1(x) = F_2(x),$
- ✓ $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x).$

❖ Statistique du test

La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov est définie par

$$D_{m,n} = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sup |F_m(t) - F_n(t)|, \quad (2.24)$$

où,

- F_m est la fonction de répartition empirique de l'échantillon (X_1, X_2, \dots, X_m) définie par (2.21),
- F_n est la fonction de répartition empirique de l'échantillon (Y_1, Y_2, \dots, Y_m) définie par (2.21).

En utilisant (2.22), on aura la convergence suivante :

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} P(D_{m,n} \leq t) = H(t) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2 t^2}. \quad (2.25)$$

❖ Règle du décision

Au seuil de signification α , on rejette l'hypothèse H_0 si

$$D_{m,n} > H^{-1}(1 - \alpha).$$

2.6.3 Étapes de la méthode basée sur des tests d'adéquation

1. On identifie les facteurs de risques X_k , $k = 1, 2, \dots, n$, exprimant la valeur du portefeuille P_p par cette relation

$$P_p = f(X_1, X_2, \dots, X_n);$$

2. On calcule la variation de la valeur du portefeuille qui exprime alors, la distribution des pertes et profits :

$$\Delta P(t) = P_p(t) - P_p(t-1), \quad t = -T+1, -T+2, \dots, 1;$$

3. On cherche un ensemble E_1 de modèles probabilistes de fonctions de répartitions continues lequel semblerait mieux estimer la distribution des pertes et profits ΔP ;
4. En se basant sur le test de Kolmogorov-Smirnov, on garde un sous ensemble de E_1 noté E_2 , lequel est constitué de modèles probabilistes dont l'hypothèse H_0 est acceptée. Parmi ces modèles acceptés de E_2 , on déterminera celui qui a la *P-value* la plus élevée et par la méthode du maximum de vraisemblance que nous allons présenter plus loin, nous estimerons les paramètres de ce modèle de probabilité.
5. Une fois, les paramètres du modèle de fonction de répartition F sont estimés, on cherche l'inverse de F qui nous fournit la Valeur-à-Risque du portefeuille P_p , au niveau α , à savoir :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha).$$

2.6.4 Principe de la méthode du maximum de vraisemblance (MV)

Soit f_θ une densité de probabilité qui dépend d'un vecteur de paramètre θ . Le principe de la méthode de maximum de vraisemblance consiste à estimer la valeur de θ par $\hat{\theta}$ en maximisant la vraisemblance. Soit (x_1, \dots, x_n) un échantillon observé issu de la population de densité f_θ . La vraisemblance associée à (x_1, \dots, x_n) est définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta).$$

Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance est obtenu comme solution de l'optimisation suivante

$$L(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}_n) = \max_\theta L(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

Lorsque le paramètre à estimer θ appartient à R^n , les EMV se trouvent dans la solution des équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(x_1, \dots, x_n, \theta) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Cependant cette méthode de différentiation est souvent très lourde. On préfère alors remplacer la vraisemblance par la log-vraisemblance, puisque le logarithme népérien (ou naturel) est une fonction strictement croissante. Cela revient à résoudre l'expression simplifiée suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

sous réserve que ces dérivées partielles existent et que la condition suivante est remplie:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_i^2} \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En pratique, la condition nécessaire pour trouver la valeur $\theta = \hat{\theta}$ est

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, \dots, x_n, \theta) = 0.$$

L'estimateur $\hat{\theta}$ est un maximum si la condition suffisante suivante est remplie au point critique $\theta = \hat{\theta}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) \leq 0.$$

La méthode de MV se calcule explicitement et présente de nombreux avantages. Il est vérifié et démontré que l'EMV est asymptotiquement sans biais et converge (mais peut être biaisé en échantillon fini), asymptotiquement efficient car il atteint la borne de Cramer Rao et asymptotiquement distribué selon une loi normale. La

méthode de MV est donc théoriquement la meilleure méthode par rapport à d'autres méthodes d'estimation.

Exemple 2.1 – (MV et loi exponentielle)

La densité d'une variable aléatoire de loi exponentielle est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons qu'on dispose d'un échantillon de n valeurs. On souhaite estimer le paramètre λ de loi exponentielle (loi continue). La vraisemblance est le produit de valeurs de la densité et elle vaut :

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \lambda) &= \prod_{i=1}^n \lambda \exp(-\lambda x_i) \\ &= \lambda^n \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda x_i) \\ &= \lambda^n \exp \left\{ \sum_{i=1}^n (-\lambda x_i) \right\} \\ &= \lambda^n \exp\{-\lambda n \bar{x}\}. \end{aligned}$$

Le paramètre λ maximise la vraisemblance si et seulement si elle maximise la log-vraisemblance, ainsi on aura :

$$\begin{aligned} \ln\{L(x_1, \dots, x_n; \lambda)\} &= \ln\{\lambda^n \exp\{-\lambda n \bar{x}\}\} \\ &= n \ln \lambda - \lambda n \bar{x}. \end{aligned}$$

Nous dérivons cette dernière équation et nous l'égalisons à zéro :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln\{L(x_1, \dots, x_n; \lambda)\} = 0.$$

Nous trouvons

$$\frac{n}{\lambda} - n\bar{x} = 0.$$

Donc, l'estimateur de λ est :

$$\hat{\lambda} = 1/\bar{x},$$

étant donné que la dérivée seconde est strictement négative et est égale à :

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln\{L(x_1, \dots, x_n; \lambda)\} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0.$$

Il est tout à fait normal de retrouver l'inverse de la moyenne empirique, car on sait que l'espérance d'une loi exponentielle correspond à l'inverse du paramètre λ . Autrement dit, si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ alors, $E(X) = 1/\lambda$.

2.6.5 Application de la méthode basée sur des tests d'adéquation

Pour le même portefeuille P_p , décrit dans les méthodes précédentes, nous allons appliquer la méthode basée sur le test d'adéquation pour calculer la VaR. Les étapes de cette approche sont présentées dans ce qui suit.

Étape 1

La valeur du portefeuille linéaire P_p s'exprime en fonction des facteurs de risque par la relation suivante :

$$P_p = f(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3.$$

Étape 2

La variation Δp , de la valeur du portefeuille est illustrée dans le tableau suivant

t	$\Delta p(t)$
-252	45.6400
-251	32.3400
-250	-8.0400
-249	106.9200
-248	37.8400
-247	-100.1899
-246	58.2599
-245	15.7900
.	
.	
3	-11.9899
2	-5.3300
1	-38.8999

Tableau 14 – Valeurs des pertes et profits

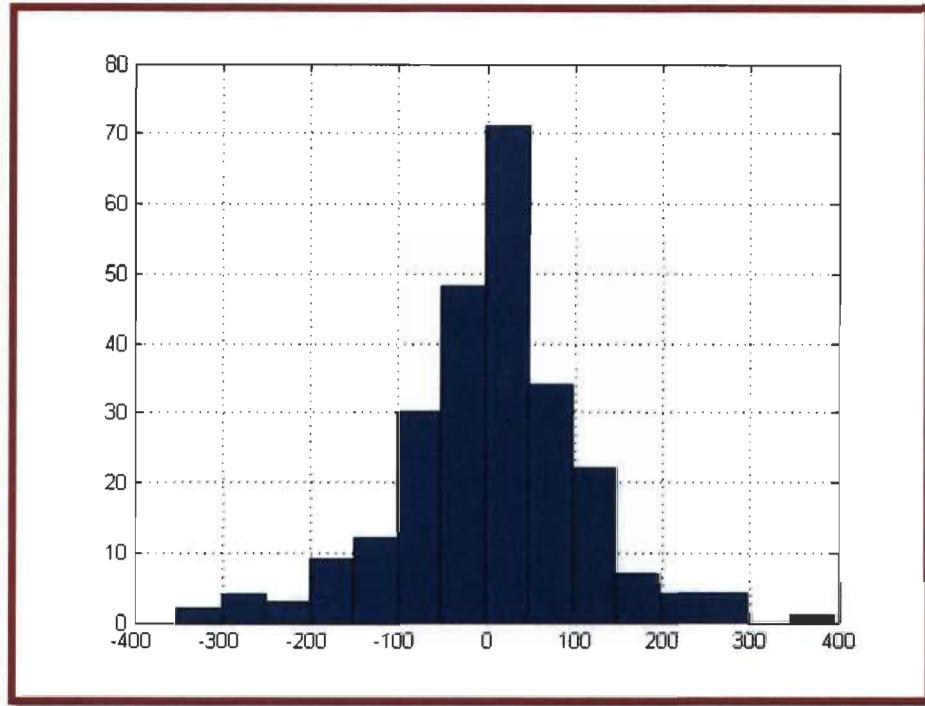


Figure 9 – Histogramme des pertes et profits

Étape 3

L'ensemble E_1 de modèles probabilistes qui estime le mieux possible la distribution des pertes et profits est constitué de :

- Loi normale;
- Loi logistique;
- Loi des valeurs extrêmes;
- Loi généralisée des valeurs extrêmes.

Le graphique suivant nous illustre l'ajustement de la distribution des pertes et des profits par desdits modèles de probabilités.

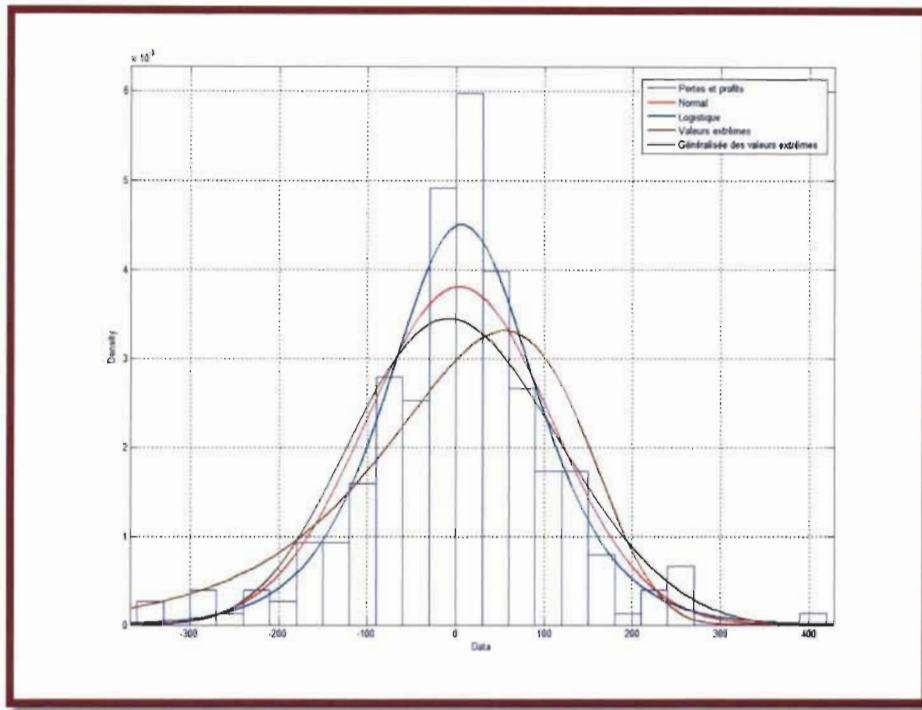


Figure 10 – Ajustement des pertes et profits par des densités

Étape 4

Nous allons tout d'abord, représenter graphiquement les fonctions de répartitions des lois de l'ensemble E_1 lequel pourrait estimer le mieux possible la fonction de répartition empirique des pertes et profits. Ensuite, pour chacune de ces lois, nous allons générer un échantillon aléatoire de moyenne $E(\Delta p)$, de variance $\text{var}(\Delta p)$ et nous utiliserons le test de Kolmogorov-Smirnov pour savoir si les données de la distribution des pertes et profits Δp et l'échantillon généré EG proviennent du même loi.

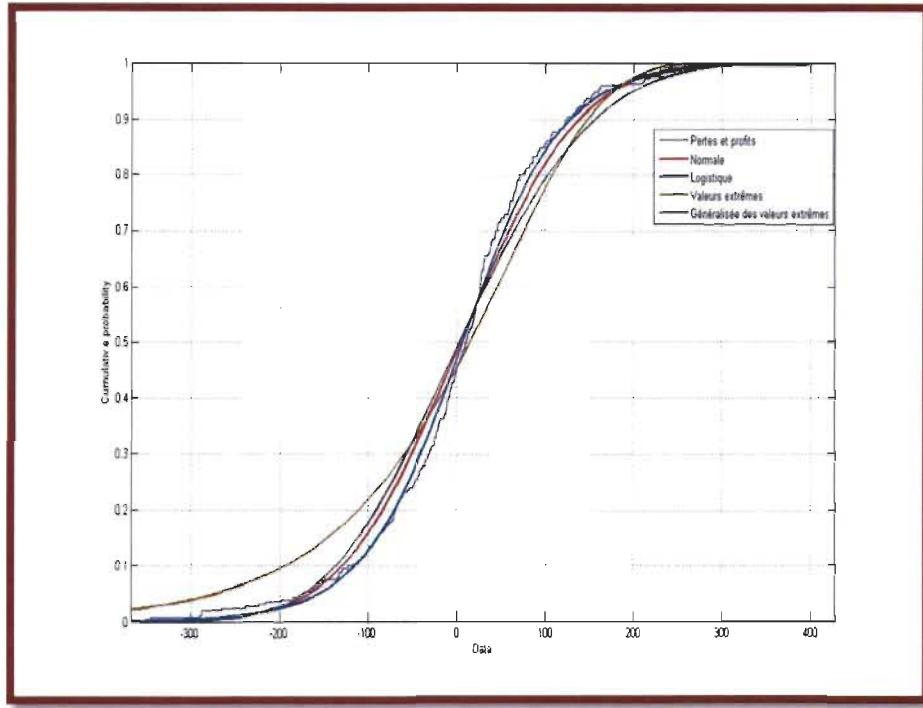


Figure 11 – Ajustement des pertes et profits par des fonctions de repartitions

	Normal	Logistique	Valeurs extrêmes	Généralisée des valeurs extrêmes
Statistique du test	0.0774	0.06250	0.59580	0.8456
Probabilité de même loi	34.3126 %	61.6539 %	1.4303*10 ⁻⁵ %	2.3086*10 ⁻⁵ %
Hypothèse H_0	acceptée	acceptée	rejetée	rejetée

Tableau 15 – Résultats des tests d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov

Étape 5

En se basant sur le test de Kolmogorov-Smirnov, on garde l'ensemble E_2 des modèles probabilistes dont l'hypothèse H_0 est acceptée.

D'après ce dernier tableau, l'ensemble E_2 est constitué de :

- Loi normale, avec $p\text{-value} = 34.3126\%$,
- Loi logistique, avec $p\text{-value} = 61.6539\%$.

Nous pouvons conclure donc, que la distribution des pertes et profits provient de la loi logistique avec une probabilité de 61.6539 %. La densité de cette loi est

$$f_{\nu, \xi}(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\nu}{\xi}\right)}}{\left(1 + e^{-\left(\frac{x-\nu}{\xi}\right)}\right)^2} \text{ avec } x, \nu \in \mathbb{R} \text{ et } \xi > 0.$$

Son espérance et sa variance sont données par les formules suivantes :

$$E(X) = \nu \text{ et } \text{var}(X) = \frac{(\xi\pi)^2}{3}. \quad (2.26)$$

La fonction de répartition de cette loi est

$$F_{\nu, \xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\nu, \xi}(t) dt = \left(1 + e^{-\left(\frac{x-\nu}{\xi}\right)}\right)^{-1}.$$

Il suffit d'utiliser les valeurs de Δp pour estimer, par la méthode de maximum de vraisemblance, la moyenne $\hat{\mu}_{MV}$ et la variance $\hat{\text{var}}_{MV}$ de ce modèle qui permettraient ensuite de trouver les valeurs de ν et ξ par (2.26). On a alors,

$$\hat{\mu}_{MV} = 6.561 \text{ et } \hat{\text{var}}_{MV} = 10128.3.$$

Ainsi, par (2.26) on aura

$$\hat{v} = 6.561 \text{ et } \hat{\xi} = 55.485.$$

Par (1.20), l'inverse de la fonction de répartition, de cette loi, devient :

$$F_{v,\xi}^{-1}(x) = -55.485 \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) + 6.561,$$

et de (1.2), la Valeur-à-Risque selon cette distribution est

$$\text{VaR}_{\alpha,v,\xi} = F_{v,\xi}^{-1}(\alpha) = -55.485 \ln\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + 6.561.$$

Ainsi de la dernière équation, la Valeur-à-Risque du portefeuille, en utilisant la méthode basée sur le test d'adéquation, au niveau 95% est

$$\text{VaR}_{0.95}^{TA} = -156.812 \text{ $.}$$

Le tableau suivant retrace les valeurs de la VaR au niveau 95% du portefeuille P_p , suite à l'application de la Simulation Historique, Méthode Variance-Covariance, la Simulation de Monté Carlo et la méthode basée sur des tests d'ajustement.

Simulation Historique	Méthode de Variance-Covariance	Simulation de Monté Carlo	Méthode basée sur des tests d'ajustement
$\text{VaR}_{0.95}^{AH}$	$\text{VaR}_{0.95}^{VC}$	$\text{VaR}_{0.95}^{MC}$	$\text{VaR}_{0.95}^{TA}$
-144.6886 \$	-170.89 \$	-171.6487 \$	-156.812 \$

Tableau 16 – Valeurs de la VaR par différentes méthodes d'estimation

CHAPITRE 3

THÉORIE DES COPULES

3.1 Généralités sur les copules

Les copules forment un outil statistique lequel présente de nombreux avantages pour les statisticiens ainsi que pour les financiers. Outre une grande souplesse dans la mise en œuvre de l'analyse multivariée, les copules autorisent une sélection plus étendue des distributions conjointes des séries financières. Les copules permettent une représentation moins naïve de la dépendance statistique en finance fondée sur la mesure traditionnelle de corrélation qui présente des limites dans l'étude de l'interdépendance entre deux variables (cf. Embrechts et al. (1999)). Les copules permettent alors, de construire des modèles de distributions multivariées compatibles avec les modèles marginaux unidimensionnels. Cette compatibilité est souvent très importante dans la modélisation financière (modèles d'estimation de la Valeur-à-Risque).

Définition 3.1

On appelle copule bivariée C , toute fonction de $I^2 = [0,1]^2 \rightarrow I$ ayant les caractéristiques suivantes:

- i) $C(u, 0) = C(0, u) = 0$ et $C(u, 1) = C(1, u) = u$, $\forall u \in I$;
- ii) $C(u', v') - C(u', v) - C(u, v') + C(u, v) \geq 0$ tels que $u \leq u'$ et $v \leq v'$, $\forall u, v, u', v' \in I$.

Remarques

- La propriété (ii) est appelée la 2-croissance ou inégalité du rectangle de la distribution C . Elle traduit que si la copule C admet une densité $c = (u, v)$ alors, elle est positive et est définie par :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \geq 0. \quad (3.1)$$

Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires uniformes sur $I = [0,1]$, on a :

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2). \quad (3.2)$$

Cette définition, assure donc que la copule est une distribution de probabilité avec des marges uniformes.

Notons qu'une extension de la définition 3.1 est possible pour le cas général où, $n \geq 2$.

3.2 Théorème de Sklar

L'étude de la relation entre une distribution multivariée et les distributions marginales était un des problèmes auxquels les statisticiens se sont intéressés dans les années 50. Abel Sklar, en 1959 [1], apporte une solution partielle à ce problème par un théorème, fondamental dans la théorie des copules, qui porte son nom. Toute la théorie des copules est fondée sur le théorème suivant :

Théorème 3.1

Soit H une fonction de répartition à n dimension de marges F_1, F_2, \dots, F_n . Alors, il existe une copule C , telle que

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (3.3)$$

Si les marges F_1, F_2, \dots, F_n sont continues, alors la copule C est unique. Sinon, C est unique seulement aux supports des marges. Dans le cas de la continuité des marges, on peut extraire l'unique copule associée à H en posant :

$$u_i = F(x_i) \Rightarrow F^{-1}(u_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ainsi, la relation (3.3) devient

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)). \quad (3.4)$$

3.3 Propriétés fondamentales des copules

Les copules constituent un grand intérêt pour les statisticiens car d'une part, elles permettent de construire des familles de distributions multivariées à partir des distributions marginales univariées données (théorème de Sklar) et d'autre part,

elles représentent un outil de mesure de dépendance entre distributions univariées tout en restant invariantes sous des transformations strictement monotones de celles-ci. Les résultats suivants résument les propriétés fondamentales des copules.

Propriété 3.1 : (Caractérisation de la copule indépendante)

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires continues et indépendantes, respectivement de lois marginales continues F_1, F_2, \dots, F_n . Alors, d'après l'équation (3.4), on déduit que l'unique copule d'indépendance multivariée est

$$\begin{aligned}
 C_{\pi}(u_1, u_2, \dots, u_n) &= H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \\
 &= F_1(F_1^{-1}(u_1)) \cdot F_2(F_2^{-1}(u_2)) \cdot \dots \cdot F_n(F_n^{-1}(u_n)) \\
 &= u_1 u_2 \dots u_n \\
 &= \prod_{i=1}^n u_i.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Propriété 3.2 : (Stabilité par transformation croissante)

Soient X et Y deux variables aléatoires continues de copule C_{XY} . Si f et g sont des fonctions strictement croissantes alors, (X, Y) et $(f(X), g(Y))$ ont la même copule :

$$C_{XY}(u, v) = C_{f(X)g(Y)}(u, v). \tag{3.6}$$

Démonstration

Soit H la distribution conjointe des variables aléatoires continues X et Y , de distributions marginales respectives F et G . Soit H_t la distribution conjointe de la transformée $(f(X), g(Y))$, de distributions marginales respectives F_t et G_t . On a :

$$F_t(x) = P(f(X) \leq x) = P(X \leq f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

De même,

$$G_r(y) = P(g(Y) \leq y) = P(Y \leq g^{-1}(y)) = G(g^{-1}(y)), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

On conclut de (3.7) et (3.8) que

$$F_r^{-1}(u) = f(F_r^{-1}(u)) \text{ et } G_r^{-1}(v) = g(G_r^{-1}(v)).$$

Ainsi, $\forall u, v \in I$

$$\begin{aligned} C_{f(X)g(Y)}(u, v) &= H_r(F_r^{-1}(u), G_r^{-1}(v)) \\ &= P(f(X) \leq F_r^{-1}(u), g(Y) \leq G_r^{-1}(v)) \\ &= P(f(X) \leq f(F_r^{-1}(u)), g(Y) \leq g(G_r^{-1}(v))) \\ &= P(X \leq F_r^{-1}(u), Y \leq G_r^{-1}(v)) \\ &= H(F_r^{-1}(u), G_r^{-1}(v)) \\ &= C_{XY}(u, v). \end{aligned}$$

Remarque

- De même, si f et g sont des fonctions décroissantes, alors

$$C_{f(X)g(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1-u, 1-v). \quad (3.9)$$

- Si f est croissante et g décroissante, alors :

$$C_{f(X)g(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1-v). \quad (3.10)$$

Théorème 3.2 (Théorème de Fréchet)

Pour toute copule C , on a :

$$\sup\{u + v - 1, 0\} \leq C(u, v) \leq \inf\{u, v\}.$$

Démonstration

$$\forall u, v \in I, \quad C(u, v) \leq C(u, 1) = u \text{ et } C(u, v) \leq C(v, 1) = v.$$

Ainsi,

$$C(u, v) \leq \inf\{u, v\}. \quad (3.11)$$

La propriété (2-croissance) pour $u, 1, v, 1 \in I$ nous donne :

$$\begin{aligned} C(u, v) - C(u, 1) - C(1, v) + C(1, 1) &\geq 0 \\ \Rightarrow C(u, v) &\geq C(u, 1) + C(1, v) - C(1, 1) \\ \Rightarrow C(u, v) &\geq u + v - 1 \end{aligned}$$

or, $\forall u, v \in I, C(u, v) \geq 0$.

Donc,

$$C(u, v) \geq \sup \{u + v - 1, 0\}. \quad (3.12)$$

De (3.11) et (3.12), on conclut que

$$\sup \{u + v - 1, 0\} \leq C(u, v) \leq \inf \{u, v\}. \quad (3.13)$$

Les copules $C_M(u, v) = \inf \{u, v\}$ et $C_M(u, v) = \sup \{u + v - 1, 0\}$ sont appelées bornes de Fréchet. Selon Nelsen, R.B. (2006) [5], elles décrivent respectivement la dépendance parfaite positive et négative. En outre, elles jouent un rôle très important en finance et en actuariat.

Remarque

- Dans le cas général où, $n > 2$, la borne de Fréchet supérieure $C_M(u_1, u_2, \dots, u_n) = \inf \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est une copule. Par contre, la borne inférieure $C_W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0 \right\}$ n'est pas une copule.
- Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont dites comonotoniques, si elles sont liées par la copule de Fréchet supérieure C_M . Dans ce cas, il existe une variable aléatoire $U \sim U[0,1]$ telle que $X_i = F_i^{-1}(U)$, $i=1,2,\dots,n$.

3.4 Familles usuelles de copules

3.4.1 Copule Gaussienne

La copule Gaussienne bivariée est définie de la façon suivante :

$$C(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \exp\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy,$$

où ρ est le coefficient de corrélation linéaire et ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

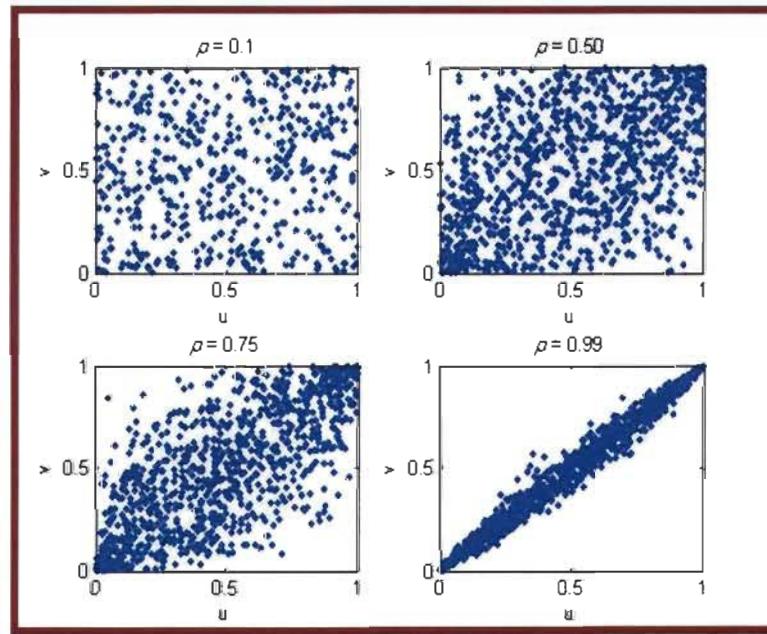


Figure 12 – Simulation des variables aléatoires u et v , en fonction de ρ , pour une copule Gaussienne bivariée

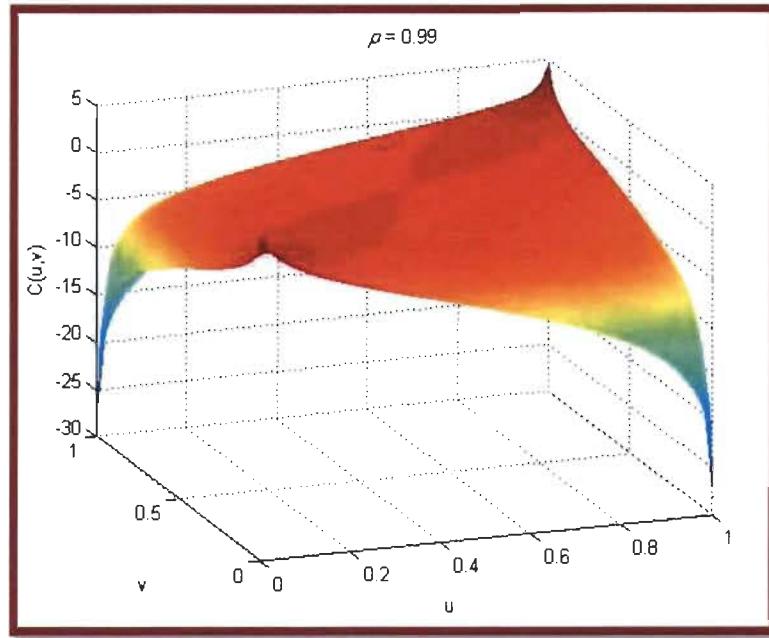


Figure 13 – Simulation d'une copule gaussienne bivariée avec $\rho = 0.99$

3.4.2 Copule Student

La copule Student est extraite de la même manière que la copule Gaussienne mais cette fois-ci à partir de la distribution de Student bivariée telle que

$$C(u, v) = \frac{1}{\pi v \sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{v(1 - \rho^2)}\right)^{-\frac{\nu}{2}+1} dx dy,$$

où T_v est la fonction de répartition de la loi de Student univariée à v degrés de liberté définie par

$$T_v(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{v}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz.$$

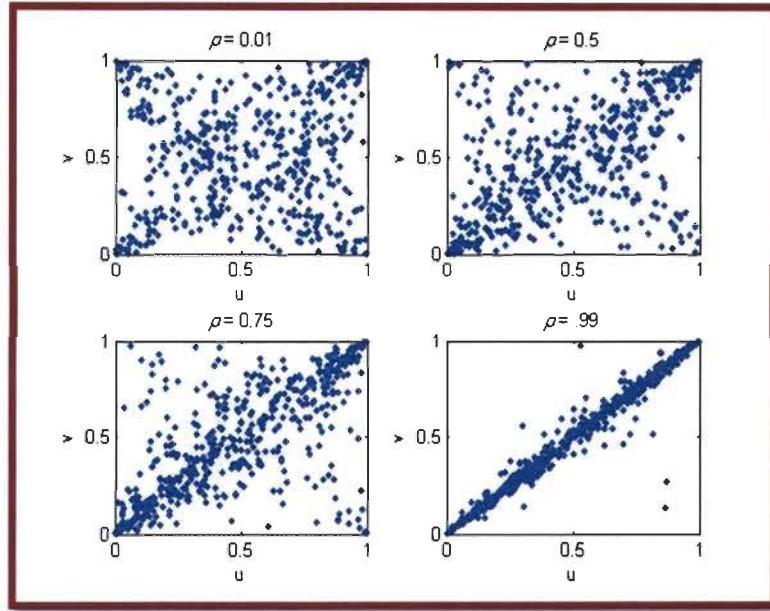


Figure 14 – Simulation des variables aléatoires u , et v , en fonction de ρ , pour une copule Student bivariée avec $\nu = 1$

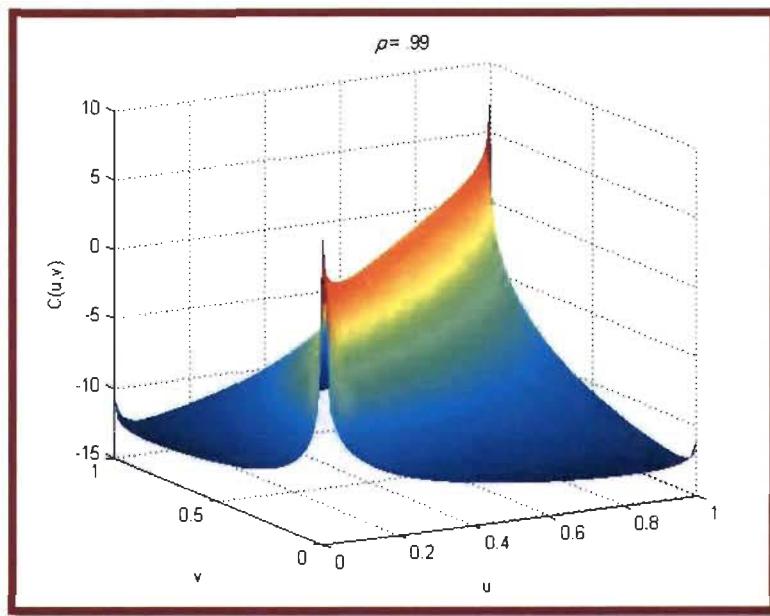


Figure 15 – Simulation d'une copule Student bivariée avec $\rho = 0.99$ et $\nu = 1$

3.4.3 Copules Archimédiennes

La famille des copules archimédiennes présente une classe importante de modèles de dépendance, dans laquelle on retrouve plusieurs copules souvent utilisées en pratique comme les modèles de Clayton, Frank et Gumbel.

Les copules archimédiennes sont définies par :

$$C_\phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \phi(u_i) \right), \quad (3.14)$$

où, ϕ est une fonction appelée générateur, continue et strictement décroissante, définie de $[0,1]$ vers $[0, \infty[$, avec $\phi(0) = \infty$ et $\phi(1) = 0$, de plus, ϕ^{-1} est complètement monotone sur $[0, \infty[$. Cela veut dire que

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \phi^{-1}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, \infty[\text{ et } \forall k \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Le tableau suivant donne quelques familles classiques de copules archimédiennes.

Famille	Générateur $\phi_\theta(t)$	Copule $C_\theta(u, v)$
Indépendance	$-\ln(t)$	$\Pi(u, v) = uv$
Clayton	$t^{-\theta} - 1$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > 0$
Gumbel	$(-t)^\theta$	$\{-[(-u)^{-\theta} + (-v)^{-\theta}]\}^{\frac{1}{\theta}}, \theta \geq 1$
Frank	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right), \theta \neq 0$

Tableau 17 – Familles classiques de copules archimédiennes

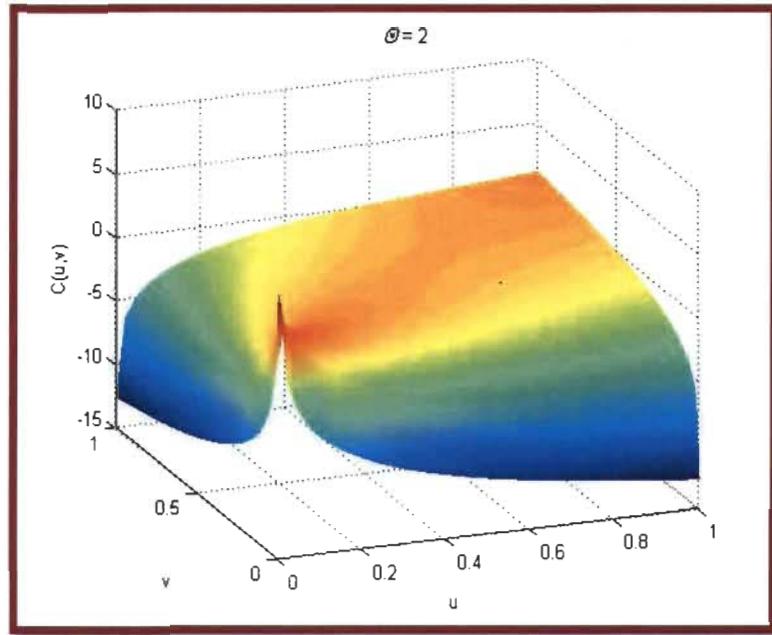


Figure 16 - Simulation d'une copule de Frank avec $\theta = 2$

3.4.4 Copules Archimax

La copule Archimax est de la forme suivante :

$$C(u, v) = \phi^{-1} \left[(\phi(u) + \phi(v)) A \left(\frac{\phi(u)}{\phi(u) + \phi(v)} \right) \right], \quad \forall u \geq 0, \quad \forall v \leq 1,$$

où,

- $A(t) : [0,1] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ telle que $\max(t, t-1) \leq A(t) \leq 1 \ \forall t \in [0,1]$;
- $\phi(t) : (0,1] \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction convexe, décroissante qui vérifie $\phi(1) = 0$.

3.5 Modélisation par les copules

Le théorème de Sklar est un outil très puissant pour modéliser des distributions multivariées. Il permet de modéliser les marges et la dépendance séparément.

Par exemple, supposons qu'on veut modéliser la loi d'un couple aléatoire (X, Y) de fonction de répartition H , de marges F et G .

- Étape 1: on identifie les marges F et G par des tests d'adéquation.
- Étape 2: on identifie la copule C en utilisant des tests d'adéquations relatives aux copules.
- Étape 3: on construit la fonction de répartition H , par le théorème de Sklar $H(x, y) = C(F(x), G(y))$.

3.6 Exemples de construction de copules

Exemple 3.1

Soit $H(x, y)$ une distribution bivariée définie comme suit :

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}, & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty[\\ 1 - e^{-y}, & (x, y) \in [1, \infty[\times [0, \infty[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les marges continues F et G de H sont données par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x+1}{2}, & x \in [-1,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad G(x) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0 \end{cases}$$

Posons $u = F(x)$ et $v = G(y)$. Pour $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty)$ les inverses de F et G sont calculées comme suit: $F^{-1}(u) = 2u - 1$ et $G^{-1}(v) = -\ln(1 - v)$ pour tout u, v dans l'intervalle I . Ainsi, la copule associée est

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= H(2u - 1, -\ln(1 - v)) \\ &= \frac{uv}{u + v - uv}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2

Soit la distribution bivariée définie sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ telle que

$$H_\theta(x, y) = \exp \left\{ - \left[(x + y) - \left(x^{-\theta} + y^{-\theta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right] \right\}, \forall \theta \geq 1.$$

Les fonctions de répartition marginales $F(x)$ et $G(y)$ sont données respectivement par :

$$F(x) = \exp(-x) \quad \forall x \in [0, +\infty[, \tag{3.16}$$

$$G(y) = \exp(-y) \quad \forall y \in [0, +\infty[. \tag{3.17}$$

Soit $u, v \in [0, 1[,$ alors de (3.16) et (3.17) on obtient :

$$F^{-1}(u) = -\ln(u) \text{ et } G^{-1}(v) = -\ln(v).$$

D'après le théorème de Sklar on construit la copule associée telle que

$$\begin{aligned} C_\theta(u, v) &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) = H(-\ln(u), -\ln(v)) \\ &= \exp \left\{ - \left[[-\ln(u) - \ln(v)] - \left[(-\ln(u))^{-\theta} + (-\ln(v))^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right] \right\} \\ &= uv \exp \left\{ \left[(-\ln(u))^{-\theta} + (-\ln(v))^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\}. \end{aligned}$$

Cette copule s'appelle la copule de Galambos.

CHAPITRE 4

VALEURS-À-RISQUE BIVARIÉE

4.1 Introduction

Sous l'hypothèse univariée, plusieurs outils ont été étudiés et développés pour mesurer les risques, en particulier dans les compagnies d'assurance et les institutions financières. La VaR est un outil très répandu dans les marchés financiers dû à sa promesse implicite d'améliorer la gestion des risques, ce qui permet son utilisation par l'ensemble des gestionnaires.

Soit X une variable aléatoire, représentant un risque, de fonction de répartition F . La Valeur-à-Risque au niveau α , de la variable X est définie par

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1[. \quad (4.1)$$

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vecteur aléatoire de distribution H et de fonction de survie \bar{H} . Embrechts et Puccetti (2006) [2] ont introduit la Valeur-à-Risque multivariée orthant inférieure et supérieure, au niveau α , associée à une perte X respectivement

par :

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X) = \partial\{x \in \mathbb{R}^k: H(x) \geq \alpha\} \quad (4.4)$$

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(X) = \partial\{x \in \mathbb{R}^k: \bar{H}(x) \leq 1 - \alpha\}. \quad (4.5)$$

Les définitions basées sur ces dernières frontières sont difficiles à manipuler. Dans ce qui suit, nous allons proposer une autre formulation plus souple, facile à manipuler. Par la suite, nous allons donner plusieurs propositions de ces mesures basées sur cette nouvelle expression.

Afin de simplifier l'étude, on va examiner le comportement de la $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ et de la $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ dans le cas bivarié et ce, sans perte de généralité.

4.2 La VaR bivariée orthant inférieure et supérieure

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de distribution H et de fonction de survie \bar{H} . On note par F_1 et F_2 , les distributions marginales de X . Pour x_1 fixé, nous définissons les fonctions suivantes

$$x_2 \rightarrow H_{x_1}(x_2) = H(x_1, x_2), \quad (4.6)$$

$$x_2 \rightarrow \bar{H}_{x_1}(x_2) = \bar{H}(x_1, x_2). \quad (4.7)$$

Soit, $H_{x_1}^{-1}(x_2)$ l'inverse généralisé de $H_{x_1}(x_2)$ et $\bar{H}_{x_1}^{-1}(x_2)$ l'inverse généralisé de $\bar{H}_{x_1}(x_2)$ qui sont définis respectivement comme suit :

$$H_{x_1}^{-1}(x_2) = \inf\{t \in \mathbb{R}, H_{x_1}(t) \geq \alpha\}, \quad (4.8)$$

$$\bar{H}_{x_1}^{-1}(x_2) = \inf\{t \in \mathbb{R}, \bar{H}_{x_1}(t) \leq 1 - \alpha\}. \quad (4.9)$$

Notons que pour x_1 fixé :

- $H(x_1, x_2) \geq \alpha \Leftrightarrow x_2 \geq H_{x_1}^{-1}(\alpha)$ car la distribution H est croissante.
- $\bar{H}(x_1, x_2) \leq 1 - \alpha \Leftrightarrow x_2 \geq \bar{H}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha)$ car \bar{H} est décroissante.

Dans le cas où la distribution H est continue, nous aurons

$$H\left(x_1, H_{x_1}^{-1}(\alpha)\right) = H_{x_1}\left(H_{x_1}^{-1}(\alpha)\right) = \alpha, \quad (4.10)$$

$$\bar{H}\left(x_1, \bar{H}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha)\right) = \bar{H}_{x_1}\left(\bar{H}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha)\right) = 1 - \alpha. \quad (4.11)$$

Le résultat suivant propose une caractérisation de la $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ et de la $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ en fonction de $x_1 \rightarrow H_{x_1}^{-1}(\alpha)$ et $x_1 \rightarrow \bar{H}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha)$ respectivement et ce, au niveau α .

Caractérisation 4.1

La Valeur-à-Risque bivariée orthant inférieure et supérieure avec une probabilité α sont données par

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X) = \left\{ \left(x_1, H_{x_1}^{-1}(\alpha) \right), x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha) \right\}, \quad (4.12)$$

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(X) = \left\{ \left(x_1, \bar{H}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha) \right), x_1 \leq F_1^{-1}(\alpha) \right\}. \quad (4.13)$$

Démonstration

D'abord, notons que dans le cas bivarié (4.4) devient

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2) \geq \alpha\}.$$

D'abord, on a $\left\{ \left(x_1, H_{x_1}^{-1}(\alpha) \right), x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha) \right\} \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2) \geq \alpha\}$, du fait que $H\left(x_1, H_{x_1}^{-1}(\alpha)\right) = H_{x_1}\left(H_{x_1}^{-1}(\alpha)\right) \geq \alpha$.

Ensuite, si $(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2) \geq \alpha\} \Rightarrow H(x_1, x_2) \geq H(x_1, H_{x_1}^{-1}(\alpha))$ car, $x_2 \geq H_{x_1}^{-1}(x_2)$. Par conséquent, la frontière au niveau α de l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : H(x_1, x_2) \geq \alpha\}$ est exactement $\{(x_1, H_{x_1}^{-1}(\alpha)), x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha)\}$.

Ainsi,

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X) = \{(x_1, H_{x_1}^{-1}(\alpha)), x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha)\}.$$

Avec les mêmes arguments et de façon analogue, on peut montrer (4.13).

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations suivantes :

$$H_{x_1}^{-1}(\alpha) = \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X), \quad (4.14)$$

$$\overline{H}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha) = \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X). \quad (4.15)$$

Maintenant, nous allons étudier au niveau α , le comportement des courbes de niveau :

$$x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X), \quad (4.16)$$

$$x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X). \quad (4.17)$$

À cet effet, on désigne les supports des variables X_1 et X_2 par $\text{supp}(X_1)$ et $\text{supp}(X_2)$ respectivement. Soit l_{X_1} et u_{X_1} les points extrêmes de la variable X_1 définis par

$$l_{X_1} = \inf\{x : x \in \text{supp}(X_1)\} \text{ et } u_{X_1} = \sup\{x : x \in \text{supp}(X_1)\}.$$

On définit de façon similaire les points extrêmes l_{X_2} et u_{X_2} de la variable X_2

$$l_{X_2} = \inf\{x : x \in \text{supp}(X_2)\} \text{ et } u_{X_2} = \sup\{x : x \in \text{supp}(X_2)\}.$$

Propriété 4.2

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de variables aléatoires de distribution continue H et de fonctions de répartitions F_1 et F_2 . Alors, au niveau α , les courbes $x_1 \rightarrow \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ et $x_1 \rightarrow \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ sont des fonctions décroissantes. De plus, si H est strictement croissante alors,

$$\lim_{x_1 \rightarrow u_{X_1}^-} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) = \text{VaR}_{\alpha}(X_2) \text{ et } \lim_{x_1 \rightarrow \text{VaR}_{\alpha}(X_1)^+} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) = u_{X_2}, \quad (4.18)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow l_{X_1}^+} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) = \text{VaR}_{\alpha}(X_2) \text{ et } \lim_{x_1 \rightarrow \text{VaR}_{\alpha}(X_1)^-} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) = l_{X_2}. \quad (4.19)$$

Démonstration

Puisque H est continue, on peut déduire de (4.10) et (4.14) que

$$H\left(x_1, \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)\right) = \alpha,$$

de même, les équations (4.11) et (4.15) nous permettent de conclure que

$$\overline{H}\left(x_1, \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)\right) = 1 - \alpha.$$

En utilisant le fait que la distribution H est croissante (respectivement \overline{H} est décroissante), alors $x_1 \rightarrow \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ et $x_1 \rightarrow \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ sont des fonctions décroissantes pour x_1 (sinon nous aurons une contradiction).

De plus, par la continuité de H on a

$$\lim_{x_1 \rightarrow u_{X_1}^-} H\left(x_1, \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)\right) = F_2\left(\lim_{x_1 \rightarrow u_{X_1}^-} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)\right) = \alpha,$$

et par conséquent,

$$\lim_{x_1 \rightarrow u_{X_1}^-} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) = F_2^{-1}(\alpha) = \text{VaR}_{\alpha}(X_2).$$

Posant :

$$\lim_{x_1 \rightarrow \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1)^+} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) = l.$$

Alors, $H(\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1), l) = H(\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1), u_{X_2})$ car H est continue et strictement croissante. Ainsi,

$$\lim_{x_1 \rightarrow \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1)^+} \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) = u_{X_2}.$$

De façon similaire on peut démontrer (4.19).

En utilisant la propriété 4.2, nous remarquons que

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X) \subset [\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1), u_{X_1}] \times [\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2), u_{X_2}], \quad (4.20)$$

$$\overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) \subset [l_{X_1}, \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1)] \times [l_{X_2}, \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2)]. \quad (4.21)$$

Maintenant, nous examinons au niveau α , la forme des courbes

$$x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) \text{ et } x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X).$$

À cet effet, nous rappelons d'abord, la notion de convexité et de concavité d'une fonction bivariée. Soit H une distribution bivariée avec une matrice hessienne

$$\nabla H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette dernière est donné par

$$DH(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} \frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} - \left[\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^2.$$

Alors,

- H est une fonction convexe si et seulement si

$$\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_i} \geq 0 \text{ et } DH(x_1, x_2) \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

- H est une fonction concave si et seulement si

$$\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_i} \leq 0 \text{ et } DH(x_1, x_2) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Propriété 4.3

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de variables aléatoires de distribution H et de fonction de survie \bar{H} . Nous supposons que H est deux fois dérivable.

1. Si $\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_i} \leq 0, i = 1, 2$ alors, la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$, au niveau α , est convexe $\forall (x_1, x_2)$ dans le support de X .
2. Si H est convexe, alors au niveau α la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est concave.
3. Si $\frac{\partial^2 \bar{H}(x_1, x_2)}{\partial^2 x_i} \leq 0, i = 1, 2$ alors, la courbe $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ au niveau α , est concave $\forall (x_1, x_2)$ dans le support de X .
4. Si \bar{H} est concave, alors au niveau α la courbe $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est convexe.

Démonstrations

1. Par simplicité, on pose $\psi(x_1) = \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$. On déduit, par le calcul différentiable implicite, que $\psi(x_1)$ est deux fois dérivable, car H est deux fois dérivable et $H(x_1, \psi(x_1)) = \alpha$, ce qui implique que $d^2 H(x_1, \psi(x_1))/d^2 x_1 = 0$.

De ce fait, on a :

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_2} \psi''(x_1) \\
& = \frac{\partial^2 H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \frac{\partial^2 H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_1 \partial x_2} \psi'(x_1) \\
& \quad + \frac{\partial^2 H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_2^2} [\psi'(x_1)]^2. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Puisque,

- $\frac{\partial^2 H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0$, car H est une densité,
- $\psi'(x_1) \leq 0$, car d'après la propriété 4.2, $\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est décroissante et
- $\frac{\partial^2 H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_i^2} \leq 0$, $i = 1, 2$,

alors, nous pouvons conclure que $-\frac{\partial H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_2} \psi''(x_1) \leq 0 \Rightarrow \psi''(x_1) \geq 0$.

Ce dernier résultat montre clairement que $\psi(x_1) = \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est convexe.

2. Notons que l'équation (4.22) peut s'écrire de la manière suivante

$$-\frac{\partial H(x_1, \psi(x_1))}{\partial x_2} \psi''(x_1) = (1, \psi'(x_1)) \nabla H(x_1, \psi(x_1)) (1, \psi'(x_1))^T \geq 0. \tag{4.23}$$

Étant donné que H est convexe, alors de (4.23) on obtient $\psi''(x_1) \leq 0$. Ce qui prouve que la fonction $\psi(x_1) = \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est concave. Avec les mêmes arguments et de la même façon, on peut démontrer 2) et 3).

Nous avons vu au troisième chapitre que l'utilisation des copules est une approche flexible pour modéliser le comportement conjoint des variables aléatoires. En fait, cette méthode permet la représentation d'une distribution multivariée en fonction de ses marges et ce, grâce à une fonction appelée copule.

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de variables aléatoires de distribution continue H et de fonctions de répartitions F_1 et F_2 . Le théorème de Sklar (1956) assure qu'il existe une copule unique $C: [0,1]^2 \mapsto [0,1]$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, telle que

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (4.24)$$

Dans ce qui suit, nous allons étudier la forme des courbes $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ et $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$, au niveau α , en fonction de la copule et des distributions marginales de X .

Propriété 4.4

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de distribution continue H et de distributions marginales F_1 et F_2 connectées par une copule C . Nous supposons que cette copule et les marges $F_i, i = 1, 2$ sont deux fois dérивables.

1. Si $\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial^2 u_i} \leq 0 \quad \forall u_i \in [0,1], i = 1, 2$ et F_1, F_2 sont concaves, alors au niveau α la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est convexe.
2. Si C, F_1 et F_2 sont convexes, alors la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$, au niveau α , est concave.
3. Si $\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial^2 u_i} \leq 0 \quad \forall u_i \in [0,1], i = 1, 2$ et F_1, F_2 sont convexes, alors au niveau α la courbe $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est concave.
4. Si C, F_1 et F_2 sont concaves, alors la courbe $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$, au niveau α , est convexe.

Démonstrations

1. En utilisant le théorème de Sklar décrit dans (4.24), on obtient pour $i = 1, 2$

$$\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial^2 x_i} = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial^2 u_i} (F'_i(x_i))^2 + \frac{\partial C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial u_i} F''_i(x_i) \leq 0. \quad (4.25)$$

Ainsi, de la propriété 4.3 (1), on conclut que la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est convexe.

2. Il suffit de montrer que si C , F_1 et F_2 sont convexes alors H est aussi convexe.

Supposons maintenant que C , F_1 et F_2 sont convexes, alors on a

$$\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial^2 u_i} \geq 0, \quad DC(u_1, u_2) \geq 0 \quad \text{et} \quad F''_i(x_i) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

En utilisant (4.25), on déduit que

$$\frac{\partial^2 H(u_1, u_2)}{\partial^2 u_i} \geq 0.$$

Pour montrer que H est convexe, il suffit de prouver que $DH(x_1, x_2) \geq 0$. Les calculs montrent que $DH(x_1, x_2)$ peut être reformulé en

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial^2 u_1} \cdot \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial^2 u_2} - \left[\frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial u_1 u_2} \right]^2 \right\} (F'_1(x_1))^2 (F'_2(x_2))^2 \\ & + \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial^2 u_1} \cdot \frac{\partial C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial u_2} (F'_1(x_1))^2 (F''_2(x_2)) \\ & + \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial^2 u_2} \cdot \frac{\partial C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial u_1} (F''_2(x_2))^2 (F'_1(x_1)) \\ & + \frac{\partial C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial u_2} F''_1(x_1) F''_2(x_2) \geq 0, \end{aligned}$$

et ce, du fait que C , F_1 et F_2 sont convexes. Ainsi, la distribution H est aussi convexe. Ce qui nous permet de conclure d'après la propriété 4.3 (2) que la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est concave.

Notons que les implications 3) et 4) peuvent être prouvées de manière similaire.

Plusieurs copules qui peuvent être trouvées dans la littérature sont membres des familles avec des paramètres réels. Une classe importante de ces familles est la classe des copules archimédiennes. Une copule C est dite archimédienne avec un générateur \emptyset si $\forall u, v \in [0,1]$

$$C(u, v) = \emptyset^{-1}(\emptyset(u) + \emptyset(v)),$$

où, $\emptyset: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, peut être infinie, strictement décroissante et convexe telle que $\emptyset(1) = 0$.

Pour cette classe de copules, la convexité de la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$, au niveau α , dépend que du comportement de la forme des distributions marginales comme indiqué ci-dessous.

Propriété 4.5

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de distribution continue H et de distributions marginales F_1 et F_2 connectées par la copule archimédienne C avec le générateur \emptyset . Si F_1 et F_2 sont des fonctions concaves, alors $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est convexe.

Propriété 4.6

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de distribution continue H et de distributions marginales F_1 et F_2 connectées par la copule archimédienne C avec le générateur \emptyset .

Supposons que \emptyset, F_1 et F_2 sont deux fois dérivables. Si F_1 et F_2 sont des fonctions convexes et $t \mapsto \emptyset''(t)/(\emptyset'(t))^2$ est croissante, alors $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ est concave.

4.3 Bornes de la VaR bivariée orthant inférieure et supérieure

Soit $\Gamma(F_1 F_2)$ l'espace de toutes les fonctions de répartition bivariées ayant les mêmes fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 . Dans cette section, nous étudions l'effet de la dépendance et des lois marginales sur la Valeur-à-Risque orthant inférieure et supérieure. Des bornes explicites de ces mesures de risque sont également obtenues. Nous commençons par introduire un ordre permettant de comparer deux Valeurs-à-Risques orthants inférieures (respectivement orthants supérieures).

Définition 4.1

Soient $X_1 = (X_{11}, X_{21})$ et $X_2 = (X_{21}, X_{22})$ deux paires de risques de distributions H_1 et H_2 respectivement. Alors, $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1)$ est inférieure à $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2)$, noté $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) < \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2)$, si $\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_1) \leq \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_2) \forall x_1$. De même, $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X_1)$ est inférieure à $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X_2)$, noté $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) < \overline{\text{VaR}}_\alpha(X_2)$, si $\overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_1) \leq \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_2) \forall x_1$.

Définition 4.2

Soient $X_1 = (X_{11}, X_{21})$ et $X_2 = (X_{12}, X_{22})$ deux vecteurs de variables aléatoires de fonctions de répartitions bivariées H_1 et H_2 respectivement. La variable aléatoire X_1 est dite plus concordante que la variable aléatoire X_2 , noté $X_1 <_C X_2$, si et

seulement si $H_1(x_1, x_2) \leq H_2(x_1, x_2) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. De plus, si C_1 et C_2 désignent les copules de X_1 et X_2 respectivement, alors $X_1 \prec_C X_2$ si et seulement si pour tout $u, v \in [0, 1]$, $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$.

Le résultat suivant établit un lien intéressant entre \prec et \prec_C .

Proposition 4.1

Soit $X_1 = (X_{11}, X_{21})$ et $X_2 = (X_{12}, X_{22})$ deux paires de risques de fonctions de répartitions H_1 et H_2 dans l'espace $\Gamma(F_1 F_2)$ respectivement. Alors,

$$X_1 \prec_C X_2 \Rightarrow \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2) \prec \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad (4.26)$$

$$X_1 \prec_C X_2 \Rightarrow \overline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) \prec \overline{\text{VaR}}_\alpha(X_2) \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (4.27)$$

Démonstration

Pour x_1 fixé, on note $H_{1,x_1}(x_2) = H_1(x_1, x_2)$ et $H_{2,x_1}(x_2) = H_2(x_1, x_2)$. D'après la définition de l'ordre de concordance, $X_1 \prec_C X_2 \Rightarrow H_{1,x_1}(x_2) \leq H_{2,x_1}(x_2) \forall x_1, x_2$. Or, H_{1,x_1} et H_{2,x_1} sont croissantes et par conséquent H_{1,x_1}^{-1} et H_{2,x_1}^{-1} sont décroissantes. Donc,

$$H_{1,x_1}(x_2) \leq H_{2,x_1}(x_2) \Rightarrow H_{2,x_1}^{-1}(\alpha) \leq H_{1,x_1}^{-1}(\alpha).$$

Au niveau α , on aura

$$H_{2,x_1}^{-1}(\alpha) \leq H_{1,x_1}^{-1}(\alpha) \Rightarrow \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2) \prec \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1).$$

Le fait que les fonctions de survie $\bar{H}_{i,x_1}(x_2)$, $i = 1, 2$ sont décroissantes, on peut montrer de façon similaire (4.27).

Nous remarquons de (4.26) et (4.27) que l'augmentation de la concordance entre les composantes de X diminue la $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ (respectivement augmente la $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X)$) par rapport à \prec . Maintenant, nous discutons de l'effet des lois marginales sur la $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ et la $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ lorsque la dépendance entre les composantes de X est fixée.

Proposition 4.2

Soit $X_1 = (X_{11}, X_{21})$ et $X_2 = (X_{12}, X_{22})$ deux vecteurs de variables aléatoires continues ayant une copule commune C et de distributions bivariées $H_1 \in \Gamma(F_1 F_2)$ et $H_2 \in \Gamma(G_1 G_2)$ respectivement. Alors,

$$\text{VaR}_\alpha(X_{i1}) \leq \text{VaR}_\alpha(X_{i2}), i = 1, 2 \Leftrightarrow \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2), \quad (4.28)$$

$$\text{VaR}_\alpha(X_{i1}) \leq \text{VaR}_\alpha(X_{i2}), i = 1, 2 \Leftrightarrow \overline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) \leq \overline{\text{VaR}}_\alpha(X_2). \quad (4.29)$$

Démonstration

Nous commençons par montrer \Rightarrow de (4.28). Soit $C(u, v)$ $u, v \in [0, 1]$, la copule commune des vecteurs $X_1 = (X_{11}, X_{21})$ et $X_2 = (X_{12}, X_{22})$. Pour u fixé, on note

$$v \mapsto C_u(v) = C(u, v).$$

En utilisant le théorème de Sklar, on a

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_1) = F_2^{-1} \circ C_{F_1(x_1)}^{-1}(\alpha) \text{ et } \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_2) = G_2^{-1} \circ C_{G_1(x_1)}^{-1}(\alpha).$$

Si on fixe u_1, u_2 telles que $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ alors pour tout $v \in [0, 1]$, on a

$$C_{u_1}(v) \leq C_{u_2}(v) \Rightarrow C_{u_2}^{-1}(\alpha) \leq C_{u_1}^{-1}(\alpha),$$

car pour tout u fixé, la fonction $v \mapsto C_u^{-1}(v)$ est décroissante.

Maintenant, supposons que

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{11}) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{12}) \text{ et } \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{21}) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{22}),$$

c'est-à-dire

$$G_1(x_1) \leq F_1(x_1) \text{ et } F_2^{-1}(u) \leq G_2^{-1}(u).$$

Il s'ensuit que

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha,x_1}(X_1) = F_2^{-1} \circ C_{F_1(x_1)}^{-1}(\alpha) \leq G_2^{-1} \circ C_{F_1(x_1)}^{-1}(\alpha) \leq G_2^{-1} \circ C_{G_1(x_1)}^{-1}(\alpha) = \underline{\text{VaR}}_{\alpha,x_1}(X_2).$$

Ainsi de la définition 4.1, nous concluons que

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) < \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2).$$

A fin de montrer \Leftrightarrow de (4.28), soit $\psi_i(x_1) = \underline{\text{VaR}}_{\alpha,x_1}(X_i)$, $i = 1, 2$ et notons leurs fonctions inverses par $\psi_i^{-1}(x_2)$, $i = 1, 2$. En utilisant le fait que

$$H_i(x_1, \psi_i(x_1)) = \alpha \text{ et } H_i(\psi_i^{-1}(x_2), x_2) = \alpha, \quad i = 1, 2,$$

on obtient alors,

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \psi_1(x_1) = \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{11}) \text{ et } \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \psi_2(x_1) = \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{12}),$$

de même,

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \psi_1^{-1}(x_2) = \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{21}) \text{ et } \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \psi_2^{-1}(x_2) = \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{22}).$$

Maintenant, supposons que $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_1) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_2)$, cela implique que

$$\psi_1(x_1) \leq \psi_2(x_1) \text{ et } \psi_1^{-1}(x_2) \leq \psi_2^{-1}(x_2),$$

car les fonctions $x_1 \mapsto \psi_i(x_1)$, $i = 1, 2$ sont décroissantes. Il s'ensuit que

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \psi_1(x_1) \leq \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \psi_2(x_1) \text{ et } \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \psi_1^{-1}(x_2) \leq \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \psi_2^{-1}(x_2).$$

Ainsi,

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{i1}) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_{i2}), \quad i = 1, 2.$$

L'équivalence (4.29) peut être démontrée similairement.

On note que la Proposition 4.1 peut être utilisée pour construire des bornes de la $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ et de la $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ par rapport à \prec . À cette fin, soit les bornes de Fréchet supérieures et inférieures, respectivement

$$M(x_1, x_2) = \min(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

$$W(x_1, x_2) = \max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0).$$

Il est bien connu que, pour toute distribution $H \in (F_1, F_2)$, on a

$$W(x_1, x_2) \leq H(x_1, x_2) \leq M(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

De la Proposition 4.2, on obtient

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_M) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_W),$$

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(X_W) \leq \overline{\text{VaR}}_\alpha(X) \leq \overline{\text{VaR}}_\alpha(X_M).$$

Une propriété intéressante de la dépendance positive est la notion de dépendance positive par quadrant (PQD) introduite par Lehmann (1966) [3]. Le vecteur aléatoire $X_1 = (X_1, X_2)$ de fonction distribution $H \in \Gamma(F_1 F_2)$ est dite dépend positive par quadrant si et seulement si $H(x_1, x_2) \geq \Pi(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$. Dans une telle situation, la borne supérieure de la $\underline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ et la borne inférieure de la $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ peuvent être améliorées comme suit :

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(X_M) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X) \leq \underline{\text{VaR}}_\alpha(X_\Pi),$$

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(X_\Pi) \leq \overline{\text{VaR}}_\alpha(X) \leq \overline{\text{VaR}}_\alpha(X_M).$$

où, X_{Π} est le vecteur aléatoire avec les mêmes distributions marginales de X , mais avec des composantes indépendantes. Les expressions explicites de ces bornes seront présentées par la suite.

Proposition 4.3

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de variables aléatoires de distributions marginales univariées F_1 et F_2 . Alors les bornes de la $\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(X)$ et de la $\overline{\text{VaR}}_{\alpha}(X)$ sont

$$\text{VaR}_{\alpha}(X_2) \leq \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) \leq \text{VaR}_{\alpha - F_1(x_1) + 1}(X_2), \quad x_1 \geq \text{VaR}_{\alpha}(X_1) \quad (4.30)$$

$$\text{VaR}_{\alpha - F_1(x_1)}(X_2) \leq \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_2), \quad x_1 \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_1) \quad (4.31)$$

En outre, si X est positive par quadrant alors,

$$\text{VaR}_{\alpha}(X_2) \leq \text{VaR}_{\frac{\alpha}{F_1(x_1)}}(X_2), \quad x_1 \geq \text{VaR}_{\alpha}(X_1) \quad (4.32)$$

$$\text{VaR}_{\frac{\alpha - F_1(x_1)}{1 - F_1(x_1)}}(X_2) \leq \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_2), \quad x_1 \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_1) \quad (4.33)$$

Démonstration

Pour x_1 fixé, $M_{x_1}(x_2) = \min(F_1(x_1), F_2(x_2))$ peut être considérée comme une fonction de x_2 , à savoir

$$M_{x_1}(x_2) = F_2(x_2)I[x_2 \leq F_2^{-1}(F_1(x_1))] + F_1(x_1)I[x_2 \geq F_2^{-1}(F_1(x_1))],$$

et en utilisant l'inverse généralisée de $M_{x_1}(x_2)$, nous obtenons

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(X_M) = F_2^{-1}(\alpha), \quad x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha).$$

De même, on a pour x_1 fixé

$$W_{x_1}(x_2) = (F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1)I[x_2 \geq F_2^{-1}(F_1(x_1))],$$

de sorte que,

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_1) = W_{x_1}^{-1}(\alpha) = F_2^{-1}(\alpha + F_1(x_1) + 1), x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha).$$

De même, on obtient

$$\overline{M}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha) = F_2^{-1}(\alpha) \text{ et } \overline{W}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha) = F_2^{-1}(\alpha - F_1(x_1)), x_1 \leq F_1^{-1}(\alpha).$$

Enfin, des calculs simples montrent que

$$\overline{\Pi}_{x_1}^{-1}(\alpha) = F_2^{-1}\left(\frac{\alpha}{F_1(x_1)}\right), x_1 \leq F_1^{-1}(\alpha),$$

$$\overline{\Pi}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha) = F_2^{-1}\left(\frac{\alpha - F_1(x_1)}{1 - F_1(x_1)}\right), x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha).$$

Remarque

- De (4.20), (4.21), (4.32) et (4.33), on observe que le domaine de variation de la $\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(X)$ et celui de la $\overline{\text{VaR}}_{\alpha}(X)$ sont donnés respectivement par

$$\mathcal{A}_1 = [\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(X_1), u_{x_1}] \times [\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(X_2), u_{x_2}] \cap \{(x_1, x_2) : x_2 \leq \underline{\text{VaR}}_{\alpha-F_1(x_1)+1}(X_2)\},$$

$$\mathcal{A}_2 = [l_{x_1}, \underline{\text{VaR}}_{\alpha}(X_1)] \times [l_{x_2}, \underline{\text{VaR}}_{\alpha}(X_2)] \cap \{(x_1, x_2) : x_2 \geq \underline{\text{VaR}}_{\alpha-F_1(x_1)+1}(X_2)\}.$$

- Il sera commode de substituer $\underline{\text{VaR}}_{\alpha-F_1(x_1)+1}(X_2)$ par $\underline{\text{VaR}}_{\frac{\alpha}{F_1(x_1)}}(X_2)$ en \mathcal{A}_1 , et $\underline{\text{VaR}}_{\alpha-F_1(x_1)+1}(X_2)$ par $\underline{\text{VaR}}_{\frac{\alpha-F_1(x_1)}{1-F_1(x_1)}}(X_2)$ en \mathcal{A}_2 lorsque X est PQD.

4.4 Illustrations

Exemple 4.1 – ($\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X)$ avec des marges et copule connues)

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de variables aléatoires de distribution $H \in \Gamma(F_1 F_2)$ telle que

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

où, C est une copule archimédienne de générateur \emptyset définie par

$$C(u, v) = \emptyset^{-1}(\emptyset(u) + \emptyset(v)), \forall u, v \in [0, 1], \quad (4.34)$$

où $\emptyset: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est continue, peut être infinie, strictement décroissante et convexe de sorte que $\emptyset(1) = 0$. On note que la Valeur-à-Risque orthant inférieure peut être obtenue en utilisant le théorème de Sklar. Ainsi, on a

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_1) = F_2^{-1} \circ C_{F_1(x_1)}^{-1}(\alpha), \quad x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha). \quad (4.35)$$

Pour $u = F_1(x_1)$, au niveau α l'équation (4.34) devient

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), v) &= C_{F_1(x_1)}(v) = \emptyset^{-1}(\emptyset(F_1(x_1)) + \emptyset(v)) = \alpha, \\ &\Rightarrow \emptyset(F_1(x_1)) + \emptyset(v) = \emptyset(\alpha) \\ &\Rightarrow \emptyset(v) = \emptyset(\alpha) - \emptyset(F_1(x_1)) \\ &\Rightarrow v = \emptyset^{-1}(\emptyset(\alpha) - \emptyset(F_1(x_1))). \end{aligned}$$

Alors,

$$C_{F_1(x_1)}^{-1}(\alpha) = \emptyset^{-1}(\emptyset(\alpha) - \emptyset(F_1(x_1))).$$

Alors, l'équation (4.35) devient

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_1) = F_2^{-1} \left[\emptyset^{-1} \left(\emptyset(\alpha) + \emptyset(F_1(x_1)) \right) \right], x_1 \geq F_1^{-1}(\alpha).$$

Considérons des marges exponentielles avec des paramètres λ_1 et λ_2 telles que $F_i(x_i) = 1 - e^{-\lambda_i x_i}$, $i = 1, 2$, reliées par la copule de Clayton définie par

$$C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0.$$

Cette copule fait partie de la classe des copules archimédiennes de générateur

$$\phi_\theta(x) = \theta^{-1}(x^{-\theta} - 1), \quad \theta > 0.$$

Des calculs standards montrent, à partir de (4.35), que $\forall x_1 \geq -\ln(1 - \alpha)/\lambda_1$

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X_1) = -\frac{1}{\lambda_2} \left[1 - \left(\alpha^{-\theta} - (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{-\theta} + 1 \right)^{-1/\theta} \right]. \quad (4.36)$$

Notons que le tau de Kendall bivariée associé à la copule C , noté τ , est une mesure d'association non paramétrique entre deux variables aléatoires basée sur la notion de concordance. Dans le cas de la copule de Clayton, le tau de Kendall s'écrit en fonction de θ comme suit :

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

Le graphique suivant illustre la courbe de la Valeur-à-Risque orthant inférieure pour différentes valeurs de tau de Kendall avec $\alpha = 0.95$, $\lambda_1 = 0.2$ et $\lambda_2 = 0.25$.

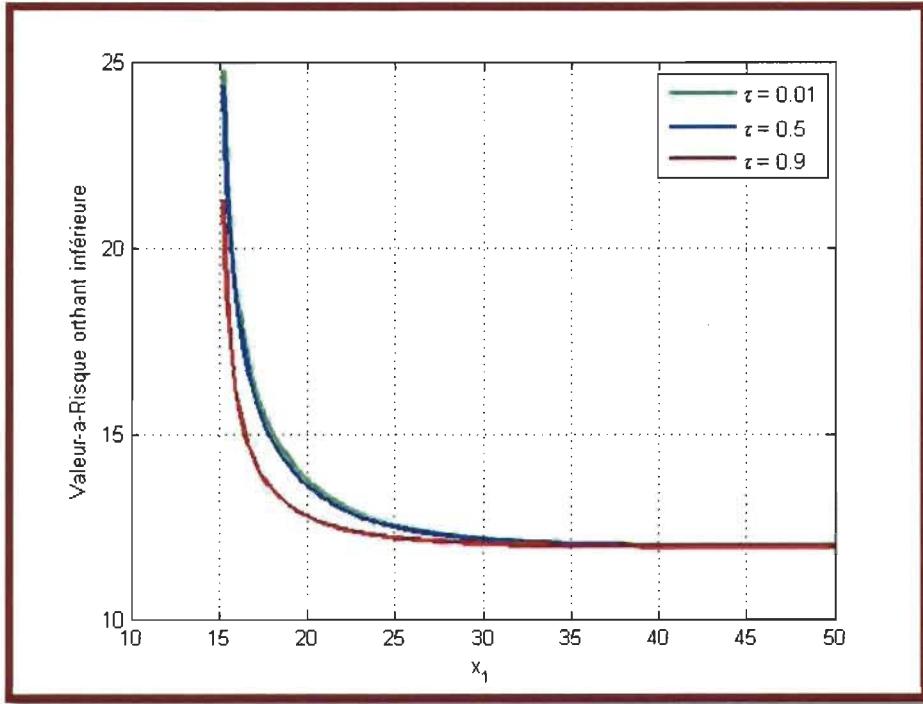


Figure 17 – Courbes de la $\underline{\text{VaR}}_{0.95,x_1}(X)$ pour $\tau = 0.01, 0.5, 0.9$

Exemple 4.2 – ($\overline{\text{VaR}}_{\alpha,x_1}(X)$ avec des marges normales connues)

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de variables aléatoires de distribution $H \in \Gamma(F_1 F_2)$, où $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$.

Cas 1 - (Copule inconnue)

De (4.31) on a

$$\begin{aligned}
 \text{VaR}_{\alpha-F_1(x_1)}(X_2) &\leq \overline{\text{VaR}}_{\alpha,x_1}(X) \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_2), \quad x_1 \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_1) \\
 \Leftrightarrow F_2^{-1}(\alpha - F_1(x_1)) &\leq \overline{\text{VaR}}_{\alpha,x_1}(X) \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_2), \quad x_1 \leq \text{VaR}_{\alpha}(X_1). \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Posons :

$$G_1(x_1) = F_2^{-1}(\alpha - F_1(x_1)).$$

Cas 2 - (PQD)

Si $X_1 = (X_1, X_2)$ dépend positive par quadrant (PQD), alors la borne inférieure de la $\overline{\text{VaR}}_\alpha(X)$ peut être améliorée. Ainsi, de (4.33) on a

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{\frac{\alpha - F_1(x_1)}{1 - F_1(x_1)}}(X_2) &\leq \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) \leq \text{VaR}_\alpha(X_2), \quad x_1 \leq \text{VaR}_\alpha(X_1) \\ \Leftrightarrow F_2^{-1}\left(\frac{\alpha - F_1(x_1)}{1 - F_1(x_1)}\right) &\leq \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(X) \leq \text{VaR}_\alpha(X_2), \quad x_1 \leq \text{VaR}_\alpha(X_1). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Posons :

$$G_2(x_1) = F_2^{-1}\left(\frac{\alpha - F_1(x_1)}{1 - F_1(x_1)}\right)$$

Notons qu'on ne peut pas calculer explicitement $G_1(x_1)$ et $G_2(x_1)$ lorsque les marges sont normales. On utilisera alors, des calculs numériques pour approximer ces deux fonctions.

La figure suivante trace les bornes inférieures de la $\overline{\text{VaR}}_{0.95, x_1}(X)$, $G_1(x_1)$ (*Copule inconnue*) et $G_2(x_1)$ (PQD), lorsque $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$.

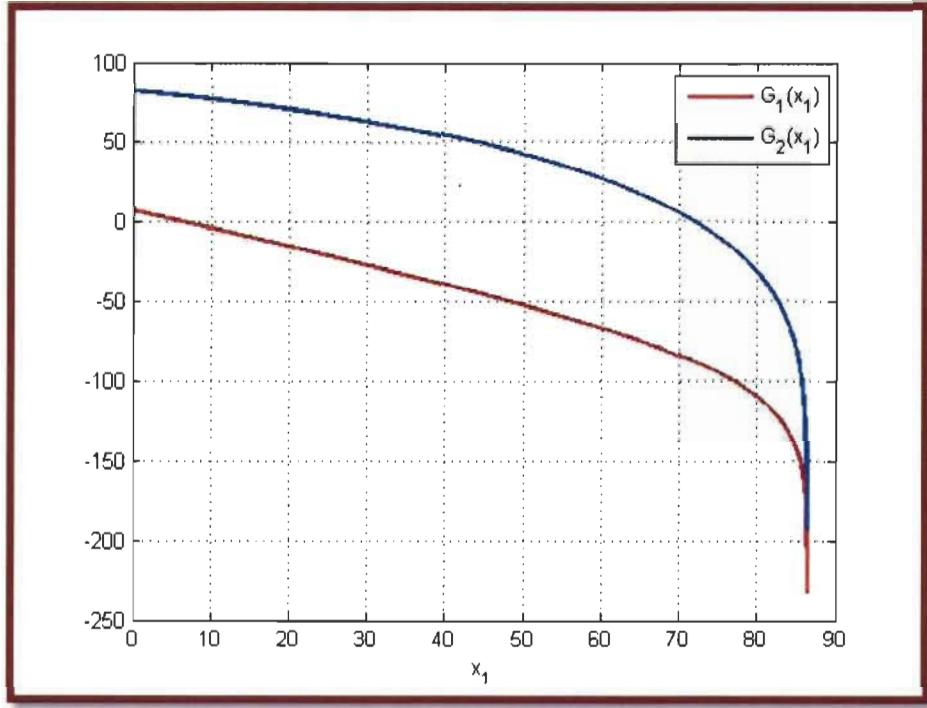


Figure 18 – Bornes inférieures de la $\overline{\text{VaR}}_{0.95,x_1}(X)$ pour $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 10$, $\sigma_1 = 50$ et $\sigma_2 = 55$

Exemple 4.3 – ($\overline{\text{VaR}}_{\alpha,x_1}(X)$ avec des marges logistiques connues)

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de variables aléatoires de distribution $H \in \Gamma(F_1 F_2)$, où les fonctions de répartitions de la loi logistique sont données par :

$$F_i(x) = \left(1 + e^{-\left(\frac{x-\nu_i}{\xi_i}\right)}\right)^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Dans le cas où la copule est inconnue et de façon similaire à l'exemple précédent on a :

$$G_1(x_1) = F_2^{-1}(\alpha - F_1(x_1)).$$

De même, dans le cas de PQD on obtient :

$$G_2(x_1) = F_2^{-1} \left(\frac{\alpha - F_1(x_1)}{1 - F_1(x_1)} \right).$$

La figure qui suit illustre les bornes inférieures de la $\overline{\text{VaR}}_{0.95,x_1}(X)$, $G_1(x_1)$ (*Copule inconnue*) et $G_2(x_1)$ (*PQD*), lorsque les variables $X_i, i = 1,2$ sont de loi logistique.

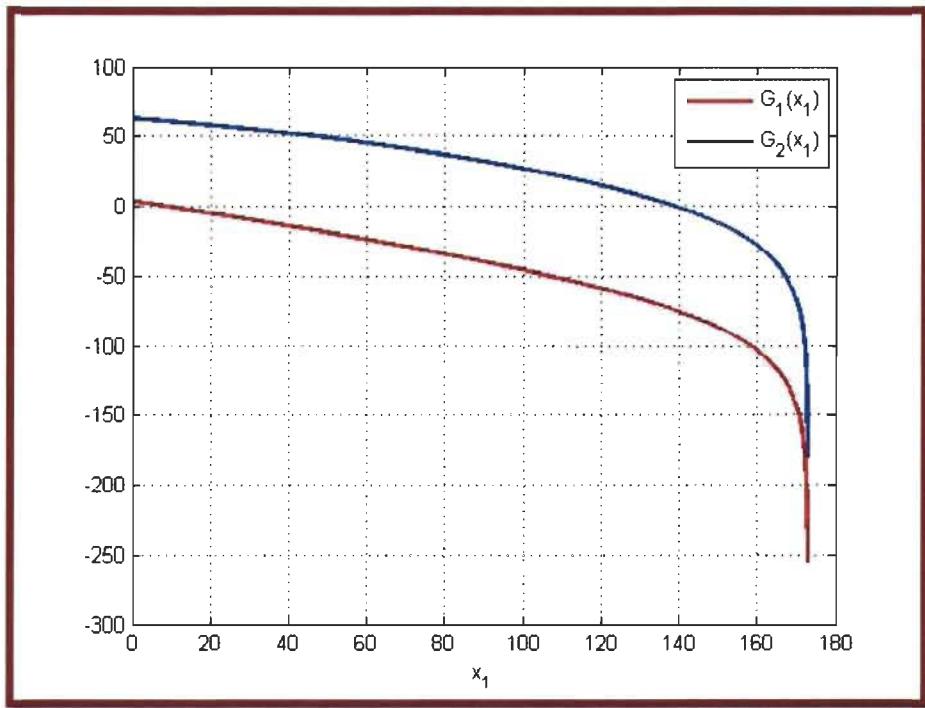


Figure 19 – Bornes inférieures de la $\overline{\text{VaR}}_{0.95,x_1}(X)$ pour $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 7$, $\xi_1 = 57$ et $\xi_2 = 25$

CONCLUSION

Le présent travail de recherche se situe dans la théorie des risques. Plus spécifiquement, nous nous sommes intéressés à certaines mesures de risque très utilisées en pratique. Il s'agit de la Valeur-à-Risque (VaR) et de la Valeur-à-Risque conditionnelle citée souvent sous le nom *expected shortfall* (ES). La contribution principale de ce travail se situe au niveau de l'étude pratique de Valeur-à-Risque bivariée orthant inférieure et supérieure introduite récemment par Embrechts et Puccetti (2006).

Par ailleurs, le mémoire était structuré comme suit. En premier lieu, nous avons énoncé quelques notions de base des risques en finance, rappelé dans le cas univarié des définitions formelles de la VaR et la ES puis, nous avons étudié plusieurs propriétés intéressantes de ces dernières mesures. En outre, des calculs de la VaR et la ES ont été effectués pour plusieurs lois de probabilité couramment utilisées en pratique. Également, nous avons présenté dans un contexte général, les différentes étapes de calcul de la VaR. En particulier, nous avons exposé les quatre méthodes classiques d'estimation de la VaR. De plus, pour chacune d'elles, nous avons dégagé les forces et les faiblesses et ce, pour faire un choix méthodologique adéquat. En deuxième lieu, la théorie des copules ainsi que sa relation avec l'estimation de la VaR bivariée ont été introduites, outre que des exemples de simulation de copules, fréquemment utilisées en finance, ont été illustrés. Pour estimer la VaR bivariée nous avons proposé d'abord, une nouvelle formulation de la VaR bivariée orthant inférieure et supérieure pour lesquelles nous avons

introduit plusieurs propriétés utiles. Ensuite, des bornes explicites faciles à calculer de ces deux mesures ont été données. Finalement, nous avons effectué des illustrations numériques de la VaR bivariée orthant inférieure et supérieure et ce, pour des cas différents. Notons que la dernière partie de ce travail est inspirée de l'article en cours de Mesfioui et Mailhot (2011) [7] .

RÉFÉRENCES

- [1] Sklar, A., (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris 8, 229–231.
- [2] Embrechts, P., Puccetti, G. (2006). Bounds for functions of multivariate risks. *Journal of Multivariate Analysis* 97(2), 526–547.
- [3] Lehmann, E.L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics* 37, 1137–1153.
- [4] ESCH, L. KIEFFER, R. LOPEZ T., (1997), *Value at Risk Vers un Risk Management moderne*.
- [5] Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- [6] Kass, R., Goovaerts, M. J. (1986). Best bounds for positive distributions with fixed moments. *Insurance Math. Econom.* F,87-95. With a discussion by G. C. Taylor
- [7] Mesfioui, M., Mailhot, M., 2011, Bivariate lower and upper orthant Value-at-Risk and Tail Value-at-Risk. Soumis au *Journal of multivariate analysis*.
- [8] Mesfioui, M., Quessy, J.-F. 2005. Bounds on the value-at-risk for the sum of possibly dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37, 135–151.
- [9] GENEST, Ch., MACKAY, J.R., 1986, Copules Archimédiennes et Familles de lois Bidimensionnelles dont les Marges sont données, *Canadian Journal of Statistics*, 14,145-159.