UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR
JOCELYN PELLERIN

UN TYPE DE CATÉGORISATION DES PREUVES DÉDUCTIVES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE POUR LA FIN DES ÉTUDES SECONDAIRES À PARTIR D'UN ENSEMBLE DE MANUELS DE MATHÉMATIQUES QUÉBÉCOIS

JANVIER 2005

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur Stéphane Cyr ainsi que ma directrice Madame Pascale Blouin. La contribution de ces deux personnes à la réalisation de la présente recherche a été essentielle.

De plus, je souhaite aussi remercier Monsieur André Longtin, professeur au département de mathématiques de l'UQTR, pour l'intérêt qu'il a montré envers ce projet. Grâce à sa disponibilité ainsi que ses commentaires pertinents, j'ai été en mesure de corriger certaines lacunes et terminer dans des délais raisonnables.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Notre but dans ce mémoire est d'élaborer une catégorisation des preuves déductives en géométrie euclidienne, qui sont proposées aux élèves dans les manuels de mathématiques au secondaire. Pour faire notre catégorisation, nous avons tout d'abord recensé certaines difficultés chez les élèves en lien avec la preuve. Celles-ci ont mené à la construction d'un canevas pour analyser les théorèmes et les problèmes qui exigent un raisonnement déductif dans la rédaction d'une preuve. Le travail d'analyse a été effectué en deux phases. Une première partie a consisté à dégager des éléments qui reviennent avec une certaine régularité dans les preuves. Par la suite, nous avons rédigé trente-cinq preuves, pour mettre en évidence d'autres éléments qui étaient jusqu'à présent absents.

Au fur et à mesure de l'analyse, le canevas a subi des modifications. Certains éléments ont été remplacés par d'autres plus pertinents pour expliquer les difficultés dans une preuve déductive. L'ensemble de ces éléments a constitué une grille d'analyse, à partir de laquelle nous avons élaboré la catégorisation. Dans une section accompagnant la catégorisation, nous revenons sur chacun des points qui causent de difficultés pour les élèves.

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE
PREUVES DÉDUCTIVES CATÉGORISATION DES PREUVES DÉDUCTIVES

INTRODUCTION

Notre mémoire porte sur une catégorisation des preuves déductives proposées aux élèves de quatrième et cinquième secondaire dans l'apprentissage de la géométrie euclidienne à partir de manuels de mathématiques québécois.

Le premier chapitre nous permet de présenter la problématique. Plusieurs études ont été effectuées pour découvrir les difficultés des élèves durant l'apprentissage de la rédaction de preuves (Moore, 1994; Muller, 1994; Reiss, Helmich et Reiss, 2002). Cependant, peu de recherches ont examiné comment se déroule le cheminent des élèves face à l'apprentissage de la preuve sur l'ensemble des cinq années du secondaire. Tanguay (2000) a réalisé une recherche de la sorte. Pour avoir une meilleure vue d'ensemble du cheminement des élèves, il a classifié un nombre important de problèmes géométriques, proposés aux élèves à partir d'une même collection. Son travail est très complet. Le seul point sur lequel ce dernier n'est pas allez en profondeur concerne les preuves déductives. Nous croyons qu'il est possible de raffiner sa classification en effectuant un découpage plus précis des preuves déductives.

Pour arriver à produire une catégorisation plus spécifique, nous avons évalué plusieurs études en rapport avec les difficultés des élèves concernant la rédaction de preuves à l'intérieur du chapitre deux. En s'appuyant sur les difficultés que nous avons conservées, nous avons procédé à la création d'un canevas d'analyse des preuves déductives avec lequel nous débuterons notre analyse. Voyons maintenant de façon plus détaillée comment nous procéderons à l'analyse.

Nous débuterons tout d'abord en sélectionnant 35 preuves déductives. Au fur et à mesure de l'analyse, certaines difficultés présentes dans le canevas d'analyse initial vont être mises de côté pour de nouveaux éléments qui expliquent mieux le niveau de difficulté d'une preuve déductive. L'ensemble de ces éléments obtenu durant l'analyse ainsi que ceux répertoriés lors d'une évaluation de certains manuels formeront une grille d'analyse à partir de laquelle nous constituerons des catégories distinctes pour bien faire ressortir les différences entre les diverses preuves. À l'étape suivante, nous avons classé chaque preuve selon la catégorie correspondante.

C'est à l'intérieur du chapitre quatre que nous présentons la grille d'analyse ainsi que le classement des preuves sous forme de tableau. De manière à ne pas s'en tenir à une présentation théorique, chaque catégorie est illustrée par une preuve qui lui est propre.

Nous proposons des explications plus détaillées ainsi que des commentaires sur chacune des six catégories de preuves dans le dernier chapitre. Puis, un bref commentaire est formulé à propos des volumes employés durant l'analyse. Finalement, les limites de la recherche sont explorées et des avenues potentielles de recherche sont suggérées.

Chapitre 1

Problématique

1.1 L'importance de la preuve

De nombreux auteurs reconnaissent l'importance de la preuve en mathématiques (Davis et Hersh, 1985; Lakatos, 1977; Vadcard, 1999). Elle a comme principales fonctions d'établir la véracité d'un nouveau résultat et d'assurer des fondements solides à cette discipline. Dans un contexte éducatif, bien que les rôles qu'elle y joue puissent être différents, ils sont, selon plusieurs spécialistes tout aussi fondamentaux. Par exemple, Hanna (1983) considère que la preuve, de par son caractère explicatif, mène à une meilleure compréhension chez les élèves. Pour Houdebine (1990) la preuve permet de convaincre une autre personne de l'exactitude d'un résultat. Quant à lui, Duval (1991) mentionne qu'elle est une bonne façon de développer le raisonnement déductif. L'importance de la preuve en mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques est donc indéniable, que ce soit en France ou ici.

Dans les programmes de mathématiques au Québec, la preuve est abordée véritablement à partir du quatrième et du cinquième secondaire. C'est par l'apprentissage de la géométrie euclidienne que l'élève se familiarise avec la preuve dès le quatrième secondaire. Celui-ci poursuit l'étude de ce sujet et il développe de façon plus marquée ses habiletés de rédaction de preuves l'année suivante à l'intérieur du programme *Mathématique 536* (1997). Ce programme comporte quatre grands objectifs globaux, dont le dernier qui se lit comme suit : « *favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à émettre des hypothèses et à les vérifier par une démarche inductive ou déductive* » (p.14). Plus précisément, l'objectif terminal 2.1 en géométrie analytique spécifie que l'élève sera en mesure « de fournir une argumentation juste dans une démarche structurée au cours de la démonstration de propositions ou de la résolution de problèmes » (p.28). Donc, nous voyons que la preuve devient un sujet d'étude majeur dans le programme 536.

1.2 Les difficultés des élèves avec la preuve

Les différents rôles attribués à la preuve font de celle-ci un concept fondamental et essentiel à la formation de la pensée mathématique des élèves. Cependant, la rédaction de preuves est en même temps l'une des activités mathématiques qui provoque le plus de difficultés chez les élèves du secondaire (Houdebine, 1990; Mingus et Grassl, 1999; Senk, 1985; Williams, 1980). Ces difficultés sont attribuables à une multitude de facteurs. Les recherches effectuées depuis les trois dernières décennies sur la question ont d'ailleurs permis d'en faire une recension détaillée et elles ont aidé également à mieux situer les difficultés des élèves dans ce domaine. Ces recherches ont ainsi permis d'identifier deux grandes catégories de difficultés rencontrées chez les élèves avec la preuve : des difficultés en rapport avec la compréhension de la notion de preuve et celles en lien avec l'écriture d'une preuve.

1.2.1 Les difficultés des élèves avec la signification de la preuve

La perception des élèves face à la preuve est un facteur à considérer pour expliquer les difficultés rencontrés par ceux-ci avec cette notion. En effet, ils éprouvent entre autres des difficultés à voir la dimension utilitaire de la preuve. La plupart des notions mathématiques abordées au secondaire le sont en rapport avec des situations de la vie courante; ceci permet aux élèves de donner un sens aux activités et aux concepts proposés à l'intérieur des manuels. La preuve, quant à elle, possède peu d'applications dans le quotidien car elle vise principalement à valider ou à expliquer un nouveau résultat mathématique (Hanna, 1990). Or, selon Cyr (2001), cette absence de lien avec le vécu des élèves, explique en partie pourquoi ceux-ci éprouvent de la difficulté à trouver un sens à la preuve et à percevoir son utilité.

De plus, les élèves ont tendance à conserver des conceptions erronées face à la position à privilégier concernant la rédaction de preuves. Généralement, ces conceptions sont moins apparentes que les difficultés de rédaction mais elles sont tout aussi pénalisantes. Muller (1994) soutient que pour les élèves rencontrés dans sa recherche, la preuve se veut uniquement un exercice de rédaction à l'aide du langage mathématique. De son côté, Schoenfeld (1989) a constaté le fait que les élèves accordent autant de poids à la forme de la preuve (la preuve en deux colonnes avec les affirmations d'un côté et les justifications de l'autre) qu'au contenu de celle-ci. Ces deux points soulevés par les chercheurs montrent bien que le sens accordé à la preuve en mathématiques est mal compris par les élèves.

1.2.2 Les difficultés de rédaction de preuve chez le élèves

Au premier type de problèmes que nous venons de soulever, se greffent aussi des difficultés plus techniques associées à la rédaction de preuves. D'ailleurs, à ce sujet, l'étude de Senk (1985) effectuée auprès de 1520 élèves de niveau secondaire aux États-Unis, indique que seulement 30% réussissent à 75% l'écriture d'une preuve en géométrie euclidienne. De plus, moins de 5% ont été en mesure d'obtenir le total des points lors de l'évaluation des preuves.

D'autres chercheurs ont recensé des difficultés précises chez les élèves en lien avec la rédaction de preuves (Chazan, 1993; Galbraith, 1995). Ceux-ci soulignent deux difficultés liées au contre-exemple. Tout d'abord, les élèves n'ont pas une bonne compréhension de ce concept. En effet, pour les élèves, l'asymétrie qui existe entre le rôle d'un exemple et d'un contre-exemple est problématique. Un exemple a pour but d'illustrer un énoncé alors qu'un contre-exemple permet de montrer qu'un énoncé donné est faux. En second lieu, le fait qu'un exemple ne constitue pas une preuve tandis qu'un seul contre-exemple est suffisant pour rejeter définitivement un énoncé est une source de difficultés selon Galbraith (1995). Ce dernier continue dans la même veine, en faisant remarquer que les élèves ne voient pas bien qu'un contre-exemple est en fait un énoncé qui satisfait aux conditions de départ du problème tout en allant à l'encontre de la conclusion. Pour les élèves qui distinguent mal la différence entre les conditions initiales et la conclusion, ce problème est encore plus dramatique. Pour sa part, Schoenfeld (1989) souligne que les élèves se comportent face à des preuves nécessitant une construction (l'addition à la figure de quelques éléments qui respectent les conditions dans l'énoncé initial) comme s'ils n'avaient aucune connaissance des techniques de preuves. Les élèves vont privilégier une représentation graphique parfaite du problème plutôt que d'essayer de raisonner sur une figure qui respecte les conditions imposées par le problème. À ce sujet, Muller (1994) mentionne que l'importance accordée à la figure par les élèves peut mener à des raisonnements faux. En partant de l'énoncé, certains construisent des représentations du problème tout en ajoutant des hypothèses qui ne sont pas dans les conditions de départ. Ces hypothèses mènent à des conclusions erronées provenant de figures qui ne sont pas une représentation juste de la situation initiale.

L'utilisation de la figure engendre également d'autres erreurs. À partir de ses travaux, Muller (1994) identifie le changement de statut de la figure comme un élément central dans les difficultés des élèves face à la preuve. Effectivement, durant les premières années du secondaire, l'élève utilise la figure pour prouver des affirmations de façon inductive. En d'autres termes, la prise de mesures à partir de quelques cas permet le passage à une généralisation, ce qui constitue une preuve pour l'élève. Toutefois, à un certain moment, le rôle de la figure change. L'élève ne raisonne plus sur la figure mais sur le concept mathématique représenté par celle-ci. Les élèves ne réalisent donc pas que l'étude de quelques cas seulement ne suffit pas pour supporter une conclusion de nature générale en mathématiques selon Williams (1980). D'ailleurs, pour Balacheff (1987) ce passage d'une géométrie pratique à une géométrie théorique faisant appel au raisonnement déductif, où les mesures sur une figure ne sont plus une preuve, serait la principale cause des difficultés des élèves avec la preuve.

1.3 Des difficultés avec l'enseignement de la preuve

Comme nous venons de le voir, la preuve soulève de nombreuses difficultés pour les élèves, ce qui ne facilite en rien son enseignement pour les maîtres. En effet, Schoenfeld (1988) a remarqué à partir d'une étude effectuée auprès d'élèves dans un cours de géométrie, que même un enseignant compétent, qui introduit bien les notions présentes dans le programme, ne verra pas nécessairement les résultats qu'il souhaite chez ses élèves. Il a notamment recensé quatre problèmes sérieux en lien avec l'enseignement de la preuve.

Tout d'abord, l'apprentissage des constructions mène les élèves à mettre l'accent sur la reproduction exacte des figures plutôt que sur la compréhension du processus. En second lieu, pour faciliter la compréhension des élèves, l'enseignant structure souvent la preuve selon une façon précise et en respectant un ordre donné (en deux colonnes); ceci impose un modèle strict de rédaction et les élèves en viennent à penser que la forme de la preuve est plus importante que son contenu. Le troisième problème important soulevé par Schoenfeld a trait à la répétition de problèmes semblables en classe pour permettre l'acquisition des habiletés de rédaction de preuves. Cette façon de procéder perpétue une croyance erronée chez les élèves : tous les problèmes se solutionnent en peu de temps et en appliquant les mêmes techniques. Enfin, la dernière difficulté touche le manque de cohérence entre le discours de l'enseignant qui accorde beaucoup d'importance à la compréhension et au développement du raisonnement déductif alors que les critères d'évaluation imposés à ce dernier exigent une preuve sans erreur. Cette asymétrie force les élèves à aborder les mathématiques en mémorisant des notions importantes plutôt qu'en essayant de les comprendre.

De son côté, Braconne (1988) souligne deux autres problèmes majeurs concernant l'enseignement de la démonstration. Celle-ci indique à l'intérieur de son étude que bien que les enseignants voient dans la démonstration un exercice très formateur pour les élèves car elle permet à ces derniers d'apprendre à construire un raisonnement déductif avec rigueur, ils proposent toutefois que « *cet apprentissage s'organise autour de reproductions de modèles, de respect de consignes de présentation, de répétitions d'exercices formels, comme si apprendre à présenter une démonstration était un moyen pour apprendre à raisonner et à démontrer* » (p.190). De plus, elle a constaté que bien que l'apprentissage du raisonnement soit basé sur la déduction, la correction effectuée par les professeurs met plutôt l'accent sur la justification. Ceci signifie que lors de l'évaluation des preuves, les enseignants accordent davantage d'importance à la justification de chacune des étapes qui mènent à la conclusion exigée par l'énoncé plutôt qu'aux étapes elles-mêmes.

1.4 Des questions didactiques en lien avec la preuve

Les sections précédentes montrent le fait que les difficultés rattachées à la preuve sont multiples. Elles ouvrent ainsi la porte à de nombreuses interrogations de nature didactique que ce soit à propos de l'enseignement et de l'apprentissage de ce concept ou du concept lui-même, par exemple : 1) Comment initier les élèves aux rudiments du raisonnement déductif? 2) Comment développer davantage l'apprentissage du raisonnement déductif, afin que les élèves arrivent à présenter les arguments de façon logique pour prouver un énoncé? 3) Quels types de preuves devons-nous présenter aux élèves pour favoriser la transition entre le raisonnement inductif et le raisonnement déductif? 4) Quels types de preuves doivent être enseignées au secondaire et à quel moment?

Dans le cadre de cette recherche, nous ne pourrons évidemment pas répondre à toutes ces questions; d'ailleurs certaines ont déjà été abordées à plusieurs occasions par d'autres chercheurs dans des études antérieures. Arsac et *al.* (1992), par exemple, ont proposé quelques règles, qui visent à initier de façon progressive, les élèves de onze à quinze ans au raisonnement déductif. Leur approche permet un passage moins brutal à l'apprentissage de la démonstration pour les élèves. Quant à Paul et DeBlois (1998), ils ont étudié certains des aspects en rapport avec le développement du raisonnement déductif auprès des élèves du secondaire. Cette expérience a eu le mérite de produire une catégorisation des preuves selon trois grandes classes : preuves empiriques, preuves empirico-théoriques et preuves théoriques. La typologie de ces derniers sera abordée plus en profondeur dans le chapitre suivant. De son côté, Balacheff (1987) s'est penché sur le passage entre la mathématique pratique et la mathématique théorique en développant une typologie des preuves produites par les élèves, que nous introduirons dans le second chapitre de cette recherche.

1.5 Questions didactiques choisies et justification

Les questions évoquées à la section précédente ne sont pas banales. Même si certaines des réponses apportées à ces interrogations ne sont pas complètes, la plupart de ces questions ont été énormément étudiées. Cependant, deux de celles qui ont été le moins à l'étude touchent le type de preuves à présenter aux élèves ainsi que la période la plus appropriée dans le curriculum pour introduire un type de preuves précis. Nous pensons qu'avant de s'intéresser à la façon d'enseigner la preuve – par exemple s'intéresser au type de matériel pédagogique utile – il convient de s'intéresser d'abord plus profondément à ce qui constitue l'objet de savoir de l'enseignement et à quel moment il convient de l'enseigner dans le programme en fonction des difficultés conceptuelles qu'il risque de susciter. Comme c'est le cas pour plusieurs concepts mathématiques complexes, les recherches actuelles en didactique des mathématiques tendent à préconiser une transition plus graduelle entre les différents niveaux de difficulté d'une preuve. Ceci conduit à un apprentissage plus aisé alors que le contraire peut être à l'origine de plusieurs problèmes.

À ce sujet, Moore (1994) fait valoir que la transition abrupte dans l'apprentissage des habiletés de rédaction de preuves qui est présente entre le niveau collégial et l'université est une source majeure de difficultés pour les étudiants. Celui-ci souligne que dans plusieurs collèges et universités, les programmes demandent que les étudiants produisent des preuves rigoureuses (en analyse réelle par exemple) alors que les cours de mathématiques préparatoires exigent très peu de preuves des étudiants. Comme le montrent de nombreuses recherches en didactique des mathématiques, ce type de phénomène d'enseignement – phénomène relié à une transition abrupte entre deux domaines de connaissances – est fréquemment observé. Lorsqu'un tel phénomène est repéré dans l'enseignement, il convient alors comme le souligne Artigue (1990) d'approfondir l'analyse conceptuelle qu'une telle transition exige chez les élèves en tentant notamment de mieux caractériser la nature des problèmes mathématiques proposés aux élèves dans les deux domaines de connaissances et de proposer pour expérimentations futures, des gradations de problèmes afin de favoriser la transition entre ces deux domaines de connaissances. Ainsi, pour parvenir à présenter aux élèves des problèmes de rédaction de preuves qui sont adaptés à leur niveau, tout en augmentant graduellement le niveau de difficulté des problèmes, il est nécessaire de connaître les éléments qui entraînent des difficultés dans un problème. Or, jusqu'à maintenant peu d'auteurs ont étudié ces éléments pour classifier les preuves rencontrées par les élèves en géométrie euclidienne.

Cependant, un premier travail dans ce sens a été réalisé par Tanguay (2000) alors qu'il a construit une typologie des problèmes de géométrie en rapport avec la notion de preuve au secondaire. Le but visé par cette étude était de porter un regard critique sur l'apprentissage de la notion de preuve par les élèves par le biais des exercices et des problèmes qu'ils rencontrent dans les manuels de mathématiques. Pour l'instant, nous allons nous contenter d'introduire brièvement cette typologie. Dans le chapitre suivant, nous en ferons une description plus détaillée. Cette typologie a mené à une grille d'analyse qui a été utilisée par Tanguay pour classifier les problèmes présents dans la collection à l'étude, dans sa recherche. Cette grille comporte sept catégories échelonnées de A à N. Chacune est élaborée en fonction du type de preuves demandées à l'élève. La catégorie A, ou la catégorie initiale, consiste en une simple application de la part de l'élève; il n'y a pas de démarche de justification à faire. Avec chaque catégorie, le niveau de justification et de rigueur exigé de l'élève augmente; tout comme la complexité des preuves. L'avant-dernière catégorie, les problèmes de type M sont « *une application directe d' un, deux ou trois résultats déjà établis, en une combinaison d' un seul tenant, non hiérarchisé dans le temps* » (p.118). La grille se termine avec la catégorie N, soit l'enchaînement déductif et rigoureux. Les problèmes se retrouvant dans cette catégorie demandent à l'élève une véritable attitude de preuve. Il doit regrouper des résultats établis préalablement (des théorèmes[1] ou des axiomes[2]) en se basant sur les règles de la logique mathématique pour montrer le résultat final. En s'appuyant sur sa grille, Tanguay a été en mesure d'avoir une bonne vue d'ensemble des problèmes proposés aux élèves pour toute la durée du secondaire. Ce regard critique lui permet d'affirmer que « *la pensée déductive exercée sur une argumentation indirecte, en séquence, est sous-représentée par des séquences qui sont de toutes façons trop courtes* » (p.259). Autrement dit, le raisonnement déductif n'est pas assez présent et lorsque des problèmes faisant appel à ce type de raisonnement sont soumis aux élèves, ils ne comportent pas suffisamment d'étapes.

---

[1] Un théorème est une conjecture qui a été démontrée.
[2] Un axiome est un énoncé mathématique qui est accepté sans démonstration.

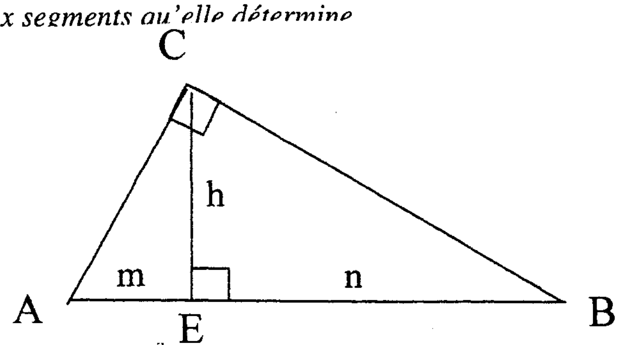
Une autre des constations qu'il dégage à la fin de son étude touche les problèmes de la catégorie N. Ces problèmes, qui font appel au raisonnement logico-déductif, se rencontrent majoritairement en quatrième et cinquième secondaire. De plus, à l'intérieur de ceux-ci, il n'y a pas de progression graduelle car aucune distinction n'est précisée entre les différents niveaux de difficulté parmi ce type de problèmes qui exige une preuve déductive. Pourtant, après l'analyse des programmes actuellement en vigueur au secondaire (que nous présenterons au chapitre suivant) nous avons remarqué qu'un des soucis des concepteurs des programmes de mathématiques est d'assurer un développement graduel et sans rupture dans l'apprentissage des élèves. D'ailleurs, le MEQ (1997) souligne dans le programme *Mathématique 536* que : « *La continuité dans l'apprentissage permet de reprendre les notions étudiées antérieurement et de faire évoluer les conceptions et les représentations des élèves* » (p.7).

Donc, nous voyons que cet intérêt pour une transition graduelle est pris en considération par le MEQ. Comme nous souhaitons faire en sorte que la transition entre les problèmes de rédaction de preuves déductives de plus en plus complexes soit le plus fluide possible, nous aurons donc besoin de détailler les problèmes de type N. En effet, la construction de la grille de Tanguay pourrait nous laisser croire qu'il y a une autre sous-catégorisation dans les problèmes de type N. Nous pensons que certaines preuves causent plus de difficultés que d'autres aux élèves. Williams (1980) souligne à l'intérieur de sa recherche que moins de 20% des élèves comprennent la preuve par l'absurde. De son côté, Senk (1985) fait remarquer que les preuves que nous retrouvons dans les manuels de mathématiques sont difficiles pour la plupart des élèves. Lorsque les élèves ont eu à prouver que les diagonales d'un rectangle sont congrues, ils ont obtenu un taux de réussite de 32% pour cette démonstration! De plus, montrer que deux figures sont semblables (deux figures sont semblables si les angles homologues sont congrus et les côtés homologues sont proportionnels) pose un plus grand défi aux élèves comparativement aux preuves où deux figures sont congrues (identiques). Le niveau de difficulté d'un problème n'est pas seulement représenté par le nombre de pas déductifs (le nombre d'étapes intermédiaires pour montrer un résultat comme le laisse entendre l'étude de Tanguay sur les problèmes de type N). D'autres facteurs pourraient être à considérer de notre point de vue : la nécessité ou non de faire une construction (l'addition ou non d'éléments à la figure), le type de preuves, le type de définition provenant de l'énoncé (directe ou indirecte) par exemple. En prenant en considération cette sous-catégorisation, qui regroupe des caractéristiques précises quant au niveau de difficulté d'une preuve déductive, ceci mènerait à une classification plus précise et donc à la possibilité pour les élèves de réaliser un apprentissage plus graduel de la preuve. Pour illustrer avec plus de précision en quoi consistent les niveaux de difficulté auxquels nous faisons référence, nous allons d'abord suggérer d'autres critères que le nombre de pas déductifs, pour aborder le sujet. Des facteurs tels la compréhension des définitions, l'habileté à faire une construction à partir d'une figure géométrique pour démarrer la preuve sont aussi à considérer, mais ces éléments seront abordés plus en détail ultérieurement. De manière à éclairer notre propos sur certains de ces facteurs, la présentation de quelques problèmes de type N est essentielle.

Nous croyons, que pour les élèves, prouver que la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine est probablement plus complexe que de montrer que dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus.

Théorème 1 : dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

Soit un triangle rectangle ABC, une hauteur CE = h, le côté AE = m et le côté EB = n. Il faut montrer que la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine

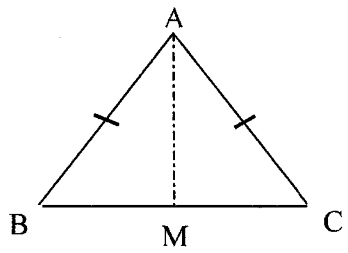


1) *CE est congru à CE*; (*ax*)[3]
2) *l'angle AEC est congru à l'angle CEB car ce sont deux angles droits*; (*h*)
3) *l'angle ACE est congru à l'angle CBE car ils sont tous les deux complémentaires de l'angle BAC*; (*obs*)
4) *le triangle ACE est semblable au triangle BCE*; (*cp*)
5) *BE / CE = CE / AE car dans des triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels*; (*cp*)
6) *donc, CE * CE = AE * BE et ainsi h * h = m * n.*

Théorème 2 : dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus.

[3] Nous avons identifié les différentes étapes des preuves pour faciliter la lecture de celles-ci ainsi que leur classement. Consulter la dernière page de l'annexe pour une liste complète des abréviations.

Soit le triangle ABC avec les côtés AB et AC congrus. Il faut montrer que les angles b et c sont congrus.



1) *la preuve débute avec le positionnement du point M au milieu du côté BC* (*justification : par construction*);
2) *puis, nous relions le sommet A au point M, pour former deux triangles*; (*const*)
3) *le côté BM est congru au côté CM* (*justification : M est le point milieu du côté BC*);
4) *le côté AB est congru au côté AC* (*justification : par hypothèse*);
5) *le côté AM est congru à lui-même* (*un côté est congru à lui-même*); (*thm*)
6) *le triangle ABM est congru au triangle ACM* (*par la propriété côté-côté-côté*), (*cp*)
7) *donc l'angle b est congru à l'angle c comme éléments homologues provenant de triangles congrus.*

Selon nous, la première preuve est beaucoup plus exigeante pour un élève car les difficultés qu'il peut rencontrer se situent au niveau de la compréhension du concept de moyenne proportionnelle et de la reconnaissance des triangles semblables. Par la suite, l'élève doit avoir une bonne compréhension des définitions et surtout savoir quels triangles utiliser pour en arriver à montrer le résultat final. L'étape 3 exige de l'élève qu'il possède bien la notion d'angles complémentaires. L'étape 5 où l'élève doit poser les rapports représente probablement une difficulté moins importante dans cette preuve comparativement à l'étape 3. Quant à elle, la seconde preuve fait appel à une construction qui semble assez évidente à faire pour un élève à partir de la figure car elle permet de créer deux triangles congrus. L'élève doit reconnaître sur la figure deux triangles et établir des correspondances assez simples dans l'ensemble. Le nombre d'étapes intermédiaires est plus grand mais les difficultés impliquées sont moins grandes selon nous. Dans cette preuve, l'élève doit se servir de la propriété des éléments homologues pour démontrer le résultat désiré, mais il s'agit d'une propriété connue des élèves.

1.6 Problème et questions de recherche

Nous constatons donc qu'à l'intérieur des preuves déductives, il peut exister divers éléments qui peuvent influencer le degré de difficulté de la preuve et ces éléments ne sont pas nécessairement toujours liés au nombre d'étapes intermédiaires. Dans le cadre de cette recherche, nous allons ainsi nous restreindre à une question précise : pouvons-nous produire une catégorisation des preuves déductives, en géométrie euclidienne, exigées en en secondaire 4 et secondaire 5 à partir des différentes difficultés rencontrées par les élèves dans les études consultées. À cette question principale s'ajoute la sous-question suivante : cette catégorisation permet-elle d'analyser et de classifier les problèmes proposés aux élèves de quatrième et cinquième secondaire qui font appel au raisonnement déductif et qui exigent une preuve du même type?

Aussi, les deux exemples présentés à la section 1.5 soulèvent les questions plus spécifiques suivantes :

- existe-t-il d'autres facteurs importants, à part le nombre de pas déductifs, pour caractériser le niveau de difficulté d'une preuve?
- si c'est le cas, lesquels?

- quels sont les facteurs que nous devons retenir pour obtenir un canevas d'analyse utilisable dans l'analyse des preuves déductives proposées aux élèves du secondaire?

1.7 Buts et étapes de la recherche

Notre tout premier objectif de recherche consiste à déterminer les caractéristiques qui pourraient nous aider à mieux cerner le niveau de difficulté des preuves déductives en géométrie euclidienne[4] présentées aux élèves de quatrième et cinquième secondaire en mathématiques. Pour ce faire, nous allons, dans un premier temps, présenter des études qui ont porté sur les difficultés des élèves face à ces preuves pour en dégager des critères applicables dans cette recherche. Ces critères devront nous permettre de situer les aspects qui, généralement, suscitent des difficultés chez les élèves dans la rédaction d'une preuve déductive. Par la suite, en prenant appui sur les caractéristiques que nous aurons retenues, nous procéderons à la construction d'un canevas d'analyse, ceci constitue notre deuxième objectif de recherche. L'utilisation de cette première version du canevas nous permettra d'analyser et de classifier les preuves déductives proposées aux élèves en quatrième et cinquième secondaire. Nous espérons que cette première analyse favorisera l'émergence de nouvelles caractéristiques et probablement le remplacement de certaines des caractéristiques retenues à l'origine par d'autres plus appropriées ou encore leur raffinement. Ces modifications graduelles au canevas d'analyse vont conduire à la conception d'une grille d'analyse, qui mènera finalement à une catégorisation des preuves déductives. Ici, il est nécessaire de mentionner que ces objectifs généraux (extraire des caractéristiques à partir des études à propos des difficultés des élèves, l'élaboration du

[4] Afin d'alléger le texte, nous utilisons l'expression « preuves déductives » pour désigner les preuves déductives en géométrie euclidienne.

canevas et de la grille) sont des étapes préliminaires requises et non pas le cœur de ce travail de recherche. La construction de la catégorisation constitue notre dernier objectif de recherche, tout en étant l'élément le plus important de cette étude. Nous espérons que la grille et la catégorisation serviront à mieux identifier le niveau de difficulté des preuves déductives tout en fournissant des explications quant aux difficultés inhérentes à chaque catégorie de preuves déductives. Le développement de ces outils se veut en quelque sorte un support technique pour l'enseignement des mathématiques. En mettant ces instruments à la disposition des enseignants, nous pensons que ceux-ci seront mieux à même d'identifier les difficultés reliées à une catégorie de preuves en particulier, les preuves déductives, et ainsi déterminer la période la plus propice pour aborder les notions qui s'y rattachent avec les élèves.

Chapitre 2

Cadre théorique

Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps faire un survol des programmes de mathématiques au secondaire sur un aspect précis : la preuve en géométrie euclidienne. Cette démarche s'avère nécessaire puisqu'elle nous permet d'identifier l'objet d'étude et la façon dont il est traité par le MEQ durant les cinq ans du secondaire. Dans un deuxième temps, nous allons présenter la grille d'analyse de Tanguay (2000) se rapportant aux différents problèmes géométriques proposés dans une collection employée présentement au secondaire. L'introduction de cette grille nous permettra ainsi de mieux catégoriser les divers problèmes susceptibles de faire émerger une attitude de preuve chez les élèves. Par la suite, nous présenterons plusieurs études concernant les difficultés des élèves avec la preuve afin d'identifier des critères supplémentaires qui permettront de catégoriser davantage certains types de preuves. Puis, nous conclurons dans une section ultérieure sur les types de preuves au secondaire ainsi que les éléments (les axiomes, les propriétés) qui peuvent constituer une source de difficultés dans la rédaction de preuves. Les difficultés présentes chez les élèves mèneront au chapitre suivant à la construction d'un premier canevas pour procéder à l'analyse des problèmes qui font appel au raisonnement déductif dans la rédaction d'une preuve.

2.1 Les programmes au secondaire

Pour donner une meilleure vue d'ensemble de l'approche des concepteurs des programmes, nous allons regrouper les différents programmes par cycles, tout en accordant plus d'attention aux programmes de mathématiques 436 et 536. C'est à ces niveaux, en effet, que se situe le cœur de notre étude; l'attitude de preuve y est clairement sollicitée.

2.1.1 Premier cycle (Mathématique 116, 216 et 314)

Dans le programme de *Mathématique 116* (MEQ, 1993), l'élève se familiarise avec le raisonnement mathématique par le biais de la géométrie. Durant cette première année du secondaire, l'élève étudie les figures géométriques. « *Il apprend d'abord à reconnaître les formes puis à analyser les diverses propriétés de ces formes, pour ensuite établir des relations entre les propriétés et faire des déductions simples* » (p.35). Les activités proposées aux élèves impliquent la prise de mesures avec la règle et le rapporteur d'angle. Dans l'ensemble, le raisonnement exigé chez l'élève est assez simple puisqu'il élargit ses connaissances à partir des notions apprises au niveau primaire.

L'importance accordée au raisonnement, dans des situations à caractères géométriques, semble aller en augmentant dès la deuxième année du secondaire (*Mathématique 216*, MEQ, 1994). Toutefois, les concepteurs demeurent assez vagues à ce sujet, tel que l'illustre la phrase suivante : « *l'élève devra poursuivre l'apprentissage amorcé dans le programme de première secondaire et maintenir l'habitude d'appuyer son raisonnement sur des définitions ou des propriétés pertinentes* » (p.40). Nous ne savons pas s'il s'agit d'un raisonnement de nature inductive ou déductive. Quant à la façon de susciter ces types de raisonnement, le programme n'est pas spécifique, mais la géométrie est par contre le sujet privilégié par les concepteurs pour y arriver.

C'est toujours par la géométrie que le raisonnement et la justification sont abordés en troisième secondaire. Globalement, le programme *Mathématique 314* (MEQ, 1995) poursuit dans la même direction que ce qui a été vu lors des deux années précédentes. Les concepteurs misent sur « *l'élargissement de ce réseau* (*de connaissances de l'élève*) *autour des solides* » (p.33). L'élève est invité à se baser sur des définitions et des propriétés qu'il a vues antérieurement, pour arriver à partir de l'étude de quelques problèmes à justifier des affirmations et à tirer des conclusions. Le raisonnement est de nature inductive la plupart du temps car il est basé sur seulement quelques cas particuliers.

2.1.2 Deuxième cycle (Mathématique 416-436 et 514-536)

Alors que durant les trois premières années du secondaire, la géométrie étudiée en est une faisant appel à un raisonnement concret, basé sur des figures et des mesures, le quatrième secondaire voit l'arrivée d'un raisonnement fondé sur des propriétés théoriques abstraites et s'appuyant sur des théorèmes et des corollaires. Dans le programme *Mathématique 416* (MEQ, 1996) qu'il est question pour la première fois de la notion de preuve de manière explicite. L'élève est invité à raisonner sur le concept mathématique représenté par la figure, non pas sur la figure en tant que telle. « Il doit maintenant établir le lien entre les *étapes de la résolution d'un problème et une argumentation juste et rigoureuse pour établir une preuve* » (p.21). Le passage du raisonnement inductif au raisonnement déductif semble donc s'effectuer entre la fin du troisième secondaire et les premiers mois du quatrième secondaire autant pour les élèves du programme régulier que pour les élèves de la voie enrichie *Mathématique 436* (MEQ, 1996).

De manière générale, le programme *Mathématique 436* (MEQ, 1996) reprend les mêmes idées que le programme *Mathématique 416,* tout en allant plus loin. Les situations proposées par les problèmes et les applications sont plus poussées. L'accent est placé davantage sur la notation formelle, la rigueur et l'exactitude dans la rédaction des preuves produites par les élèves. Un des objectifs intermédiaires de ce programme consiste à : « *démontrer des propositions en utilisant la géométrie analytique* » (p.25).

Les démonstrations reviennent avec moins de régularité, dans le programme qui termine le curriculum du secondaire, pour l'élève qui choisit de poursuivre son cheminement dans la voie régulière, soit *Mathématique 514* (MEQ, 1997). Ce dernier programme continue dans la même direction que le programme *Mathématique 416.* L'élève poursuit son cheminement à travers des activités en rapport avec le cercle et le triangle sans aller aussi loin que ses pairs dans le programme *Mathématique 536* (MEQ, 1997)

Le programme *Mathématique 536* (MEQ, 1997) est une suite logique de ce qui est proposé en *Mathématique 436*, tout en conservant à peu près les mêmes exigences quant à la rigueur mathématique. La principale différence concerne les objets mathématiques à partir desquels les élèves travaillent. En s'appuyant sur quelques axiomes, ceux-ci sont en mesure de « démontrer des propositions portant sur le cercle, le triangle rectangle et les vecteurs » (p.29). Les concepteurs du programme font valoir dans les objectifs terminaux que «... *l'élève devra en arriver à comprendre la valeur d'un raisonnement formel* » (p.28).

Cette section termine notre analyse des programmes actuels au secondaire. Avant de conclure, nous croyons qu'il est pertinent de présenter quelques éléments provenant du *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire premier cycle,* pour tenter de mieux situer le raisonnement et la preuve dans ce programme. Ce dernier sera bientôt en place dans les écoles de la province[1].

2.1.3 Le nouveau programme en mathématiques pour le secondaire

Tout comme dans les programmes actuellement en vigueur, le *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire premier cycle* indique que l'une des trois compétences à maîtriser consiste à être en mesure de « déployer un raisonnement en mathématique » (p.11). De façon plus précise, cette compétence renvoie à la définition suivante :

> *Lorsqu'il déploie un raisonnement en mathématique, l'élève oriente son action et structure sa pensée. Il a recours à des règles d'inférence et de déduction et construit un ensemble organisé et fonctionnel de savoirs* (p.15).

Dans la visée du programme, cette compétence se développe à travers des activités de construction et d'utilisation de concepts. Ces activités semblent similaires à ce que nous retrouvons dans les programmes actuels :

---

[1] Nous ne pouvons pas aborder le programme concernant le deuxième cycle car celui-ci n'est pas disponible au moment de la rédaction de la présente étude.

En géométrie, il (l'élève) conduit un raisonnement lorsqu'il apprend à reconnaître les figures usuelles, les caractérise, met en évidence leurs propriétés et effectue des opérations sur les figures planes à l'aide de transformations géométriques (p.16).

Il convient aussi de souligner que les concepteurs présentent quatre règles pour initier l'élève au raisonnement déductif :

- *Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux.*
- *Un contre-exemple suffit pour démontrer qu'une conjecture est fausse.*
- *Le fait que plusieurs exemples vérifient un énoncé mathématique ne suffit pas à prouver qu'il est vrai.*
- *Une constatation ou des mesures à partir d'un dessin ne prouvent pas qu'un énoncé est vrai. Elles peuvent toutefois servir à formuler une conjecture* (p.17).

La présence de ces quatre règles à l'intérieur du *Programme de formation de l'école québécoise*, développées à l'origine par Arsac et *al.* (1992), s'avère un élément nouveau par rapport à l'ancien programme. Ceci laisse présager une volonté de développer davantage le raisonnement déductif.

Pour mettre en place le raisonnement déductif de façon rigoureuse, les concepteurs suggèrent enfin, que l'élève travaille à partir des énoncés suivants :

Les angles opposés par le sommet sont isométriques.

Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.

La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.

La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents (p.41).

Contrairement aux programmes encore en vigueur en secondaire un et deux présentement, il semble que le raisonnement déductif soit introduit en termes précis, dès le premier cycle, dans le nouveau programme. Nous pouvons donc penser que la preuve occupera une place plus importante au premier cycle dans les années à venir.

2.1.4 Conclusion à propos des programmes

Plusieurs grandes lignes se dégagent de cette analyse des programmes. Tout d'abord, nous constatons que durant les trois premières années du secondaire l'accent est nettement mis sur le raisonnement inductif. L'étude de quelques problèmes à l'aide de figures et d'outils devrait permettre à l'élève d'induire un résultat et de se convaincre de la véracité de celui-ci.

Puis, le passage du troisième au quatrième secondaire voit un changement radical dans le mode de raisonnement exigé de l'élève. Le raisonnement déductif fait véritablement son apparition en quatrième secondaire. De plus, notre analyse des programmes nous permet de constater que les concepteurs ne décrivent pas de façon précise comment la transition entre ces deux modes de raisonnement doit se faire. Or, nous croyons qu'il serait bénéfique pour les élèves que le raisonnement déductif soit introduit plus rapidement, comme semble vouloir le faire le nouveau programme. Cette distinction entre les deux programmes apparaît importante. En effet, dans le nouveau curriculum, les concepteurs proposent des énoncés (revoir la section 2.1.3) pour initier l'élève au raisonnement déductif, énoncés qui, dans le cadre des programmes actuels, ne sont abordés qu'en secondaire quatre et cinq. Par exemple : démontrer que deux angles opposés par le sommet sont isométriques. Dans le programme *Mathématique 116,* nous retrouvons à l'intérieur de l'objectif terminal 3.2, le même énoncé, mais sous la forme suivante : « les angles opposés par le sommet sont congrus » (p.61). Toutefois, les élèves en secondaire un utilisent ce résultat sans le démontrer de façon rigoureuse. De plus, dans ce nouveau programme, les règles proposées par Arsac et *al.* (1992) pour initier les élèves au raisonnement déductif sont présentes alors qu'elles étaient absentes dans l'ancien.

2.2 L'étude de Tanguay

Pour faire la distinction entre les différents problèmes géométriques qui mènent au raisonnement déductif et définir le genre de problèmes qui font appel à ce raisonnement, la présentation de la grille de Tanguay (2000) est nécessaire. Ce dernier a réalisé une recherche qui avait pour but de mieux comprendre comment s'insère la notion de preuve dans l'étude de la géométrie par les élèves durant tout le secondaire. Pour atteindre cet objectif, l'auteur a tout d'abord élaboré une typologie des preuves pour déterminer le type de preuves sollicité par les problèmes géométriques présentés aux élèves, dans une collection employée par les enseignants du secondaire. Puis, cette typologie a mené à une grille d'analyse pour classifier les problèmes dans cette même collection. Ceci constitue un premier résultat significatif. Une fois la classification des problèmes terminée, les résultats obtenus à partir de la grille lui ont donné le recul nécessaire pour critiquer de façon plus juste la vision des auteurs de la collection à l'étude quant à l'apprentissage de la preuve. La section suivante présente cette grille concernant les problèmes géométriques ainsi que certains résultats intéressants à propos de l'analyse des problèmes.

2.3 La grille d'analyse proposée par Tanguay

CATÉGORIE A **Application directe** d'une définition, d'un résultat, d'un algorithme, que le contexte ou l'énoncé impose. Rien à valider.

CATÉGORIE B **Jugement d'une seule venue,** sous la validité duquel l'élève doit cependant statuer. Il s'en remet pour cela à sa perception, à son intuition.

CATÉGORIE C **Induction empirique;** suppose que l'énoncé sollicite de l'élève une généralisation, dont la validité échappe à l'intuition de l'élève, et qu'il cherchera à l'établir empiriquement.

CATÉGORIE G **Expérience mentale;** raisonnement qui prend appui sur le sensible, en épousant la forme d'une expérience physico-mécanique intériorisée.

CATÉGORIE H **Argument empirico-déductif;** des résultats intermédiaires - dont un ou plusieurs ne font l'objet d'une validation que perceptive ou intuitive - sont enchaînés par la mise en œuvre de la « pensée discursive », pour mener au résultat escompté.

CATÉGORIE M **Déduction locale;** application directe d'un, deux ou trois résultats déjà établis, en une combinaison d'un seul tenant, non hierarchisé dans le temps. L'élève doit trouver de lui-même quel(s) résultat(s) appliquer.

CATÉGORIE N **Enchaînement déductif;** l'élève combine des résultats déjà établis (théorèmes ou axiomes) selon les règles de la déduction logique. L'enchaînement est hierarchisé temporellement. (p.118).

Avec cette grille, Tanguay a procédé à l'analyse des problèmes proposés dans une collection offrant des manuels pour l'ensemble des cinq ans du secondaire. Sa recherche présente le nombre de problèmes de chaque catégorie en fonction du niveau. Pour le deuxième cycle du secondaire, celui-ci s'est intéressé seulement aux cheminements 436 et

536 car les élèves doivent rédiger des preuves avec des exigences de rigueur plus poussées comparativement aux programmes que nous retrouvons en mathématiques 416 et 514.

Les résultats obtenus quant au dénombrement des différents problèmes indiquent que les problèmes de catégorie N sont moins présents au premier cycle, comparativement aux problèmes d'application directe. Par contre, nous retrouvons soixante-quinze problèmes classés N en quatrième et cinquième secondaire. Comme ce genre de problèmes requiert la combinaison d'un certain nombre de résultats intermédiaires, pour mieux rendre compte de la complexité de ceux-ci, l'auteur a divisé la catégorie N en cinq sous-catégories allant de 1 à 5. Ces cinq sous-catégories indiquent le nombre d'étapes intermédiaires minimales requises pour montrer un résultat.

2.4 Une catégorisation des preuves

Le nombre d'étapes intermédiaires dans une preuve n'est pas le seul élément qui permet de rendre compte du niveau de difficulté de celle-ci. Selon nous, il existe d'autres facteurs à prendre en considération pour expliquer le niveau de difficulté attribué à une preuve; nous présenterons ceux-ci ultérieurement. En effet, nous croyons qu'il est possible de raffiner ces sous-catégories, en tentant entre autres d'identifier les difficultés rencontrées par les élèves dans la rédaction de preuves. Pour ce faire, nous allons tout d'abord nous pencher sur plusieurs études à ce sujet pour dégager certaines des difficultés répertoriées. En s'appuyant sur cette première recension, nous transposerons ces critères dans le cadre de l'analyse théorique que nous souhaitons faire. Puis, les principaux éléments que nous rencontrons dans la rédaction d'une démonstration (la transitivité, les propriétés des triangles semblables, etc.) seront ajoutés aux difficultés des élèves. Les critères retenus formeront un premier canevas qui devra nous permettre d'analyser les « situations de preuves déductives » proposées aux élèves dans les manuels.

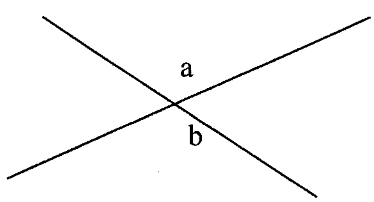
2.4.1 L'étude de Smith (1940)

Smith (1940) dès la fin des années trente s'est intéressé aux difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie déductive. Bien que son étude ne soit pas récente, elle mérite d'être considérée pour les résultats qu'elle met en évidence; surtout que la pertinence de ceux-ci est confirmée par d'autres études plus actuelles (Durand-Guerrier, 1999; Schoenfeld, 1989). Dans cette recherche d'une durée de cinquante jours, Smith a isolé plus spécifiquement trois aspects problématiques pour les élèves : le rapport aux figures géométriques, la signification de la relation « si-alors » présente dans l'énoncé du problème et la signification de la preuve. Dans ce travail, l'auteur a porté son attention sur l'identification des facteurs qui créent des problèmes pour les élèves plutôt que d'établir une échelle comparative des difficultés dans une preuve. Pour ce faire, il a repris séparément chacun des trois points mentionnés plus haut, pour en arriver à dégager des éléments précis qui engendrent des difficultés pour les élèves. Parmi ces trois éléments problématiques, nous allons mettre l'accent sur le premier et le deuxième car ce sont ceux qui sont incorporables au canevas d'analyse que nous souhaitons construire. Quant à la signification de la preuve, ce dernier élément pourrait dépasser le contexte de ce travail de recherche. De plus, les conceptions des élèves (concernant la signification de la preuve) ne sont pas l'objet de la présente étude. Pour cette raison, nous allons l'exclure du canevas d'analyse.

Le rapport aux figures géométriques

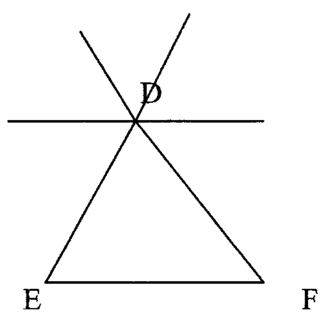
Smith souligne que la plupart des manuels définissent des termes ou démontrent des théorèmes en utilisant une construction aussi simple que possible. Selon celui-ci, le passage à une figure plus complexe, ou en d'autres termes, une figure plus élaborée que celle qui a été utilisée pour démontrer le théorème considéré est une généralisation que de nombreux élèves ne font pas. Pour tester cette hypothèse, l'auteur a demandé aux élèves de construire dans un premier temps la médiatrice d'un segment donné. Par la suite, la consigne est demeurée la même sauf que la figure était un triangle. Le dénombrement des erreurs ainsi que le type d'erreurs effectuées par les élèves indiquent que la généralisation de la méthode pour construire la bissectrice d'un angle n'était pas suffisamment acquise pour faire le passage à des figures plus complexes. Cette constatation nous amène à considérer l'habileté à faire une construction dans la rédaction d'une preuve comme un critère à retenir à l'intérieur de notre canevas d'analyse. Pour nous, une construction simple ou implicite signifiera qu'il n'y aura pas d'éléments à ajouter à la figure. Par opposition, une construction élaborée fera référence à une figure qui exige l'addition d'au moins un élément à ce que demande l'énoncé du problème initial. De manière à clarifier nos propos, considérons les deux exemples suivants :

- *démontrer que deux angles opposés par le sommet sont isométriques* (*congrus*) *représente une construction simple. Soient a et b, deux angles opposés par le sommet. Il faut démontrer que les angles a et b sont isométriques.*



À partir de la figure, l'élève doit percevoir qu'un angle adjacent à l'angle a et à l'angle b est présent sur la figure mais il n'a rien à ajouter à la figure; pour cette raison, ce théorème représente une construction simple ou implicite.

- *démontrer que la somme des angles internes d'un triangle est égale à 180 degrés en géométrie euclidienne. Soient d, e et f, les angles internes du triangle. Il faut parvenir à montrer que angle d + angle e + angle f = 180°.*



La preuve débute avec le prolongement des côtés DE, DF et le tracé d'un segment parallèle au côté EF. Cette construction n'apparaît pas dans la figure qui provient de l'énoncé du théorème. Pour cette raison, la construction est dite élaborée.

La relation « si-alors »

Parmi les outils propres à la logique mathématique, la relation « si-alors » qui est en fait un énoncé conditionnel jouit d'un statut particulier. Pour Smith, les difficultés rencontrées avec « le si-alors » sont attribuables au fait que les élèves ne distinguent pas l'hypothèse de la conclusion dans ce type d'énoncés. De son côté, Durand-Guerrier (1999) souligne que les recherches en psychologie cognitive depuis les trente dernières années font état des difficultés rencontrées par la majorité des individus à utiliser la relation « si-alors » dans un raisonnement mathématique. Selon cette dernière, de nombreux auteurs s'entendent pour attribuer la source de ces difficultés au fait que la signification de cette implication diffère dans la langue vernaculaire et dans le langage mathématique. Pour tester cette hypothèse, Durand-Guerrier a proposé un problème qui représente la traversée d'un labyrinthe illustré par un tableau comportant quatre rangées et cinq colonnes pour un total de vingt cases en tout; chacune étant identifiée par une lettre pour représenter les différents chemins possibles.

La personne qui traverse ce labyrinthe peut emprunter plusieurs chemins pour passer de l'entrée à la sortie. Les énoncés présentés aux participants avaient deux formes : déclaratifs ou propositionnels. Voici les questions soumises aux participants et le taux de réussite de chacune entre parenthèses :

1) la personne est passée par la case P (taux de réussite : 100%);
2) la personne est passée par la case N (taux de réussite : 96%);
3) si la personne est passée par la case K, alors elle est passée par la case L (taux de réussite : 69%);
4) si la personne est passée par la case L, alors elle est passée par la case K (taux de réussite : 29%);

Les résultats obtenus font ressortir le fait que le traitement des énoncés de la forme « si-alors » est plus problématique. Pour cette raison, nous allons incorporer ce type de relation dans le canevas en vérifiant si la formulation du théorème à démontrer comporte ou non un énoncé qui adopte cette forme.

2.4.2 La typologie de Paul-DeBlois

Dans le cadre d'une expérience visant à comprendre les difficultés rattachées au développement du raisonnement déductif chez des élèves du secondaire à Haïti, Paul et DeBlois (1998) ont travaillé avec un petit groupe d'élèves pour mieux cerner l'origine de ces problèmes. Tout comme au Québec, à un moment donné les élèves sont confrontés à un changement dans la nature des preuves exigées. Pour introduire le passage à la géométrie déductive, les auteurs ont présenté les règles élaborées par Arsac et *al.* (1992) concernant le raisonnement déductif (au sujet des règles proposées par Arsac et *al.*, revoir la section 2.1.3). Durant plusieurs semaines, les élèves ont rédigé des preuves et ils ont rencontré les deux chercheurs pour discuter des étapes plus laborieuses dans l'écriture de ces preuves. Les résultats des élèves ainsi que les entrevues réalisées avec ceux-ci ont mené Paul et DeBlois à trois grandes catégories de preuves : les preuves empiriques, les preuves empirico-théoriques et les preuves théoriques. Les paragraphes suivants vont permettre de définir de façon plus spécifique chacune de ces classes de preuves.

Preuves empiriques : « sont des processus visant à établir le caractère de vérité d'une proposition particulièrement au moyen de la géométrie pratique. Elles peuvent être basées sur les mesures ou sur d'autres types d'observation sur une figure » (Paul et DeBlois, 1998, p.30).

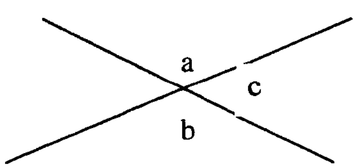
Preuves empirico-théoriques : « sont des processus visant à établir le caractère de vérité d'une proposition faisant appel simultanément à la géométrie pratique et à la théorie mathématique (théorèmes, définitions, propriétés...). Les propositions intermédiaires avancées peuvent être vraies ou fausses et sont partiellement en accord avec les règles du raisonnement déductif » (Paul et DeBlois, 1998, p.30).

Preuves théoriques : « sont des processus visant à établir le caractère de vérité d'une proposition au moyen de la théorie mathématique (théorèmes, définitions, propriétés, ...) » (Paul et DeBlois, 1998, p.30). Ce troisième type de preuves se divise en deux sous-catégories : les preuves à déduction régulière et les preuves à déduction irrégulière.

Preuves théoriques à déduction régulière : « il y a une organisation des déductions aboutissant à des conclusions partielles reprises dans une nouvelle organisation vers la conclusion à atteindre » (Paul et DeBlois, 1998, p.30).

Nous revenons au théorème concernant les angles opposés par le sommet introduit un peu plus tôt, afin d'expliciter la preuve théorique avec déduction régulière.

Théorème : deux angles opposés par le sommet sont congrus.



Soient a et b deux angles opposés par le sommet. La démarche vise à montrer la congruence entre les angles a et b.

1) *identification de l'angle c sur la figure* (*obs*)[2]

2) *mesure angle a + mesure angle c = 180°* (*ce sont des angles adjacents alignés*); (*thm*)

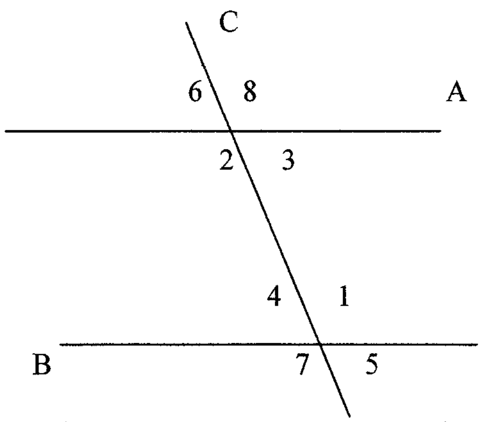
3) *mesure angle b + mesure angle c = 180°* (*justification : identique à l'étape 2*);

4) *à partir de 2 et 3, mesure angle a = mesure angle b par transitivité*; (*cp*)

5) *donc l'angle a est congru à l'angle b.*

La conclusion obtenue à l'étape 5 fait bien ressortir l'utilisation de la conclusion partielle de l'étape 4 qui devient un argument pour prouver le théorème. Cette preuve requiert un minimum de trois pas déductifs pour arriver au résultat final. Un autre exemple permettra d'illustrer encore mieux le changement de statut des conclusions partielles.

Théorème : lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-externes sont congrus.



Soient les droites A et B parallèles. La droite C est une sécante commune à ces deux premières droites. Il faut démontrer que les angles alternes-externes sont congrus.

[2] Nous avons identifié les différentes étapes des preuves pour faciliter la lecture de celles-ci ainsi que leur classement. Consulter la dernière page de l'annexe pour une liste complète des abréviations.

1) *l'angle 7 est congru à l'angle 1 (justification : ce sont deux angles opposés par le sommet)*; (*thm*)

2) *l'angle 1 est congru à l'angle 2* (*ce sont deux angles alternes-internes*); (*thm*)

3) *l'angle 2 est congru à l'angle 8* (*deux angles opposés par le sommet*); (*thm*)

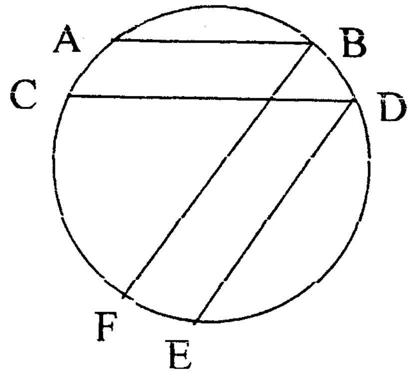
4) *à partir des résultats démontrés en 1) et 2), l'angle 7 est congru à l'angle 2* (*justification : par transitivité de la congruence*); (*cp*)

5) *à partir des résultats montrés en 3) et 4), l'angle 7 est congru à l'angle 8 (justification : par transitivité de la congruence).*

Cette démonstration illustre bien le changement de statut des conclusions partielles. Les étapes 1 et 2 deviennent des arguments pour montrer le résultat de l'étape 4. Par la suite, les étapes 3 et 4 sont utilisées comme arguments pour démontrer le résultat final. La figure comporte une autre paire d'angles alternes-externes (les angles 5 et 6). La démonstration pour celle-ci s'effectue de la même façon.

Preuves théoriques à déduction irrégulière : « dans ce cas, les déductions n'aboutissent pas clairement à des conclusions partielles reprises dans une nouvelle organisation déductive vers la conclusion finale » (Paul et DeBlois, 1998, p.30).

Considérons le problème suivant provenant de *Mathématiques Soleil* : Dans un cercle de centre O, les cordes AB et CD sont parallèles. On trace deux autres cordes parallèles BF et DE. Montrer que les arcs AC et FE sont congrus.



1) *l'arc AC est congru à l'arc BD, car dans un cercle deux cordes qui sont parallèles interceptent des arcs congrus;* (*thm*)
2) *l'arc BD est congru à l'arc FE, pour la même raison qu'à l'étape 1;* (*thm*)
3) *donc, à partir de 1 et 2, l'arc AC est congru à l'arc BD et l'arc BD est congru à l'arc FE, de sorte que par transitivité l'arc AC est congru à l'arc FE.*

Les arguments aux étapes 1 et 2 permettent d'établir la congruence entre les arcs AC et BD ainsi que les arcs BD et FE. Ces arguments sont utilisés à l'étape 3, mais le statut de ceux-ci ne change pas durant la preuve. La preuve est dite à déduction irrégulière pour cette raison. Elle demande donc trois pas déductifs pour montrer le résultat.

Preuves à déduction irrégulière

Étapes : (1, 2, 3,) => conclusion.

Dans ce type de preuves, aucune des conclusions partielles ne devient un argument pour montrer un résultat à une étape ultérieure. La démarche de preuve n'implique pas de retour en arrière.

Preuves à déduction régulière

Étapes : ((1, 2, 3) => 4 => 5) => conclusion.

Ici, les conclusions partielles des étapes un, deux et trois sont utilisées comme arguments pour montrer la conclusion de l'étape quatre. Puis, la conclusion de l'étape quatre sert pour démontrer le résultat en cinq. Donc, dans la rédaction de certaines preuves à déduction régulière, une étape peut faire appel à une ou plusieurs conclusions partielles comme arguments.

De la typologie de Paul-DeBlois (1998), nous ne retiendrons que les preuves théoriques (avec déduction régulière ou irrégulière) car le raisonnement déductif se justifie seulement à l'aide de théorèmes, d'axiomes et de définitions; les deux autres types de preuves qu'ils ont ressortis ne sont pas en lien avec les problèmes de catégorie N que nous nous proposons d'étudier. Nous retiendrons également la distinction intéressante apportée par les auteurs : le fait qu'une conclusion partielle peut servir ou non à démontrer la conclusion finale demandée par l'énoncé. Bien que cette recherche avait pour but d'étudier le raisonnement déductif et les preuves produites par les élèves, non pas l'analyse des difficultés de ces derniers, le changement de statut d'une conclusion partielle est un critère pertinent pour catégoriser le niveau de difficulté d'une preuve dans le cadre de nos travaux.

Dans ses écrits, Duval (1991) insiste plusieurs années avant Paul-DeBlois (1998) sur l'importance du changement de statut d'une proposition et de la maîtrise de ce passage par les élèves en mentionnant la chose suivante : « cette distinction entre contenu et statut opératoire d'une proposition est spécifique au raisonnement déductif. (…) Cette distinction est donc essentielle pour la compréhension de ce qu'est un pas de déduction. Or, généralement les élèves s'en tiennent uniquement au contenu des propositions, ou ne savent pas comment prendre en compte leur statut opératoire » (p.237). En d'autres termes, les élèves se préoccupent uniquement de ce qu'indique une proposition. Ils laissent de côté le fait que lorsqu'une proposition devient une conclusion partielle, elle peut servir de nouveau comme argument dans la démonstration.

2.4.3 L'étude de Moore

L'intérêt de l'étude de Moore (1994) réside dans le fait qu'elle porte sur les difficultés de rédaction de preuves déductives. Moore a opté de situer son travail de recherche dans le contexte universitaire, plus précisément dans le cadre d'un cours sur la théorie des groupes. Le but visé par le cours était de permettre aux étudiants d'apprendre à rédiger des preuves. Parmi les sujets abordés en classe, nous retrouvions : la logique mathématique, les méthodes de preuves, le principe de l'induction mathématique, les fonctions et les nombres réels. Les preuves demandées aux étudiants étaient des preuves courtes, de nature déductive et basées sur les définitions et les axiomes présentés lors des exposés magistraux par le professeur.

En faisant de l'observation non participante durant les cours, ainsi que des entrevues avec le professeur et les étudiants quant aux limites de ces derniers face à l'apprentissage de la preuve déductive, Moore a remarqué les sept difficultés suivantes :

1) une connaissance insuffisante des définitions;
2) une compréhension intuitive très limitée des concepts;
3) une représentation inadéquate des concepts;
4) une incapacité des étudiants à générer et à utiliser leurs propres exemples pour en arriver à une meilleure compréhension;

5) un manque de connaissance face à la façon d'utiliser les définitions pour obtenir une idée globale de la structure de la preuve;
6) une incapacité à comprendre et à se servir du langage mathématique et de ses symboles;
7) un manque de connaissance concernant la manière de débuter une preuve.

Moore souligne qu'une connaissance insuffisante des définitions empêche les étudiants de se créer une image mentale appropriée d'un concept, ce qui rend difficile le passage à la définition écrite et par conséquent à la représentation graphique. Smith (1940) avait fait valoir ce même point de vue dans sa propre étude. En effet, lorsque l'élève doit produire lui-même la figure initiale à partir du problème énoncé textuellement pour montrer le résultat attendu, la tâche est encore plus ardue car la compréhension des termes est essentielle pour en arriver à représenter la situation de façon correcte.

Comme la compréhension des termes est essentielle pour amorcer une preuve et procéder à la rédaction de celle-ci, nous retiendrons les critères 1 et 6 en les raffinant quelque peu cependant. Pour opérationnaliser ces critères, l'énoncé du problème sera catégorisé comme une « application directe » s'il ne requiert pas l'utilisation d'un autre terme ou concept, sinon ce sera une « application indirecte ». De plus, la présence ou non de symbolisme mathématique sera considéré dans l'énoncé (un problème faisant appel au symbolisme sera considéré comme ayant un niveau de difficulté plus élevé). Nous ne retiendrons pas les autres éléments proposés par Moore puisque notre travail se situe principalement au niveau théorique. Il n'y a pas de consultation auprès des élèves. Considérons les deux théorèmes suivants pour clarifier les applications directes et les applications indirectes.

Théorème du triangle isocèle

Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus.

Dans cet énoncé, une connaissance des termes présents est suffisante pour poser le problème et pour effectuer la démonstration requise même s'il peut s'agir d'une compréhension intuitive d'un ou plusieurs termes chez l'élève. Il s'agit donc ici d'une application directe.

Théorème des projections sur l'hypoténuse

Dans un triangle rectangle, chaque cathète est moyenne proportionnelle entre la longueur de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

Nous classons ce théorème comme une application indirecte car la connaissance de l'expression « moyenne proportionnelle » requiert la compréhension de termes ou de concepts intermédiaires (l'élève doit reconnaître les triangles semblables ainsi que les côtés proportionnels) pour être en mesure de poser le problème et de prouver la conclusion.

2.4.4 L'étude de Reiss, Hellmich et Reiss

La recherche de Reiss, Hellmich et Reiss (2002) avait pour but de vérifier le niveau de compétence des élèves de septième et huitième année à propos de leur capacité à justifier un raisonnement avec une seule étape comparativement à un raisonnement comportant plusieurs étapes dans la rédaction d'une preuve. L'échantillon considéré regroupait 639 participants en tout. Le test consistait en six questions de base et sept questions sur la justification et le raisonnement mathématique. Les chercheurs ont d'abord divisé l'échantillon en trois groupes : faible, moyen et fort. Cette démarche avait comme objectif de mieux rendre compte des habiletés des élèves face au raisonnement de nature mathématique. Les résultats observés sont révélateurs. Les niveaux de compétence des élèves pour le raisonnement avec une seule étape sont les suivants :

- groupe faible : 22%;
- groupe moyen : 61%;
- groupe fort : 89%.

Cependant, les résultats les plus probants proviennent du niveau de compétence pour le raisonnement avec plusieurs étapes dans la rédaction d'une preuve :

- groupe faible : 0%;
- groupe moyen : 18%;
- groupe fort : 50%.

La rédaction de preuves déductives avec plus d'une étape intermédiaire est un problème majeur pour deux des groupes dans cette étude. Pour cette raison, nous conserverons le nombre d'étapes intermédiaires dans le canevas, tel que souligné par Tanguay (2000) dans sa propre recherche.

2.4.5 La typologie de Balacheff

Depuis plusieurs années, Balacheff (1997) s'intéresse aux preuves produites par les élèves en mathématiques. Sa catégorisation est basée sur la position que l'élève adopte. Durant les premières années du secondaire, celui-ci place l'accent sur la construction de figures à partir desquels il raisonne. Il a donc le statut d'élève-praticien. Cette position le conduit vers des preuves pragmatiques ou, en d'autres termes, des preuves validées par des faits concrets (prise de mesures sur une figure par exemple). Éventuellement, le changement dans le type de preuves attendues amène l'élève à adopter la posture d'élève-théoricien où la mesure sur des figures ne rencontre plus les nouveaux critères de rigueur de la géométrie déductive. Ces exigences le poussent à produire des preuves intellectuelles, qui elles ne se fondent pas sur la géométrie pratique. L'élève se base alors sur des théorèmes et des axiomes pour justifier sa position d'une manière rigoureuse dans une démonstration. Ces distinctions entre les deux types de preuves mentionnés antérieurement, se raffinent avec les quatre autres preuves intermédiaires introduites par Balacheff : l'empirisme naïf, l'expérience cruciale, l'exemple générique et l'expérience mentale. **L'empirisme naïf** base la certitude d'une assertion en partant d'une généralisation rapide concernant seulement quelques cas particuliers. **L'expérience cruciale** est la généralisation des observations effectuées à partir d'un cas qui est considéré par l'élève comme large. **L'exemple générique** s'appuie sur les assertions qui découlent des observations à propos d'un objet et qui sont rapportées non pas seulement à cet objet, mais à une classe d'objets. Quant à **l'expérience mentale**, les représentations mentales sont abstraites et s'appuient sur la théorie mathématique.

La typologie de Balacheff (1997) caractérise les preuves produites par les élèves, tout comme celle de Paul et DeBlois (1998) mais, contrairement à cette dernière, elle n'apporte rien de nouveau au plan mathématique nous permettant de spécifier davantage nos critères quant à l'analyse des situations de preuve déductives. Pour cette raison, nous ne prendrons pas en considération la typologie de Balacheff, même s'il s'agit d'une étude fondamentale et que les preuves rédigées par les élèves s'inscrivent dans la catégorie : « expérience mentale ». Cependant, toutes les études présentées antérieurement à celle de Balacheff décrivent des difficultés avec certains aspects reliés à la preuve. L'ensemble de ces recherches s'avère pertinent pour nous, car nous souhaitons partir de certaines difficultés chez les élèves pour construire un canevas d'analyse et en arriver éventuellement à présenter une catégorisation des preuves déductives proposées aux élèves dans les manuels.

2.5 Les types de preuves rencontrés au secondaire

Comme nous souhaitons détailler avec plus de précision les preuves déductives rencontrées par les élèves au secondaire, un regard sur la littérature spécifique à ce niveau d'enseignement s'impose. L'examen de deux collections[3] fréquemment employées dans l'enseignement des mathématiques au Québec a fait ressortir trois grands types de preuves : les preuves directes, les preuves indirectes (ou preuves par l'absurde) ainsi que la preuve par contre-exemple que nous aborderons dans une section ultérieure.

Les preuves directes et indirectes

La **preuve directe**, qui est la plus répandue au secondaire, consiste à accepter l'hypothèse de départ et après un certain nombre d'étapes intermédiaires, à montrer le résultat demandé. La **preuve indirecte** accepte elle aussi l'hypothèse de départ, la différence réside plutôt dans le fait qu'elle examine les conséquences qui en découleraient si la conclusion était fausse. Le but recherché dans la preuve par l'absurde est donc de trouver un résultat qui va à l'encontre d'un énoncé déjà accepté, que ce soit un théorème, une définition, ou

---

[3] Il s'agit des collections *Mathématique Soleil* et *Réflexions mathématiques*.

une hypothèse. Un exemple typique provient du théorème concernant l'intersection de deux droites.

Théorème : deux droites distinctes ont au plus un point en commun

Soient p et q deux droites distinctes. Il faut parvenir à montrer que ces deux droites ont au plus un point en commun.

1) *la preuve débute en supposant les droites p et q distinctes*; (*h*)
2) *la preuve se poursuit en niant la conclusion, supposons que les droites p et q ont en commun deux points distincts A et B*;
3) *dans un tel cas, comme par deux points distincts passent deux droites différentes alors l'axiome affirmant que par deux points, il passe une et une seule droite est contredit*;
4) *donc, deux droites distinctes ont au plus un point en commun.*

Selon Williams (1980) seulement 20% des 255 élèves qui ont répondu au questionnaire dans le cadre de son étude avaient une bonne compréhension de la preuve indirecte. Pour cette raison, ce type de preuves mérite d'être considéré dans la présente recherche. De par la nature particulière de cette preuve, nous ne tenterons pas de dégager à priori des caractéristiques pour joindre au canevas. Cependant, les preuves directes vont nous permettre d'ajouter un critère supplémentaire au canevas en s'inspirant de la classification attribuable à Solow (1990). Ce dernier propose cinq catégories de preuves, dont la preuve directe. Pour établir une distinction à propos du niveau de difficulté entre ce type de preuves, il suggère de tenir compte de la présence ou de l'absence des quantificateurs « il existe » et « pour tout ». Un quantificateur est un symbole mathématique qui indique qu'une propriété s'applique à tous les éléments d'un ensemble donné ou seulement à certains. Les deux énoncés suivants illustrent l'utilisation des quantificateurs.

Énoncé 1

Pour tous les entiers n plus grand ou égal à 1, la somme de k = 1 jusqu'à n est égale à n(n+1)/2.

Énoncé 2

Montrer qu'il existe un entier qui satisfait l'équation suivante : *Y*Y – 5Y/2 + 3/2 = 0.*

La preuve par contre-exemple

Rappelons qu'un contre-exemple est un énoncé mathématique qui respecte les conditions initiales présentes dans le problème tout en allant à l'encontre de la conclusion. Pour bien illustrer notre propos, portons notre attention sur l'énoncé suivant : *toutes les équations du second degré (une équation dont l'exposant le plus grand est deux) possèdent une solution dans l'ensemble des nombres réels.* Cet énoncé est faux. En se basant sur la définition du contre-exemple, il suffit d'en fournir au moins un pour invalider l'énoncé. Considérons l'équation de degré deux qui suit : y*y + 1 = 0. En la résolvant, nous obtenons y = $\sqrt{-1}$ = i ou y = - $\sqrt{-1}$ = - i. Cette équation ne possède pas de solution dans le corps des réels car le nombre i fait partie des nombres complexes. À partir d'un seul contre-exemple, nous avons montré que l'énoncé proposé est faux. Pour les élèves, la difficulté de la preuve par contre-exemple réside dans le fait qu'un exemple ne constitue pas une preuve alors qu'un seul contre-exemple est suffisant pour contredire un énoncé d'après Galbraith (1995).

2.6 Une source d'informations additionnelles

Dans notre recherche qui a pour but de catégoriser les preuves présentées aux élèves, nous avons consulté un second volume de mathématiques de niveau 536 (cinquième secondaire) provenant de la collection *Mathématique Soleil*. Le but de cette démarche était d'avoir une source supplémentaire d'informations concernant les éléments qui reviennent fréquemment dans la rédaction d'une preuve. Notre évaluation des problèmes qui nécessitent une preuve a mené à une recension exhaustive de ces éléments :

- l'usage d'une hypothèse provenant de l'énoncé initial;
- l'usage d'un ou plusieurs autres théorèmes ou axiomes qui ne proviennent pas du problème original;
- la transitivité de l'égalité : deux quantités qui sont égales à une même troisième sont égales entre elles (ex. : si a = b et b = c alors a = c);
- l'axiome de substitution : une quantité peut être remplacée par son équivalente (ex. : si la mesure de l'angle a + la mesure de l'angle b =180° et la mesure de l'angle a = la mesure de l'angle c, alors la mesure de l'angle c + la mesure de l'angle b =180°) ;
- l'axiome d'addition ou de soustraction : deux quantités égales, augmentées ou diminuées toutes les deux de quantités égales, restent égales (ex. : si e = f et g = h alors e + g = f + h);
- l'axiome de multiplication ou de division : deux quantités égales multipliées ou divisées toutes les deux par des quantités égales restent égales (ex. : si y = z alors 2y = 2z et y / 2 = z / 2);
- les propriétés des éléments homologues (ex. : si les triangles ABC et DEF sont congrus par la propriété côté-angle-côté, alors par les éléments homologues le côté BC est congru au côté EF);

- les propriétés des triangles semblables (ex. : si les points M et P sont situés respectivement au milieu des côtés AB et AC, et si les triangles AMP et ABC sont semblables alors les angles c et p sont congrus car ce sont des angles correspondants);
- l'usage de conclusions partielles qui deviennent des arguments pour démontrer la conclusion exigée;
- la négation d'un théorème, d'un corollaire dans une preuve indirecte (preuve par l'absurde).

Parmi les points mentionnés plus tôt, ceux qui ont le plus d'influence quant à la difficulté d'une preuve seront intégrés à la catégorisation pour situer les diverses preuves avec une plus grande précision. Les autres se retrouveront dans la section annexée à cette dernière. Il s'agira en quelque sorte d'une source d'informations supplémentaires.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé l'étude de Tanguay (2000) pour introduire les problèmes de type N en lien avec la preuve déductive. Par la suite, plusieurs éléments ont été présentés pour construire un canevas d'analyse des preuves déductives : le rapport à la figure, la relation conditionnelle « si-alors », le statut des conclusions partielles, l'emploi du symbolisme mathématique ainsi que le nombre d'étapes intermédiaires pour mener à la conclusion demandée par l'énoncé du problème. Puis, les preuves directes, indirectes ainsi que la preuve par contre-exemple ont fait l'objet d'une section spécifique. Ce chapitre se termine avec une présentation des éléments qui reviennent régulièrement dans la rédaction de preuves; ceux-ci se veulent des points supplémentaires qui pourront servir pour mieux décrire les difficultés rattachées à certaines catégories de preuves une fois l'analyse effectuée. À l'intérieur du prochain chapitre, nous aborderons l'approche préconisée pour effectuer l'analyse (des preuves) ainsi que la construction de la catégorisation.

Chapitre 3

La méthodologie

Dans ce chapitre, nous présentons et expliquons d'abord, les critères qui ont mené à la conception du canevas d'analyse original. Par la suite, nous exposons comment le passage du canevas à la grille d'analyse est effectué. Dans un troisième temps, nous expliquons la transition entre la grille d'analyse et la catégorisation; la construction de la catégorisation sera détaillée et illustrée à l'aide de quelques théorèmes. Enfin, le chapitre se termine par la justification de l'approche qualitative que nous utiliserons durant la recherche. Les critères concernant la sélection des volumes utilisés pour l'analyse seront introduits en tout dernier lieu. Pour s'assurer d'une certaine constance dans l'approche préconisée par les auteurs des volumes, nous allons employer des manuels (maths 436 et 536) provenant d'une même collection.

3.1 L'élaboration du canevas d'analyse

Après avoir fait une première recension des difficultés des élèves ainsi que des éléments que nous rencontrons fréquemment dans la rédaction de preuves, nous croyons qu'il est judicieux de ne pas proposer immédiatement une grille d'analyse spécifique des situations de preuves mais plutôt un canevas général. De plus, en procédant de la sorte, nous éviterons de nous enfermer a priori dans une structure analytique trop rigide qui limiterait la portée de notre analyse. La souplesse du canevas va donc nous offrir la possibilité d'apporter des modifications facilement. Le canevas général va consister à reprendre les difficultés et les éléments que nous avons dégagés jusqu'à présent. Les études présentées au chapitre précédent soulignent que ces points sont problématiques dans la rédaction de preuves. Nous pensons donc qu'il s'agit d'une approche adéquate pour effectuer une première analyse. À la suite de cette première analyse, les éléments issus des problèmes analysés nous permettront de constituer la grille d'analyse finale. Dans les sections qui suivent, ces deux outils.

3.2 Présentation du canevas d'analyse

Quoique le canevas soit élaboré de façon à ne pas être trop restrictif, un agencement des éléments répertoriés qui suit sensiblement le déroulement d'une preuve va faciliter notre tâche pour analyser les situations de preuves déductives. L'ordre qui semble le plus pertinent mène à cette première version du canevas :

1) type de définition dans l'énoncé : application directe ou application indirecte et présence ou non d'un énoncé du type « si-alors »;
2) présence ou absence du symbolisme mathématique et plus spécifiquement des quantificateurs;
3) type de construction : implicite ou élaborée;
4) changement ou non du statut d'une ou plusieurs conclusions partielles;
5) le nombre d'étapes intermédiaires pour montrer la conclusion.

Reprenons maintenant ces critères un à la fois, pour détailler avec plus de clarté en quoi chacun consiste.

1) une application directe ne requiert pas la connaissance d'autres concepts pour poser le problème alors qu'une application indirecte exige la connaissance d'autres concepts pour poser le problème; dans l'énoncé du problème, la présence ou l'absence de la relation conditionnelle « si-alors » est considérée car celle-ci fait référence à l'ordre d'agencement des arguments dans la preuve;
2) la présence ou l'absence de quantificateurs est un facteur qui apparaît dans le canevas car une preuve avec un ou des quantificateurs présente un niveau de difficulté plus élevé (un quantificateur est un symbole mathématique qui indique qu'une propriété s'applique à tous les éléments d'un ensemble ou seulement à certains);
3) une construction implicite signifie qu'il n'y a pas d'élément à ajouter pour démarrer le problème alors qu'une construction élaborée nécessite l'addition d'un ou plusieurs éléments à la figure pour être en mesure de montrer le résultat demandé;
4) une preuve théorique est à déduction régulière si au moins une conclusion partielle devient un argument pour une autre étape alors qu'une preuve théorique est à déduction irrégulière s'il n'y a pas de changement de statut des conclusion partielles;
5) le nombre d'étapes intermédiaires (pas déductifs) pour montrer un résultat fait référence au nombre d'étapes, incluant la conclusion, pour montrer le résultat demandé (des exemples concrets sur ces cinq points sont fournis aux sections 2.4.2 à 2.4.5 et 2.5).

3.3 Le passage du canevas à la grille d'analyse

Pour l'analyse, nous allons choisir 35 théorèmes provenant de manuels de mathématiques de niveau secondaire. La justification du nombre de problèmes est présentée à la section 3.7. Au fur et à mesure de l'analyse de ces situations de preuves déductives, le canevas initial va subir des modifications pour rendre compte avec plus d'exactitude des nouveaux éléments (axiomes, définitions, propriétés) qui vont surgir et qui ne proviennent pas du canevas d'analyse original issu des études examinées dans le cadre conceptuel. Une fois les preuves écrites ainsi que l'analyse de ces preuves terminée, nous espérons avoir des éléments en lien avec la preuve qui n'apparaissent pas dans le canevas original. Ces derniers vont constituer une grille d'analyse que nous introduirons dans le prochain chapitre et qui s'avère en quelque sorte une source regroupant des informations complémentaires (facteurs qui reviennent dans la rédaction de démonstrations) à propos de la preuve déductive, pour expliquer le niveau de difficulté de chaque catégorie que nous proposerons dans la classification. Ici, une remarque est de mise : comme nous allons traiter de façon séparée le manuel pour le quatrième secondaire et celui pour le cinquième secondaire, deux grilles regroupant des éléments vont être obtenues, soit une pour chaque niveau. Toutefois, nous allons fusionner celles-ci en retenant les éléments qui reviennent d'une à l'autre, pour donner un portrait global de la preuve déductive.

3.4 De la grille d'analyse à la catégorisation

À partir de la grille d'analyse qui regroupe les éléments (axiomes, propriétés, définitions) les plus significatifs pour expliquer le niveau de difficulté des preuves déductives, nous procéderons à la construction de la catégorisation. Les éléments retenus (pour la catégorisation) seront en fait les facteurs qui expliquent le mieux le niveau de difficulté de chaque catégorie de preuve déductive. La sélection de ceux-ci produira une première distinction entre les différents types de preuves déductives. Par la suite, cette catégorisation va se raffiner en incorporant les éléments secondaires pour mieux distinguer les diverses preuves déductives et tenter de présenter celles-ci selon un ordre de difficulté croissant. Mentionnons que nos choix concernant la sélection et l'agencement des divers éléments feront l'objet d'une validation experte. Cette segmentation des preuves déductives en fonction des éléments propres à chacune constituera la catégorisation.

Une approche similaire a été employée par Bednarz et Janvier (1996) quand elles ont étudié le passage entre l'arithmétique et l'algèbre. En effet, en se basant sur les problèmes présentés aux élèves dans plusieurs manuels du secondaire, ces dernières ont souligné les facteurs qui reviennent régulièrement dans plusieurs types de problèmes en arithmétique et en algèbre pour expliquer les difficultés des élèves lors de la transition entre ces deux domaines des mathématiques. Par la suite, elles ont créé leur propre catégorisation des divers problèmes qui existent en algèbre, tout en prenant soin de spécifier le niveau de difficulté de chaque genre de problèmes ainsi que les raisons qui expliquent pourquoi certains problèmes sont plus difficiles que d'autres.

3.5 L'origine de la typologie

La typologie est une technique d'élaboration de classes qui provient du marketing. Selon Hugues, Griffon et Bouveyron (1970) elle vise à décrire de façon globale une population (pour nous, les preuves déductives constituent la population). Pour accomplir cet objectif, deux approches sont possibles : la première consiste à placer chaque sujet à l'intérieur d'une classe déjà existante dont il est le moins distant, tandis que la seconde privilégie plutôt la recherche, parmi les éléments déjà présents, de ceux qui sont les plus similaires afin de les grouper ensemble. Après le traitement des données, une typologie présente donc un nombre de sous-ensembles qui comportent des traits propres à certains types d'éléments. Bien que dans la présente recherche, la typologie que nous envisageons de construire se limitera à la présentation des caractéristiques importantes en lien avec chaque type de preuves déductives, l'approche préconisée par Hugues, Griffon et Bouveyron n'est pas assez complète pour atteindre notre objectif. En effet, ces auteurs proposent surtout un traitement quantitatif des données, basé sur des formules mathématiques, pour en arriver à la production des classes qui forment une typologie. Notre travail, lui, s'inscrit dans un cadre méthodologique qualitatif car une analyse du contenu pour dégager des éléments qui reviennent régulièrement et qui influencent le niveau de difficulté des preuves déductives s'avère nécessaire. Dans notre recherche, il ne s'agit pas d'identifier de façon précise le nombre d'apparitions de certains éléments tel que suggéré par l'approche de Hugues, Griffon et Bouveyron. Alors, plutôt que de tenter d'adapter les règles qui s'appliquent aux données quantitatives, nous allons regarder comment traiter celles-ci d'un point de vue qualitatif. Notre objectif demeurant toujours le même : établir plusieurs classes pour catégoriser les preuves déductives.

3.6 Vers la construction d'une typologie

Van der Maren (1995) s'est penché sur le traitement des données qualitatives pour la construction d'outil du genre que nous cherchons et il a proposé une démarche à suivre qui est précise et riche en informations. Cette démarche se décompose en trois grandes étapes : la catégorisation, la hiérarchisation et la connexion en réseaux ainsi que la conceptualisation et la modélisation. Dans les trois prochaines sections, nous approfondirons chacune de ces étapes. Par la suite, de manière à ne pas s'en tenir à une présentation théorique du traitement des données, quelques preuves vont être abordées; elles seront accompagnées d'explications additionnelles pour illustrer concrètement l'élaboration des classes et la catégorisation résultante.

3.6.1 La catégorisation

Cette première étape consiste à regarder l'ensemble des informations recueillies. Il est important de repérer les éléments communs, les caractéristiques qui semblent être prédominantes, l'apparition de certaines formes. Par la suite, les caractéristiques communes seront placées dans des classes selon leur structure, leur fonction ou leur rôle. Lors de cette première phase, le chercheur propose un agencement des données en fonction des buts visés.

3.6.2 La hiérarchisation et la connexion en réseaux

Après avoir placé les éléments dans des classes, il faut poursuivre l'analyse en mettant en relief les caractéristiques typiques propres aux classes qui comptent moins de représentants, autrement dit, les classes isolées. Il est possible qu'une caractéristique particulière ne soit pas perceptible lorsque l'attention est portée sur les éléments constitutifs d'une classe; toutefois, lorsque la comparaison s'effectue entre deux classes, il est beaucoup plus aisé de cerner une caractéristique atypique. Le dépistage de ces traits moins évidents permet de faire apparaître de nouvelles classes, de regrouper d'autres déjà existantes et même de dégager des relations entre certaines d'entre elles. Dans l'analyse, certains facteurs essentiels vont se voir accorder plus de poids. Ceux-ci vont mener à des critères d'appartenance à une classe et ils vont permettre d'y ajouter certains éléments ou d'en exclure d'autres. Durant le déroulement de cette seconde phase, il est souhaitable que le chercheur documente la façon employée pour grouper les éléments. Ainsi, il sera en mesure d'expliciter en termes clairs, les raisons qui ont mené à certains choix dans l'analyse des données.

Une fois la majorité des liens connus et construits entre les diverses classes, il est possible de soumettre un réseau qui peut mener à des hypothèses. Un réseau est dit **hiérarchique ascendant** s'il est basé sur le fait que certaines classes partagent des traits communs de plus en plus réduits. Si, au contraire, les traits communs sont de plus en plus grands, le réseau est **hiérarchique descendant**. Certains réseaux n'adoptent pas cette structure. Les différences entre les classes d'un même réseau peuvent se faire à partir d'éléments dissemblables, de structures non identiques.

3.6.3 La conceptualisation et la modélisation

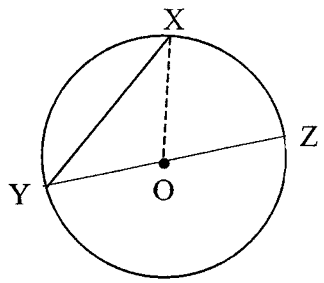
Après avoir bien précisé les classes et le réseau formé par celles-ci, il est possible d'identifier un élément ou une caractéristique spécifique pour bien rendre compte du contenu d'une classe. L'attribution de ces étiquettes mène à une définition des concepts de chacune des classes. Une fois ces définitions en place, le modèle ainsi obtenu est une représentation de l'objet de recherche étudié mais dans une forme simplifiée. Dans plusieurs cas, la représentation proposée pour le réseau conceptuel s'inspire d'un modèle provenant d'un autre domaine. Il doit y avoir une certaine ressemblance entre ces deux structures pour espérer arriver à un résultat final représentatif et qui explique assez bien le phénomène considéré.

3.7 La construction des catégories

Considérons maintenant les démonstrations de quelques théorèmes présentés à des élèves de cinquième secondaire pour illustrer les caractéristiques qui s'en dégagent ainsi que les catégories que nous pouvons construire à partir de celles-ci.

Théorème 1

La mesure d'un angle inscrit dans un cercle ayant un côté passant par le centre est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté[1]



Soit un cercle de centre O et l'angle inscrit XYZ. Nous devons montrer que la mesure de l'angle XYZ est égale à la mesure de l'arc (XZ)/2.

1) *traçons le segment OX, pour compléter le triangle XOY*; (*const*)
2) *le triangle XOY est isocèle car le côté OX est congru au côté OY* (*justification : deux rayons d'un même cercle sont congrus*); (*thm*)
3) *la mesure de l'angle x est égale à la mesure de l'angle y* (*justification : il s'agit des deux angles congrus provenant du triangle isocèle*); (*cp*)
4) *la mesure de l'angle XOZ est égale à la mesure de l'angle x + la mesure de l'angle y* (*justification : tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles qui ne sont pas adjacents à ce dernier*); (*thm*)

---

[1] Il existe deux autres cas possibles : le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle ou à l'extérieur de celui-ci.

5) *mesure de l'angle XOZ = 2 mesure de l'angle y (justification : l'angle x est congru à l'angle y)*; (*cp*)

6) *l'angle XOZ a comme mesure celle de l'arc XZ (justification : l'angle au centre d'un cercle a comme mesure celle de l'arc compris entre ses deux côtés)*; (*thm*)

7) *1/2 mesure de l'angle XOZ = 1/2 mesure de l'arc XZ (justification : division des deux côtés par 2 à l'étape 6)*; (*cp*)

8) *à partir de l'étape 5, mesure de l'angle y = 1/2 mesure de l'angle XOZ* (*cp*)

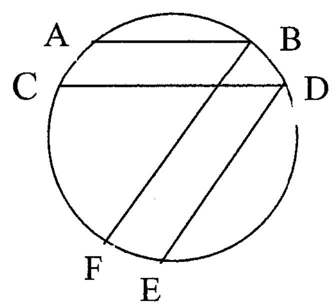
9) *à partir des étapes 7 et 8, mesure de l'angle y = 1/2 mesure de l'arc XZ par transitivité.*

Cette preuve comporte les caractéristiques suivantes :

- application directe;
- construction élaborée (un élément est ajouté à la figure originale);
- déduction régulière (les conclusions partielles 3, 5, 7 et 8 deviennent des arguments pour montrer le résultat final);
- 8 pas déductifs.

Théorème 2

Dans un cercle de centre O, les cordes AB et CD sont parallèles. Traçons deux autres cordes parallèles, BF et DE. Montrer que les arcs AC et FE sont congrus.



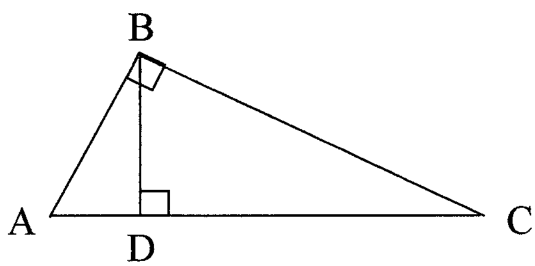
1) *l'arc AC est congru à l'arc BD (justification : dans un cercle, deux cordes qui sont parallèles interceptent des arcs congrus); (thm)*
2) *l'arc BD est congru à l'arc FE (justification : même raison qu'à l'étape 1); (thm)*
3) *en utilisant 1 et 2, AC est congru à BD et BD est congru à FE d'où par transitivité AC est congru à FE.*

Nous remarquons les caractéristiques suivantes pour ce second théorème :

- application directe;
- construction implicite (il n'y a aucun élément à ajouter à la figure);
- déduction irrégulière (les affirmations des étapes 1 et 2 mènent directement à la conclusion à l'étape 3);
- trois pas déductifs.

Théorème 3

Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de la hauteur par l'hypoténuse.



1) *mesure du segment AB / mesure du segment AC = mesure du segment BD / mesure du segment BC (justification : dans un triangle rectangle, les deux triangles formés par la*

hauteur sont semblables au triangle original, de sorte que les côtés homologues sont proportionnels); (*thm*)

2) *à partir de l'étape 1, mesure du segment AB * mesure du segment BC = mesure du segment AC * mesure du segment BD*

Nous dégageons les caractéristiques ci-dessous pour cette preuve :

- application indirecte (une bonne compréhension des concepts est nécessaire pour poser le problème correctement);
- construction implicite (il n'y a aucun élément à ajouter à la figure);
- déduction irrégulière (la conclusion découle directement de l'étape 1);
- deux pas déductifs.

L'expression « pas déductif » nécessite des éclaircissements. Noirfalise (1998) en se basant sur les travaux de Duval, définit celle-ci comme un regroupement de trois énoncés : A0, soit la prémisse du pas déductif (l'hypothèse provenant du problème), A => B, l'énoncé tiers (la justification proposée dans la rédaction de la preuve) et B0, la conclusion du pas déductif. Considérons l'exemple suivant pour clarifier l'expression ci-dessus : soit un segment YZ où le point Y est le symétrique du point Z par rapport au point M. Quelle conclusion est-il possible de tirer concernant le point M?

Puisque le point Y est le symétrique du point Z par rapport au point M, (A0) alors le point M est le point milieu du segment YZ (B0). La première partie de cet énoncé constitue la prémisse du pas déductif alors que la fin représente la conclusion. Nous constatons que dans ce cas précis, l'énoncé tiers est absent. Pourtant, ceci ne contredit pas ce que Noirfalise propose. En fait, l'énoncé tiers est implicite. En tentant de rendre ce dernier explicite, la rédaction d'une démonstration deviendrait plus complexe comme l'illustre la présentation des trois énoncés suivants à partir de la même situation :

1) nous savons que le point Y est le symétrique du point Z par rapport au point M. Ce premier énoncé constitue la prémisse du pas déductif, soit A0;
2) or, un point est le symétrique d'un autre point par rapport à un troisième point lorsque ce troisième point est le point milieu du segment représenté par les deux premiers points. Ce second énoncé est l'énoncé tiers;
3) nous sommes donc en mesure d'affirmer que le point M est le milieu du segment YZ. Cette dernière étape est la conclusion B0.

Après ces précisions concernant les pas déductifs, revenons aux éléments associés aux trois preuves. La présentation de ces éléments constitue une première étape, pour créer cette catégorisation qui se veut un bref exemple. L'étape suivante requiert la création de classes à partir des éléments qui semblent être prédominants pour expliquer le niveau de difficulté rattaché à la démonstration de ces trois théorèmes. Pour les trois preuves présentées plus haut, nous obtenons les classes qui suivent :

Classe 1 : preuves courtes (3 pas déductifs ou moins);

Classe 2 : preuves longues avec une construction implicite (4 pas déductifs ou plus);

Classe 3 : preuves longues avec une construction élaborée (4 pas déductifs ou plus)

Les trois classes précédentes sont les classes primaires du réseau car elles regroupent les critères qui rendent, possiblement, le mieux compte du niveau de difficulté d'une preuve. Les classes secondaires se présentent comme suit :

Classe 4 : déduction irrégulière;

Classe 5 : déduction régulière;

Le regroupement de ces cinq classes conduit à la catégorisation suivante, qui est présentée seulement à tire d'exemple :

Catégorie A : preuve courte avec une construction implicite, déduction irrégulière;

Catégorie B : preuve courte avec construction implicite, déduction régulière;

Catégorie C : preuve longue avec construction implicite, déduction irrégulière;

Catégorie D : preuve longue avec construction implicite, déduction régulière.

Catégorie E : preuve longue avec construction élaborée, déduction irrégulière;

Catégorie F : preuve longue avec construction élaborée, déduction régulière.

Le type d'applications (directe ou indirecte) n'a pas été incorporé dans l'élaboration des catégories pour diminuer le nombre de catégories possibles. Les différences entre les classes sont marquées par un élément dissemblable. Le niveau de difficulté des preuves augmente avec chaque catégorie. Autrement dit, une preuve classée C est plus ardue qu'une preuve provenant de la classe A dans la catégorisation précédente. Nous soulignons que cette catégorisation constitue un exemple élaboré à partir des trois théorèmes présentés dans cette section.

3.8 Justification du type de recherche

Dans une recherche de type qualitative, le chercheur décide lui-même ce qui formera l'ensemble des éléments à l'étude à partir d'une série de critères provenant du cadre conceptuel. Plus spécifiquement, l'échantillonnage théorique renvoie à un choix conscient et éclairé des participants pour la représentativité de ceux-ci par rapport au problème de recherche. Dans notre cas, il s'agit de 35 théorèmes à démontrer. Nous pensons que cette valeur est suffisante pour en arriver à une répétition des éléments explicatifs du niveau de difficulté d'une preuve. Les preuves des théorèmes considérés sont en lien avec le cercle et le triangle rectangle et celles-ci font appel régulièrement aux mêmes éléments. Nous croyons également que notre sélection des différents théorèmes s'avère un échantillon représentatif des problèmes présentés aux élèves. Pour ce faire, nous avons opté pour des théorèmes provenant de chacune des sous- sections des manuels consultés. Par la suite, nous procéderons à l'analyse. L'idée de fond dans le processus d'analyse consiste en quelque sorte à tirer un sens des faits accumulés à partir du canevas et de la grille d'analyse. Pour nous, ce sera de dégager des caractéristiques pertinentes à propos du niveau de difficulté (d'une preuve) pour en arriver à produire une catégorisation pour pousser plus loin la classification proposée par Tanguay (2000), sur un aspect particulier, les problèmes de type N, qui font appel au raisonnement déductif dans la rédaction d'une preuve. Nous nous inscrivons ainsi à la première étape de la démarche des recherches proposées par Van Der Maren (1995) : la catégorisation.

L'importance des critères méthodologiques

Lincoln et Guba (1985) ont adapté les critères provenant de la recherche quantitative pour présenter un ensemble de critères qui convient mieux aux besoins de la recherche qualitative-interprétative. Dans les lignes qui suivent, nous allons aborder ceux-ci, tout en les définissant et en proposant des moyens pour les mettre en pratique dans la présente recherche.

Définition des critères méthodologiques

1) la transférabilité : les résultats de l'étude peuvent être adaptés. En choisissant de travailler majoritairement à partir des théorèmes, les manuels utilisés ne constituent pas un facteur dans l'équation, car la formulation des théorèmes n'incombe pas aux auteurs des manuels puisqu'ils proviennent du programme proposé par le MEQ. La catégorisation peut servir à un enseignant qui aborde la notion de preuve déductive, peu importe le manuel utilisé.
2) la fiabilité : les résultats de l'étude doivent être cohérents avec le déroulement de celle-ci.
3) la confirmation : les résultats ont fait l'objet d'une validation.

Tel que mentionné un peu plus tôt, pour nous assurer de la qualité de la recherche et satisfaire les critères deux et trois, nous avons soumis à un spécialiste la grille d'analyse et la catégorisation qui en résulte, pour s'assurer que l'adéquation entre ces deux composantes est suffisante. Le professeur consulté a classé les preuves selon les critères présents dans les différentes catégories. Par la suite, il y a eu comparaison des classements respectifs (celui du professeur consulté et celui produit par l'auteur de la recherche). Des échanges ont mené à une clarification des divergences concernant le classement de certaines preuves. C'est ainsi que nous avons obtenu le classement final des preuves qui est présenté dans le prochain chapitre.

3.9 La sélection des volumes

Ce travail de recherche se situe à l'intérieur des programmes 436 et 536 en mathématiques à cause des exigences plus élevées de ceux-ci face à la preuve de nature déductive. Cette considération fixe d'entrée de jeu un premier critère quant au choix de la collection pour le quatrième et le cinquième secondaire. Les manuels doivent être disponibles pour ces deux niveaux. Les deux collections que nous avons retenues rencontrent cette exigence. De plus, à l'intérieur des collections A et B, les situations proposées sont assez semblables. Nous y retrouvons des problèmes de construction, des situations où les théorèmes présentent l'hypothèse et la conclusion; l'élève doit compléter la preuve. D'autres théorèmes exigent de compléter une définition ainsi qu'une rédaction de preuve complète. Ces deux collections soumettent aussi des problèmes concrets, provenant de la vie courante, en lien avec le triangle rectangle et le cercle. Tel que souligné précédemment, nous allons donc nous en tenir principalement aux théorèmes ainsi qu'aux théorèmes qui présentent déjà des éléments de preuves. Notre choix se porte sur la collection B, car c'est à l'intérieur de cette dernière qu'il semble y avoir le plus de références au raisonnement déductif en contexte de preuves. Mentionnons aussi que *Mathématique Soleil 536* a été utilisé lors de l'analyse pour diversifier la provenance des théorèmes à démontrer et s'assurer d'avoir un nombre suffisant de problèmes de type N. Notre but n'est pas de comparer les deux manuels.

3.10 Conclusion

Nous avons présenté à l'intérieur de ce troisième chapitre le canevas d'analyse. La construction de ce dernier a été expliquée et les éléments constitutifs ont été abordés un à la fois. Par la suite, nous avons élaboré sur le passage du canevas à la grille d'analyse. En prenant appui sur celle-ci, nous produirons une catégorisation des preuves déductives, ce qui constitue l'objectif premier de cette recherche. La construction de la catégorisation a été détaillée et illustrée avec la présentation de trois théorèmes et des démonstrations propres à chacun. Nous avons terminé ce chapitre avec une section concernant les critères méthodologiques ainsi que la présentation des critères pour la sélection des volumes employés lors de la rédaction des démonstrations.

Chapitre 4

Présentation et analyse des résultats

C'est à l'intérieur de ce chapitre que nous allons présenter la grille d'analyse et le classement des 35 preuves que nous avons effectuées. Ce classement sera accompagné des six catégories de preuves déductives. Certaines catégories regroupent des éléments communs. Toutes les catégories se démarquent par au moins un élément différent. Pour établir un niveau de difficulté des catégories proposées, nous avons mis l'accent principalement sur les éléments dissemblables. Pour éviter de s'en tenir à une présentation théorique, chacune sera illustrée à l'aide d'une preuve. Nous tiendrons compte des remarques et des suggestions du professeur qui a évalué les preuves ainsi que le classement pour produire une version finale de la catégorisation des preuves déductives.

4.1 La grille d'analyse

La grille d'analyse regroupe les éléments que nous avons conservés durant la rédaction des preuves que nous retrouvons dans *Réflexions mathématiques* ainsi que certains des éléments provenant de notre analyse des preuves à l'intérieur de *Mathématique Soleil.* Nous croyons que ces éléments sont ceux qui permettent de catégoriser le mieux les différents types de preuves déductives en fonction de leur degré de difficulté.

Les éléments constitutifs de la grille d'analyse sont :

- statut des conclusions partielles (preuves à déduction régulière et irrégulière);
- construction implicite (rien à ajouter à la figure);
- construction élaborée (addition d'un ou plusieurs éléments à la figure);
- présence d'un « si et seulement si »;
- transitivité de l'égalité et de la congruence;
- propriété des éléments homologues;
- lecture de la figure (pour en tirer de l'information ou mener à l'utilisation d'un théorème);
- nombre de pas déductifs (étapes intermédiaires pour montrer la conclusion);
- plusieurs cas à prouver à l'intérieur d'un même théorème.

Après la présentation des éléments ci-dessus, il est nécessaire d'apporter une précision. Certains parmi eux n'apparaissent pas dans le canevas d'analyse proposé à l'intérieur du chapitre deux. Ils proviennent plutôt de l'analyse des preuves. Nous en avons fait une brève description pour faciliter la compréhension du lecteur.

4.2 Classement des preuves

Le tableau suivant présente les preuves selon six catégories. Pour bien différencier la provenance des preuves, les lettres R et MS ont été employées pour indiquer s'il s'agit d'un énoncé venant de *Réflexions mathématiques* (R) ou de *Mathématique Soleil* (MS). De plus, nous spécifions aussi la page et le numéro du problème qui exige une preuve.

Catégorie 1a	Catégorie 1b	Catégorie 2	Catégorie 3	Catégorie 4	Catégorie 5	Catégorie 6
R, p.280, # 1a	MS, p.18, #5	R, p.263, #2	R, p.262, #6	R, p.263, #10	R, p.262, #3	R, p.262, #1
R, p.302, #6	MS p.22, #9a	R, p.273, #3	R, p.309, #i	R, p.280, #1b	R, p.262, #4	R, p.262, #2
	MS, p.29, #1	R, p.278, #g		R, p.289, #b	MS, p.5, #6	
	MS, p.30, #1	R, p.313, #7		R, p.290, #f		
		MS, p.6, #12		R, p.310, #k		
		MS, p.6, #13		R, p.313, #10		
		MS p.6, #14		R, p.316, #c		
		MS, p.12, #1		R, p.317, #g		
		MS, p.13, #2		MS, p.5, #5		
		MS, p.20 #7				
		MS p.22, #9b				
		MS, p.42, #1				
		MS, p.44, #1				

4.3 Six catégories de preuves déductives

À l'intérieur de cette section, nous introduirons les six catégories de preuves avec les éléments répertoriés pour chacune lors de l'analyse des preuves. La sélection des éléments présents dans chaque catégorie répond à trois critères : ils doivent être représentatifs du niveau de difficulté des preuves propres à chaque catégorie, ceux-ci doivent être faciles à vérifier par l'enseignant qui souhaite se servir de notre grille et ils ne doivent pas dépendre de la personne qui effectue une preuve donnée; sinon une même preuve pourrait comporter un degré de difficulté différent pour deux individus.

Catégorie 1a

- construction implicite (rien à ajouter à la figure);
- ce niveau regroupe des preuves à déduction irrégulière (les conclusions partielles ne changent pas de statut);
- lecture simple de la figure; (pour faire seulement des observations à partir de celle-ci);

Catégorie 1b

- construction implicite;
- déduction irrégulière;
- lecture élaborée de la figure (qui mène à l'utilisation d'un théorème);

Catégorie 2

- construction implicite;
- déduction régulière (la preuve contient au moins une conclusion partielle);
- propriété des éléments homologues;

Catégorie 3

- construction élaborée;
- déduction irrégulière;
- propriété des éléments homologues;

Catégorie 4

- construction élaborée;
- déduction régulière;

Catégorie 5

- construction élaborée;
- déduction régulière;
- présence du « si et seulement si »;
- plusieurs cas à prouver;

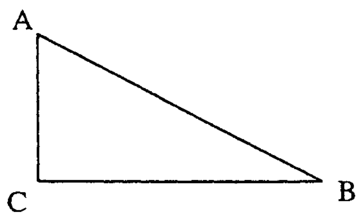
Catégorie 6

- preuve par l'absurde.

La catégorie 1a regroupe les preuves qui ne recèlent pas de difficultés importantes. Nous considérons que ce type de preuves possède une structure de base et qu'il s'agit des preuves les plus aisées à rédiger. La catégorie 1b correspond à un degré de difficulté légèrement plus élevé. Elle est caractérisée par la lecture d'une figure plus complexe pour en tirer de l'information afin de montrer le résultat exigé. La catégorie 2 se démarque des catégories 1a et 1b sur un point précis : ces preuves sont à déduction régulière; la démarche à l'intérieur de la preuve n'est pas linéaire. La catégorie 3 implique une difficulté plus élevée car la rédaction de preuves nécessite de faire une construction. La catégorie 4 requiert elle aussi une construction et elle incorpore un élément plus ardu : pour chacune de ces preuves, au moins une conclusion partielle devient un argument pour justifier une conclusion à une autre étape. La catégorie 5 regroupe tous les aspects problématiques ainsi que deux éléments qui sont propres à cette catégorie : le « si et seulement si » ou la nécessité de traiter plusieurs cas à l'intérieur d'une même preuve. La catégorie cinq représente les preuves les plus difficiles. La catégorie 6 qui regroupe les preuves par l'absurde n'est pas illustrée par un exemple (voir annexe p.95-96). Parmi les 35 preuves rédigées, seulement deux sont de ce type et une est beaucoup plus courte que l'autre. La difficulté majeure dans ce type de preuves consiste à faire apparaître une contradiction. Illustrons maintenant nos propos par une preuve typique à chaque catégorie.

Preuve de catégorie 1a

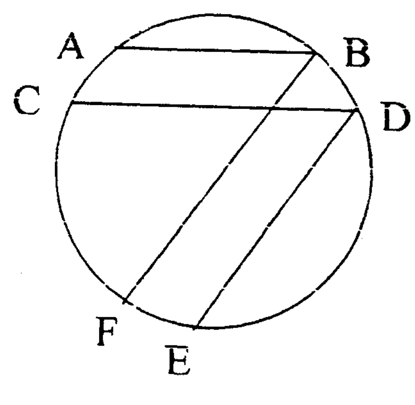
Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires. (R, p.280, #1a)



1) *l'angle a + l'angle b + l'angle c = 180° car la somme des angles internes d'un triangle est de 180° en géométrie euclidienne*; (*thm*)
2) (*l'angle a + l'angle b + 90°) - 90° = 180° - 90°*; (*ax*)
3) *donc, l'angle a + l'angle b = 90°.*

Preuve de catégorie 1b

Dans un cercle de centre O, les cordes AB et CD sont parallèles. On trace deux autres cordes parallèles, BF et DE. Montrer que les arcs AC et FE sont congrus. (MS, p.18 #5)



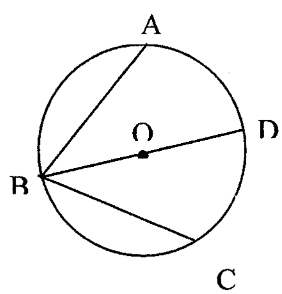
1) *l'arc AC est congru à l'arc BD, car dans un cercle deux cordes qui sont parallèles interceptent des arcs congrus*; (*thm*)

2) *l'arc BD est congru à l'arc FE, car dans un cercle deux cordes qui sont parallèle interceptent des arcs congrus*; (*thm*)

3) *donc, à partir de 1 et 2, l'arc AC est congru à l'arc BD et l'arc BD est congru à l'arc FE, de sorte que l'arc AC est congru à l'arc FE.*

Preuve de catégorie 2

Soit un cercle de centre O contenant les points A, B, C et D. Prouve que si BOD est la bissectrice de l'angle ABC alors les petits arcs AD et DC sont congrus (R, p.313, #7)*



1) *mesure de l'angle ABD = mesure de l'angle CBD car BOD est la bissectrice de l'angle ABC*; (*h*)

2) *mesure de l'angle ABD = ½ mesure de l'arc* (*AD*) *car un angle inscrit est égal à la moitié de l'arc compris entre ses côtés*; (*thm*)

3) *mesure de l'angle CBD = ½ mesure de l'arc* (*DC*) *même raison qu'à l'étape 2*; (*thm*)

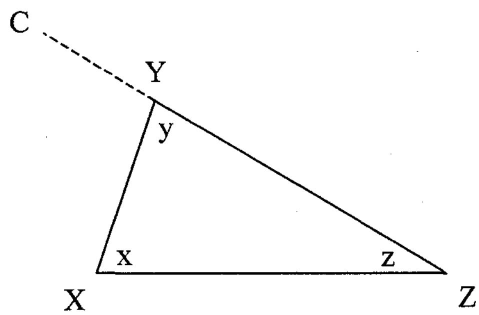
4) *à partir de 1, comme l'angle ABD est congru à l'angle CBD alors, mesure de l'angle ABD = ½ mesure de l'arc* (*AD*) *et mesure de l'angle ABD = ½ mesure de l'arc* (*DC*) *alors par transitivité, ½ mesure de l'arc* (*AD*) *= ½ mesure de l'arc* (*DC*); (*cp*)

5) *donc, mesure de l'arc AD = mesure de l'arc DC.*

* *Nous avons ajouté la lettre D à l'énoncé initial pour mieux identifier les petits arcs.*

Preuve de catégorie 3

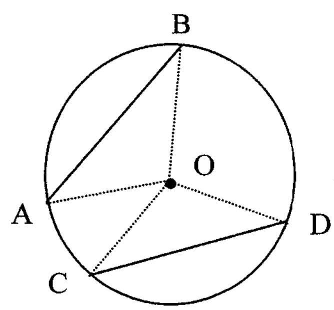
La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des deux autres angles (R, p.262, #6).



1) *prolongeons le côté ZY jusqu'au point C*; (*const*)
2) *l'angle XYC est l'angle extérieur à l'angle y*; (*obs*)
3) *l'angle XYC est le supplément de l'angle y*; (*obs*)
4) *les angles x et z sont le supplément de l'angle y*; (*thm*)
5) *à partir des étapes 3 et 4, la mesure de l'angle XYC = mesure de l'angle x + mesure de l'angle z.*

Preuve de catégorie 4

Dans un cercle, des cordes congrues sous-tendent des arcs congrus. (MS, p.5, #5)



1) *relions les extrémités de chaque corde au centre du cercle*; (*const*)
2) *AO est congru à CO car ce sont deux rayons provenant du même cercle*; (*obs*)
3) *DO est congru à BO, même raison qu'à l'étape précédente*; (*obs*)
4) *CD est congru à AB car il s'agit de deux cordes congrues par hypothèse*;
5) *le triangle CDO est congru au triangle ABO par la propriété côté-côté-côté*; (*cp*)
6) *mesure de l'angle AOB = mesure de l'angle COD par les éléments homologues*; (*cp*)
7) *mesure de l'angle AOB = mesure de l'arc AB et mesure de l'angle COD = mesure de l'arc CD car la mesure d'un angle au centre est égal à la mesure de l'arc situé entre ses côtés*; (*thm*)
8) *à partir de 6 et 7, mesure de l'arc AB = mesure de l'arc CD.*

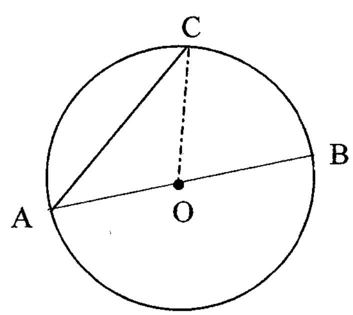
Preuve de catégorie 5

La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté. (MS, p.5, #6)

Ce théorème présente trois cas possibles :

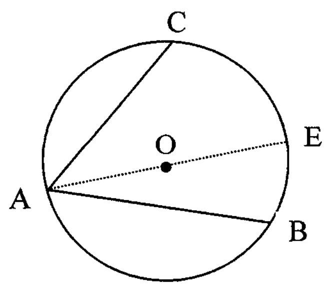
1) *un des côtés de l'angle inscrit passe par le centre du cercle*;
2) *le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle*;
3) *le centre du cercle est situé à l'extérieur de l'angle.*

Nous débutons avec le premier cas.



1) *traçons le segment OC*; (*const*)
2) *le triangle AOC est isocèle puisque AO et CO sont congrus en tant que rayons d'un même cercle*; (*thm*)
3) *la mesure de l'angle a est égale à la mesure de l'angle c car aux côtés congrus sont opposés des angles congrus dans un triangle isocèle*; (*thm*)
4) *la mesure de l'angle BOC = la mesure de l'angle a + la mesure de l'angle c car un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des mesures des deux angles qui ne sont pas adjacents à cet angle*; (*thm*)
5) *à partir de 3 et 4, la mesure de l'angle BOC = 2 mesure de l'angle a car la mesure de l'angle a est égale à la mesure de l'angle c*; (*cp*)
6) *la mesure de l'angle BOC = mesure de l'arc BC car un angle au centre a pour mesure la mesure de l'arc qui est situé entre ses côtés*; (*thm*)
7) *½ mesure de l'angle BOC = ½ mesure arc BC*; (*ax*)
8) *à partir de l'étape 5, la mesure de l'angle a = ½ mesure de l'angle BOC*; (*cp*)
9) *à partir des étapes 7 et 8, la mesure de l'angle a = ½ mesure de l'arc BC par transitivité de l'égalité.*

Passons au second cas : le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle.



1) *traçons le segment AE qui intercepte le centre du cercle*; (*const*)

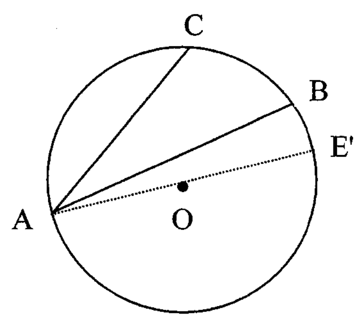
2) *la mesure de l'angle CAE = ½ mesure de l'arc CE;* (*par la partie 1 de la preuve*)

3) *la mesure de l'angle EAB = ½ mesure arc EB, même raison qu'à l'étape précédente;*

4) *en additionnant les résultats des étapes 2 et 3, la mesure de l'angle CAB = mesure de l'angle CAE + mesure de l'angle EAB, mesure de l'arc CB = mesure de l'arc CE + mesure de l'arc EB;* (*ax*)

5) *donc, mesure de l'angle CAB = ½ mesure de l'arc BC.*

Nous terminons cette preuve avec le troisième cas : le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle.



1) *traçons le segment AE' qui intercepte le centre du cercle;* (*const*)

2) *la mesure de l'angle CAE' = ½ mesure de l'arc CE';* (*par la partie 1 de la preuve*)

3) *la mesure de l'angle BAE' = ½ mesure de l'arc BE', même raison qu'à l'étape 2;*

4) *en se servant des résultats démontrés en 2 et 3, la mesure de l'angle CAB = la mesure de l'angle CAE' - la mesure de l'angle BAE', mesure de l'arc BC = mesure de l'arc CE'- mesure de l'arc BE';* (*ax*)

5) *donc, mesure de l'angle CAB = ½ mesure de l'arc BC.*

4.4 Retour sur les six catégories de preuves

Plutôt que de revoir les éléments importants associés à chaque type de preuves de manière séparée, nous allons commenter ceux-ci en rapport avec les catégories respectives de chacun.

Catégorie 1a

Tel que nous l'avons mentionné à l'intérieur du chapitre précédent, cette première catégorie se veut une bonne façon d'initier les élèves aux preuves déductives. Les énoncés des problèmes sont directifs, il n'y a pas de construction à faire et la démarche de preuve n'implique pas de retour en arrière. Il s'agit vraiment de la preuve déductive de base.

Catégorie 1b

Cette deuxième catégorie de notre classement diffère de la catégorie 1a sur un aspect seulement : la lecture de la figure, mais ce facteur est loin d'être négligeable. En effet, revenons au problème #1 à la page 29 dans *Mathématique soleil* 536 (voir p.122, annexe). L'élève doit montrer que si deux cercles n'ont aucun point commun, les mesures de deux segments sont égales. Il est essentiel de faire une bonne lecture de la figure pour poser les égalités nécessaires pour montrer le résultat exigé par le problème. Toutefois, il faut connaître la justification qui permet de poser ces égalités pour arriver au résultat final. Cette deuxième catégorie montre toute l'importance de connaître les théorèmes, les axiomes pour rédiger des preuves et savoir lesquels utiliser pour montrer les résultats demandés.

Catégorie 2

Ici, la difficulté principale qui s'ajoute est attribuable au changement de statut d'un ou plusieurs pas déductifs. Duval (1991) mentionne que les élèves se préoccupent uniquement du contenu des propositions ou qu'ils laissent de côté le statut de celles-ci. Nous croyons qu'il est important de faire réaliser aux élèves qu'ici la démarche de preuve nous amène à utiliser des conclusions partielles pour montrer des résultats à d'autres étapes.

Catégorie 3

L'élément problématique de cette catégorie est sans contredit la nécessité de faire une construction. Non seulement, l'élève doit ajouter des éléments à la figure pour amorcer la preuve, mais la construction effectuée doit être juste. En d'autres termes, la figure et les éléments ajoutés par l'élève ont pour mission de bien rendre compte de la situation géométrique à l'étude sans s'avérer un « dessin » parfait pour autant. Ceci constitue une première difficulté car la géométrie est l'art de raisonner de façon correcte sur une figure imparfaite. De plus, une autre question se pose pour les preuves associées à cette catégorie. Si un élève n'est pas en mesure d'écrire une preuve donnée, est-ce parce qu'il ne comprend pas comment rédiger la preuve en question ou est-ce parce qu'il ne « connaît » pas la construction requise pour démarrer la preuve? Nous croyons donc qu'il est impératif d'accorder plus de temps aux constructions en classe et de faire réaliser aux élèves qu'une bonne construction n'est pas un dessin parfait mais plutôt une représentation exacte de la situation. Le problème R, p.309, #i dans *Réflexions mathématiques* (voir p.106, annexe) constitue un très bon exemple de cette situation.

Catégorie 4

L'avant-dernière catégorie associe deux facteurs majeurs : l'addition d'éléments à la figure originale et les déductions régulières (la démarche à l'intérieur de la preuve n'est pas linéaire). La nécessité d'inclure des éléments à la figure cause déjà un premier problème pour un certain nombre d'élèves; le fait que ce genre de preuves se caractérise aussi par au moins une conclusion partielle qui devient un argument hausse le niveau de difficulté de manière importante. Les preuves de ce niveau ne devraient pas être abordées tant que les catégories précédentes ne sont pas bien maîtrisées par les élèves.

Catégorie 5

La cinquième catégorie de notre classement incorpore deux éléments cruciaux pour justifier le niveau de difficulté très élevé de ce dernier type de preuves : la présence de plusieurs cas à traiter à l'intérieur d'une même preuve ou la double implication logique, le « si et seulement si ». Le théorème 6 à la page 5, à l'intérieur de *Mathématique soleil* illustre parfaitement un théorème qui requiert de considérer plusieurs cas. Pour ce théorème précis, si le cas de base est représenté par un des côtés de l'angle qui intercepte le centre du cercle, l'élève confronté à ce problème peut ne pas avoir le réflexe de se poser la question suivante : que se passe-t-il si nous déplaçons le centre du cercle à l'intérieur ou à l'extérieur de l'angle? Une certaine expérience dans la rédaction de preuves est précieuse face à des problèmes de ce type. Passons maintenant à l'autre facteur qui détermine une preuve de catégorie cinq : la présence du « si et seulement si ». Deux grandes difficultés sont associées à ces preuves, l'importance de distinguer les hypothèses et la conclusion en fonction du côté prouvé à l'intérieur du « ssi » et la construction nécessaire pour un côté de la preuve dans les problèmes que nous avons effectués.

Chapitre 5

Conclusion

Nous allons débuter ce dernier chapitre en effectuant un bref retour sur l'ensemble des éléments marquants provenant de chacun des problèmes qui ont été utilisés pour illustrer les six catégories de preuves introduites au chapitre précédent. Puis, nous ferons un commentaire à propos des volumes employés dans cette recherche sur un aspect précis : la preuve déductive. Par la suite, nous exposerons les retombées de notre étude dans l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. Pour conclure, nous aborderons les limites de ce travail et nous proposerons quelques pistes qui pourraient s'avérer intéressantes à explorer dans le futur

5.1 Bref retour sur les preuves présentées dans le chapitre quatre

Dans cette section, nous revenons sur chacune des preuves qui illustrent les catégories proposées à l'intérieur du chapitre précédent. Le problème R, p.280, #1a (voir p.72 du mémoire) se retrouve dans la catégorie 1a car il n'y a rien à ajouter à la figure (construction implicite) et aucun des résultats n'est utilisé pour montrer un résultat à une autre étape (déduction irrégulière). Le problème MS, p.18, #5 (voir p.72 du mémoire) de la catégorie 1b diffère sur un aspect important (comparativement à la catégorie 1a) la lecture élaborée de la figure qui mène à l'utilisation d'un théorème. Nous introduisons les preuves à déduction régulière avec la catégorie 2. Le problème R, p.313, #7 (voir p.73 du mémoire) comporte une conclusion partielle à l'étape 4. L'étape 4 utilise le résultat de l'étape 1 comme argument pour montrer que ½ mesure de l'arc AD = ½ mesure de l'arc DC. Cette preuve est donc à déduction régulière. Le problème R, p.262, #6 (voir p.74 du mémoire) appartient à la catégorie 3. Il nécessite l'addition d'un élément à la figure (construction élaborée), soit le prolongement du côté ZY jusqu'au point C. Cette preuve est à déduction régulière. La catégorie 4 est illustrée avec le problème MS, p.5, #5 (voir p.74 du mémoire). Il est nécessaire de faire une construction (relier les extrémités de chaque corde au centre du cercle) et les étapes 6 et 7 servent pour montrer la conclusion à l'étape 8, ce qui explique que cette preuve est à déduction régulière. Le problème MS, p.5, #6 (voir p.75 du mémoire) fait partie de la catégorie 5. Pour celle-ci, il est nécessaire d'avoir plusieurs cas à prouver ou avoir la présence d'un énoncé du type « si et seulement si ». La catégorie 6 regroupe les preuves par l'absurde (voir les preuves R, p.262, #1 et R, p.262, #2).

5.2 Commentaires à propos des volumes employés durant l'analyse

Cette section se veut un commentaire sur les volumes utilisés dans l'analyse des théorèmes qui exigent une preuve déductive. Nous avons opté pour cette approche, au lieu de reprendre notre grille et classifier de nouvelles preuves déductives, car elle nous permet de voir comment les auteurs de ces manuels mettent en pratique les recommandations du MEQ. De plus, les problèmes qui exigent une preuve et qui font appel au raisonnement déductif sont peu nombreux. Pour débuter, abordons le programme *Mathématiques 436.* Il est mentionné à l'intérieur de l'objectif terminal 1.5 que « l'élève aura d'abord à étudier la géométrie analytique de la droite (...). Ensuite, l'élève pourra démontrer formellement des propositions géométriques » (p.24). *Réflexions mathématiques 436* respecte bien ce qui est mentionné plus tôt, mais nous croyons que sans délaisser la géométrie analytique il serait bénéfique pour les élèves d'introduire en parallèle le raisonnement déductif tel qu'il est présenté en cinquième secondaire quand les problèmes s'y prêtent. Par exemple, dans *Réflexions 436* à la page 250 # f, le problème 2 se présente comme suit : prouver que les diagonales d'un rectangle sont congrues à l'aide de la géométrie analytique. Il est facile de montrer ce théorème sans recourir à la géométrie analytique. La preuve de ce théorème est simple et elle constitue une excellente introduction au raisonnement déductif.

En cinquième secondaire, les concepteurs des programmes de mathématiques placent l'accent sur le raisonnement déductif. Les auteurs de *Réflexions 536* sont conscients des difficultés rattachées aux preuves déductives. Pour cette raison, ils débutent avec la présentation de démonstrations complètes. À plusieurs endroits dans *Réflexions 536*, des problèmes indiquent à l'élève les hypothèses, la conclusion à montrer et la figure est donnée. Enfin, pour les preuves plus complexes, dans plusieurs situations l'élève doit ne compléter que certaines parties. L'idée est intéressante mais nous pensons qu'en insistant davantage sur le raisonnement déductif dès le quatrième secondaire, les auteurs seraient en mesure de soumettre aux élèves beaucoup plus de problèmes de nature déductive qui comporteraient régulièrement plus de deux pas déductifs. Ceci faciliterait le développement des habiletés de rédaction de preuves de manière plus graduelle sur une plus longue période. Quant à *Mathématiques soleil*, nous devons souligner que les auteurs ne présentent pas de preuve dans le manuel théorique puisque la rédaction de preuves déductives n'était pas un des objectifs terminaux à cette époque.

5.3 Retombées de la recherche

Notre objectif était de produire une caractérisation des preuves déductives pour permettre un apprentissage plus graduel et possiblement plus aisé de cette dernière. En découpant en plusieurs catégories bien distinctes ces preuves, nous croyons que nous avons développé un outil qui facilitera l'apprentissage de cette notion par les élèves. L'enseignant qui opte pour l'usage de notre outil peut classer facilement les preuves à présenter aux élèves selon le degré de difficulté de chacune. De plus, il peut insister davantage sur les éléments caractéristiques qui reviennent à l'intérieur de chaque catégorie. Avant d'effectuer l'analyse, nous pensions qu'il existait certains invariants propres à la preuve déductive sans toutefois en être certain. Notre catégorisation est construite à partir des invariants; ceci fait en sorte que le niveau de difficulté d'une preuve est indépendant de l'élève. De plus, ce travail a fait ressortir l'importance de quelques points : la lecture de la figure, l'habileté à faire une construction, la considération qu'il faut accorder à l'agencement des conclusions partielles et la connaissance et la compréhension des théorèmes et des axiomes utilisés dans la rédaction de preuves. En dégageant ces invariants, nous croyons avoir clarifié la structure des preuves déductives.

5.4 Limites méthodologiques

Nous soulignons le fait que l'analyse a été effectuée à partir de 35 théorèmes. Si ce nombre avait été beaucoup plus grand, est-ce que nos résultats auraient été les mêmes? À partir des éléments proposés dans la grille d'analyse, il est possible de créer d'autres catégories. Si nous avions construit d'autres catégories, est-ce que la classification des preuves aurait été plus précise? Nous tenons aussi à mentionner que pour un même théorème plusieurs preuves existent dans bien des cas. Selon la preuve proposée, le classement du théorème considéré change, d'où la difficulté de classer des preuves...

5.5 Limites de l'étude et pistes de recherche

Cette recherche a été effectuée sans avoir recours à une enquête auprès des élèves. Bien que la catégorisation proposée mène à la classification des preuves rencontrées dans les manuels, la consultation de plusieurs groupes d'élèves de cinquième secondaire à l'aide d'un questionnaire regroupant quelques preuves de chaque catégorie permettrait de tester la validité de notre outil. De plus, l'analyse des preuves produites par les élèves pourrait mettre en lumière de nouveaux éléments pour catégoriser avec plus de précision les preuves déductives et faire ressortir des difficultés qui demeurent inconnues jusqu'à présent.

Il serait aussi intéressant de regarder si notre catégorisation peut s'insérer dans le nouveau de programme de mathématiques qui sera bientôt en vigueur dans la province. Les questions suivantes pourraient alors être examinées : 1) quels types de difficultés seraient rencontrés? 2) quels seraient les invariants qui pourraient être dégagés?

Finalement, d'un point de vue plus théorique, nous avons seulement fait appel à la première étape proposée par Van Der Maren (1995) dans la construction d'une typologie (la catégorisation). Alors, une question se pose, serait-il possible de produire une véritable typologie des preuves déductives en géométrie euclidienne avec toutes les difficultés inhérentes reliées au classement des preuves? Il pourrait s'avérer intéressant de tenter de répondre à cette question dans une étude ultérieure.

Références

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. & Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif.* Lyon : Presses universitaires de Lyon.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 10,* 23, 241-286.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18,* 147-176.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic. Dans Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds), *Approaches to algebra : perspectives for research and teaching.* Kluwer Academic Publishers.

Braconne, A. (1988). *Compréhension de la démonstration en géométrie chez les professeurs et les élèves du secondaire.* Mémoire de maîtrise inédit. Université Laval.

Breton, G., Côté, B., Delisle, C., Deschênes, A. & Ledoux, A. (1998). *Réflexions mathématiques 536.* Québec : Les Éditions CEC.

Breton, G., Deschênes, A., & Ledoux, A. (1997). *Réflexions mathématiques 436.* Québec : Les Éditions CEC.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educationnal Studies in Mathematics, 24,* 359-387.

Cyr, S. (2001). Vers un enseignement signifiant de la preuve au secondaire. *Bulletin AMQ, 4,* 19-27.

Dallaire, R., Doré, J., Lambert, J., L'Écuyer, N., & Rochette, G. (1987). *Mathématique soleil 5.* Sous la direction de Madeleine Drolet, Hélène Rochette. Québec : Guérin.

Dallaire, R., Doré, J., L'Écuyer, N. & Rochette, G. (1986). *Mathématique soleil 4.* Sous la direction de Madeleine Drolet, Hélène Rochette. Québec : Guérin.

Davis, P., & Hersh. R. (1985). *L'univers mathématique.* Paris : Gauthier Villars.

Doré, J., Lambert, J., L'Écuyer, N., & Rochette, G. (1992) *Mathématique Soleil, remaniement transitoire 536.* Sous la direction de Madeleine Drolet, Hélène Rochette. Guérin : Montréal.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50,* 57-79.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in mathematics, 22,* 233-261.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasonning. *The mathematics teacher. 88,* 412-417.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto : OISE Press.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21,* 6-13.

Houdebine, J. (1990). Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question. *REPERES-IREM, 1,* 5-27.

Hugues, M., Griffon, B., & Bouveyron, C. (1970). *Segmentation et typologie.* Paris : Bordas Management.

Karsenti, T., & Savoie-Zajc, L. (2000). *Introduction à la recherche en éducation.* Sherbrooke : Éditions du CRP.

Lakatos, I. (1977). *Proofs and refutations.* Cambridge : Cambridge Press.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. C. (1985). Naturalistic inquiry. Dans Karsenti, T., & Savoie-Zajc, L. (2000). *Introduction à la recherche en éducation.* Sherbrooke : Éditions du CRP.

MEQ. (1993). *Programmes d'études, Mathématique 116.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

MEQ. (1994). *Programmes d'études, Mathématique 216.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

MEQ. (1995). *Programmes d'études, Mathématique 314.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

MEQ. (1996). *Programmes d'études, Mathématique 416.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

MEQ. (1996). *Programmes d'études, Mathématique 436.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

MEQ. (1997). *Programmes d'études, Mathématique 514.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

MEQ. (1997). *Programmes d'études, Mathématique 536.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

MEQ. (2002). *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire premier cycle.* Québec : Gouvernement du Québec.

Mingus, T. T. Y. & Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *Science Science and Mathematics, 99,* 438-444.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational studies in mathematics, 27,* 249-266.

Muller, J.-P. (1994). La démonstration en géométrie en quatrième et en troisième. *REPERES-IREM, 15,*7-19.

Noirfalise, R. (1998). Une étude sur le maniement d'énoncés dans une démonstration. *Petit x, 46,* 5-17.

Paul, R., & DeBlois. L. (1998). Production de preuves en géométrie par des élèves du secondaire. *Bulletin AMQ, 38,* 22-33.

Reiss, K., Hellmich, F., & Reiss, F. (2002). Reasoning and proof in geometry : prerequisites of knowledge acquisition in secondary school students. *Psychology in Mathematics Education, 4,* 113-120.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results : the disasters of ``well-taught`` mathematics courses. *Educational Psychologist, 23,* 145-166.

Schoenfeld, A. (1989). Exploration of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for research in mathematics education, 20,* 338-355.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics teacher, 76,* 448-456.

Smith, R. (1940). Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. *The mathematics teacher, 33,* 99-134.

Solow, D. (1999). *How to read and do proofs.* New York : John Wiley and Sons.

Tanguay, D. (2000). *Analyse du développement de la notion de preuve dans une collection du secondaire.* Mémoire de maîtrise inédit, Université du Québec à Montréal.

Vadcard, L. (1999). La validation en géométrie au collège avec Cabri-Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires. *Petit x, 50,* 5-21.

Van der Maren, J.- M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation.* Québec : Les Presses de l'Université de Montréal.

Williams, E. (1980). An investigation of senior high school students'understanding of the nature of mathematical proof. *Journal for research in mathematics, may 1980,* 165-166.

ANNEXE

Nous croyons qu'il est judicieux de présenter l'axiomatique proposée aux élèves en quatrième et cinquième secondaire pour l'apprentissage de la géométrie euclidienne avant d'aborder les preuves.

L'axiomatique en quatrième secondaire (*Réflexions mathématiques 436)*

Les axiomes

Le tout est égal à la réunion de ses parties.

Toute quantité peut être remplacée par une autre qui lui est égale.

Le segment de droite représente le plus court chemin entre deux points.

Par deux points ne passe qu'une seule droite.

Étant donné un point et une direction, il n'y a qu'une seule droite de cette direction qui passe par ce point.

Étant donné deux figures isométriques, il existe au moins une isométrie qui les associe (p.18).

Les principaux théorèmes

Les angles opposés par le sommet sont congrus.

Les angles adjacents qui ont leurs côtés en ligne droite sont supplémentaires.

Les angles correspondants, alternes-internes ou alternes-externes formés par des parallèles et une sécante sont congrus.

Si deux angles correspondants, alternes-internes ou alternes-externes sont congrus, alors ils sont formés par deux droites parallèles.

La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.

Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.

Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° vaut la moitié de celle de l'hypoténuse (p.39).

Les conditions minimales pour l'isométrie de deux triangles

Deux triangles qui ont tous leurs côtés homologues congrus sont nécessairement isométriques. (CCC)

Deux triangles qui ont une paire d'angles homologues congrus compris entre des côtés homologues congrus sont nécessairement isométriques. (CAC)

Deux triangles qui ont une paire de côtés homologues congrus compris entre des angles homologues congrus sont nécessairement isométriques. (ACA) (p.85)

Les conditions minimales pour la similitude de deux triangles

Deux triangles qui ont deux angles homologues congrus ou isométriques sont semblables. (AA)

Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables. (CCC)

Deux triangles possédant un angle congru ou isométrique compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables. (CAC)

Les principaux énoncés sur la similitude

Toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième côté forme un triangle semblable au premier.

Des parallèles qui coupent des sécantes déterminent des segments de longueurs proportionnelles.

Le segment de droite qui joint le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure est la moitié de celle du troisième côté. (p.412)

L'axiomatique en cinquième secondaire (*Réflexions mathématiques 536*)

Les termes primitifs

Point, droite, plan

Les axiomes sur les points, les droites et les plans

Toute droite est un ensemble d'au moins deux points.

Par deux points passe une et une seule droite.

Tout plan contient au moins trois points n'appartenant pas à la même droite. (p.245)

L'axiome de la parallèle

Par un point pris hors d'une droite passe une et une seule parallèle à cette droite. (p.246)

Les axiomes de distance

Il existe une fonction d qui, à chaque couple de points A, B associe un nombre réel positif, accompagné d'une unité appelé distance, et que l'on note d(A, B).

La distance entre les points A et B est nulle si et seulement si A = B.

La distance entre deux points ne dépend pas de l'ordre des points (d(A, B) = d(B, A)). (p.248)

L'axiome des trois points

Étant donné trois points et trois distances entre ces points pris deux à deux :

chaque distance est plus petite ou égale à la somme des deux autres;

les trois points sont alignés si et seulement si une des trois distances est égale à la somme des deux autres;

un point est entre deux autres si et seulement si la somme des distances de ce point à chacun des deux autres est égale à la distance entre ces deux autres points. (p.248)

L'axiome de mesure d'angle

Il existe une fonction m qui, à chaque angle BAC, associe un nombre réel accompagné d'une unité, appelé mesure d'angle et notée m ‹ BAC.

Si l'unité est le degré, alors $0° \leq m \angle BAC \leq 180°$.

$m \angle BAC = 0°$ si et seulement si les demi-droites AB et AC sont confondues.

$m \angle BAC = 180°$ si et seulement si les demi-droites AB et AC sont opposées. (p.249)

L'axiomatique en cinquième secondaire (*Mathématiques soleil 536)*

Les auteurs de *Mathématiques soleil* préconisent une approche différente par rapport à ceux de *Réflexions.* En effet, ils présentent la relation de congruence, les propriétés de celle-ci ainsi que les propriétés des triangles isométriques. Par la suite, ils abordent plusieurs théorèmes en rapport avec le cercle et le triangle rectangle. Chacun est accompagné d'une figure.

La relation de congruence

Deux figures sont congrues si et seulement s'il existe une transformation isométrique (ou une composée de celles-ci) qui applique l'une sur l'autre. (p.128)

Propriétés de la relation de congruence

1) la réflexivité : une figure est congrue à elle-même;
2) la symétrie : si une figure est congrue à une seconde figure, alors celle-ci est congrue à la première;
3) la transitivité : si une figure est congrue à une deuxième et que celle-ci est congrue à une troisième, alors la première figure est congrue à la troisième. (p.128)

Propriétés des triangles isométriques

1) propriété C-A-C : deux triangles congrus possèdent respectivement un angle congru compris entre deux côtés congrus;
2) propriété A-C-A : deux triangles congrus possèdent respectivement un côté congru compris entre deux angles congrus;
3) propriété C-C-C : deux triangles congrus possèdent trois côtés congrus. (p.129)

Liste partielle des théorèmes proposés

Les angles opposés par le sommet sont congrus.

La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle égale 180° en géométrie euclidienne.

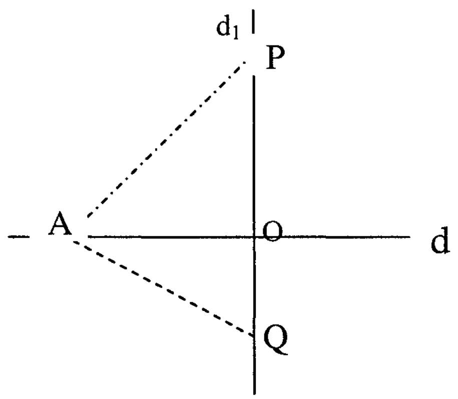
Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus.

Deux triangles semblables ont toutes les mesures des segments correspondants proportionnelles. (p.167-168)

Cette partie de l'annexe regroupe les 35 preuves que nous avons utilisées lors de l'analyse. Celles qui proviennent de *Réflexions mathématiques* seront identifiées par la lettre R entre parenthèses ainsi que la page et le numéro du problème où nous retrouvons cette preuve. Nous utiliserons la même convention pour les preuves provenant de *Mathématique Soleil* et nous identifierons celles-ci par MS. Les éléments en pointillé sur les figures indiquent une construction.

(R, p.262, #1)

Il existe une et une seule perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.



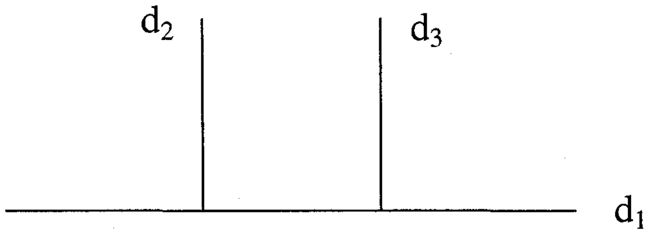
1) représentons la droite PQ qui est perpendiculaire à la droite d; (const)
2) identifions les points A et O sur la droite d et relions AP et AQ; (const)
3) si PA était perpendiculaire à la droite d alors le segment PA formerait un angle droit avec la droite d;
4) considérons un point Q sur d_1 équidistant de P par rapport à O et relions Q au point A, alors les triangles AOP et AOQ sont congrus par la propriété côté-angle-côté; (thm)
5) des étapes 3, 4, nous sommes en mesure de dire que l'angle PAQ serait de 180°; (cp)
6) donc PAQ serait une droite car les angles PAd et QAd sont adjacents et auraient leurs côtés extérieurs en ligne droite; (cp)

7) dans ce cas, nous pourrions faire passer deux droites par les points P et Q; (cp)

8) mais, comme par deux points nous ne pouvons faire passer qu'une seule droite, alors il existe une seule perpendiculaire à la droite d passant par le point P.

(R, p.262, #2)

Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

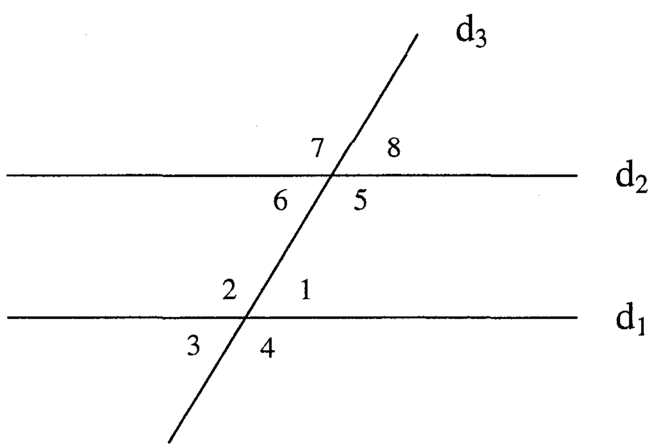


1) si les droites d_2 et d_3 n'étaient pas parallèles, elles se couperaient en un point et nous serions en mesure de tracer deux droites perpendiculaires à partir d'un même point; (négation h)

2) mais, comme à partir d'un point nous pouvons tracer une seule perpendiculaire à une droite alors d_2 est parallèle à d_3.

(R, p.262, #3)

Lorsque qu'une sécante coupe deux droites en des points distincts, les angles alternes-internes sont congrus si et seulement si les deux droites sont parallèles.

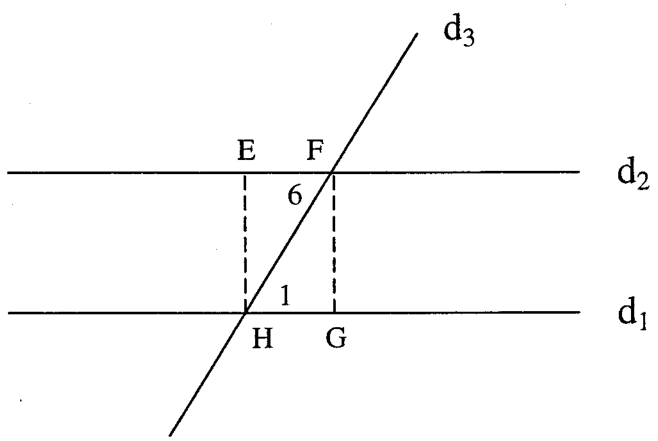


Supposons tout d'abord d_1 et d_2 parallèles (h)

1) l'angle 1 est congru à l'angle 3 car ce sont deux angles opposés par le sommet; (thm)
2) l'angle 3 est congru à l'angle 8 car il s'agit de deux angles alternes-externes; (thm)
3) l'angle 8 est congru à l'angle 6 car ce sont deux angles opposés par le sommet; (thm)
4) à partir des étapes 1 et 2, l'angle 1 est congru à l'angle 8 par transitivité; (cp)
5) en combinant le résultat obtenu à l'étape 4 avec l'étape 3 alors l'angle 1 est congru à l'angle 6.

Nous pouvons montrer de la même manière que l'angle 2 est congru à l'angle 5.

Supposons maintenant que les angles alternes-internes sont congrus (h)



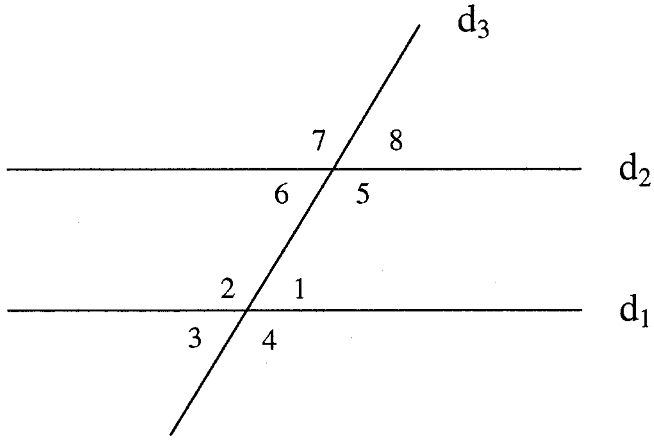
1) traçons les segments EH et GF perpendiculaires respectivement à d_2 et d_1; (const)
2) mesure de l'angle E = mesure de l'angle G, deux angles de 90°; (const)
3) mesure de l'angle 1 = mesure de l'angle 6 comme angles alternes-internes; (h)
4) le côté FH est congru à lui-même triangle
5) le triangle EFH est congru au triangle FGH par la propriété angle-côté-angle; (cp)
6) par la propriété des éléments homologues, la mesure de l'angle 2 = la mesure de l'angle 5; (cp)

7) l'angle 5 est le complément de l'angle 6, l'angle 1 est le complément de l'angle 2 car EH et FG sont perpendiculaires à d_1 et d_2; (obs)

8) donc, à partir de 6, d_1 est parallèle à la droite d_2.

(R, p.262, #4)

Lorsqu'une sécante coupe deux droites en des points distincts, les angles correspondants sont congrus si et seulement si les deux droites sont parallèles.



Dans un premier temps, supposons que d_1 et d_2 sont parallèles (h)

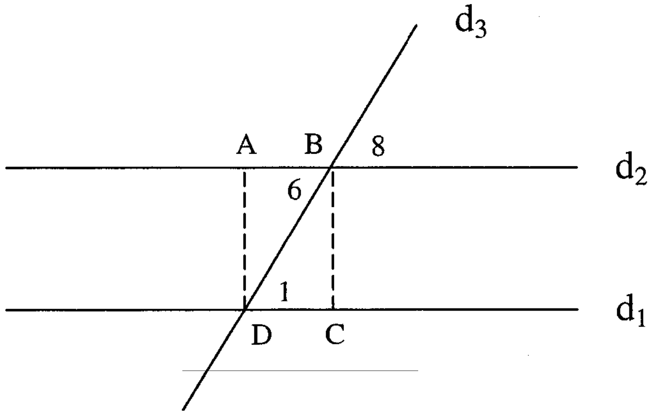
1) l'angle 1 est congru à l'angle 6 car ce sont des angles alternes-internes; (thm)

2) l'angle 6 est congru à l'angle 8 car ce sont deux angles opposés par le sommet; (thm)

3) à partir des étapes 1 et 2, les angles 1 et 8 sont congrus par transitivité.

Nous montrons de la même façon que les angles 2 et 7, 4 et 5 ainsi que 3 et 6 sont congrus.

Prouvons maintenant l'autre côté



Supposons que les angles correspondants sont congrus (h)

1) traçons les segments AD et BC perpendiculaires à d_2 et d_1 respectivement; (const)

2) mesure de l'angle A = mesure de l'angle C il s'agit de deux angles droits; (const)

3) mesure de l'angle 1 = mesure de l'angle 8, ce sont des angles correspondants; (h)

4) mesure de l'angle 8 = mesure de l'angle 6 comme angles opposés par le sommet; (thm)

5) à partir de 3 et 4, mesure de l'angle 1 = mesure de l'angle 6 par transitivité; (cp)

6) le côté BD est congru à lui-même; (ax)

7) le triangle ADB est congru au triangle BCD par la propriété angle-côté-angle; (cp)

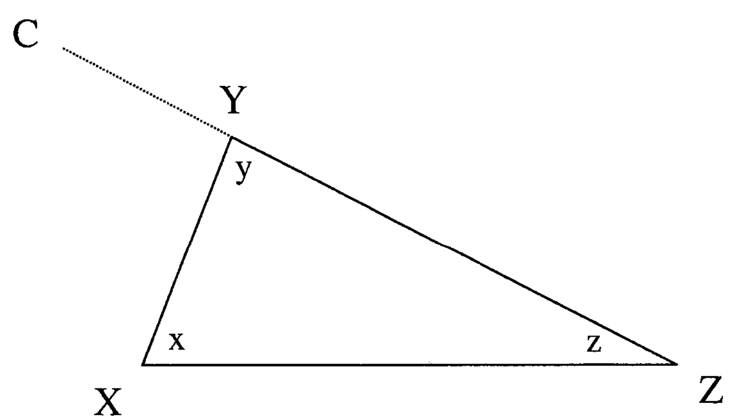
8) par la propriété des éléments homologues, mesure de l'angle 2 = mesure de l'angle 5; (cp)

9) l'angle 5 est le complément de l'angle 6, l'angle 1 est le complément de l'angle 2 car AD et BC sont perpendiculaires à d_1 et d_2; (obs)

10) donc, à partir de 9, d_1 est parallèle à d_2.

(R, p.262, #6)

La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des deux autres angles.



1) l'angle XYC est l'angle extérieur à angle y; (obs)

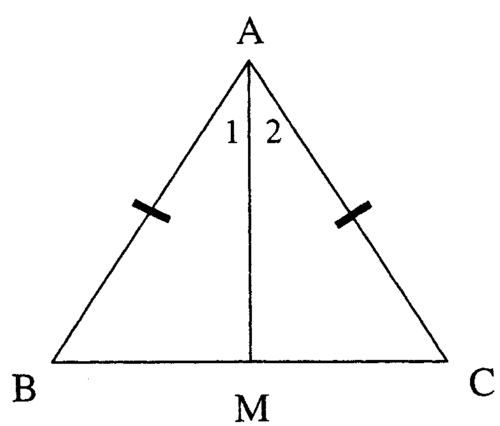
2) l'angle XYC est le supplément de l'angle y; (obs)

3) la somme des mesures des angles x et z est le supplément de la mesure de l'angle y; (thm)

4) des étapes 2 et 3, la mesure de l'angle XYC est égale à la somme des mesures des angles x et z.

(R, p.263, #2)

Dans le triangle BAC, le côté AB est congru au côté AC et M est le point milieu du côté BC. Prouve que la demi-droite AM partage l'angle BAC en deux angles congrus.



1) le côté AB est congru au côté BC par hypothèse; (h)

2) le segment BM est congru au segment CM car M est le point milieu du côté BC; (h)

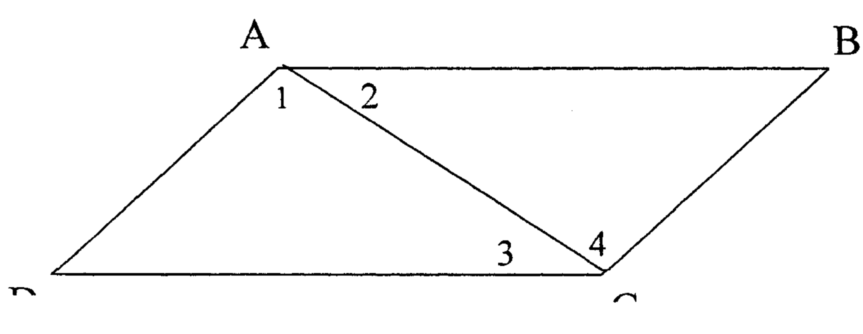
3) le segment AM est congru à lui-même; (ax)

4) le triangle BAM est congru au triangle CAM par la propriété côté-côté-côté; (cp)

5) donc, par la propriété des éléments homologues, l'angle 1 est congru à l'angle 2.

(R, p.263, #10)

Dans un parallélogramme, les côtés opposés et les angles opposés sont congrus.



1) traçons la bissectrice AC et identifions les angles formés; (const)

2) l'angle 2 est congru à l'angle 3 et l'angle 1 est congru à l'angle 4 car ce sont des angles alternes-internes avec des droites parallèles; (thm)

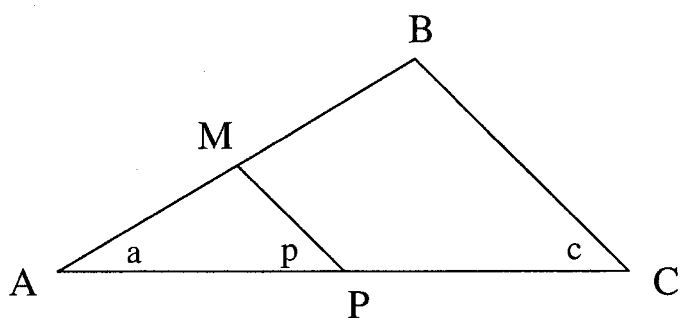
3) le côté AC est congru au côté AC car un segment est congru à lui-même; (ax)

4) le triangle ADC est congru au triangle ABC par la propriété angle-côté-angle; (cp)

5) donc, par les éléments homologues : l'angle b est congru à l'angle d, les côtés AD et BC ainsi que AB et DC sont congrus.

(R, p.273, #3)

Dans la figure ci-contre, on a relié les points milieux M et P. Démontre que les triangles AMP et ABC sont semblables.



1) l'angle a est congru à l'angle a car un angle est congru à lui-même; (ax)

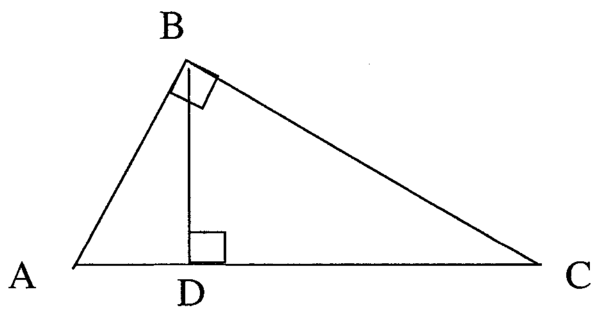
2) puisque M et P sont des points milieux, MP est parallèle à BC car tout segment qui relie les points milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté; (thm)

3) l'angle c est congru à l'angle p car ce sont des angles correspondants; (cp)

4) donc le triangle AMP est semblable au triangle ABC par la propriété angle-angle.

(R, p.278, #g)

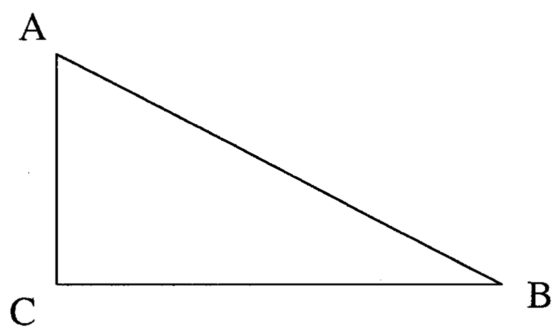
Dans un triangle rectangle, le produit des cathètes est égal au produit de la hauteur par l'hypoténuse.



1) Dans un triangle rectangle, les deux triangles formés par la hauteur sont semblables au plus grand triangle; (thm)
2) mesure AB / mesure AC = mesure BD / mesure BC car dans des triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels; (cp)
3) de l'étape 2, nous obtenons : mesure AB * mesure BC = mesure AC * mesure BD.

(R, p.280, #1a)

Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.



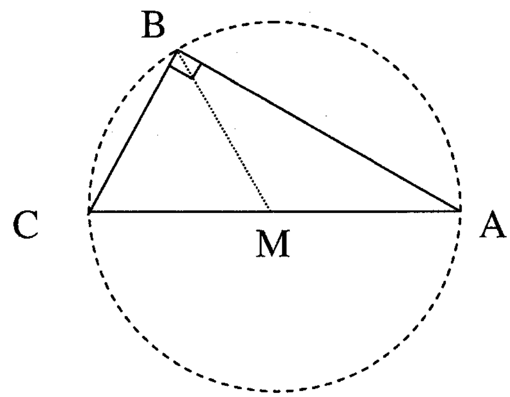
1) angle a + angle b + angle c = 180° et mesure angle c = 90°, car la somme des angles internes d'un triangle est égale à 180° en géométrie euclidienne; (thm)

2) angle a + angle b + 90° - 90° = 180°- 90° par l'utilisation de l'axiome de soustraction;

3) donc angle a + angle b = 90°.

(R, p.280, #1b)

Dans un triangle rectangle ayant un angle de 30°, le côté opposé à l'angle de 30° mesure la moitié de l'hypoténuse.



1) traçons le cercle dont le diamètre est l'hypoténuse; (const)

2) traçons le segment BM où M est le point milieu du diamètre AC; (const)

3) le triangle BMC est isocèle car les côtés MB et MC sont congrus en tant que rayons du même cercle (le point B est sur le cercle car le triangle ABC est rectangle); (thm)

4) angle c = 180° - angle a – angle b, d'où, angle c = 180° - 30° - 90° = 60°; (thm)

5) l'angle c est congru à l'angle CBM, car dans un triangle isocèle, aux côtés congrus sont opposés des angles congrus, d'où l'angle CBM = 60°; (cp)

6) de même, angle CMB = 180° - angle c – angle CBM, d'où angle CMB = 180° - 60°- 60° = 60° et ainsi le triangle BMC est équilatéral; (thm)

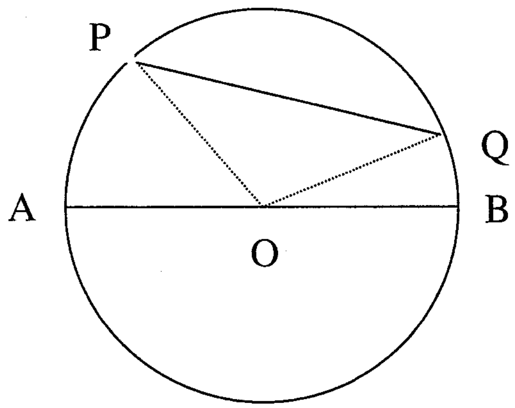
7) le côté BC est congru au segment MC car le triangle BMC est équilatéral; (cp)

8) le segment MC = ½ AC car M est le point milieu de AC; (const)

9) à partir des étapes 7 et 8, le côté BC = ½ AC.

(R, p.289, #b)

Le diamètre est la plus grande corde.



1) relions les extrémités de la corde PQ au centre du cercle O; (const)

2) mesure OP + mesure OQ > mesure PQ car dans un triangle, la somme des mesures des deux côtés est plus grande que la mesure du troisième côté; (thm)

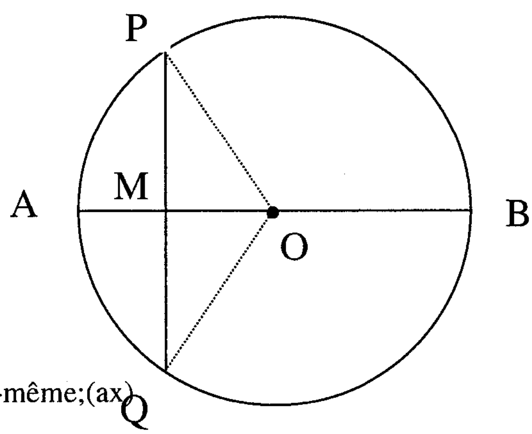
3) mesure OA = mesure OP = mesure OQ = mesure OB car les quatre segments sont les rayons d'un même cercle; (thm)

4) à partir des étapes 2 et 3, mesure OA + mesure OB > mesure PQ; (cp)

5) donc mesure AB > mesure PQ.

(R, p.290, #f)

Dans un cercle, un diamètre perpendiculaire à une corde autre qu'un diamètre partage cette corde en deux segments congrus



1) MO est congru à lui-même;(ax)

2) PO est congru à QO car ce sont deux rayons d'un même cercle; (thm)

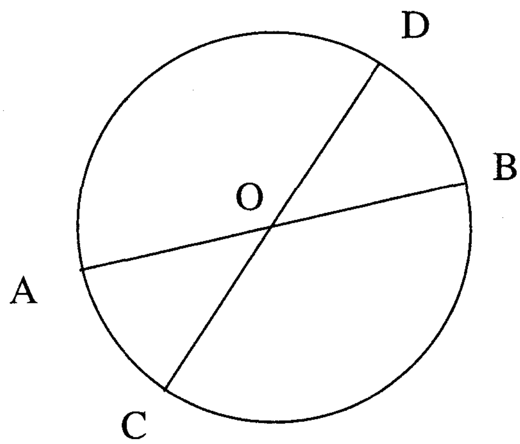
3) angle PMO est congru à angle QMO car le diamètre est perpendiculaire à la corde PQ; (h)

4) le triangle PMO est congru au triangle QMO, par la propriété côté-angle-côté; (cp)

5) donc, par les éléments homologues PM est congru à MQ.

(R, p.302, #6)

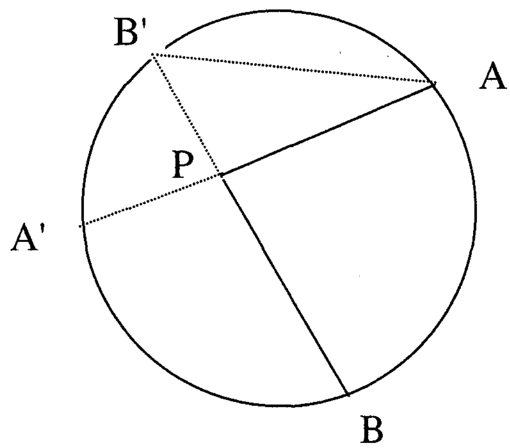
Soit un cercle de centre O avec deux diamètres AB et CD. Prouve que les petits arcs BD et AC sont congrus.



1) l'angle AOC est congru à l'angle BOD, deux angles opposés par le sommet; (thm)
2) mesure de l'angle AOC = mesure de l'arc AC car un angle au centre est égal à l'arc compris entre ses côtés; (thm)
3) mesure de l'angle BOD = mesure de l'arc BD pour la même raison qu'à l'étape 2; (thm)
4) des étapes 2 et 3, mesure de l'arc AC = mesure de l'arc BD.

(R, p.309, #i)

Un angle dont le sommet est à l'intérieur d'un cercle a pour mesure la demi-somme des mesures des arcs compris entre ses côtés.



1) mesure de l'angle APB = mesure de l'angle PB'A + mesure de l'angle PAB' car un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles qui ne sont pas adjacents à cet angle; (thm)

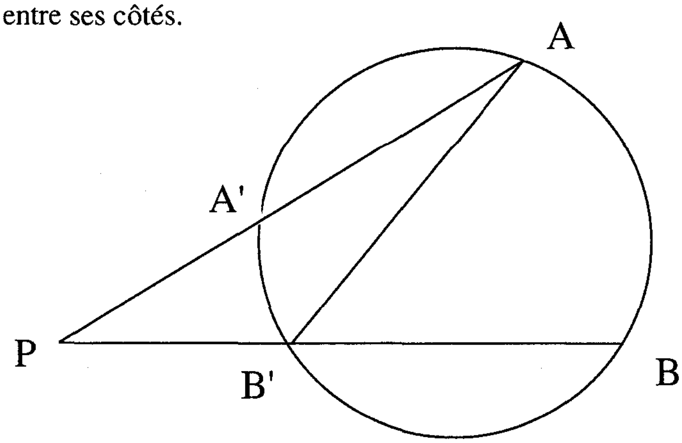
2) mesure de l'angle PAB' = ½ mesure de l'arc (A'B') car un angle inscrit est égal à la moitié de l'arc compris entre ses côtés; (thm)

3) mesure de l'angle PB'A = ½ mesure de l'arc (AB) pour la même raison qu'à l'étape 2; (thm)

4) en remplaçant les valeurs obtenues aux étapes 2 et 3 dans 1, mesure de l'angle APB = ½ (mesure (AB) + mesure (A'B')).

(R, p.310, #k)

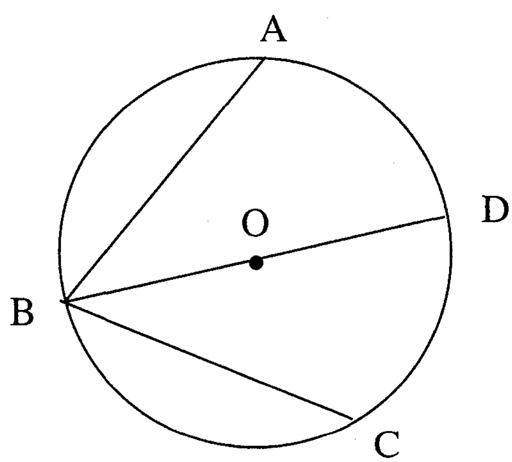
Un angle dont le sommet est à l'extérieur d'un cercle a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.



1) mesure de l'angle AB'B = mesure de l'angle PAB' + mesure de l'angle APB car tout angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles qui ne sont pas adjacents à cet angle; (thm)
2) mesure de l'angle APB = mesure de l'angle AB'B – mesure de l'angle PAB', en ajoutant « – mesure de l'angle PAB' » de chaque côté de l'égalité à l'étape 1; (cp)
3) mesure de l'angle AB'B = ½ mesure de l'arc (AB) car un angle inscrit a comme mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; (thm)
4) mesure de l'angle PAB' = ½ mesure de l'arc (A'B'), même raison qu'à l'étape 3; (thm)
5) donc, à partir des étapes 2, 3 et 4 mesure de l'angle APB = ½ mesure de l'arc (AB) – ½ mesure de l'arc (A'B').

(R, p.313, #7)

Soit un cercle de centre O contenant les points A, B, C et D. Prouve que si BOD est la bissectrice de l'angle ABC, alors les petits arcs AD et DC sont congrus.



1) l'angle ABD est congru à l'angle CBD car BOD est la bissectrice de l'angle ABC par hypothèse; (h)

2) mesure de l'angle ABD = ½ mesure de l'arc (AD) car la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'arc compris entre ses côtés; (thm)

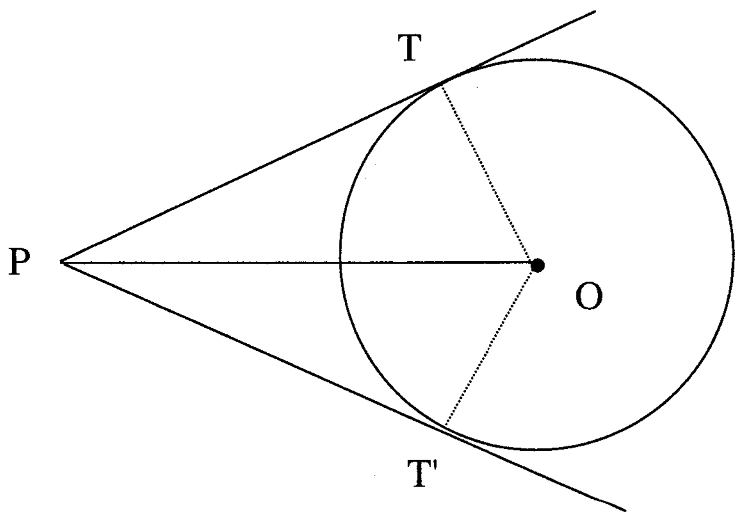
3) mesure de l'angle CBD = ½ mesure de l'arc (DC) pour la même raison qu'à l'étape 2; (thm)

4) à partir de l'étape 1, puisque angle ABD est congru à angle CBD, nous pouvons écrire : mesure de l'angle ABD = ½ mesure de l'arc (AD) et mesure de l'angle ABD = ½ mesure de l'arc (DC) ce qui implique que ½ mesure de l'arc (AD) = ½ mesure de l'arc (DC) par transitivité; (cp)

5) donc mesure de l'arc AD = mesure de l'arc DC.

(R, p.313, #10)

Soit un cercle de centre O et un point P extérieur à ce cercle. Prouve que OP est bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes passant par P.



1) traçons les segments OT et OT'; (const)

2) angle OTP est congru à angle OT'P car une tangente à la circonférence d'un cercle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon au point de tangence; (thm)

3) OT est congru à OT' car ce sont deux rayons provenant du même cercle; (thm)

4) OP est congru à lui-même; (ax)

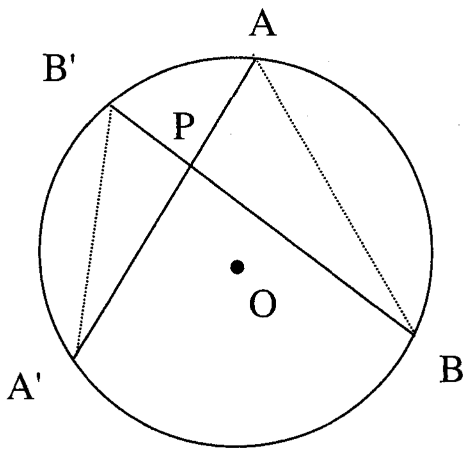
5) le triangle POT est congru au triangle POT' par la propriété côté-côté-angle; (cp)

6) l'angle TPO est congru à l'angle T'PO par les éléments homologues; (cp)

7) donc, OP est la bissectrice de l'angle TPT' car angle TPT' = angle T'PO + angle TPO et angle T'PO = angle TPO.

(R, p.316, #c)

Si deux cordes se coupent dans un cercle, le produit des mesures des deux segments de l'une égale le produit des mesures des deux segments de l'autre.



1) traçons les segments qui joignent A'B' et AB; (const)

2) l'angle A'PB' est congru à l'angle APB car il s'agit de deux angles opposés par le sommet; (thm)

3) mesure de l'angle B'A'P = ½ mesure de l'arc (B'A) et mesure de l'angle ABP = ½ mesure de l'arc (B'A); (thm)

4) la mesure de l'angle B'A'P est donc égale à la mesure de l'angle ABP par transitivité; (cp)

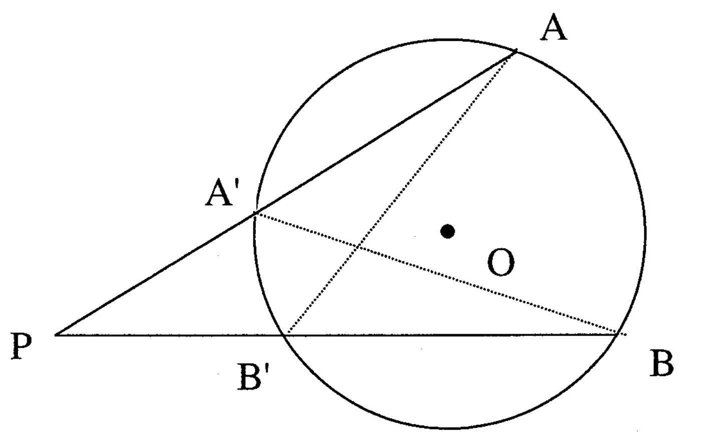
5) le triangle A'PB' est semblable au triangle APB par la propriété angle-angle; (cp)

6) mesure A’P / mesure PB = mesure B’P / mesure PA car dans des triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels; (cp)

7) donc, mesure A’P * mesure PA = mesure B’P * mesure PB.

(R, p.317, #g)

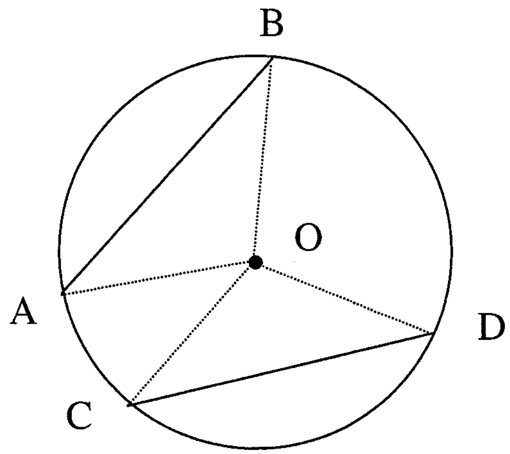
Si, d’un point P extérieur au cercle, on mène deux segments sécants, le produit des mesures du segment sécant et de sa partie extérieure est égal au produit des mesures du second segment sécant et de sa partie extérieure.



1) traçons les segments joignant AB’ et BA’; (const)
2) l’angle p est congru à l’angle p; (ax)
3) mesure de l'angle a = ½ mesure de l'arc (A’B’) et mesure de l'angle b = ½ mesure de l'arc (A’B’); (thm)
4) à partir de 3, mesure de l'angle a = mesure de l'angle b par transitivité; (cp)
5) le triangle A’BP est semblable au triangle B’AP par la propriété angle-angle; (cp)
6) PA’/ PB’ = PB / PA car dans des triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels; (cp)
7) donc PA’ * PA = PB’ * PB.

(MS, p.5, #5)

Dans un cercle, des cordes congrues sous-tendent des arcs congrus.



1) relions les extrémités de chaque corde au centre du cercle; (const)

2) AO est congru à CO car ce sont deux rayons provenant du même cercle; (thm)

3) DO est congru à BO, même raison qu'à l'étape 2; (thm)

4) CD est congru à AB par hypothèse; (h)

5) le triangle CDO est congru au triangle ABO par la propriété côté-côté-côté; (cp)

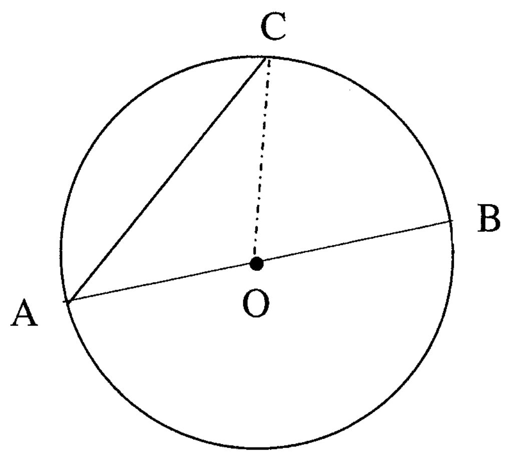
6) mesure de l'angle AOB = mesure de l'angle COD par les éléments homologues; (cp)

7) mesure de l'angle AOB = mesure de l'arc AB et mesure de l'angle COD = mesure de l'arc CD car un angle au centre est égal à la mesure de l'arc compris entre ses côtés; (thm)

8) à partir de 6 et 7, mesure arc AB = mesure arc CD par transitivité (des angles au centre congrus interceptent des arcs congrus).

(MS, p.5, #6)

La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la demi-mesure de l'arc intercepté.



Ce théorème présente trois cas possibles :

a) un des côtés de l'angle inscrit passe par le centre du cercle;

b) le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle;

c) le centre du cercle est à l'extérieur de l'angle;

Nous allons prouver le cas a) en premier lieu.

1) traçons le segment OC; (const)
2) le triangle AOC est isocèle car les segments AO et CO sont congrus en tant que rayons d'un même cercle; (thm)
3) mesure de l'angle a = mesure de l'angle c car aux côtés congrus sont opposés des angles congrus dans un triangle isocèle; (cp)
4) mesure de l'angle BOC = mesure de l'angle a + mesure de l'angle c, un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles qui ne sont pas adjacents à cet angle; (thm)
5) à partir des étapes 3 et 4, mesure angle BOC = 2 mesure angle a; (cp)

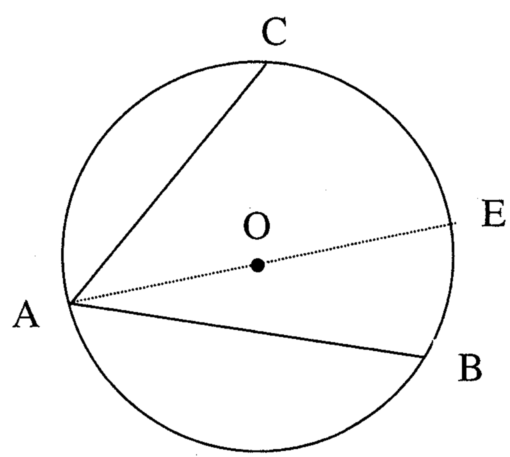
6) mesure de l'angle BOC = mesure de l'arc (BC) car un angle au centre a pour mesure la mesure de l'arc qui est situé entre ses côtés; (thm)

7) ½ mesure de l'angle BOC = ½ mesure de l'arc (BC); (ax)

8) à partir de l'étape 5, mesure de l'angle a = ½ mesure de l'angle BOC; (cp)

9) à partir des étapes 7 et 8, nous obtenons mesure de l'angle a = ½ mesure de l'arc (BC) par transitivité.

b) Deuxième cas : le centre du cercle est à l'intérieur de l'angle



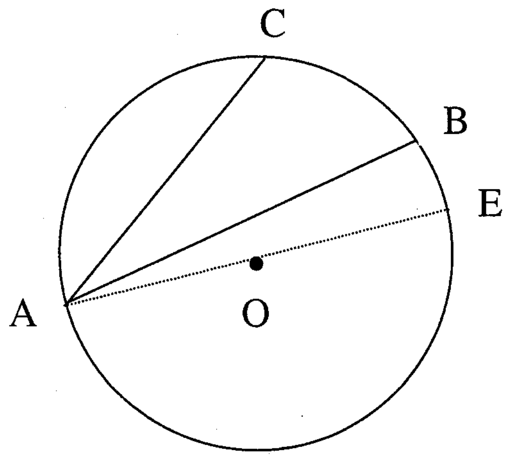
1) traçons le segment AE qui intercepte le centre du cercle; (const)

2) mesure de l'angle CAE = ½ mesure de l'arc (CE) car la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc situé entre ses côtés; (par la partie a)

3) mesure de l'angle EAB = ½ mesure de l'arc (EB), pour la même raison qu'à l'étape 2;

4) à partir de l'addition des résultats des étapes 2 et 3, nous obtenons : mesure de l'angle CAB = mesure de l'angle CAE + mesure de l'angle EAB = ½ mesure de l'arc (CE) + ½ mesure de l'arc (EB) = ½ mesure de l'arc (CB).

c) Troisième cas : le centre est à l'extérieur de l'angle



1) traçons le segment AE' qui intercepte le centre du cercle; (const)

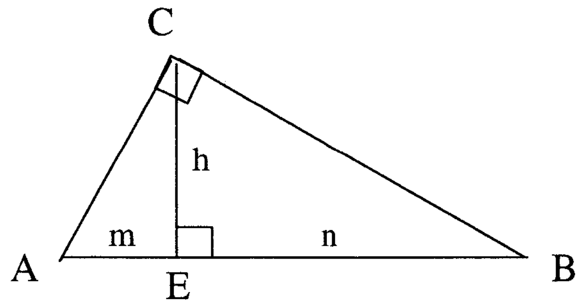
2) mesure de l'angle CAE' = ½ mesure de l'arc (CE'); (par la partie a)

3) mesure de l'angle BAE' = ½ mesure de l'arc (BE'); même raison qu'à l'étape 2

4) à partir des étapes 2 et 3, nous obtenons : mesure de l'angle CAB = mesure de l'angle CAE' – mesure de l'angle BAE' = ½ mesure de l'arc (CE') – ½ mesure de l'arc (BE') = ½ mesure de l'arc (BC).

(MS, p.6, #12)

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.



1) CE est congru à CE; (ax)

2) l'angle AEC est congru à l'angle CEB car ce sont deux angles droits; (h)

3) l'angle ACE est congru à l'angle CBE car ils sont tous les deux complémentaires de l'angle BAC; (obs)

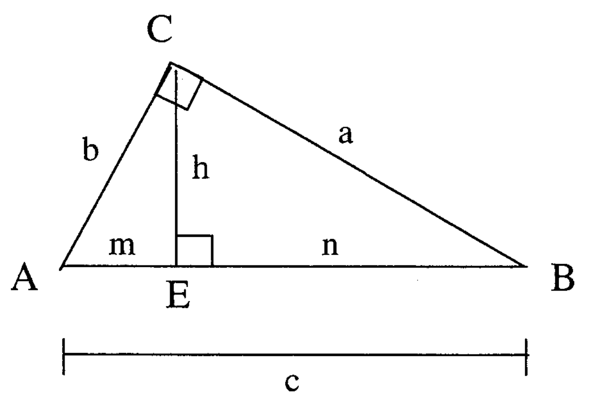
4) le triangle ACE est congru au triangle BCE; (cp)

5) BE / CE = CE / AE car dans des triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels; (cp)

6) donc, CE * CE = AE * BE et ainsi h * h = m * n.

(MS, p.6, #13)

Dans un triangle rectangle, la mesure d'un côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.



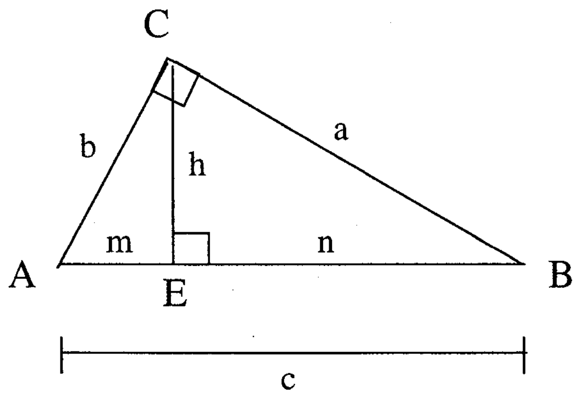
1) le triangle BCE est semblable au triangle ABC car dans un triangle rectangle, les deux petits triangles formés par la hauteur sont semblables au plus grand triangle; (thm)

2) BE / BC = BC / AB car les côtés homologues sont proportionnels dans les triangles BCE et ABC; (cp)

3) donc BC * BC = BE * AB et en substituant les valeurs appropriées, nous obtenons : a * a = n * c.

(MS, p.6, #14)

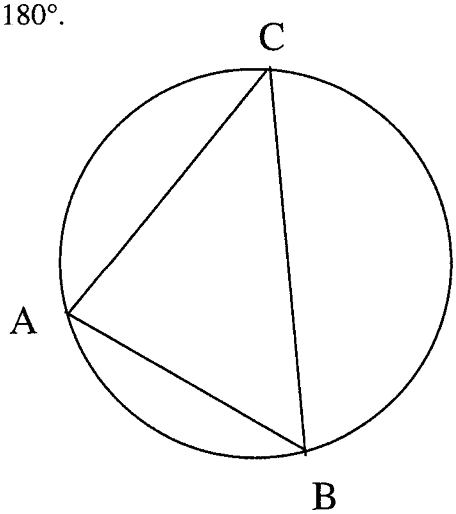
Dans un triangle rectangle, le produit des mesures des côtés de l'angle droit est égal au produit de la mesure de la hauteur par celle de l'hypoténuse.



1) le triangle BCE est semblable au triangle ABC car dans un triangle rectangle, les deux petits triangles formés par la hauteur sont semblables au plus grand triangle; (thm)
2) à partir de 1, AC / AB = CE / CB car les côtés homologues sont proportionnels dans les triangles BCE et ABC; (cp)
3) donc AC * CB = CE * AB.

(MS, p.12, #1)

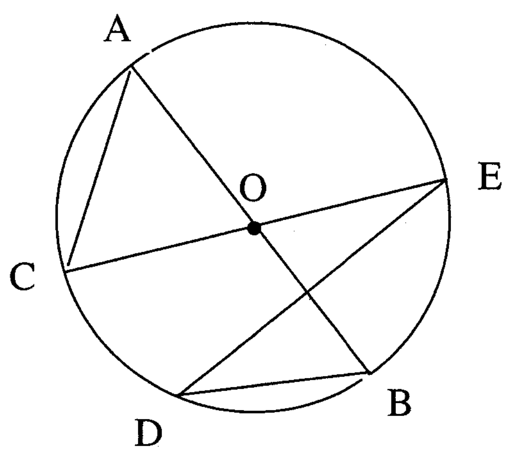
Un triangle ABC est inscrit dans un cercle. Montrer que la somme des mesures des trois angles du triangle est de 180°.



1) mesure arc (AB) + mesure arc (AC) + mesure arc (BC) = 360° car un cercle détermine un arc de 360°; (thm)
2) mesure de l'angle a = ½ mesure de l'arc (BC), mesure de l'angle b = ½ mesure de l'arc (AC), mesure de l'angle c = ½ mesure de l'arc (AB) car la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'arc compris entre ses côtés; (thm)
3) à partir de 1 et 2, 2 mesure de l'angle c + 2 mesure de l'angle b + 2 mesure de l'angle a = 360°; (cp)
4) d'où, mesure angle c + mesure angle b + mesure angle a = 180°.

(MS, p.13, #2)

Le segment AB est un diamètre d'un cercle de centre O. Montrer que les angles c et d sont complémentaires.



1) mesure de l'angle c = ½ mesure de l'arc (AE) car la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'arc compris entre ses côtés; (thm)
2) mesure de l'angle d = ½ mesure de l'arc (BE) pour la même raison qu'à l'étape 1; (thm)
3) mesure de l'arc (AE) + mesure de l'arc (BE) = 180° car un diamètre partage un cercle en deux arcs congrus; (thm)

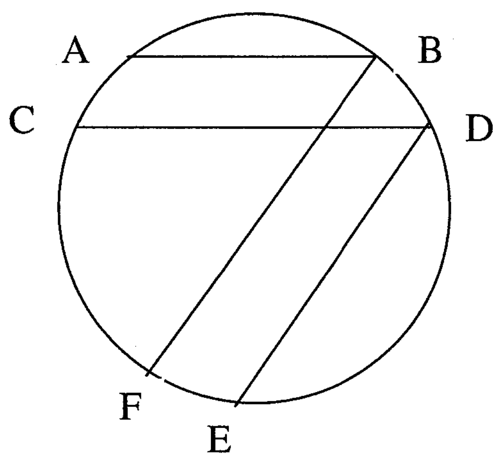
4) à partir de 1 et 2, mesure de l'arc (AE) = 2 mesure de l'angle c, mesure de l'arc (BE) = 2 mesure de l'angle d; (cp)

5) en substituant le résultat de l'étape 4 dans l'égalité de l'étape 3 nous obtenons : 2 mesure de l'angle c + 2 mesure de l'angle d = 180°; (cp)

6) donc, angle c + angle d = 90°.

(MS, p.18, #5)

Dans un cercle de centre O, les cordes AB et CD sont parallèles. On trace deux autres cordes parallèles, BF et DE. Montrer que les arcs AC et FE sont congrus.



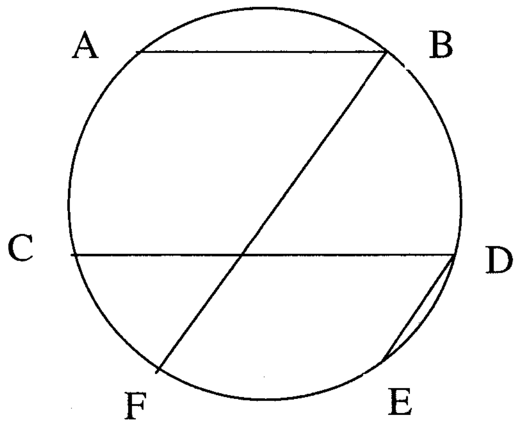
1) l'arc AC est congru à l'arc BD, car dans un cercle deux cordes qui sont parallèles interceptent des arcs congrus; (thm)

2) l'arc BD est congru à l'arc FE, pour la même raison qu'à l'étape 1; (thm)

3) de 1 et 2, l'arc AC est congru à l'arc BD et l'arc BD est congru à l'arc FE de sorte que par transitivité l'arc AC est congru à l'arc FE.

(MS, p.20, #7)

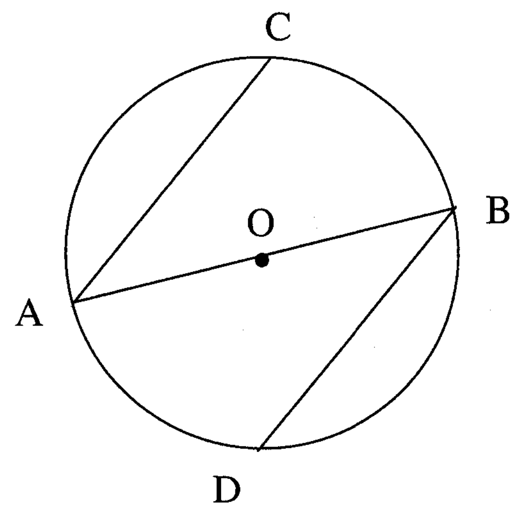
On a tracé quatre cordes AB, CD, BE et DF telles que AB est parallèle à CD et BF est parallèle à DE. Montre que l'angle b est congru à l'angle d.



1) mesure de l'arc AC = mesure de l'arc BD et mesure de l'arc BD = mesure de l'arc EF car dans un cercle deux cordes qui sont parallèles interceptent des arcs congrus; (thm)
2) alors mesure de l'arc AC = mesure de l'arc EF par transitivité; (cp)
3) mesure arc AC + mesure arc CF = mesure arc EF + mesure arc CF car nous ajoutons la même quantité de chaque côté de l'égalité (axiome d'addition); (cp)
4) mesure angle b = ½ (mesure arc (AC) + mesure arc (CF)) car la mesure d'un angle inscrit est égal à la moitié de l'arc compris entre ses côtés et C est entre A et F; (thm)
5) mesure angle d = ½ (mesure arc (EF) + mesure arc (CF)) pour la même raison qu'à l'étape précédente et F est entre C et E; (thm)
6) à partir des étapes 2, 3 et 4, mesure de l'angle b = mesure de l'angle d par transitivité.

(MS, p.22, #9a et b)

Par les extrémités A et B d'un diamètre d'un cercle de centre O, on trace deux cordes parallèles AC et BD. Montrer que l'arc AC est congru à l'arc BD, puis montrer que le segment DC est un diamètre.



1) la mesure de l'arc ACB est congrue à la mesure de l'arc ADB, car un diamètre partage un cercle en deux parties égales; (thm)
2) la mesure de l'arc CB est congrue à la mesure de l'arc AD car, AC et BD étant parallèles, les angles inscrits CAB et ABD sont congrus; (thm)
3) or, mesure de l'arc ACB – mesure de l'arc CB = mesure de l'arc AC et mesure de l'arc ADB – mesure de l'arc AD = mesure de l'arc BD; (obs)
4) à partir des étapes 1, 2 et 3, la mesure de l'arc AC est congrue à la mesure de l'arc BD.

(MS, p. 22, #9b)

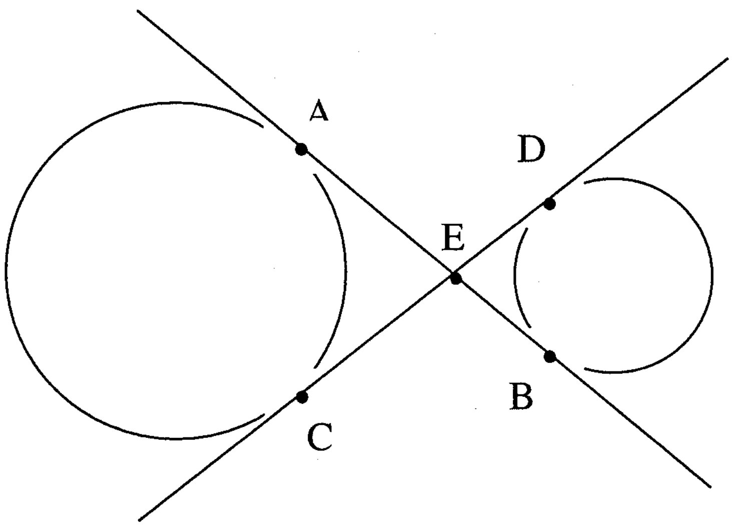
Montrons maintenant que le segment DC est un diamètre.

1) la mesure de l'arc CBD est congrue à mesure de l'arc CB + mesure de l'arc BD car le tout est égal à la réunion de ses parties; (ax)

2) la mesure de l'arc AC est congrue à la mesure de l'arc BD, ce résultat a été démontré dans la première partie de cette preuve; (thm)
3) à partir de 1 et 2, la mesure de l'arc CBD est congrue à mesure de l'arc CB + mesure de l'arc AC; (cp)
4) mesure de l'arc CB + mesure de l'arc AC = 180° car AB est un diamètre; (h)
5) de 3 et 4, mesure de l'arc CBD = 180° par transitivité; (cp)
6) donc CD est un diamètre (la corde CD intercepte un arc de 180°).

(MS, p.29, #1)

Montrer que si deux cercles n'ont aucun point commun, la mesure du segment AB est congrue à la mesure du segment CD.

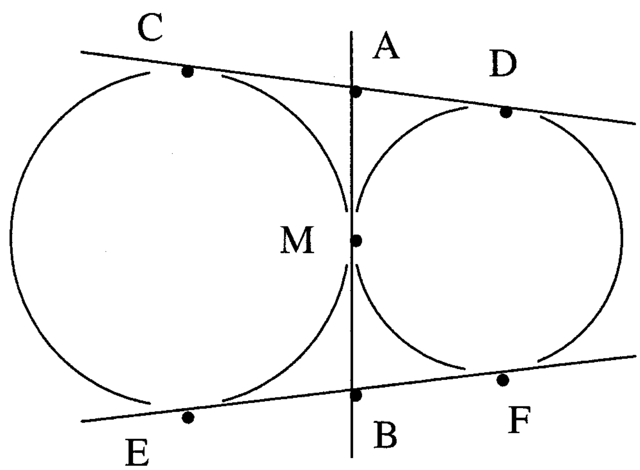


1) la mesure du segment AE est congrue à la mesure du segment CE car deux tangentes à un cercle provenant d'un même point constituent des segments congrus; (thm)
2) la mesure du segment BE est congrue à la mesure du segment DE, pour la même raison qu'à l'étape 1; (thm)

3) mesure du segment AEB = mesure du segment AE + mesure segment EB, car le tout est égal à la réunion de ses parties; (ax)
4) mesure du segment CED = mesure du segment CE + mesure du segment ED, pour la même raison qu'à l'étape 3; (ax)
5) des étapes 1, 2, 3 et 4, la mesure du segment CED est congrue à la mesure du segment AEB par transitivité de l'égalité.

(MS, p.30, #1)

Montrer que si deux cercles sont tangents extérieurement, leur tangente intérieure commune AB partage CD et EF en deux segments congrus où CD et EF sont les tangentes extérieures aux deux cercles.

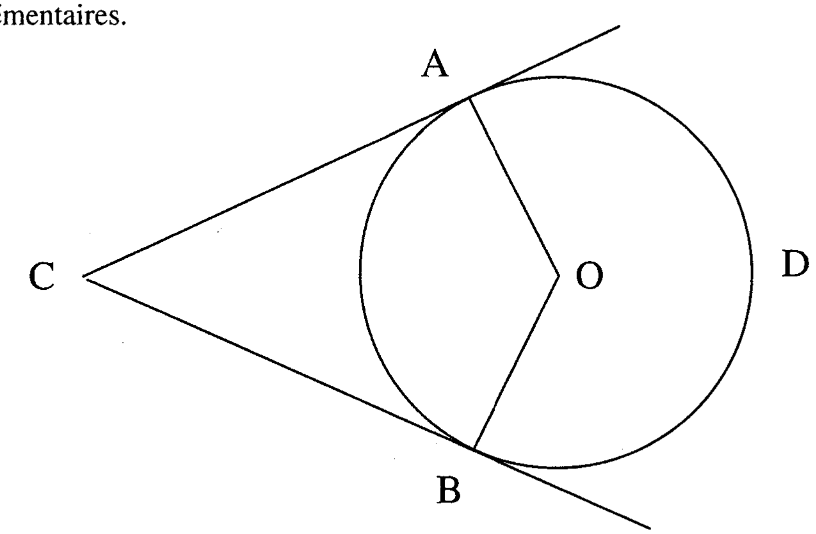


1) mesure du segment AC = mesure du segment AM et mesure du segment BE = mesure du segment BM car deux tangentes à un cercle qui proviennent d'un même point produisent des segments congrus; (thm)
2) mesure du segment AD = mesure du segment AM et mesure du segment BM = mesure du segment BF pour la même raison qu'à l'étape 1; (thm)

3) des étapes 1 et 2, mesure du segment AC = mesure du segment AD et mesure du segment BE = mesure du segment BF par transitivité.

(MS, p.42, #1)

Les demi-droites AC et CB sont tangentes au cercle de centre O. Montre que les angles o et c sont supplémentaires.

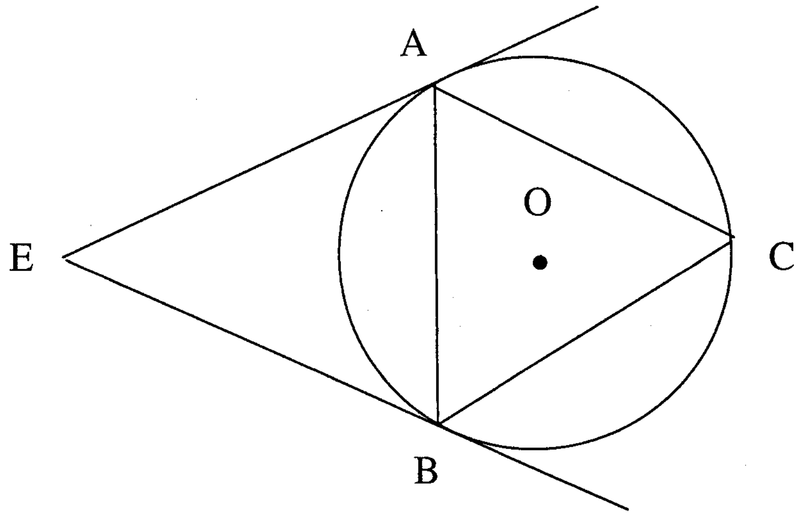


1) mesure de l'angle o = mesure de l'arc AB car la mesure d'un angle au centre est égale à la mesure de l'arc compris entre ses côtés; (thm)
2) mesure de l'angle c = ½ (mesure de l'arc (BDA) – mesure de l'arc (AB)) car la mesure d'un angle extérieur est égale à la demi-différence des arcs compris entre ses côtés; (thm)
3) mesure de l'arc AB + mesure de l'arc BDA = 360° car un cercle vaut 360°; (thm)
4) de 1 et 2, mesure de l'angle o + mesure de l'angle c = mesure de l'arc (AB) + (mesure de l'arc (BDA)/2 - mesure de l'arc (AB)/2) = mesure de l'arc (AB)/2 + mesure de l'arc (BDA)/2; (cp)
5) à partir de 3 et 4, ½ (mesure arc (AB) + mesure arc (BDA)) = ½ (360°) = 180°; (cp)
6) donc, à partir des étapes 4 et 5, mesure angle o + mesure angle c = 180° par transitivité.

(MS, p.44, #1)

Le triangle ABC est équilatéral. Les tangentes aux points A et B se rencontrent au point E.

Montrer que le triangle AEB est équilatéral.



1) le triangle ABC est équilatéral alors mesure du segment AB = mesure du segment AC = mesure du segment BC; (h)
2) à partir de 1, mesure de l'arc AB = mesure de l'arc AC = mesure de l'arc BC (des cordes congrues sous-tendent des arcs congrus); (cp)
3) mesure de l'angle EAB = ½ (mesure de l'arc (AB)) car la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de l'arc qu'il intercepte; (thm)
4) mesure de l'angle EBA = ½ (mesure de l'arc (AB)), pour la même raison qu'à l'étape 2; (thm)
5) mesure de l'angle AEB = ½ (mesure de l'arc (ACB) – mesure de l'arc (AB)) car la mesure d'un angle dont le sommet est à l'extérieur d'un cercle est égale à la demi-différence des arcs compris entre ses côtés; (thm)
6) mesure de l'angle AEB = ½ (mesure de l'arc (ACB) – mesure de l'arc (AB)) = ½ (mesure de l'arc (AC) + mesure de l'arc (CB) – mesure de l'arc (AB)) = ½ mesure de l'arc (AB) à partir de l'étape 2; (cp)

7) à partir des étapes 3, 4 et 6, mesure de l'angle EAB = mesure de l'angle AEB = mesure de l'angle EBA, donc le triangle AEB est équilatéral.

La signification des abréviations employées dans les preuves :

ax = axiome

const = construction

cp = conclusion partielle

h = hypothèse

obs = observation

thm = théorème