UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHILOSOPHIE

PAR
OLIVIER ROY

ÉTUDE SUR LES CONCEPTS D'AGENT ET DE CHOIX DANS LA LOGIQUE DE L'ACTION DE NUEL BELNAP ET SES COLLABORATEURS

AVRIL 2004

RÉSUMÉ

Nuel Belnap et ses collaborateurs ont proposé une logique de l'action où les formules signifiant « l'agent α fait en sorte que *p* » sont vraies seulement si un choix de l'agent α garantit la vérité de la proposition *p*. Dans ce mémoire, je montre que la notion choix utilisée dans cette théorie ne représente que les possibilités objectives des agents. Il en résulte que ces derniers n'y sont pas nécessairement des personnes. J'appuie cette lecture de la théorie de Belnap et ses collaborateurs par un examen détaillé des modèles du temps et de l'espace-temps ramifié, qui sont les deux structures où les concepts d'agent et de choix ont été développés.

REMERCIEMENTS

Je désir remercier mon directeur de recherche, Daniel Vanderveken, pour son soutient et ses encouragements constants. Je remercie également les membres du groupe de recherches sur la communication et le discours de l'UQTR, et en particulier Michel Paquette, devant qui j'ai pu mettre à l'épreuve certaines des thèses principales soutenues dans ce mémoire. Merci également à tous les professeurs et au secrétariat du département de philosophie de l'UQTR, qui ont appuyé tous mes projets. Merci enfin à Sarah Lemire, ma compagne.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ ____ *2*

REMERCIEMENTS ____ *3*

TABLE DES MATIÈRES ____ *4*

INTRODUCTION ____ *8*

0. Présentation générale du mémoire : ____ 8

1. Introduction générale à la logique de l'action de Nuel Belnap et ses collaborateurs : ____ 9

1.1 Formalisation des phrases d'action : ____ 10

1.2 Composantes philosophiques du concept d'action formalisées par le stit ____ 11

1.3 Place de la logique du stit dans l'histoire récente de la logique modale de l'action : ____ 11

1.4 Approches alternatives de la logique de l'action : ____ 13

2. Notes méthodologiques : ____ 13

CHAPITRE 1 : Le modèle du temps ramifié ____ *15*

0. Introduction ____ 15

1. Postulats philosophiques : ____ 15

2. Formalisation : ____ 28

2.1 Propriétés générales des cadres ⟨Notre_Monde, ≤ ⟩ et ⟨Notre_Monde, ≤ , Instants⟩ ____ 28

2.1.1. Ensemble des moments : ____ 28

2.1.2. Relation « antérieur ou égal à » : ____ 29

2.2 Concepts importants pour la représentation de l'indéterminisme : ____ 30

2.3 Postulats spécifiques à la représentation de l'indéterminisme. ____ 32

2.4 Aspects qui ne sont pas traités explicitement par la théorie ____ 34

2.4.1 Ordre discret? Dense? Continu? ____ 34

2.4.2 Semi-treillis : ____ 36

2.5 Histoires indivisées : ____ 37

2.6. Indéterminisme : ____ 39

2.7 Instants : ____ 40

3. Conclusion : ____ 41

CHAPITRE 2 : Agents et choix dans le modèle du temps ramifié ____ *42*

Introduction : ____ 42

1. Le concept d'agent : ____ **42**

2. Le concept de choix : ____ **44**

2.1 Formalisation : ____ 44

2.1.1 Définitions générales : ____ 44

2.1.2 Indépendance des agents : ____ 47

2.1.3 $Choix_m^{\alpha}$ et Π_m : ____ 49

2.1.4 Décideurs occupés (Busy choosers) : ____ 53

2.2 Explicitation philosophique du concept de choix ____ 54

2.2.1. Les concepts de possibilité objective et de possibilité immédiate : ____ 54

2.2.2 Moment de choix et dernier moment d'indétermination: ____ 61

2.3 Rôle des concepts de choix et d'agent dans l'interprétation du langage-objet de la théorie des stits : ____ 62

2.3.1 Langage-objet : ____ 62

2.3.2 Interprétation de L_{stit}: ____ 63

2.3.3 Quelques propriétés logiques des stits : ____ 68

2.3.4 Axiomatisation : ____ 70

3. Conclusion ____ **73**

CHAPITRE 3 : Le modèle de l'espace-temps ramifié ____ ***75***

0. Introduction : ____ **75**

1. Postulats philosophiques : ____ **76**

2. Formalisation : ____ **82**

2.1. Notre Monde relativiste : ____ 82

2.2 Relation d'ordre causale : ____ 82

2.3 Histoires et compatibilité : ____ 83

2.4 Événements initiaux, résultants et transitions : ____ 85

2.5 Postulats supplémentaires : ____ 88

2.6 La logique de l'espace-temps ramifié : ____ 90

2.6.1 Considérations philosophiques préliminaires : ____ 90

2.6.2 Propositions d'occurrences : ____ 93

2.6.3 Le langage formel : ____ 94

2.6.4 Interprétation : ____ 96

2.7 Possibilités objectives : ____ 97

2.7.1 Possibilités objectives et événements résultants : ____ 98

2.8 Indépendance face à des événements contemporains : ____ 100

2.9 Ramification dans NMR : 101
2.10 Indéterminisme avec et sans point de choix : 105

3. Conclusion : 106

CHAPITRE 4 : Agents et choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié 108

Introduction: 108

1. Le concept d'agent : 108
1.1 L'ensemble Agents : 108
1.2 Postulats sur Agents : 108
1.2.1 Les agents sont des ensembles d'événements ponctuels: 108
1.2.2 Les éléments d'Agents sont des ensembles d'événements ponctuels. 110
1.2.3 Étendue spatiale des agents : 112
1.2.4 Agents denses? Continus ? 113
1.2.5 Un agent par événement ponctuel : 113
1.3 Les agents sont des mini-arbres : 114
1.4 Occurrence des agents : 115

2. Le concept de choix : 117
2.1 Équivalence pour le choix? 118
2.2 Indépendance des agents : 120

3. Interprétation du *stit* dans le modèle de l'espace-temps ramifié : 125
3.1 Axiomatisation? 127

4. Conclusion: 128

CONCLUSION 130

ANNEXE 1 137

1. Bref historique de la notion de Choix : 137
1.1 Les précurseurs (1); Von Neumann et Morgenstern : 137
1.2 À la suite de Von Neumann; Åqvist : [1974] et [1978] : 138
1.3 Les précurseurs (2); Chellas [1969] : 139
1.4 Remarque sur la suite de Chellas [1969] : 141
1.5 La première formulation : Von Kutschera [1986] et [1993]. 142
1.6 Développements parallèles contemporains à la théorie des stits : 143
1.6.1 Brown [1988] : 143
1.6.2 Vanderveken [2002] : 146

1.6.3 Aqvist [2002] : ______ 147

ANNEXE 2 ______ *148*

BIBLIOGRAPHIE ______ *150*

INTRODUCTION

0. Présentation générale du mémoire :

Ce mémoire porte sur les concepts d'agent et de choix dans la logique de l'action de Nuel Belnap et ses collaborateurs (dorénavant « Belnap et co. »)[1]. Mon but est de circonscrire la définition et le rôle de chacun de ces concepts dans la théorie, et ce, tant au niveau philosophique que formel.

Dans la logique de l'action de Belnap et co., les phrases de la forme « l'agent α fait en sorte que p » sont vraies à un moment m seulement si un choix de l'agent α garantit la vérité de p. Les concepts d'agent et de choix sont donc, au niveau formel, des éléments du modèle servant à interpréter les phrases d'actions. Pour circonscrire la définition et le rôle de ces concepts au niveau formel, je dois répondre aux questions suivantes : Comment ces concepts sont-ils formalisés? Sont-ils primitifs? Dérivés? Qu'ajoutent-ils au modèle? Quelles relations entretiennent-ils avec les autres éléments du modèle?

Les portions de ce mémoire consacrées à l'étude des propriétés formelles des concepts d'agent et de choix porteront donc en grande partie sur le modèle d'interprétation. J'ai choisi de me concentrer sur deux modèles utilisés par Belnap et co. : le modèle du temps ramifié et le modèle de l'espace-temps ramifié. Le premier est incontournable pour quiconque s'intéresse à la théorie des *stits* puisque c'est dans ce modèle que la plupart des développements théoriques furent réalisés. Le second est un enrichissement du premier dans lequel Belnap tente actuellement d'intégrer sa théorie de l'action. Ces deux modèles sont construits en termes ensemblistes : ensembles partiellement ordonnés, partitions, relation d'inclusion et d'union. C'est sur ces entités mathématiques que portent la plupart des considérations formelles de ce mémoire. Le langage-objet de la théorie occupe une place relativement modeste. J'y consacre quelques pages dans les chapitres 2 et 4, principalement pour montrer comment les concepts

---

[1] Les collaborateurs en question sont Michael Perloff, Ming Xu et, de manière plus occasionnelle, John Horty, Paul Bartha et Mitchell Green.

d'agent et de choix l'influencent.

La théorie des *stits* suppose une certaine conception philosophique de ce qu'est une action, un agent et un choix. Bien que Belnap et co. reconnaissent que certains aspects de l'action, par exemple les composantes intentionnelles, ne sont pas traités dans leur théorie, ils estiment que d'autres aspects le sont. Circonscrire la définition et le rôle des concepts d'agent et de choix suppose donc une clarification des concepts philosophiques qui leur sont associés. En particulier, je dois apporter une réponse à la question suivante : Que sont les agents et leurs choix dans cette théorie?

J'entends donc, d'une part, examiner la formalisation des concepts d'agent et de choix dans le modèle du temps ramifié et dans le modèle de l'espace-temps ramifié et, d'autre part, en présenter le contenu philosophique. Les chapitres 1 et 3 sont consacrés aux modèles alors que les chapitres 2 et 4 portent sur les concepts d'agent et de choix.

La suite de cette introduction consiste en une présentation générale de la théorie de Belnap et ses collaborateurs. Elle vise à situer les concepts d'agent et de choix dans la théorie.

1. Introduction générale à la logique de l'action de Nuel Belnap et ses collaborateurs :

Les premières lignes de *Facing de Future* résument le projet général de leurs auteurs :

> « Ce livre porte sur la structure causale de l'action. Il élabore une théorie rigoureuse en utilisant les techniques et les idées de la logique philosophique, de la philosophie du langage et de la métaphysique [...]. Cette théorie, que nous appelons quelques fois "la théorie des agents et du choix dans le temps ramifié", décrit des agents confrontés à un futur où les possibilités réelles abondent et où certaines sont réalisées lorsque les agents choisissent »[2].

Le projet est donc de bâtir une logique philosophique de l'action. Le temps ramifié est un modèle formel qui fut proposé par Arthur Prior[3] et précisé par Richmond Thomason[4]. Le chapitre 1 lui est entièrement consacré. Il permet de représenter le concept de possibilité

---

[2]« This is a book about the causal structure of agency and action. It frames a rigorous theory by using techniques and ideas of philosophical logic, philosophy of language, and metaphysics with a small "m". This theory, which we sometimes call "the theory of agents and choices in branching time", describes agents as facing a future replete with real possibilities, some of which various agents realize by making choices », Nuel Belnap, Michael Perloff, Ming Xu, *Facing the Future*, Oxford UP, 2001.

[3]Arthur Prior, *Past, Present and Future*, Oxford UP, 1967 : 126-127

[4] Richmond Thomason, « Combination of Tense and Modality », dans Gabbay, D., Guenthner, G., (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol.2, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984

réelle (ou objective) et d'exprimer certaines modalités historiques inhérentes au concept d'action.

1.1 Formalisation des phrases d'action :

Pour Belnap et co., l'élaboration d'une logique philosophique s'impose comme une approche permettant de mieux comprendre les concepts d'action, d'agent et de choix. Ils ont construit cette logique sur la base d'un connecteur modal, le *stit*, qui est une abréviation de l'expression anglaise « *seeing to it that* », que je traduis par « faire en sorte que ».

Les expressions de la forme « l'agent α fait en sorte que *p* » sont symbolisées comme suit : [α *stit* : A]. L'agent est représenté par la constante α et ce que l'agent rend vrai par son acte, le contenu du *stit*, est représenté par la variable métalinguistique *A*.

Le *stit* est un connecteur intensionnel. Un connecteur est intensionnel si « la vérité d'une formule <construite avec ce connecteur> dans une circonstance *k* dépend de la vérité <de ses parties>, non seulement dans la même circonstance *k* mais également dans d'autres circonstances »[5]. Dans la littérature constituant la théorie de Belnap et co., le connecteur d'action est plutôt qualifié de *modal*. Leur définition de « modal » recoupe cependant celle de « intensionnel »[6].

La vérité des énoncés d'action en une circonstance dépend donc de la vérité, en d'autres circonstances, de leur contenu. La relation inter-circonstancielle est gérée par deux conditions. Un énoncé de la forme « l'agent α fait en sorte que *p* » est vrai à un moment *m* seulement si (1) la proposition *p* est vraie dans tous les moments possibles « sous le contrôle » de l'agent et (2) il existe, à *m*, un moment possible où *p* est fausse. La condition (1) est nommée *condition positive*. Elle stipule que la vérité de *p* doit être garantie selon le choix de α. La condition (2) est la *condition négative* selon laquelle l'agent peut choisir de ne pas faire en sorte que *p*. On le voit, les concepts de choix et d'agent sont essentiels dans cette théorie. En fait, selon Belnap et co., « il n'y a pas

---

[5] « For the truth of any such formula (O ϕ) in a context *k* is made to depend on the truth of ϕ, not only in the same context but also in other contexts k' », L. T. F. Gamut, *Logic, Language and Meaning: Vol. 2 Intensional Logic and Logical Grammar*, University of Chicago Press, 1991.

[6] Leur définition : « A *truth functional* connective is one like "__ and __" : If for example you know whether each <"__"> is true then you know automatically whether "__ and __" is true. A *modal* connective is defined negatively as being one that is not truth functional . » Belnap et co. 2001: vi.

d'action sans choix réels »[7].

1.2 Composantes philosophiques du concept d'action formalisées par le stit

Belnap et co. affirment que leur connecteur formalise la « structure causale » de l'action. C'est cette structure causale qui est représentée par le concept de choix. Au chapitre 2, nous verrons pourquoi le concept de choix ne représente, dans la théorie, que les possibilités objectives d'un agent à un moment. Une possibilité objective semble être la capacité d'un agent d'influencer le monde qui l'entoure. Les possibilités objectives sont introduites dans le modèle sans aucune référence aux états intentionnels des agents. Ainsi, on peut comprendre la « structure causale de l'action » comme le rôle joué par les possibilités objectives dans l'action.

Quel est ce rôle? Nous verrons au chapitre 2 que les possibilités objectives permettent de déterminer les limites de l'influence d'un agent sur le monde. Il se peut qu'à un moment l'agent ne soit pas en mesure d'exercer quelque influence que ce soit. Il n'a qu'une seule possibilité. Si cet agent a plus d'une possibilité, alors il peut influencer le monde d'une certaine manière plutôt que d'une autre.

Selon la sémantique du *stit* esquissée plus haut, deux conditions doivent être remplies pour qu'un agent fasse en sorte que p. Ce sont les conditions positive et négative. En termes moins formels, ces conditions sont :

(1- Condition positive) L'agent α a une possibilité objective dans laquelle la vérité de p est garantie;

(2- Condition négative) L'agent α a une autre possibilité objective dans laquelle la vérité de p ne l'est pas.

Ainsi, pour qu'un agent fasse en sorte que p il doit pouvoir influencer le monde de sorte que p soit garanti sans que p ne soit inévitable. Le *stit* formalise donc deux aspects objectifs de l'action, et seulement ces deux aspects. Les composantes intentionnelles ne sont pas traitées dans cette théorie. Le rôle fondamental des concepts d'agent et de choix justifie qu'on leur consacre une étude approfondie.

1.3 Place de la logique du stit dans l'histoire récente de la logique modale de l'action :

Belnap et co. ne sont pas les premiers à avoir préconisé un traitement modal de

---

[7] « there is neither action nor agency without real choices [...]» *Idem.*

l'action. Belnap[8] et Segerberg[9] en font remonter les premières intuitions au Moyen Âge, plus particulièrement chez St-Anselme[10].

Selon la plupart des auteurs consultés, la première interprétation formelle pour un connecteur d'action est celle de Brian Chellas dans *The Logical Form of Imperatives*[11]. Dans cette logique, une phrase de la forme « l'agent τ fait en sorte que ϕ », notée $\Delta\tau\phi$, est vraie si ϕ est vraie dans tous les mondes possibles sous le contrôle de l'agent τ. Bien que cette condition soit énoncée en termes de mondes, Chellas l'a transférée dans un modèle temporel. Cette condition constitue, avec quelques modifications, la condition positive de la sémantique du *stit*.

Plusieurs auteurs[12] ont soutenu que la condition de Chellas n'est pas suffisante pour exprimer l'idée que la vérité de p est contrôlée par l'agent. Lorsque p est vraie dans tous les mondes possibles, donc lorsque p est inévitable, cette condition est satisfaite. Ils ont proposé d'ajouter une condition supplémentaire à la sémantique de leur connecteur d'action : dans certains mondes possibles p doit être fausse. Il s'agit de la *condition négative* de la sémantique du *stit*.

Lennart Åqvist et Franz von Kutchera[13] ont entrepris de développer leur logique de l'action à partir du modèle du temps ramifié. À la différence du modèle des mondes possibles, le modèle du temps ramifié utilise, comme concept primitif, les moments du temps. Chaque moment représente un état possible complet du monde à un instant. Une suite maximale de moments représente un cours possible d'histoire de notre monde. Le modèle du temps ramifié étant compatible avec l'indéterminisme, il permet de rendre compte, dans une certaine mesure, de la liberté intuitivement associée à l'action.

Belnap a cependant souligné que ce modèle du temps est inadéquat parce qu'il n'est pas relativiste. En effet, chaque moment représente un état instantané complet de

---

[8] *Idem* : 18

[9] Krister Segerberg, « Getting Started : Beginnings in the Logic of Action », *Studia Logica*, Vol.51, no.3-4, 1992

[10] Le bref survol historique que je présente dans les paragraphes qui suivent est essentiellement un résumé de celui fait par Belnap dans *Facing the Future*, [18-27]. Je n'y ai ajouté que les références au modèle de l'espace-temps ramifié.

[11] Brian Chellas, *The Logical Form of Imperatives*, Perry Lane Press, 1969

[12] Stig Kanger, « Law and Logic », *Theoria*, 38, 1973, et Leenart Åqvist « An analysis of action sentences based on a "tree" system of modal tense logic », dans C. Rohrer (ed.), *Paper on Tense, Aspect and Verb Classification*, TBL Verlag gunter Narr, 1978 : 111-161

[13] Franz von Kutchera, « Bewirken », *Erkenntnis*, 24, 1986, 253-281.

l'Univers. Ceci suppose un cadre de référence absolu: « le processus de branchement <global> paraît donc réintroduire la simultanéité absolue que la relativité restreinte avait éliminée »[14]. Un modèle relativiste déterministe a déjà été proposé par Carnap[15]. Belnap[16] a proposé le modèle de l'espace-temps ramifié qui combine le relativisme avec l'indéterminisme.

La caractéristique principale du modèle de l'espace-temps ramifié est de laisser tomber la notion globale de moment au profit du concept local d'événement ponctuel. Ce changement de perspective permet d'exprimer la simultanéité relative entre les événements locaux. De plus, ce modèle permet d'exprimer des propriétés des agents et du choix qui restent implicites dans le modèle du temps ramifié.

En somme, la logique de l'action de Belnap et co., interprétée dans le modèle du temps ramifié, se situe dans une tradition bien établie en logique philosophique. L'interprétation dans le modèle de l'espace-temps n'en est cependant qu'à ses premiers pas. À ma connaissance, Belnap est le seul auteur à avoir tenté d'intégrer les concepts d'agent et de choix dans ce modèle.

1.4 Approches alternatives de la logique de l'action :

Deux approches en logique de l'action ne sont pas abordées dans ce mémoire. Davidson, dans son célèbre article « *The logical form of action sentences* »[17], a proposé une logique prédicative où l'action est conçue comme une propriété d'événements. L'approche dynamique de l'action constitue un autre courant important. Segerberg[18] résume les contributions fondamentales dans ce domaine de recherche, que Belnap[19] situe au confluant des approches prédicatives et modales.

2. Notes méthodologiques :

Les citations sont toujours traduites dans les notes en bas de page, où figurent également

---

[14] Louis Machildon, « Le modèle de l'univers de Storrs McCall », *Philosophiques*, Vol.22, No.2, 1995 : 478

[15] Rudolf Carnap, *Introduction to symbolic logic and its applications*, trad. William H. Meyer et John Wilkinson, Dover, 1958

[16] Nuel Belnap, « Branching Space-Time », *Synthese*, vol. 92, 1992, pp. 385-434

[17] Donald Davidson, « The logical form of action sentences », dans Rescher (ed.), *The Logic of Decision and Action*: 81-95

[18] Krister Segerberg, « Getting Started : Beginnings in the Logic of Action », *Studia Logica*, Vol.51, no.3-4, 1992

[19] *Facing the Future*, 2001 : 25

les références.

Les sections formelles comportent un grand nombre de postulats et de définitions. Chacun d'eux est précédé d'une expression entre parenthèse qui le décrit brièvement. Pour alléger le texte, j'ai aussi assigné un code alphanumérique (exemple : D1) que j'utilise dans le texte (exemple : D1 défini l'ensemble des moments...). Sans grande surprise, la lettre D indique qu'il s'agit d'une définition et la lettre P qu'il s'agit d'un postulat. Les chiffres marquent l'ordre d'entrée dans le texte. J'ai utilisé la même technique pour désigner les thèses philosophiques, dont le code débute par un T (exemple : T1.2) .

Ce code est fortement inspiré de celui utilisé par Belnap et co. dans *Facing the Future*. Les chiffres et les lettres que j'utilise ne correspondent cependant pas exactement à ceux du livre. Lorsqu'il s'agit d'une définition alternative ou d'une nouvelle formulation, j'utilise le même code que pour la définition originale en y ajoutant un astérisque (exemple : $D_{ETR}8.3$ et $D_{ETR}8.3*$). Lorsqu'il s'agit d'une définition qui ne fait pas partie du modèle de Belnap et co., j'ai complètement éliminé le code alphanumérique pour n'y laisser que la description sommaire entre parenthèses.

Finalement, j'ai mentionné que la plupart des considérations formelles portent sur le modèle d'interprétation et sont énoncées en termes ensemblistes. J'ai utilisé la notation de la théorie des ensembles, les quantificateurs et les connecteurs de vérité pour énoncer les postulats.

CHAPITRE 1 : Le modèle du temps ramifié

0. Introduction

Pour montrer en quoi consiste les concepts d'agent et de choix dans la théorie des *stits*, il faut présenter le modèle temporel qui lui sert de base philosophique et formelle. C'est à quoi ce chapitre est consacré. Je procède en deux temps. La première section est consacrée aux thèses philosophiques inhérentes au modèle du temps ramifié. La deuxième section se concentre sur leur formalisation.

Par « thèses philosophiques », j'entends un certain nombre de postulats portant sur la nature indéterministe du monde dans lequel nous vivons. J'utilise délibérément « postulats » parce que Belnap et co. n'argumentent pas, sauf exceptions, en faveur de ces positions philosophiques. Ils tentent plutôt de les clarifier et d'en montrer les conséquences.

La section 2 est consacrée à formalisation du modèle du temps ramifié au moyen des outils de la théorie des ordres partiels. Je présenterai donc les concepts de l'ontologie temporelle formelle. J'utilise « ontologie temporelle formelle », à la suite de van Benthem[20], pour désigner l'étude des propriétés formelles de l'ensemble des moments et de la relation d'antériorité/postériorité qui s'y applique. Je montrerai dans quelle mesure ces outils permettent de formaliser les positions énoncées dans la première section.

J'ai choisi d'exposer les positions philosophiques et les outils formels séparément pour montrer comment les premières influencent les secondes. La relation entre positions philosophiques et outils formels n'est cependant pas unidirectionnelle. Il arrive que le choix de certains concepts du modèle temporel ait des implications philosophiques importantes. J'ai choisi de présenter ces situations à travers des « parenthèses philosophiques » que j'ouvre, lorsque nécessaire, dans la section 2.

1. Postulats philosophiques :

La thèse philosophique la plus importante pour la conception du choix comme réalisation de possibilités est l'indéterminisme. Elle est énoncée par Belnap et co. de la manière suivante : « *À un moment donné dans l'histoire du monde, les choses peuvent continuer*

---

[20] Joan van Benthem, *The Logic of Time : 2nd edition*, Kluwer, xviii, 1991

de plusieurs manières différentes. »[21] Pour bien voir comment les concepts philosophiques fondamentaux de la logique du temps ramifié s'y articulent, j'utilise cette formulation construite à partir du vocabulaire technique de la théorie :

T1. : (Thèse de l'indéterminisme) *S'il y a des individus qui agissent alors il y a, dans notre monde, des moments dont le futur est composé de plusieurs possibilités différentes et mutuellement incompatibles.*

L'indéterminisme est exprimé dans le conséquent. J'explique T1 en la décomposant en quatre sous-thèses destinées à présenter les concepts fondamentaux qu'elle met en jeu. Avant de les examiner, quelques remarques sur sa justification me paraissent essentielles.

Justification du postulat d'indéterminisme (T1) :

Belnap et co. soutiennent une position très claire à ce sujet : « <nous> n'argumentons pas en faveur de l'indéterminisme ni n'essayons de trouver des failles dans les arguments compatibilistes. Notre projet est d'assumer l'indéterminisme de l'ordre causal dans lequel l'action est intégrée »[22]. On peut résumer cette approche de la manière suivante : (1) définir un connecteur d'action sur la base du concept de possibilité objective et (2) montrer que les possibilités objectives supposent l'indéterminisme. Cette approche ne constitue pas un argument en faveur de l'indéterminisme. Belnap et co *supposent* l'existence de telles actions, mais ne tentent pas de le montrer : « si quelqu'un quelque part peut faire en sorte que quoique ce soit, alors le déterminisme est faux »[23]. Tant que l'indéterminisme de (2) reste conditionnel à (1), il hérite du caractère de supposition de cette thèse.

Explication de T1 :

T1.1 *Les unités temporelles du monde sont représentées comme des événements globaux instantanés, les moments.*

Explications :

Il faut tout d'abord faire quelques remarques à propos du concept d'événement utilisé dans T1.1. Il y a deux concepts différents d'événement dans la théorie des *stits*. Le

---

[21] « At a given moment in the history of the world there are a variety of ways in which affairs might carry on », Belnap et co., 2001, p.134

[22] « This book neither argues for indeterminism nor tries to pick holes in argument for compatibilism. Our project assumes the indeterminism of the causal order in which agency is embedded », *idem* , vii.

[23] « If anyone could ever see to anything, then determinism is false », *idem*, p.204.

premier reste primitif. Il sert à analyser philosophiquement, quoique de manière très sommaire, la notion de moment, qui est primitive dans le modèle temporel. C'est ce concept qui est utilisé dans T1.1. Le second concept d'événement est construit à partir du concept de moment.

Le concept inanalysé d'événement est un concept ontologique primitif. La stratégie qu'adoptent ici Belnap et co. semble être la même que celle qu'ils appliquent au concept d'agent : « supposer que certains problèmes ont été résolus, même si ce n'est pas le cas, et poursuivre l'investigation »[24]. Le problème étant, dans le cas qui nous occupe, de donner une définition de « événement ».

Belnap et co. présentent ainsi le concept de moment : « [...] un moment est un événement *concret* et *instantané* d'une *étendue spatiale illimitée* (présument infinie). »[25]

Les moments sont des événements globaux, ou complets, au sens où ils sont « d'une étendue spatiale illimitée ». En d'autres termes, chaque moment est un événement qui englobe tout l'univers; un événement « qui s'étend à travers tout l'espace-temps »[26] à un instant; c'est tout ce qui se passe dans l'univers à cet instant. J'utilise j'adjectif « global » pour désigner cette étendue et pour distinguer les moments d'événements plus *locaux*, c'est-à-dire de moins grande envergure. La question de la relation entre ces événements locaux et les événements globaux n'est pas explicitée par Belnap et co. lorsqu'ils travaillent dans le cadre de la logique du temps ramifié.

La signification de l'adjectif « instantané » est plus difficile à cerner. J'en distingue deux interprétations dans la littérature. Chacune d'entre elles partage l'idée qu'à chaque moment correspond une « durée » particulière que je nomme provisoirement *instant*[27]. Elles divergent quant à la taille, pour utiliser une métaphore spatiale fréquente, qui doit être attribuée aux instants. En termes temporels quelque peu imagés, la question porte sur la durée du présent.

Selon la première interprétation, que j'appellerai *interprétation générale*, la taille des instants reste indéfinie et est, dans une large mesure, une question de stipulation. Pour

---

[24] « Assuming certain problems have been solved even though they haven't and getting on with the investigation », Belnap co., 2001 : 211.

[25] « A moment is an instantaneous concrete event with unlimited (presumably infinite) spatial extent »,, Belnap et co. 2001: 139, *je souligne*.

[26] « Each moment stretches across all of space-time », *idem* : 178

Arthur Prior[28], les moments peuvent « exprimer des propriétés de dates ». Dans le même ordre d'idée, Peter Øhstrøm et Per V. Hasle[29] conçoivent les instants comme « des jours possibles ». La formulation de Prior est particulièrement représentative de l'interprétation générale. Il semble utiliser délibérément un concept vague pour caractériser les instants, de sorte que leur durée soit flexible. À un instant peut correspondre une seconde, une heure, une journée ou même des événements indirectement temporels comme une énonciation, selon le contexte où la notion de moment est utilisée. D'entrée de jeu, donc, l'interprétation générale de la durée des moments laisse ouverte la signification accordée à « instantané ». Il va sans dire qu'aucune limite supérieure n'est imposée à la taille des instants.

La seconde interprétation peut être qualifiée de *géométrique*. On conçoit les instants en analogie avec « l'usage euclidien du point »[30], d'où son appellation. À chaque instant correspond « une épaisseur temporelle de zéro »[31]. Les instants sont, en quelque sorte, des atomes temporels. Ainsi, les tenants de l'interprétation géométrique conçoivent la structure temporelle du monde comme « un ensemble de *points* [...] sans étendue temporelle »[32]. Chaque instant représente une durée infinitésimale. Van Benthem [33] remarque que cette interprétation remonte probablement jusqu'au philosophe présocratique Zénon. Elle constitue évidemment un cas particulier de l'interprétation générale au sens où la durée des instants y est maximalement réduite.

Dans quel camps se situent Belnap et co.? Les passages cités dans le paragraphe précédent laissent croire qu'ils opteraient pour l'interprétation géométrique. Ces quelques lignes constituent cependant l'essentiel de ce qu'ils disent à ce sujet. Dans ce contexte, il me semble précipité de placer Belnap et co. dans la catégorie « interprétation géométrique ». La justification qu'ils donnent à leur position laisse cependant croire qu'ils se situent dans cette classe. J'examinerai cette justification dans un instant (non-infinitésimal évidemment!).

---

[27] Instant sera utilisé plus loins pour nommer l'ordre temporel sur les histoires.
[28] Arthur Prior, 1967 : 38
[29] Peter Øhstrøm et Per V. Hasle, *Temporal Logic : From Ancients Ideas to Artificial Intelligence* , Kluwer, 1995, p.268
[30] « Euclid's use of "point" », Belnap et co. 2001: 179
[31] « zero temporal thickness », *idem*, 139
[32] « a set of points [...] *without duration* », van Benthem, 1991 : 3

Il faut noter que cette T1.1 ne restreint pas l'ontologie de la théorie des *stits* aux seuls événements. Cette thèse stipule simplement que l'ontologie *temporelle* ne se construit qu'à partir d'une seule catégorie primitive : les événements. Il est clair que la théorie devra faire appel à d'autres primitifs, par exemple les individus.

Justification de T1.1 :

L'argument que présentent Belnap et co. en faveur de T1.1 est de nature méthodologique. Selon eux, concevoir la structure temporelle du monde comme une suite de moments est une « idéalisation utile »[34], c'est-à-dire que cette représentation du temps permet de construire une théorie éclairante du choix et de l'action au moyen d'un ensemble restreint de notions : les moments et un ordre partiel que nous examinerons plus loin.

Cet argument général pour T1.1 s'applique en particulier à l'interprétation géométrique de l'instantanéité des moments. Un tenant de l'interprétation générale peut en effet faire valoir qu'un moment d'une durée infinitésimale est une construction théorique contre-intuitive à laquelle rien ne correspond, ni dans la nature ni dans notre expérience du temps. Un tel argument pourrait prendre la forme d'une « attaque Berkeleyenne »[35] contre l'interprétation géométrique, par analogie avec la critique de Berkeley contre les unités du calcul infinitésimal. Tout comme dans l'argument méthodologique en faveur de T1.1, Belnap et co. répondraient probablement, avec van Benthem, que leur approche est « contre-intuitive, mais fructueuse »[36]. Ici « fructueuse » signifie qu'une ontologie temporelle basée sur des moments infinitésimaux permet d'édifier une théorie du temps et de l'action aux propriétés philosophiques et logiques intéressantes. Belnap et co. font cependant remarquer que l'interprétation géométrique des moments est « distante de nos conceptions ordinaires. »[37]

En somme, l'acceptation de T1.1 ne repose pas sur le fait que les moments constituent une représentation plausible de la structure du monde. En d'autres termes, T1.1 n'est pas appuyée par des arguments philosophiques. Bien au contraire. Belnap et co. semblent non seulement la considérer en rupture avec notre conception ordinaire,

---

[33] *idem.*
[34] « helpful idealization », Belnap et co. 2001 : 179
[35] « Berkeleian attack », Prior, 1967 : 200.
[36] « Counter-intuitive, but fruitful », van Benthem 1991 : 3.
[37] « Distant form our everyday conceptions », Belnap et co., 2001 : 139.

mais également distante de la conception relativiste du temps. Belnap a en effet souligné, dès 1992, que la simultanéité globale sous-entendue par la notion de moment est en contradiction avec théorie de la relativité[38]. C'est pour cette raison qu'il développa la théorie de l'espace-temps ramifié, qui fait l'économie de la notion de moment.

T1.2 : *Les moments sont partiellement ordonnés selon une relation d'antériorité/postériorité; ils seront étudiés dans une perspective temporelle statique.*

Explications :

Les moments sont ordonnés[39]. Ils doivent, en d'autres termes, former une suite à partir de laquelle on pourra les comparer selon la relation « est antérieur (postérieur) à ». Les propriétés logiques de cette relation (transitivité, antisymétrie, etc.) seront examinées en détail dans la section 2. Pour l'instant, il est important de remarquer que la structure temporelle endossée par Belnap et co. est « une généralisation des séries-B de McTaggart »[40], par opposition aux séries-A.

Pour McTaggart, une série-A est « une série de positions allant du passé [...] jusqu'au présent, et puis du présent vers le futur [...] »[41]. « Être Passé », « être présent » et « être futur » sont des caractéristiques des moments. En supposant une suite quelconque d'événements, ce que McTaggart nomme une série-C atemporelle, une série-A est constituée par le glissement des propriétés temporelles le long de cette série-C. Un élément de la série ayant la propriété d'être futur devient présent puis passé. En termes moins imagés; la série A se constitue par l'exemplification successive des caractéristiques temporelles par les événements éléments d'une série-C. Les séries-B sont, quant à elles, des « séries de positions allant de l'antérieur au postérieur »[42]. Il s'agit de la relation la plus couramment étudiée en ontologie temporelle formelle : la relation d'antériorité/postériorité que Belnap et co. nomment « relation d'ordre causale ». Elle se constitue simplement à partir de l'ordre des événements dans la suite.

Alors que les caractéristiques d'une série-A sont toujours changeantes, le présent

---

[38] Nous verrons au chapitre 3 qu'elle implique des interactions à distance globale.
[39] Vu l'indéterminisme de T1, il s'agit d'un ordre *partiel*. T1.2 est cependant compatible tant avec une conception totalement déterministe du monde, pour lequel la suite des moments constitueraient un ordre linéaire, qu'avec une version plus ou moins forte d'indéterminisme, pour laquelle l'ordre est partiel. Pour préserver la généralité de la discussion, j'utiliserai ordre partiel dans la suite.
[40] « A generalization of McTaggart's B-series », *idem* : 134
[41] J. Ellis McTaggart, « The unreality of Time », *Mind*, vol.17 no.68, 1908 : 458

glissant continuellement d'un moment à l'autre, la relation constitutive d'une série-B est permanente; un moment m_1 antérieur à un moment m_2 lui est toujours antérieur. Pour cette raison, Øhstrøm et Hastle[43] et van Benthem [44] qualifient la série-A de conception « dynamique » et la série-B de conception « statique » du temps.

Se basant sur l'aspect statique des séries-B et dynamique des séries-A, McTaggart a soutenu que les secondes présupposent les premières. Belnap et co. choisissent « d'éviter entièrement cette question »[45]. Ils disent *supposer* que la structure temporelle du monde contient plusieurs ordres-B, et définissent un ordre comme une « une généralisation de "série". »[46]

L'ensemble des moments contient *plusieurs* ordres-B, justement parce que le modèle est compatible avec l'indéterminisme. Un ordre est une suite linéaire de moments. Nous verrons dans l'exposition formelle qu'une suite complète, maximale en termes techniques, est nommée une histoire. Au niveau philosophique, ce concept est très important. Chaque histoire représente un cours complet possible du monde. Il s'agit d'une façon dont le monde peut évoluer à partir de son commencement jusqu'à sa fin ou à l'infini dans les deux directions. Comme le modèle est compatible avec l'indéterminisme, il y a plusieurs histoires possibles du monde, plusieurs suites maximales de moments.

Justification :

Comme on peut s'y attendre, compte tenu de la prise de position de Belnap et co. dans le débat sur la priorité des séries-A sur les séries-B, T1.2 n'est pas appuyée d'argument dans la théorie des *stits*.

T1.3 *Les moments sont des événements globaux réels « [...], concrets et objectifs. »*[47]

Explications :

Une remarque préliminaire s'impose. La décision de travailler dans une perspective statique plutôt que dynamique a une conséquence importante : tous les moments sont conçus comme des moments *possibles*. En d'autres termes, il n'y a pas, dans la théorie, de moments ayant la caractéristique particulière d'être *le* présent, ni d'ensemble de

---

[42] « The series of position which runs from earlier to later », *idem*.
[43] Øhstrøm et Hastle, *Temporal Logic...*, 1995 : 243
[44] Van Benthem, *The Logic of Time*, 1991 : 3
[45] « We aim to avoid this question altogether » Belnap et co., 2001 : 134.
[46] « thinking of "order" as a generalization of "series" » *idem*.

moments étant *notre* passé ou *notre* futur[48] : « Supposons que nous nous plaçons "en dehors du temps ramifié". Ce faisant, nous nous confinons à un langage ne contenant aucune trace d'indexicalité [...] »[49]. Pour cette raison, la discussion sur le statut ontologique des moments, telle qu'il est décrit dans T1.3, porte plus généralement sur le statut ontologique des moments *possibles* ou des *possibilités*[50].

T1.3, avec T1.1., précise donc le statut ontologique des moments possibles. Les trois qualificatifs (« concrets », « réels » et « objectifs ») sont systématiquement utilisés par Belnap et co. pour décrire leur position. Malheureusement, leurs remarques se limitent habituellement à mentionner ces qualificatifs, sans leur apporter plus d'explications. Il m'apparaît que l'explicitation la plus précise que l'on peut donner de T1.3 à partir des textes de la théorie des *stits* est négative.

Belnap et co. caractérisent en effet deux conceptions des moments auxquelles ils s'opposent .

> **« D'autres philosophes prennent les possibilités pour ce qui est cohérent soit avec les lois de la logique, ou avec les lois de la physique, donnant ainsi aux possibilités un statut fondamentalement linguistique. D'autres encore pensent les possibilités comme des objets abstraits ou des créatures de l'esprit. »[51]**

Le premier groupe de philosophes dont il est question ici défendent une conception des possibilités qu'on peut qualifier de « nomologique ». Leur thèse paraît être qu'un événement est possible s'il peut être déduit d'une loi et d'un ensemble de conditions initiales. Le second groupe de philosophes semble défendre une conception épistémique des possibilités : un événement possible est soit un objet abstrait appréhendé par un individu soit une représentation.

Belnap et co. définissent leur conception des moments en opposition aux deux précédentes. Selon eux, la principale caractéristique des moments est d'être des entités

---

[47] *Idem* : 179.

[48] Il sera bien entendu possible de parler du futur où du passé d'un moment particulier. Ces distinctions seront cependant construites à partir de la relation « antérieur [postérieur] à ».

[49] « Suppose we "step outside of branching time". To do this is to confine ourselves to language that has no trace of indexicality. » *Idem*, 207

[50] Ces deux termes ne sont pas toujours synonymes dans la théorie des *stits*. Je les distinguerai plus loins. Rappelons également qu'il s'agit de possibilités *objectives*, c'est-à-dire qui sont indépendantes de ce que les agents croient ou savent à leur sujet. Aucune proposition impossible ne peut être vraie de dans une possibilité objective. Au contraire, un agent peut *croire* que certains choses impossibles se réaliseront dans l'avenir.

indépendantes d'une quelconque représentation ou de la connaissance de certaines lois physiques. Je qualifierai leur conception d'*objectiviste*.

Cette caractérisation négative laisse cependant sans réponse des questions importantes quant au statut des possibilités non-actualisés, (des moments qui auraient pu être le cas), ainsi que sur la relation entre les possibilités objectives et les possibilités épistémiques et nomologiques.

Conséquences des thèses examinées jusqu'ici :

Conséquence 1 : *relation d'identité* :

T1.3 complète la description des moments et de leur relation. En résumé, les moments sont des événements globaux, instantanés et concerts partiellement ordonnés par la relation « antérieur/postérieur à ». Ces trois caractéristiques et cette relation permettent d'énoncer un critère d'identité pour les moments. Deux moments sont identiques si (1) ils sont le même événement global et (2) ils entretiennent les mêmes relations d'antériorité/postériorité.

Il faut noter que ce critère d'identité admet l'existence de moments en tout points identiques quant à leurs contenu mais tout de même différents en raison de l'ensemble des relations d'antériorité/postériorité qu'ils entretiennent avec les autres moments. En termes moins techniques, deux moments peuvent être constitués des mêmes événements et être tout de même différents parce qu'ils sont situés à des endroits différents dans l'ordre temporel . Pensons, par exemple, à deux moments postérieurs au Big Crunch (en supposant que la temporalité fasse encore sens dans cette situation).

Conséquence 2 : *unicité* :

Les moments ne sont donc pas des types d'événements pouvant être exemplifiés par plusieurs occurrences différentes. Ils sont conçus comme des entités spatio-temporellement localisées. Par conséquent, les moments sont uniques ou, dans les termes de Belnap et co., « irrépétables »[52]. Un même moment ne peut apparaître plus d'une fois; l'ordre des moments est irréversible.

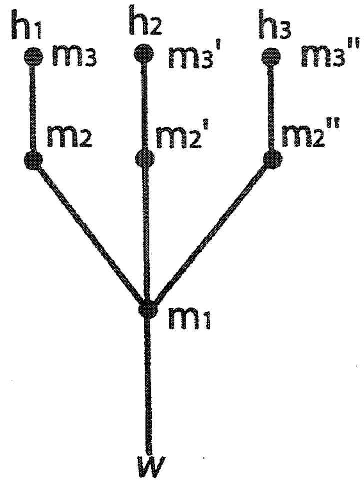
T1.4 Il y a des moments incomparables :

---

[51] « Other philosophers take possibilities to be what is consistent either with the laws of logic, or with the laws of physics, thus giving possibilities a fundamentally linguistic status. Still others think of possibilities as abstract or as creature of the mind. », *idem*.

[52] « nonrepeatable », Belnap et co., 2001 : 180

La clé de l'indéterminisme de T1 consiste à postuler l'existence de paires de moments mutuellement incomparables. Deux moments sont « incomparables » s'ils ne sont ni antérieurs ni postérieurs l'un à l'autre. Le modèle du temps ramifié ne permet pas de donner d'explication supplémentaire quant à cette relation. En particulier, elle ne peut pas invoquer certains événements locaux incompatibles pour expliquer l'incomparabilité des moments parce que les moments sont des événements *globaux* et que cette notion n'est pas analysée. T1.4 semble être, comme T1, *postulée* plutôt que justifiée.



Quelques concepts importants du temps ramifié : Les moments sont ordonnés par la relation d'antériorité\postériorité, par exemple m_1, m_2 et m_3. Certains moments sont cependant incompatibles, par exemple m_2, m_2' et m_2''. Les moments situés à la même « hauteur », par exemple m_2, m_2' et m_2'', sont situés au même instant. Les histoires (h_1, h_2, h_3) sont des suites maximales de moments. Ici, par exemple, $h_1 = \{\ldots, m_1, m_2, m_3\}$. Les histoires partagent un tronc commun puis se divisent. Ici h_1, h_2, et h_3 se divisent à m_1. Des histoires sont indivisées à un moment m si elles partagent un moment postérieur à m. Ici, nos trois histoires sont indivisées pour tous les moments antérieurs à m_1.

Deux précisions sur T1 :

Précision 1 : *Pour rendre compte de l'indéterminisme et des modalités historiques qui lui sont associées, on n'a pas besoin de faire appel à d'autres mondes que le monde actuel.* Selon Belnap et co., « les possibilités – réelles et objectives – sont dans le monde et pas au-delà. S'il y a d'autres mondes alternatifs, ils viennent eux aussi avec leurs possibilités réelles »[53]. L'idée énoncée ici est que l'indéterminisme se construit à partir de T1.3, et donc que les moments possibles sont des entités de notre monde. Il m'apparaît cependant

[53] « [...] possibility – real possibility, objective possibility – is in the world, not otherworldly. If there are alternative worlds, then they, too, come with their real possibilities. », *idem* : 179

nécessaire de situer cette mise au point dans un contexte plus large pour bien en saisir la portée.

Une brève parenthèse est tout d'abord nécessaire pour distinguer deux types de modalités : les modalités historiques et les modalités logiques. Une phrase de la forme « il est logiquement nécessaire que » est interprétée en quantifiant universellement sur tous les mondes possibles où certaines lois logiques valent[54]. La modalité historique est plus restreinte. « Il est historiquement nécessaire que » signifie habituellement « il est dorénavant inévitable que » et est interprétée en quantifiant universellement sur les mondes possibles qui sont identiques au nôtre jusqu'au moment d'évaluation de cette phrase.

Il existe probablement de nombreuses possibilités logiques pour le futur immédiat qui ne sont pas des possibilités historiques. Reprenons un exemple de Belnap et co.[55]. Je suis en train d'écrire ce texte. Il est *logiquement* possible que dans un moment très rapproché, disons dans une seconde, il y ait un cygne bleu sur ma table de travail. Ceci est logiquement possible parce que cette situation n'implique aucune contradiction conceptuelle. Il est cependant fort probable que cette situation ne soit pas historiquement possible. Compte tenu que je travaille dans une pièce fermée où il n'y a pas de cygne bleu et que l'existence réelle de tels oiseaux est douteuse, il est fort probable que dans aucun monde possible identique au mien jusqu'à présent il y ait un cygne bleu sur ma table de travail dans une seconde.

Dans le modèle arborescent du temps, celui qu'utilise Belnap, la concept de « monde possible identique au mien jusqu'à présent » est remplacé par celui « d'histoire indivisée à un moment »[56]. Relativement à la distinction des deux types de modalités, cette substitution ne change rien. La modalité logique est différente de la modalité historique.

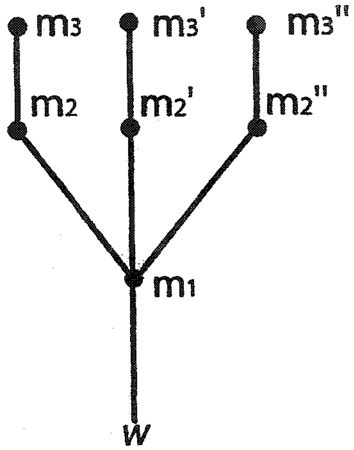
Il existe plusieurs méthodes pour interpréter les modalités historiques. Celle que l'examine dans ce chapitre utilise le modèle arborescent. Cette approche, que l'on nomme

---

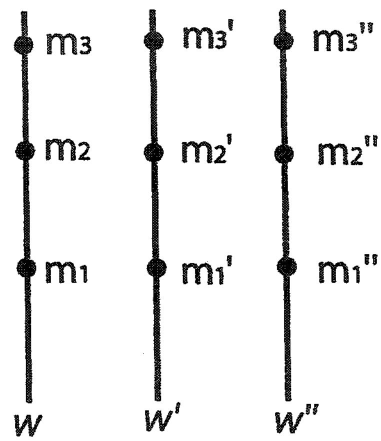
[54] Comme ces remarquent ne constituent qu'une brève parenthèse, je laisse en suspend la question de savoir *quelles* lois logiques doivent valoir dans ces mondes. Je ne traite pas non plus de la question de l'existence de mondes incohérents (où des lois logiques de bases ne valent pas).

[55] *Facing the Future*, 2001 : 188.

à la suite de Prior[57] le temps ramifié, est un modèle de l'indéterminisme. Or, il est possible de rendre compte des modalités historiques sans utiliser un modèle de l'indéterminisme. On interprète alors les modalités à partir d'un ensemble de mondes possibles; chacun étant constitué d'une seule histoire (voir la figure suivante). On postule ensuite le synchronisme du déroulement temporel entre les mondes; chaque monde suivant un ordre identique de sorte que chaque moment d'un monde peut être comparé à un ensemble de moments situés au même instant dans un monde alternatif. Les moments peuvent être identiques ou se ressembler à des degrés plus ou moins grands. Ainsi, deux mondes peuvent être constitués de moments identiques jusqu'à un certain instants, puis se distinguer en ce que le premier contient un événement incompatible avec un autre événement se produisant au même instant dans l'autre monde.



Temps Ramifié



Modèle T x W

À partir de ce modèle, on peut interpréter les modalités historiques en quantifiant sur les moments co-instantanés comparables. Ce genre d'approche, qui fut préconisée par David Lewis et étudiée par plusieurs auteurs[58], est connue sous le nom de théorie T x W[59] pour désigner le fait qu'elle se construit formellement à partir du produit cartésien d'un ensemble d'instants (*Times*) et d'un ensemble de mondes (*Worlds*).

---

[56] Voir la figure de la page précédente pour une introduction très sommaire de la relation d'indivision. Cette relation sera définie plus explicitement dans la section 2.

[57] Prior, 1967 : 27

[58] En autres : Alberto Zanardo, « Branching-Time Logic with Quantification over Branches : the Point of view of Modal Logic », *Journal of Symbolic Logic*, Vol.61 (1), 1996 ; Franz von Kutchera, « T x W completeness », *Journal of Philosophical Logic*, 26(3), 1997: 241-250; Lennart Aqvist, « The Logic of Historical Necessity as Founded in Two-Dimensional Modal Tense Logic », *Journal of Philosophical Logic*, **28**, 1999

Or, il faut voir que l'approche en paires instant-monde est une conception déterministe des modalités. Chaque monde n'est constitué que d'une seule suite linéaire (c'est-à-dire non-ramifiée) de moments. Les possibilités n'existent, dans ce modèle, que dans la mesure où il existe d'autres moments alternatifs comparables *dans d'autres mondes possibles*. En d'autres termes, chaque monde est déterministe et les modalités ne font sens que relativement à l'existence d'autres mondes.

Ce recours à d'autres mondes est évité par l'approche en arbre du temps. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises : les moments possibles sont des entités concrètes de notre monde. Ainsi, l'approche du temps ramifié permet d'interpréter les modalités tout en constituant un modèle de l'indéterminisme, alors que l'approche T x W n'est pas un modèle de l'indéterminisme. D'une manière plus générale : l'indéterminisme permet d'interpréter les modalités mais les modalités ne sont pas nécessairement interprétées dans un modèle indéterministe. C'est pour cette raison, selon moi, que Belnap et co. tiennent à préciser que leur modèle ne fait pas appel à d'autres mondes possibles.

Cette brève comparaison du modèle arborescent avec le modèle T x W permet de mieux voir la différence entre les concepts philosophiques d'histoire et de monde possible. Les mondes possibles sont habituellement[60] caractérisés comme des entités ne se recoupant pas. Aucune partie d'un monde possible n'est une partie d'un autre monde possible. Or, les histoires se recoupent explicitement dans le modèle arborescent. Nous avons vu qu'une histoire représente un cours possible de l'histoire de notre monde. Or, ce monde contient plusieurs histoires. Ainsi, dans le modèle arborescent, c'est l'arbre complet qui constitue un monde possible et non pas chacune de ses branches. Remarquons que ce n'est pas le cas dans le modèle T x W. À chaque monde possible correspond une et une seule histoire. Il est important de garder en tête que « histoire » et « monde possible » sont philosophiquement distincts parce qu'au plan formel les histoires jouent un rôle analogue à celui des mondes possibles.

Précision 2 : *Le passé et le présent sont uniques mais le futur est ouvert.*

Explication :

En d'autres termes, « le passé <et le présent> ne sont pas un assemblage de possibilités

---

[59] Cette appellation vient probablement de Richmond Thomason, 1984.
[60] Lewis, *On the plurality of worlds*, Basil Blackwell, 1986 : 170

incompatibles »[61]; seul le futur est indéterministe. La plupart des formulations de cette thèse, qui est quasi omniprésente dans les discussions sur l'indéterminisme, utilisent le vocabulaire dynamique (passé, présent, futur). La formulation qu'en donnent Belnap et co. ne fait pas exception même s'ils se restreignent explicitement à la perspective statique.

Il est relativement facile d'exprimer l'unicité du passé et du présent dans des termes statiques : pour n'importe quel moment, il n'y a qu'une seule suite de moment qui lui est antérieure et plus d'une suite peut lui être postérieure. C'est sous cette forme que sera formalisée cette position.

2. Formalisation :

2.1 Propriétés générales des cadres ⟨Notre_Monde, ≤⟩ et ⟨Notre_Monde, ≤, Instants⟩

Le cadre d'interprétation de la théorie des *stits* est ⟨*Notre_Monde*, ≤, *Instants*, *Agents*, *Choix*⟩ où chacun des éléments représente un concept primitif. Le premier élément est l'ensemble des moments et le second la relation qui l'ordonne. L'ensemble *Instants* synchronise tous les moments de *Notre_Monde* selon un ordre temporel unique. Les deux autres éléments du cadre seront examinés dans le chapitre 2.

Belnap et co. discutent la nature de la relation d'ordre partielle représentant l'indéterminisme en énonçant une série de postulats qui caractérisent cette relation.

2.1.1. Ensemble des moments :

D1 : Notre_Monde $=_{df} \{m, m_1, m_2, m_3, \ldots, w_1, w_2, \ldots\}$

Le premier élément du cadre, *Notre_Monde*, est un ensemble dont les éléments sont des moments. Le concept philosophique que Belnap et co. associent aux moments fut présenté dans la T1.3. Pour augmenter la lisibilité de certains postulats qui seront présentés ultérieurement, la notation suivante est introduite :

D1.1 : M_1, M_2, etc. sont des ensembles de moments de *Notre_Monde*.

P1 (*Non-trivialité*) : *Notre_Monde* $\neq \varnothing$

Le postulat P1 exclut que *Notre_Monde* soit l'ensemble vide et que, de ce fait, il vérifie trivialement tous les postulats subséquents.

Parenthèse philosophique :

---

[61] « Our past is not an assemblage of incompatible possibilities », Belnap et co. 2001 : 183.

P1 est un postulat métaphysique fondamental. Toute la discussion sur la nature des moments dans la section 1 présuppose que quelque chose se passe dans le monde, et donc que l'ensemble des moments n'est pas vide. Belnap et co. ne tentent pas de le justifier : « nous ne nous préoccupons pas d'argumenter qu'il y a quelque chose plutôt que rien »[62].

Fin de la parenthèse.

2.1.2. Relation « antérieur ou égal à » :

Notre_monde est ordonné par la relation d'ordre partielle $\leq$, qui est interprétée philosophiquement comme la relation « antérieur ou égal à » et qui se nomme aussi la relation d'ordre causale. Cette appellation est empruntée, selon Belnap[63], au vocabulaire de la théorie de la relativité restreinte pour mettre l'accent sur le caractère concret des moments et pas parce que deux moments liés par la relation $\leq$ sont nécessairement en relation de cause à effet. « Ordre Causal » est également employé pour distinguer l'ordre des moments de l'ordre entre les instants qui sera nommé « ordre temporel ».

La relation $\leq$ est caractérisée par trois postulats.

D2 : (*Relation d'ordre causale*) $\leq\ \subseteq$ *Notre_Monde* $\times$ *Notre_Monde*. $\langle m_1, m_2\rangle \in \leq$ est noté $m_1 \leq m_2$.

> *P2.1* (Réflexivité) *: Chaque moment est antérieur ou égal à lui-même* ($m_1 \leq m_1$)
>
> *P2.2* (Transitivité) *: Si m_1 est antérieur ou égal à m_2 qui est lui-même antérieur ou égal à m_3, alors m_1 est antérieur ou égal à m_3.* $((m_1 \leq m_2 \wedge m_2 \leq m_3) \rightarrow m_1 \leq m_3)$
>
> *P2.3* (Anti-symétrie) *: Si m_1 est antérieur ou égal à m_2 et que m_2 est antérieur ou égal à m_1, alors ces deux moments sont égaux.* $(m_1 \leq m_2 \wedge m_2 \leq m_1) \rightarrow m_1 = m_2$

La relation d'ordre causale ordonne partiellement *Notre_Monde*. À partir de cette simple caractérisation, on peut définir, comme on le fait habituellement en théorie des ordres partiels, la relation causale stricte qui sera utilisée dans les postulats et définitions subséquentes.

D2.1 (Relation causale stricte) $m_1 < m_2 =_{df} (m_1 \leq m_2 \wedge m_1 \neq m_2)$

Cette relation est irréflexive, transitive et, par conséquent, asymétrique[64].

Remarque sur P1 et P2.3.

Les postulats P1 et P2.2 font intervenir la relation d'identité (et sa négation) qui n'est pas

[62] « We do not care to argue for the thesis that there is something rather than nothing. » *Idem*, 178

[63] *Idem*, 179

définie ni caractérisée par Belnap et co. dans l'élaboration de la théorie des *stits*. Or, comme ces postulats furent énoncés dans le vocabulaire de la théorie des ensembles, on peut supposer qu'il s'agit de la relation d'identité habituelle qui est une relation d'équivalence. Elle est réflexive, transitive et symétrique ($m_1 = m_2 \rightarrow m_2 = m_1$).

Cette relation n'est pas la même que la relation d'équivalence présente dans les cadres de Kamp, Ockamistes et « en faisceau » (*bundle of tree*) étudiés notamment par Zanardo[65]. Dans ces structures, on utilise une relation d'équivalence notée « ~ » qui se distingue en deux points de la relation d'identité utilisée par Belnap et co. Tout d'abord elle s'applique à des *branches*, qui sont des chaînes (voir D4.3 plus bas) particulières, plutôt que simplement à des points (les moments). Ensuite, ces relations sont plus fortes que la simple équivalence. En plus des caractéristiques de réflexivité, de transitivité et de symétrie, les relations de type « ~ » obéissent à des postulats supplémentaires – énoncés différemment selon le cadre dans lequel elles se trouvent – garantissant l'isomorphisme des branches jusqu'à un certain moment. En somme, la relation « ~ » n'est pas la relation « est identique à » entre moments mais la relation « avoir le même point initial »[66] entre branches.

Fin de la remarque.

2.2 Concepts importants pour la représentation de l'indéterminisme :

La relation d'ordre causale permet de représenter plusieurs concepts qui seront utilisés dans l'énonciation de postulats supplémentaires caractérisant l'indéterminisme. La relation de comparabilité est introduite de manière habituelle à partir de l'ordre partiel sur *Notre_Monde*.

D3 (*Comparabilité*) m_1 comparable m_2 ssi ($m_1 \leq m_2 \vee m_2 \leq m_1$)

Deux moments sont comparables s'ils sont directement liés par la relation d'ordre causale. La négation de cette relation, l'incomparabilité, correspond à la relation d'incomparabilité que j'ai présentée dans la section précédente.

D4 (*Chaînes et histoires)*

D4.1 (*Chaîne*) : c, c_1, c_2, … sont des chaînes ssi $c \subseteq$ *Notre_Monde* $\wedge \forall m_1 \forall m_2$

---

[64] L'asymétrie est dérivable de l'irréflexivité et de la transitivité.

[65] Alberto Zanardo, « Branching-Time Logic with Quantification over Branches : the Point of view of Modal Logic », *Journal of Philosophical Logic*, 1996 : 4-9

[66] « […] having the same initial point. » Zanardo, 1996 : 6

$(m_1, m_2 \in c \rightarrow m_1$ comparable $m_2\}$.

D4.2 (*histoire*) : h est une histoire de *Notre_Monde* ssi

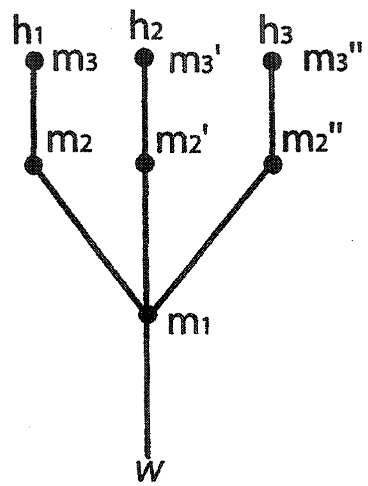
(i) h est une chaine de *Notre_Monde* et

(ii) h est une chaîne maximale, c'est-à-dire qu'aucun moment $m \in$ *Notre_Monde* n'est tel que $h \cup \{m\} = c$ où c est une chaîne dans *Notre_Monde*.

D4.3 (*Histoires*) : *Histoires* est l'ensemble de toutes les histoires de *Notre_Monde*, H, H_1, H_2, ... sont des ensembles d'histoires. En particulier :

D4.3.4 (*Histoires passant par un moment m*) $H_m = \{h : m \in H\}$

D4.4 (*Branches*) : b_{m1} est branche ssi b_{m1} une chaîne maximale dans $\{m : m_1 \leq m\}$



Quelques chaînes qui ne sont pas des branches dans cette figure : $\{m_1, m_2\}$, $\{m_1, m_2''\}$. Deux exemples de branche : $\{m_1, m_2', m_3'\}$, $\{m_2', m_3'\}$. Ce dernier ensemble n'est pas une histoire parce que $\{m_2', m_3'\} \cup \{m_1\}$ est encore une chaîne. L'ensemble des histoires passant par m_1 : $H_{m1} = \{h_1, h_2, h_3\}$.

Le concept d'histoire introduit ici est la contrepartie formelle du concept d'histoire discuté dans la section 1. La clause (ii) exprime la maximalité des histoires; c'est-à-dire qu'une histoire est une chaîne qui s'étend à l'infini vers le passé et le futur ou jusqu'aux premiers et derniers moments dans chacune des directions, si de tels moments existent. Cette clause permet donc d'exprimer le fait que chacune des histoires représente un cours complet de l'histoire du monde sans se prononcer sur le caractère infini ou fini de celui-ci. La maximalité des histoires est une propriété logique qui peut s'exprimer sans répondre aux questions philosophiques (l'univers a-t-il un commencement et une fin) qui lui sont intuitivement rattachées.

Le concept de branche est absent de la théorie de Belnap et co. Je l'ai introduit ici simplement pour compléter la dernière remarque sur la relation d'identité. Une branche est une chaîne qui s'étend au maximum vers le futur à partir d'un point d'origine.

2.3 Postulats spécifiques à la représentation de l'indéterminisme.

La structure arborescente de *Notre_Monde* est induite par le postulat suivant.

P3 (*Unicité du passé*) $(m_1 \leq m_3 \wedge m_2 \leq m_3) \rightarrow (m_1 \text{ comparable } m_2)$

Inversement, ce postulat stipule qu'un moment quelconque ne peut pas avoir deux moments antérieurs incomparables. La notion de limite supérieure, appliquée au cas particulier des chaînes[67], permet d'expliciter P3.

D5 (*Limite supérieure d'une chaîne*) m *la limite supérieure de c* ssi $(m \in c \wedge \forall m_1 \in c\ [m_1 \leq m])$

P3 stipule que, si c_1 et c_2 sont deux chaînes maximales dont la limite supérieure est m_1, alors $c_1 = c_2$. Le passé de n'importe quel moment est une chaîne unique. P3 est bien la formalisation de l'unicité du passé.

Comme P3 exclut la réunion d'histoires disjointes mais qu'il n'exclut pas la ramification vers le futur, il donne donc à *Notre_Monde* la structure en arbre nécessaire à la représentation de l'indéterminisme. Cette caractéristique a été identifiée par Prior. Il a remarqué qu'un postulat de linéarité de l'antérieur vers le postérieur n'implique pas une formule garantissant l'unicité du passé, formule qui est « *CUbaCUcaAAIbcUbcUcb* »[68]. En traduisant la notation polonaise de Prior dans le vocabulaire de la théorie des *stits*, et en remplaçant *a*, *b* et *c* par m_1, m_2 et m_3 respectivement, la formule devient: $(m_1 < m_3) \rightarrow ((m_2 < m_3) \rightarrow (m_1 = m_2 \vee m_1 < m_2 \vee m_2 < m_1)$. On peut aisément dériver P3 de cette formule par substitution des connecteurs de vérité et par la définition de comparabilité.

Dans la littérature, au moins depuis Thomason, un ensemble arborescent est directement défini comme un ensemble non-vide partiellement ordonné respectant P3.

> « DEFINITION 1 : Un cadre arborescent T pour la logique temporelle est une paire $\langle T, <\rangle$ où T est un ensemble non-vide et < est un ordre transitif sur *T* tel que si $t_1 < t$ et $t_2 < t$, alors

[67] Belnap et co. 2001 : 182

[68] Ici j'ai paraphrasé Prior, 1967 : 56

soit $t_1 = t_2$, ou $t_1 < t_2$ ou $t_2 < t_1$. »[69]

La formulation explicite de P1 et P3 comme postulats distincts, dans la théorie des *stits*, fait plutôt figure d'exception. Cette différence est purement méthodologique; la structure arborescente qu'adoptent Belnap et co. est, de l'aveu des auteurs, la même que celle présentée par Thomason et reprise dans la littérature subséquente.

Belnap et co. utilisent un second postulat qui joint toutes les histoires de *Notre_Monde* :

P4 (*Connexion historique*)

Formulation 1 en termes de moments : $\forall m_1 \forall m_2 \exists m_0 [m_0 \leq m_1 \wedge m_0 \leq m_2]$

Toute paire d'éléments de *Notre_Monde* a un ancêtre commun. Une violation de P4 morcelle *Notre_Monde* en sous-ensembles qui ne se recoupent pas. En termes histoires, ce postulat peut s'énoncer comme suit :

Formulation 2 en termes d'histoires : $\forall h_1 \forall h_2 [(h_1 \cap h_2) \neq \varnothing]$

Cette formulation, qui quantifie sur les histoires, n'est pas utilisée par Belnap et co. probablement parce que la première formulation lui est équivalente.

Preuve : Preuve de formulation 2 → formulation 1; Supposons $\forall h_1 \forall h_2 [(h_1 \cap h_2) \neq \varnothing]$ et $\neg \forall m_1 \forall m_2 \exists m_0 [m_0 \leq m_1 \wedge m_0 \leq m_2]$. Alors $\exists m_1 \exists m_2 \forall m_0 \neg [m_0 \leq m_1 \wedge m_0 \leq m_2]$. Soit $H_{m0} = \{h : m_0 \in h\}$, $H_{m1} = \{h : m_1 \in h\}$, $H_{m2} = \{h : m_2 \in h\}$. Par l'unicité du passé, $(H_{m0} \cap H_{m1} = \varnothing)$ ou $(H_{m0} \cap H_{m2} = \varnothing)$, ce qui contredit notre hypothèse. La preuve de l'implication inverse est analogue.

De plus, la première formulation a l'avantage d'être du premier ordre, c'est-à-dire qu'elle évite la quantification sur les ensembles.

Belnap et co. remarquent à juste titre que la distinction entre l'approche arborescente et l'approche « T x W » (section 1) est marquée par l'adoption de *connexion historique* par la première alors que ce postulat est explicitement rejeté par la seconde. Lennart Aqvist[70] a montré, pour des modèles finis et discrets, que les modèles arborescents synchronisés (voir parenthèse philosophique suivante) et T x W induisent des sémantiques équivalentes, c'est-à-dire que pour un modèle en arbre M et un modèle T

---

[69] « DEFINITION 1 : A treelike frame *U* for tense logic is a pair $\langle T, < \rangle$, where *T* is a nonempty set and < is a transitive ordering on *T* such that if $t_1 < t$ and $t_2 < t$ then either $t_1 = t_2$ or $t_1 < t_2$ or $t_2 < t_1$. » Thomason, 1984 : 142

[70] Leenart Aqvist, « The Logic of Historical Necessity as Founded in Two-Dimensional Modal Tense Logic », *Journal of Philosophical Logic*, 28, 1999 : 340-342

x W M_r, pour n'importe quelle formule A : M, t, w $\vDash$ A ssi M_r , f(t, w) $\vDash$ A. Malgré cette identité sémantique, il n'en demeure pas moins que ces deux approches sont bien distinctes philosophiquement.

Parenthèse philosophique :

La différence principale entre l'approche en arbre et l'approche en paires instant\monde (T x W) est que la seconde doit postuler un synchronisme temporel entre toutes les histoires[71]. En termes moins techniques, les théories T x W postulent que la position temporelle d'un moment n'est pas seulement relative à sa « latitude » – sa place dans l'ordre temporel – ; mais qu'elle est également relative à sa « longitude »[72]. Tous les moments sur une même longitude sont « au même instant », d'où l'idée d'un synchronisme temporel entre les histoires. La théorie des *stits* ne fait ce postulat que pour une des interprétations du *stit*. Il prend la forme d'un élément primitif supplémentaire, *Instants*, dans le cadre d'interprétation.

Belnap et co. n'argumentent pas directement contre le postulat de synchronisme historique. Ils se contentent d'exprimer un malaise[73] devant le fait que ce postulat est largement pris pour acquis par les théoriciens T x W, alors que son explicitation philosophique semble des plus difficile.

2.4 Aspects qui ne sont pas traités explicitement par la théorie

J'ai déjà noté que la théorie ne fait pas de postulat explicite quant au caractère infini ou fini de l'ordre causal. Deux autres points restent partiellement ouverts dans la théorie.

2.4.1 Ordre discret? Dense? Continu?

Belnap et co. ne postulent pas de manière explicite le caractère discret ou dense de l'ordre causal, quoiqu'ils affirment : « notre pensée va [...] avec ceux qui conçoivent le cours de notre monde comme continu, et ainsi sans saut où fossé <entre moments> »[74]. Cette préférence théorique ne se traduit pas en un postulat explicite de la forme :

(*Densité*) $\forall m_1 \forall m_3 \exists m_2 (m_1 < m_3 \rightarrow m_1 < m_2 < m_3)$

Ainsi, « la théorie est immédiatement applicable; que l'on se représente la

---

[71] Je reprends « synchronisme » de Maria Concetta Di Maio et Alberto Zanardo, « Synchronized Histories in Prior-Thomason Representation of Branching Time », 1996 : 269

[72] Je reprends « latitude » et « longitude » de Aqvist 1999 : 332

[73] *Facing the Future*, 2001 : 197

succession comme discrète, dense, continue, de bon-ordre, comme un mélange de ces derniers ou autrement. »[75] Cette lecture « ouverte » de l'ordre temporel chez Belnap et co. est adoptée par la présentation qu'en fait Storrs McCall[76]. Ce dernier distingue trois lectures possibles de l'ordre causal chez Belnap, selon qu'il soit conçu comme une copie des nombres naturels (donc discret), des nombres rationnels ou des réels.

La théorie semble pencher plus explicitement vers un ordre dense lorsqu'elle traite de la question des « décideurs occupés » (*busy chooser*), que je présenterai formellement au chapitre 2. Un agent est un décideur occupé s'il est confronté à une chaîne de moments ayant une limite supérieure et inférieure mais contenant un nombre infini de moments de choix. Pour illustrer ce cas, Belnap et co. donnent habituellement l'exemple d'un coureur de fond qui, lors d'une épreuve, peut à tout moment décider d'abandonner la course. En supposant que l'intervalle de temps qui sépare le début de la la fin de la course est dense, cet athlète fait face à un nombre infini de moment choix dans un intervalle de temps limité. L'existence de décideurs occupés donc suppose qu'au moins certaines portions de l'ordre temporel sont denses. Je reviendrai sur la question des décideurs occupés au chapitre 2.

Le postulat de continuité classique, formulé par Dedekind, prend la forme suivante :

(*Continuité*) $\forall A\, [\exists m_1, m_2\, [A(m_1) \wedge \neg A(m_2)] \wedge \forall m_1, m_2\, [(A(m_1) \wedge \neg\, A(m_2)) \rightarrow m_1 < m_2] \rightarrow \exists m_0[\forall m_1[m_o < m_1 \rightarrow \neg A(m_1)] \wedge \forall m_1[m_1 < m_0 \rightarrow A(m_1)]]]$

Ce postulat est systématiquement violé dans les modèles non-linéaires :

> « L'axiome <de continuité> fut conçu pour les structures linéaires, c'est pourquoi la condition $\forall m_1, m_2\, [(A(m_1) \wedge \neg\, A(m_2)) \rightarrow m_1 < m_2]$, qui n'est satisfaite par aucune structure non-linéaire, pouvait être utilisée. »[77]

L'auteure de ces lignes propose un postulat de continuité adapté aux modèles non-linéaires.

---

[74] « Our thoughts go [...] with those who think of the flow of our world as continuous, and hence without jumps or gaps », *idem* : 212.

[75] « The present theory of agency is immediately applicable regardless of whether we picture the sucession as discrete, dense, continuous, well-ordered, some mixture of these, or whatever [...] », *idem* : 196

[76] Storrs McCall, « Choice Tree », dans J. M. Dunn et A. Gupta, *Truth or Consequences*, *Kluwer Academic Publisher* 1990, p. 233

[77] « The above axiom was intended for linear structures, hence the condition $\forall m_1, m_2\, [(A(m_1) \wedge \neg\, A(m_2)) \rightarrow m_1 < m_2]$ could be used, which is not satisfied in any non-linear time structure ». Elzabieta Hajnicz,

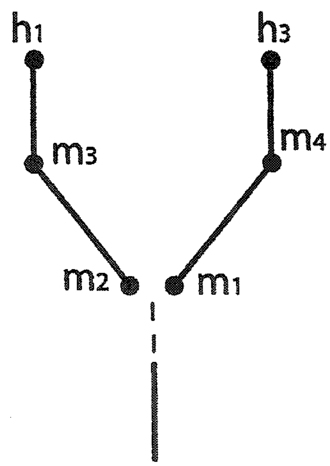
Parenthèse philosophique. :

La conception dense du temps fait face à un problème philosophique qui remonte probablement aux philosophes présocratiques : s'il existe toujours un moment entre deux moments, comment peut-on avancer dans le temps? Face à cette difficulté, on peut tout simplement choisir d'utiliser un modèle discret. Belnap et co. ne traitent pas de ce problème. Je le laisse également de côté.

Fin de la parenthèse.

2.4.2 Semi-treillis :

Un ordre est un semi-trellis avec borne supérieure si n'importe quelle paire d'éléments dans cette ordre a une limite inférieure propre. Dans les termes de la théorie, *Notre_Monde* est un semi-treillis si toutes les paires d'histoires ont une intersection contenant une plus petite limite supérieure (*supremum*[78]). Belnap et co. ne postulent pas que *Notre_Monde* est un semi-treillis. Si *Notre_Monde* est dense, il se peut que deux branches débutent chacune à un point déterminé mais qu'il n'existe pas de plus petite limite supérieure à l'ensemble des moments qui les précèdent.



Une ramification qui viole la condition de semi-treillis.

Notons que l'existence d'un *supremum* à l'intersection de deux histoires est garantie dans le cas des moments de choix, que je présentent dans le chapitre 2. Cette abstention de

---

« Some Considerations on Branching Areas of Time », *Journal of Logic, Language and Information*, 8, 1999, p. 25

[78] Pinter, *Set Theory*, 1971, p. 95

traiter *Notre_Monde* comme un semi-treillis est également notée par Storrs McCall[79].

2.5 Histoires indivisées :

Deux histoires sont indivisées en un moment si elles partagent un moment postérieur. En d'autres termes, deux histoires sont indivisées en un moment si elles se divisent seulement plus tard:

D6 (*Histoires indivisés*) : $h \equiv_{m_1} h_1 \leftrightarrow \exists m_2[\, m_1 < m_2 \wedge m_2 \in h \cap h_1]$

La relation « $\equiv_m$ » est une relation d'équivalence; elle est réflexive, transitive et symétrique. Zanardo[80] note $[h]^{\equiv}_m$ la classe des histoires équivalentes à *h* selon la relation d'indivision à un moment. L'ensemble Π_m est la partition induite à H_m par $\equiv_m$ et ses éléments, les différentes classes $[h]^{\equiv}_m$, sont notés π_1, π_2, etc. Une partition est un ensemble d'ensembles mutuellement disjoints et conjointement exhaustifs. Les éléments de H_m sont nommés les *possibilités immédiates* à m parce qu'ils représentent les histoires qui se divisent à ce moment. Par définition d'une partition on a :

Π1. $\forall \pi_1, \pi_2 \in \Pi_m\ \forall h \in H_{(m)}\ [h \in \pi_1 \cap \pi_2 \rightarrow \pi_1 = \pi_2]$

Π2. $h \in H_{(m)} \rightarrow \exists \pi \in \Pi_m[h \in \pi]$

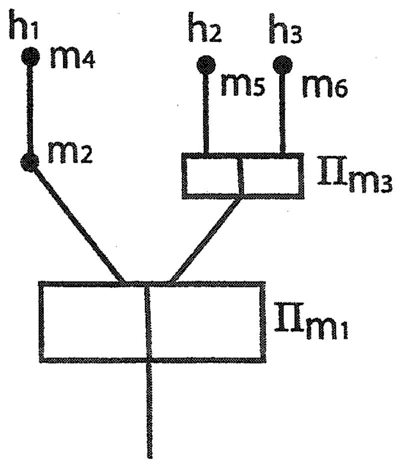


Illustration des possibilités immédiates. Il y a deux possibilités immédiates à m_1 et m_3 alors qu'il n'y en a qu'une à m_2. On a $\Pi_{m1} = \{\{h_1\}, \{h_2, h_3\}\}$. La possibilité immédiate compatible avec l'histoire h_3 à m_1 : $\Pi_{m1}(h_3) = \{h_2, h_3\}$. La possibilité immédiate compatible avec le moment m_5 à m_1 : $\Pi_{m1}(m_5) = \{h_2, h_3\}$. La possibilité immédiate compatible avec le moment m_3 à m_1 en termes de moments co-instantanés: $\underline{\Pi}_{m1}(m_5) = \{m_5, m_6\}$.

---

[79] Storrs McCall, « Choice Tree », 1990, p.233

[80] Alberto Zanardo, « Undivided and Indistinguishable Histories in Branching-Time Logics », *Journal of Logic, Langage and Information*, 7, 1998, p.301

Les fonctions suivantes peuvent être définies au moyen de la partition Π_m.

D6.1 (*Indivision*) Π est une fonction qui associe à chaque moment *m* de *Notre_Monde* une partition de $H_{(m)}$ induite par $\equiv_m$.

La fonction Π donne pour chaque moment les possibilités immédiates à ce moment.

D6.2 $\Pi_m(h)$ est une fonction définie seulement si $m \in h$ et qui associe à h l'élément π de Π_m auquel elle appartient. (Comme Π_m est une partition, cet élément est unique).

$\Pi_m(h)$ donne comme valeur la classe $[h]^{\equiv}_m$. Je garderai dorénavant la notation $\Pi_m(h)$ simplement pour rendre plus visible la proximité entre cette fonction et la fonction $Choix^{\alpha}{}_m(h)$ qui sera introduite au chapitre suivant.

$\Pi_m(h)$ donne la possibilité immédiate dont l'histoire *h* fait partie au moment *m*.

D6.3 $\Pi_m(m_1)$ est une fonction définie seulement si $m < m_1$ et qui, pour n'importe quelle histoire h de $H_{(m1)}$, associe à m_1 le résultat de la fonction $\Pi_m(h)$.

D6.4 $\underline{\Pi}_m(m_1)$ est une fonction définie seulement dans le cadre ⟨*Notre_Monde*, $\leq$, *Instants*⟩ et seulement si $m < m_1$, qui associe à m_1 l'ensemble $i_{(m1)} \cap \bigcup \Pi_m(m_1)$[81].

On peut définir simplement la relation « *h_1* et *h_2 se divisent* à *m* » comme la négation de « $\equiv_m$ » lorsque h_1 et h_2 passent par m :

D6.5 (*Division à m*) : $h_1 \perp_m h_2$ ssi $(h_1, h_2 \in H_m \wedge \Pi_m(h_1) \neq \Pi_m(h_2))$

Belnap et co. définissent cette relation comme suit : $h_1 \perp_m h_2$ ssi $h_1 \neq h_2$ et m est le *supremum* de $h_1 \cap h_2$. Comme la théorie ne suppose pas que *Notre_Monde* est un semi-treillis, rien ne garantit qu'il existe un moment de séparation pour toutes les paires d'histoires qui se divisent, sauf, nous le verrons plus loin, pour toutes les histoires qui se séparent après un moment de choix. Notons que la division n'est pas simplement la négation de l'indivision. Deux histoires peuvent n'être ni indivisées ni divisées à m si elles se sont divisées à un moment antérieur à m.

Remarque :

La représentation habituelle en arbre de *Notre_Monde* est en fait une représentation de cet ensemble sous la fonction Π. En effet, chacun des segments qui lie deux points (deux moments) représente des ensembles d'histoires indivisées pour l'intervalle situé entre les deux points.

---

[81] Voir section suivante pour la définition de $i_{(m1)}$.

Dans la section 1, j'ai appelé « possibilités » les moments futurs imcomparables qui suivent un moment *m*. J'ai donc fait usage du terme possibilité pour désigner deux objets différents : des moments et des ensembles d'histoires. Cette ambiguïté est due au fait qu'à chaque possibilité immédiate π de n'importe quel ensemble Π_m correspond un moment postérieur à *m* qui contient exactement les histoires éléments de π. Voici l'esquisse de la preuve de ce fait pour un ensemble H_m fini.

FAIT (existence d'un moment futur possible): *Pour n'importe quelle* $\pi \in \Pi_m$ *il existe un moment* $m_1 > m$ *tel que* $H_{(m1)} = \pi$.

Soit $\pi \in \Pi_m = \{h_1, h_2, h_3..., h_n\}$. Par définition de π, il existe un moment $m_1 \in h_1 \cap h_2$ et $m_1 > m$ pour toute paire $h_1, h_2 \in \pi$. Soit une autre histoire $h_3 \in \pi$. Si $m_1 \notin h_2 \cap h_3$ alors il doit exister un moment $m_2 < m_1$ tel que $m_2 \in h_2 \cap h_3$. Par l'unicité du passé, $m_2 \in h_1 \cap h_2$ et $H_{(m2)} \supseteq \{h_1, h_2, h_3\}$. En répétant ces étapes n –1 fois, on obtient un moment m* tel que $H_{(m^*)} \supseteq \{h_1, h_2, h_3 ..., h_n\}$. Comme $m^* > m$, par P3, $H_{(m^*)} \subseteq \pi$. Par conséquent $H_{(m^*)} = \pi$.

2.6. Indéterminisme :

Un moment est déterministe si toutes les histoires qui passent par ce moment sont indivisées à ce moment.

D.7.1 (*Déterminisme*) *m* est déterministe ssi $\forall h_1 \forall h_2 \in H_m [h_1 \equiv_m h_2]$

Cette condition peut se formuler au moyen de la classe d'équivalence sous l'indivision :

D.7.2 (*Déterminisme* II) *m* est déterministe ssi $\forall h [m \in h \rightarrow \Pi_m(h) = H_{(m)}]$

Au contraire, un moment sera indéterministe si, évidemment, il ne satisfait pas les deux dernières définitions. En termes plus substantiels, un moment est indéterministe si Π_m contient plus d'un éléments ou si il existe au moins une paire d'histoires $\{h_1, h_2\}$ dans H_m telles que $h_1 \perp_m h_2$. Ces deux conditions sont, il va sans dire, équivalentes.

Par souci de complétude, ajoutons que ces définitions peuvent être étendues à des chaînes de moments. Il est à noter que, dans ce cas, on peut définir le déterminisme sans faire appel à la notion d'histoires indivisées.

D.7.3 (*Déterminisme des chaînes*) *c* est déterministe ssi $\forall m_1 \forall m_2 \in c\ [(m_1 \leq m_2 \rightarrow H_{m1} - H_{m2} = \varnothing) \vee (m_2 \leq m_1 \rightarrow H_{m2} - H_{m1} = \varnothing)]$

En utilisant la notion d'histoire indivisée, cette définition devient :

D.7.3 (*Déterminisme des chaînes*) *c* est déterministe ssi $\forall m \in c\ [\forall h \in H_m [\Pi_m(h) = \{H_m\}]]$

2.7 Instants :

Les instants sont utilisés dans la théorie des *stits* pour quantifier sur un ensemble de moments pouvant « remplir le temps du <moment> *m* »[82].

D8. (*Instants*) *Instants* est une partition de *Notre_Monde* en classes de moments équivalents qui satisfont P5 et P6. i, i_1, i_2, sont des constantes désignant des éléments de *Instants*.

P5 (*Intersection Unique*) $\forall i \forall h \exists! m \, [m \in \{i \cap h\}]$

Les abréviations suivantes sont introduites par Belnap et co.

D8.1 (*L'instant du moment m*) $i_{(m)}$ est l'unique instant dont *m* est élément.

D8.2 $m_{(i,\, h)}$ est l'unique moment où *i* rencontre l'histoire *h*

D8.3 (*horizon de m*) $i|_{>m} = \{m_0 : m < m_0 \wedge m_0 \in i\}$

D8.4 (*Ordre temporel*) $i_1 \leq i_2$ ssi $(m_1 \in i_1 \wedge m_2 \in i_2 \rightarrow m_1 \leq m_2)$

P6 (*Préservation de l'ordre*) $m_{(i1,\, h1)} \leq m_{(i2,\, h1)} \rightarrow m_{(i1,\, h2)} \leq m_{(i2,\, h2)}$

Alors qu'*intersection unique* garantit que la partition *Instants* n'assigne pas plus d'un moment par histoire à chaque *i*, *préservation de l'ordre* synchronise toutes les histoires en ce qu'il interdit que $m_1 < m_2$ alors que $i_{(m2)} \leq i_{(m1)}$.

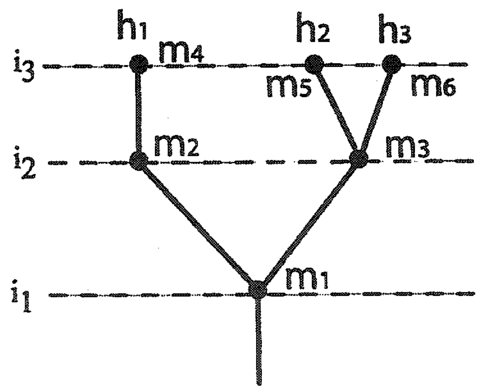


Illustration des instants : Il y trois instants dans cette figure. L'instant dont m_4 fait partie : $i_{(m4)} = \{m_4, m_5, m_6\}$. Le moment où i_3 rencontre l'histoire h_1 : $m_{(i3,\, h1)} = \{m_4\}$. L'horizon de m_3 à l'instant i_3 : $i|_{>m} = \{m_5, m_6\}$. L'ordre temporel : $i_1 \leq i_2, \leq i_3$.

Parenthèse philosophique :

J'ai déjà mentionné, dans la discussion sur les modèles T x W, que l'introduction du terme primitif *Instants* semble philosophiquement suspecte pour Belnap et co. On peut

---

[82] « filling the time of m », Belnap et co. 2001: 194

ajouter qu'elle leur parait également scientifiquement suspecte parce qu'elle « ramène à la doctrine Newtonienne du temps absolu »[83]. Le seul argument qui est invoqué pour justifier l'introduction de cette notion est la nécessité de quantifier sur les moments co-instantanés à m, sur les éléments de $i_{(m)}$, pour évaluer la vérité de certains énoncés d'action[84]. En termes plus général, on peut reformuler cet argument comme suit : certains concepts d'action, encodées dans un des connecteurs *stits*, sont liés à des modalités historiques qui supposent un synchronisme des histoires, et donc une partition *Instants* sur *Notre_Monde*.

Fin de la parenthèse.

3. Conclusion :

La logique du temps ramifié se base sur deux notions primitives, les moments et la relation d'ordre causale. Celles-ci permettent de formaliser simplement des concepts-clés de l'indéterminisme, soit les notions d'histoires indivisés et de possibilité immédiates à un moment. Ces concepts permettent de construire le concept de choix, auquel est consacré le chapitre suivant.

Le concept de moment est cependant une simplification qui va à l'encontre du caractère relativiste de l'espace-temps. De plus, il ne permet pas d'expliquer philosophiquement la notion d'incomparabilité, pourtant au cœur de la représentation philosophique de l'indéterminisme. Ces deux lacunes, qui sont des conséquences du caractère global des moments, motivent une étude approfondie de la théorie de l'espace-temps ramifié, sur laquelle je me pencherai dans le chapitre 3.

---

[83] « [...] the doctrine of instants harkens back to the Newtonian doctrine of absolute time [...]. » Belnap et co., 2001 : 194

[84] Notons que certains conditionnels contraires aux faits semblent nécessiter les instants.

CHAPITRE 2 : Agents et choix dans le modèle du temps ramifié

Introduction :

Dans ce chapitre, j'examine les concepts d'agent et de choix dans le modèle du temps ramifié. Je débute par une présentation du concept d'agent, qui s'avérera essentielle pour la construction du concept de choix. Après avoir présenté ces concepts, j'examine leur rôle dans l'interprétation et l'axiomatisation des connecteurs *stits*.

1. Le concept d'agent :

Les agents sont « des individus [...] faisant des choix ou agissant dans le temps »[85]. Cette remarque sommaire peut être développée dans la thèse suivante :

T2. Les agents sont des individus, (i) qui persistent dans le temps et (ii) qui réalisent des possibilités objectives.

Condition (i) : La notion de persistance dans le temps ne se retrouve pas explicitement dans le modèle du temps ramifié[86]. Je l'ai ajoutée pour rendre compte du fait que les agents sont, dans la théorie des *stits,* « des objets constants de référence. »[87].

En effet, le concept d'agent est fréquemment[88] caractérisé comme étant « absolu, tel que chez Bressan 1972 (ou de substance tel que chez Gupta 1980) »[89]. L'idée générale étant, en paraphrasant Gupta[90], qu'un agent dénoté par une constante α est le même dans tous les moments et dans toutes les histoires de *Notre_Monde* et que si $\alpha_1 = \alpha_2$ à un moment quelconque alors $\alpha_1 = \alpha_2$ à tous les moments dans toutes les histoires. La dénotation d'une constante α est toujours la même. Si deux agents sont identiques l'un à l'autre alors ils sont interchangeables à tous les moments dans toutes les histoires[91].

Condition (ii) : Pour Belnap et co. le concept d'agent ne peut être caractérisé philosophiquement sans faire référence au concept d'action. Comme le *stit* exprime le fait qu'un agent réalise une de ses possibilités objectives, un agent est, en vertu de la

---

[85] « Individuals [...] making choices, or acting, in time ». Belnap et co. 2001 : 33

[86] Notons qu'elle le sera dans le modèle de l'espace-temps ramifié.

[87] « agents[...] are "constant objects of reference" (Marcus 1961)», *idem* : 334

[88] *Idem* : 211, 281, 334

[89] « the concept of *Agents* is absolute ine the sense of Bressan 1972 (or a substance short in the sense of Gupta 1980) », *idem* : 211

[90] Anil Gupta, *The Logic of Common Nouns*, Yale UP, 1980 : 35

[91] Voir Belnap et co. 2001 : 333

condition (ii), un individu qui peut agir.

1.1.2 Agents et Individus :

Est-ce que tous les individus sont des agents? Il semble que non; la condition (ii) semble destinée à caractériser spécifiquement les agents dans l'ensemble des individus. Ainsi, des objets inanimés, comme par exemple une pierre ou un dé, ne sont pas intuitivement des agents parce ce qu'ils ne sont pas en mesure d'accomplir des actions. Belnap et co. semblent accepter cette distinction intuitive : c'est un « souhait naturel que de restreindre le champs d'application de α à un ensemble plausible d'agents »[92].

Or, la condition (ii) ne permet pas de restreindre l'ensemble des agents dans l'ensemble des individus. En effet, nous verrons que les possibilités objectives ne sont qu'une relativisation des possibilités immédiates à l'influence limitée des agents. En d'autres termes, les possibilités objectives sont les options *d'un agent* à un moment. Il s'avère donc que la notion de possibilité objective sera définie comme les possibilités d'un agent et qu'un agent est défini comme un individu ayant des possibilités objectives.

Un moyen de briser cette circularité est de prendre un des deux concepts comme primitif; ce que Belnap et co. pour le concept d'agent. Ainsi, ils concèdent que « c'est une *présupposition* que le terme dans la position d'un agent dénote un agent »[93]. Ainsi, leur approche du problème de la définition du concept d'agent consiste à supposer que les agents dont parle la théorie sont des agents au sens intuitif du terme[94].

Il existe cependant un concept dans la théorie des *stits* qui semble permettre une définition minimale du concept d'agent : la stratégie[95]. Dans le cadre de leur théorie des stratégie, Belnap et co. ont montré que pour n'importe quelle proposition, les agents ont une stratégie qui permet de la rendre vraie. Ainsi, il semble qu'un agent est un individu pour qui il existe une stratégie vérifier une proposition, et donc que les agents sont des individus auxquels s'offrent des stratégies. Or, Belnap et co. définissent une stratégie

---

[92] « the natural wish to restrict the range of "α" to some sane set of agents », *idem* : 334

[93] « it is a *presupposition* that the term in the agent position denotes an agent », Belnap et co., 2001 : 247

[94] Cette supposition pourrait ê tre appliquée au cas par cas, c'est-à-dire en décidant à chaque interpretation du *stit* si l'agent dont il est question est un bien un agent. L'ensemble des agents serait alors défini par extension. Je remercie Jimmy Plourde de m'avoir indiqué cette possibilité théorique.

[95] Je remercie Michel Paquette de m'avoir indiqué la nécessité d'explorer cette voie pour caractériser le concept d'agent.

d'une manière « *purement causale* : <comme> un système de choix »[96]. Une stratégie est un ensemble de moments où un agent a des possibilités objectives. La circularité relevée dans il y a quelques instants refait donc surface dans le concept de stratégie. Le concept de choix *et* le concept de stratégie se fondent sur la présupposition que le terme α dénote bien un agent plutôt que n'importe quel individu et ne peuvent donc servir à la fonder.

En somme, le concept d'agent n'est pas défini philosophiquement par la théorie des *stits*. Il s'agit d'un concept primitif. Par conséquent, la théorie ne prend pas position sur les caractéristiques que doit posséder un individu pour être un agent. En particulier, elle laisse en plan l'explicitation du rôle des états intentionnels dans la constitution des agents, comme je l'ai souligné dans l'introduction de ce mémoire.

1.2 Formalisation :

Le caractère primitif du concept d'agent apparaît dans l'introduction de l'ensemble *Agents* au cadre $\langle Notre\_Monde, \leq\rangle$ pour former $\langle Notre\_Monde, \leq, Agents\rangle$. Belnap et co. postulent simplement l'existence d'un ensemble non-vide dont les éléments sont des agents.

P6. $Agents = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2\ldots, \beta, \beta_1, \beta_2\ldots\}$ et $Agents \neq \varnothing$.

L'ensemble *Agents* n'est pas relativisé aux histoires ni aux moments, comme je l'ai indiqué dans la section précédente.

2. Le concept de choix :

2.1 Formalisation :

2.1.1 Définitions générales :

Soit $H_{(m)}$ (l'ensemble des histoires passant par le moment *m*) :

D9. $Choix^{\alpha}_{m}$ est une partition de l'ensemble de $H_{(m)}$ telle que :

P7. (*Pas de choix entre les histoires indivisées*) : $h_1 \equiv_m h_2 \rightarrow h_1 \equiv^{\alpha}_{m} h_2$.

Les éléments de choix seront notés P_1, P_2, ... et sont appelés « possibilités objectives de α à *m* » ; lorsque $Choix^{\alpha}_{m} = \{H_{(m)}\}$, on dit que α a un choix trivial à *m* ou encore que *m* est un moment de choix vide pour α ou tout simplement que *m* n'est pas un moment de choix pour α.

La partition $Choix^{\alpha}_{m}$ représente les possibilité objectives des agents, et non pas ses

[96] « [...] purely causal idea of strategy : a system of choices. », *idem* : 341

possibilité subjectives. Par « possibilité subjectives » j'entends une *représentation* que l'agent se fait de ses possibilités. Les possibilités objectives représentent les options que le monde « offre » à l'agent α. Elles sont totalement indépendante de ce que l'agent sait, crois ou désir à leur propos. Comme pour la partition Π_m, on a :

Choix 1. $\forall P_1, P_2 \in Choix^{\alpha}_{m}\ \forall h \in H_{(m)}[h \in P_1 \cap P_2 \rightarrow P_1 = P_2]$

Choix 2. $h \in H_{(m)} \rightarrow \exists P \in Choix^{\alpha}_{m}\ [h \in P]$

Comme on le fait habituellement en théorie des ensembles, on peut construire la relation d'équivalence correspondante à $Choix^{\alpha}_{m}$:

D10.1 (*Équivalence pour le choix*) $h_1 \equiv^{\alpha}_{m} h_2$ ssi $(h_1, h_2 \in H_{(m)}) \wedge (\forall P_1, P_2 \in Choix^{\alpha}_{m}\ [(h_1 \in P_1 \wedge h_2 \in P_2) \rightarrow P_1 = P_2] \wedge \bigcup_{(P \in Choix^{\alpha}_{m})} P = H_{(m)})$

La notation suivante est introduite pour simplifier la lecture :

D10.2 (*Division pour le choix*) $h_1 \perp^{\alpha}_{m} h_2$ ssi $(h_1, h_2 \in H_{(m)}) \wedge \neg(h_1 \equiv^{\alpha}_{m} h_2)$

Comme pour l'indivision, il est possible que deux histoires h_1 et h_2 ne soient pas liées par les relations d'équivalence ou de division pour le choix à un moment m si elles se sont divisées à un moment antérieur à m. Ces deux relations ne ferment pas l'ensemble des relations possibles entre les histoires.

Belnap et co. introduisent les définitions suivantes qui seront utiles lors d'explications subséquentes :

D9.1 *Choix* est une fonction de *Notre_Monde* x *Agents* vers l'ensemble des partitions de $H_{(m)}$ respectant P7 qui assigne à chaque paire de moment et d'agent une partition $Choix^{\alpha}_{m}$.

La fonction *Choix* donne les partitions de $H_{(m)}$ qui sont assignées aux agents pour tous les moments de *Notre_Monde*. C'est cette fonction que l'on retrouve dans le cadre $\langle$*Notre_Monde*, $\leq$, *Agents*, *Choix*$\rangle$.

Parenthèse philosophique :

$Choix^{\alpha}_{m}$ est défini pour n'importe quel moment de *Notre_Monde*. Le modèle du temps ramifié ne formalise donc pas le fait que les agents sont limités dans le temps, qu'ils existent seulement durant un certain intervalle. Belnap et co. reconnaissent explicitement qu'ils ne traitent pas cet aspect : « nous ne nous préoccupons pas des moments où les agents naissent ou meurent »[97]. La prise en compte de l'intervalle durant lequel un agent est vivant obligerait à relativiser la définition de la fonction *Choix* à l'existence de l'agent α à m. Pour éviter cette complication, Belnap et co. ont préféré considérer que la fonction *Choix* traite les moments antérieurs ou postérieurs à la vie d'un agent comme des moments de choix vides pour cet agent. En d'autres termes, des moments où $Choix^{\alpha}_{m}$ = $\{H_{(m)}\}$. Notons que cette caractéristique des agents sera représentée dans le modèle de l'espace-temps ramifié (section 1.2.2, chap.4).

Fin de la parenthèse.

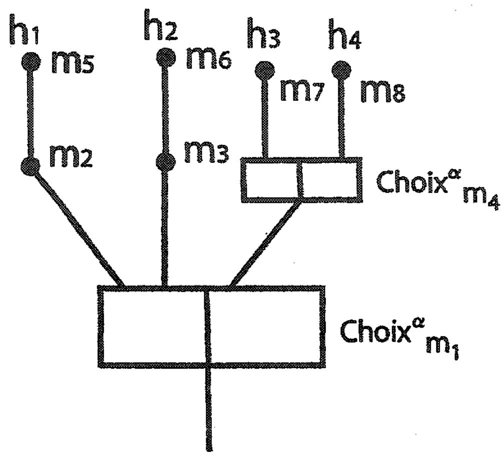


Illustration de la partition $Choix^{\alpha}_{m}$. À m_1, l'agent α a deux possibilités objectives : $Choix^{\alpha}_{m1} = \{\{h_1, h_2\}, \{h_3, h_4\}\}$. La fonctions *Choix* assigne à α et à chaque moment la partition qui représente ses possibilités à ce moment. À m_2, l'agent α n'a aucune qu'une possibilité, $Choix^{\alpha}_{m2} = H_m$, sont choix est vide. La possibilité objective de α dont h_1 fait partie : $Choix^{\alpha}_{m1}(h_1) = \{h_1, h_2\}$. La possibilité objective de α à m_1, en termes de moments co-instantanés, dont m_2 fait partie : $\underline{Choix}^{\alpha}_{m1}(m_2) = \{m_2, m_3\}$.

D9.2 $Choix^{\alpha}_{m}$ (h) est une fonction définie seulement si m $\in$h et qui associe à h l'élément de $Choix^{\alpha}_{m}$ auquel il appartient. (Comme $Choix^{\alpha}_{m}$ est une partition cet élément est unique).

D9.3 $Choix^{\alpha}_{m}$(m_1) est une fonction définie seulement si m < m_1 et qui, pour n'importe quelle histoire h de $H_{(m1)}$, associe à m_1 le résultat de la fonction $Choix^{\alpha}_{m}$(h).

D9.4 $\underline{Choix}^{\alpha}_{m}$($m_1$) est une fonction définie seulement dans le cadre ⟨*Notre_Monde*, ≤, *Agents, Choix, Instants*⟩ et seulement si m < m_1, qui associe à m_1 l'ensemble $i_{(m1)} \cap \bigcup Choix^{\alpha}_{m}(m_1)$.

[97] « [...] nor do we worry about when agents come to be or pass away. », *idem* : 211

Les fonctions définies en D9.2 et D9.3 donnent comme résultat des ensembles d'histoires alors que la fonction définie dans D9.4 donne comme résultat un ensemble de moments situés au même instant. Ces fonctions sont bâties sur le modèle des fonctions pour Π_m que j'ai présenté dans le chapitre précédent.

Soulignons qu'aucune de ces partitions ou fonctions ne représente ce que l'agent *choisit* effectivement à un moment. Elles représentent toutes ce que le monde offre comme possibilité à un agent, et non pas ce qu'il choisit à ce moment. Les moments sont conçus, dans la théorie, comme les derniers moments d'indétermination. Ce que l'agent fait pour passer de ce moment d'indétermination à un moment où ce qu'il a choisit est fixé n'est pas traité par Belnap et co..

2.1.2 Indépendance des agents :

P8 (*Indépendance des Agents*) : Pour tout m $\in$ de *Notre_Monde*, pour toute fonction f_m de *Agents* telle que $f_m(\alpha) \in Choix_m^\alpha$, pour tout $\alpha \in Agents$; $\bigcap \{f(\alpha) : \alpha \in Agents\} \neq \varnothing$

Ce postulat garantit que l'intersection des choix possibles des agents à *m* n'est jamais vide. Il se nomme « indépendance des agents »[98] parce qu'il exprime le fait que les possibilités d'un agent à un moment ne peuvent exclure les possibilités d'un autre agent à ce même moment. Ainsi, $Choix_m^\beta = Choix_m^\alpha = \{P_1, P_2\}$ viole P8 parce que si α réalise P_1 il exclut du même coup la réalisation de P_2 pour β. Illustrons cette contrainte par un exemple. Supposons qu'à un moment je suis en voiture et que la route se sépare en Y. J'ai deux possibilités : $Choix_m^{moi} = \{Droite, Gauche\}$. Au même moment un astronaute sur une station spatiale décide ce qu'il mangera pour diner : $Choix_m^{Astro} = \{Poulet, Boeuf\}$. Il y a violation du postulat d'indépendance des agents si, par un mécanisme quelconque, mon choix exclut une possibilité pour l'astronaute, ou l'inverse. Par exemple, si mon virage à gauche empèche l'astronaute de choisir, *au même moment*, le poulet ou que le choix du bœuf par l'astronaute m'empèche de tourner à droite, alors nos deux choix ne sont pas indépendants. On aura Π_m = {(*Droite-Poulet*), (*Gauche-Bœuf*)} plutôt que Π_m = {(*Droite-Poulet*), (*Gauche-Bœuf*), (*Droite-Bœuf*), (*Gauche-Poulet*)}.

Comme le remarquent Belnap et co., la contrainte d'indépendance des agents est

---

[98] Dans les premiers textes de la théorie des *stits* P8 était appelé « le monde suit son court » (*the world goes on*) [1988] ou « quelque chose se passe » [1992] parce qu'il implique qu'il y a au moins un moment futur compatible avec tout ce que les agents font.

très forte. Elle exclut tous les cas où $Choix^{\alpha}_{m}$ = $Choix^{\beta}_{m}$, sauf bien entendu lorsque $Choix^{\alpha}_{m} = Choix^{\beta}_{m} = \{H_{(m)}\}$. De même, elle garantit que si $Choix^{\alpha}_{m} = \Pi_{m}$ pour un agent α, alors pour n'importe quel autre agent β, à *m*, $Choix^{\beta}_{m} = \{H_{(m)}\}$.

Notons que grace à P8, on peut calculer le nombre de possibilité immédiate à un moment m. Il s'agit du produit du nombre de possibilité de chaque agent à m. Par exemple, si $Choix^{\alpha}_{m}$ a quatre éléments et que $Choix^{\beta}_{m}$ en a trois, il y aura douze possibilités immédiates à m.

Belnap et co. ne justifient pas explicitement ce postulat. Il font cependant la remarque suivante.

> « S'il y a des agents dont les choix simultanés ne sont pas indépendants, [...] alors nous devons traiter dans notre théorie de l'action un phénomène tout aussi exotique que ceux découverts par Einstein, Podolski et Rosen »[99] [*idem* : 218].

Les phénomènes en question furent décrits pour la première fois par les trois physiciens mentionnés dans la citation [Einstein, Podolski et Rosen : 1935]. Ils consistent en l'interaction à distance de deux événements simultanés qui, par conséquent, ne peuvent être liés par la relation de causalité. Exemple :

> « Deux particules sont créés par un certain processus et s'éloignent l'une de l'autre. Lorsqu'elles sont largement séparées dans l'espace, elles rencontrent un appareil de mesure orienté <perpendiculairement à leur trajectoire>. [...] Les mesures des deux particules ont lieu simultanément dans le cadre de référence de l'observateur. [...] Notre meilleure théorie physique nous apprend, étant donné l'état du système avant la mesure, que la probabilité d'avoir une mesure <du spin> ascendant d'un côté est de 1/2, mais que la probabilité d'obtenir cette même mesure *conditionnelle à la mesure <d'un spin> descendant de l'autre côté est de 1.* »[100]

La remarque de Belnap et co. vise peut-être à signaler, comme Bicchieri et Green le font, que « tous cas satisfaisant les conditions <d'interaction à distance> entre agents sont mystérieux. »[101]

---

[99] « If there are agents whose simultaneous choices are not independant, [...] then we shall need to treat in the theory of agency a phenomenon just as exotic as those discovered in the land of quantum mechanics by Einstein, Podolski and Rosen. », *idem* : 218

[100] « Two particules are created by a certain process and rush off in opposite directions. When they are widely separated in space, they encounter a measuring apparatus oriented in the vertical direction. [...] The measurements of the two distant particles take place simultaneously in the frame of reference of the observer. [...] Our best physical theory tells us that given the state of the system prior to the measurement, the probability of getting an up measurement on a given side is 1/2 ; but the probability of getting an up measurement on a side *conditional on getting a down measurement on the other side* is 1 », Skyrms « EPR : Lessons for Metaphysics », dans French, Uehling et Wettstein, *Midwest Studies in Philosophy, Vol. IX, Causation and Causal Theory*, University of Minnesota Press, 1984 : 246

[101] « We readily grant that any case satisfying the above five conditions would be mysterious. », Bicchieri et Green, «Symmetry Arguments for Cooperation in the Prisoner's Dilemma », dans Ghita Hölmström-

Remarque (Indépendance des agents et la définition du concept d'agent) :
De prime abord, P8 peut être vu comme la contrainte intra-théorique au concept d'agent dont j'ai remarqué l'absence dans la section précédente. Si P8 exclut les cas d'interaction à distance entre agents et que, en outre, on reconnaît l'existence de ces phénomènes au niveau des particules élémentaires, alors on peut apparemment conclure que les particules élémentaires, qui sont des individus, ne sont pas des agents et donc que P8 restreint l'ensemble des agents à un sous-ensemble propre des individus. S'il était valable, cet argument laisserait cependant la porte ouverte à de nombreux individus qui ne sont pas des particules élémentaires mais qui ne pas non plus des agents. L'argument échoue cependant par pétition de principe. Pour supposer que P8 exclut les phénomènes d'action à distance entres les individus qui sont des agents et que, en outre, ces phénomènes existent entre certains individus de l'ensemble des particules atomiques et subatomiques, il faut d'ores et déjà accepter que ces particules ne sont pas des agents.

Quoiqu'il en soit, la question d'accepter ou non l'interaction à distance entre agents est du ressort de la physique. La supposition que les agents forment un sous-ensemble propre des individus n'est donc pas plus fondée au moyen du postulat d'indépendance des agents qu'elle ne l'était auparavant.
Fin de la remarque.

2.1.3 $Choix^{\alpha}_{m}$ et Π_m :

Au niveau strictement formel, les fonctions Π et *Choix*; $\Pi_m(h)$ et $Choix^{\alpha}_{m}(h)$; $\Pi_m(m_1)$ et $Choix^{\alpha}_{m}(m_1)$ et enfin $\underline{\Pi}_m(m_1)$ et $\underline{Choix}^{\alpha}_{m}(m_1)$ ont des domaines et des images analogues. Les partitions Π_m et $Choix^{\alpha}_{m}$ sont évidemment liées par *pas de choix entre les histoires indivisées*, qu'on peut reformuler des deux manières suivantes:

P7.2 Si $\Pi_m(m_1) = \Pi_m(m_2)$ alors $Choix^{\alpha}_{m}(m_1) = Choix^{\alpha}_{m}(m_2)$

P7.3 Si $\underline{\Pi}_m(m_1) = \underline{\Pi}_m(m_2)$ alors $\underline{Choix}^{\alpha}_{m}(m_1) = \underline{Choix}^{\alpha}_{m}(m_2)$

De plus, on a, pour toutes les histoires de H(m) et pour n'importe quel moment m,

CΠ1 P7 $\Pi_m(h) \subseteq Choix^{\alpha}_{m}(h)$

CΠ2 P7 $\Pi_m(m_1) \subseteq Choix^{\alpha}_{m}(m_1)$

Hintikka et Raimo Tuomela (eds.), *Contemporary Action Theory, Vol.2: Social Action*, Kluwer, 1997 : 239.
Les conditions en questions décrivent ce qu'est un « agentive analogue of EPR », *idem* : 239

CΠ3 P7 $\underline{\Pi_m}(m_1) \subseteq \underline{Choix^{\alpha}_m}(m_1)$

Ces trois relations montrent que Π_m est une sous-partition de $Choix^{\alpha}_m$ et qu'il en est de même pour leur fonctions dérivées respectives.

J'ai montré à la fin du chapitre 1 qu'à chaque possibilité immédiate (chaque élément de Π_m) correspond un moment futur. Ce fait n'a pas d'équivalent pour la partition $Choix^{\alpha}_m$. Comme les éléments de cette partition peuvent être constitués de plusieurs possibilités immédiates et qu'à chacune correspond un moment, il est clair qu'à chaque élément de $Choix^{\alpha}_m$ peut correspondre plusieurs moments futurs incomparables.

Remarque sur les relations d'équivalence sur $H_{(m)}$:

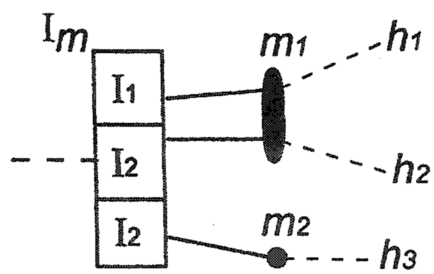
Alberto Zanardo[102] a remarqué que $\equiv_m$ et $\equiv^{\alpha}_m$ sont des cas particuliers d'une relation d'équivalence plus générale, notée $\equiv^{I}_m$ sur $H_{(m)}$, qu'il nomme « relation d'indiscernabilité » : « I est une fonction ayant pour domaine <*Notre_Monde*> telle que

(1) I_m est une relation d'équivalence sur $H_{(m)}$

(2) si $m_0 < m$ et $I_m(h_1, h_2)$ alors $I_{m0}(h_1, h_2)$. »[103]

L'équivalence pour le choix et l'indivision satisfont (1) et (2) et sont donc des relations d'indiscernabilité. La condition (2) est cependant assez souple pour permettre des partitions I_m qui « discernent » des histoires indivisées à m.

Exemple :



Dans ce cas, $I_m(h_1) = \{h_1\}$, $I_m(h_2) = \{h_2\}$ et $I_m(h_3) = \{h_3\}$ alors que $\Pi_m(h_1) = \Pi_m(h_2) = \{h_1, h_2\}$ et $\Pi_m(h_3) = \{h_3\}$[104]. Il est clair ici que $\Pi_m(h_1)$ n'est pas un sous-ensemble de $I_m(h_1)$ et donc que $h_1 \equiv_m h_2$ n'implique pas $h_1 \equiv^{I}_m h_2$.

---

[102] Alberto Zanardo, « Undivided and... », 1998 : 311

[103] *Idem.* Il est à noter que cette condition est en fait la condition de « bonne mémoire » (*perfect recall*) utilisée dans les représentations extensives de jeux. Voir l'énonciation de cette condition dans R. Myerson, *Game Theory*, Harvard UP, 1997 : 43

[104] Je suppose ici que $I_m(h_1)$ reçoit la même définition que ses deux « cousines » pour Π et pour *Choix*

Zanardo considère que I_m est une partition dont les ensembles représentent les histoires que l'agent n'est pas en mesure de discerner épistémiquement. Il justifie cette interprétation par l'exemple précédent : $I_m(h_1) \neq I_m(h_2)$ parce que l'agent est en mesure de *prévoir* les événements futurs et donc il *sait* que les deux histoires sont distinctes. On peut se demander si la condition (2) est une contrainte plausible sur les partitions de $H_{(m)}$ visant à représenter ce que l'agent peut distinguer épistémiquement.

L'interprétation de Zanardo pointe cependant vers une ouverture intéressante dans le modèle $\langle$*Notre_Monde*, $\leq\rangle$. Sa tentative de définir une partition représentant les histoires discernables à m montre que l'on peut utiliser différentes partitions de $H_{(m)}$ pour représenter, par exemple, ce que l'agent sait ou croit à propos de cet ensemble d'histoires. L'étude de différentes partitions sur de $H_{(m)}$ et des conditions à y imposer pour qu'elles représentent certains états mentaux des agents me semble être une voie possible pour intégrer des composantes intentionnelles aux agents dans la théorie des *stits*. Il semble de des précurseurs comme von Neumann et Morgenstern ont utilisé une approche semblable.

La partition $Choix_m^\alpha$ permet d'exprimer des modalités liées aux possibilités d'un agent à un moment à travers la définition de différents connecteurs modaux dont le *stit* fait partie. Zanardo a examiné les propriétés expressives d'un langage contenant les connecteurs F(il sera le cas que…), P(il fut le cas que…), ◊ (il peut être le cas que…), les connecteurs de vérité classiques et un nouveau connecteur de possibilité. Les conditions de vérité du connecteur de possibilité historique classique, qui signifie « il peut maintenant être le cas », sont définies comme suit :

$\Diamond : \langle m, h\rangle \models \Diamond A$ ssi $\exists h_1 [h_1 \in H_{(m)} \wedge \langle m, h_1\rangle \models A]$

Cette manière d'interpréter la possibilité historique n'est pas la seule qui existe dans la littérature. « Il est maintenant possible que » est quelque fois interprété en quantifiant sur les moments co-instantanés et non sur les histoires qui passent par un moment. Probablement pour distinguer ces deux types de modalité historiques, Belnap et co. utilisent l'expression « il est établi que » pour interpréter intuitivement la nécessité historique qui quantifie sur les histoires. On peut choisir de réserver « il est nécessaire que » pour la nécessité historique qui quantifie sur les moments co-instantanés. Je ne ferai pas cette distinction dans la suite parce que j'utilise presque exclusivement le premier type de modalité historique.

La condition de vérité pour le connecteur de possibilité historique restreinte de Zanardo, qui signifie « il peut être le cas dans la possibilité immédiate $\Pi_m(h)$ à *m* », sont :

$\Diamond_\Pi : \langle m, h\rangle \models \Diamond_\Pi A$ ssi $\exists h_1\, [h_1 \in \Pi_{(m)}(h) \wedge \langle m, h_1\rangle \models A]$

La différence entre les deux connecteurs étant le champ de quantification sur les histoires : tout H_m pour le connecteur classique et seulement Π_m pour le connecteur restreint. Il est clair qu'on peut définir, de manière analogue, un connecteur de possibilité signifiant « il peut être le cas dans la possibilité $Choix^{\alpha}_{m}$(h) *de l'agent* à m » :

$\Diamond_C : \langle m, h\rangle \models \Diamond_C A$ ssi $\exists h_1\, [h_1 \in Choix^{\alpha}_{m}(h) \wedge \langle m, h_1\rangle \models A]$

Ce connecteur existe déjà sous la forme de son contraire, $\Box_c$, signifiant « il est nécessaire dans le $Choix^{\alpha}_{m}$(h) *de l'agent* à m ». Il s'agit d'une adaptation de John Horty du connecteur Δ de Brian Chellas au modèle de la théorie des *stits*, que John Horty[105] a nommé *cstit*.

Le connecteur le plus fort est celui de possibilité historique relativisée au choix : $\langle m, h\rangle \models \Diamond_C A$ implique $\langle m, h\rangle \models \Diamond_\Pi A$ qui implique $\langle m, h\rangle \models \Diamond A$. Le sens inverse échoue cependant : $\langle m, h\rangle \models \Diamond A$ n'implique pas $\langle m, h\rangle \models \Diamond_\Pi A$ et encore moins $\langle m, h\rangle \models \Diamond_C A$. Rien ne garantit que l'histoire qui vérifie $\langle m, h\rangle \models \Diamond A$ ne soit dans la possibilité immédiate qui contient h ($\Pi_m(h)$), tout comme rien ne garantit qu'elle soit dans la possibilité objective de l'agent α qui contient l'histoire h ($Choix^{\alpha}_{m}$(h)).

Zanardo a prouvé que le connecteur $\Diamond_\Pi$ n'est pas définissable dans un langage L_O qui ne contient que les connecteurs ◊, F et G interprétés dans un modèle ⟨*Notre_Monde*, ≤⟩. Cette preuve est transférable, avec les modifications qui s'imposent, pour le connecteur $\Diamond_C$. Elle se développe essentiellement en deux temps : 1) Construire un modèle tel que $<m, h> \models \Diamond_\Pi A$ mais pas $<m, h'> \models \Diamond_\Pi A$ et 2) montrer que, pour toute formule B du langage L_O, $<m, h> \models B$ ssi $<m, h'> \models B$. Le transfert de la preuve est automatique pour un modèle qui ne contient qu'un agent parce qu'à chaque moment on aura $Choix^{\alpha}_{m} = \Pi_m$. Si on a plus d'un agent, il faut modifier légèrement le modèle utilisé par Zanardo. J'ai placé en annexe du mémoire la construction d'un modèle pour deux agents qui satisfait la preuve d'inexprimabilité pour $\Diamond_C$. Ce changement dans le modèle

---

[105] John Horty, *Agency and Deontic Logic*, Oxford UP, 2001

n'a pas de conséquences significatives sur l'essentiel de la preuve, qui repose sur (2) et donc sur les formules de L_O. On peut donc en conclure que le connecteur $\Diamond_C$ n'est pas définissable dans un cadre $\langle$*Notre_Monde*, $\leq\rangle$.

Zanardo n'a pas proposé d'axiomatisation pour un langage contenant $\Diamond_{\Pi}$. Je n'en ai pas trouvé dans la littérature. La plus apparentée est celle de Mark Brown, dans « On the Logic of Ability »[106], où est étudiée l'axiomatisation de connecteurs modaux ayant une signification proche du complexe $\Box\ \Box_C$.

Fin de la remarque.

2.1.4 Décideurs occupés (Busy choosers) :

Notre_Monde est assez souple pour permettre l'existence de chaînes ayant des limites inférieures et supérieures propres et contenant une infinité de moments. En effet, la théorie des *stits* ne postule pas que *Notre_Monde* est discret, dense ou continu. Si une telle chaîne *c* existe et si chacun des moments de cette chaîne n'est pas un moment de choix vide pour α, alors *c* est une séquence continue de choix (*busy chooser sequence*) pour α. Formellement, ceci donne[107] :

D10.1 (*Séquence continue de choix*) *c* est une séquence continue de choix ssi

1) $\forall$m, m' $\in c$ [m *comparable* m_1] (*définition normale d'une chaîne*)

2) $\exists$w, m [$\forall$w'$\in c$ [w < w'< m]] (*limite supérieure et inférieure propore*)

3) $\forall$w $\in c$ [$\exists$w' $\in c$[w < w']] (*densité vers le futur*)

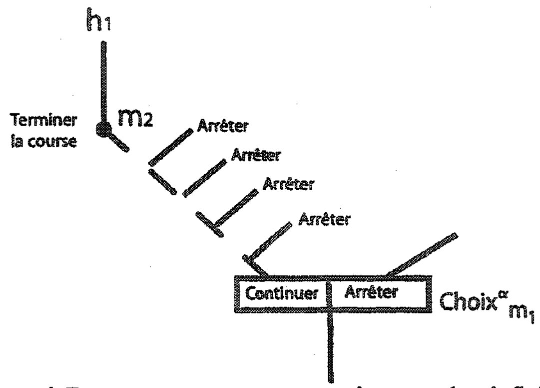
4) $\forall$w $\in c$ [$Choix^{\alpha}_{m} \neq \{H_{(m)}\}$] (*moments de choix pour* α)

L'agent α est un décideur occupé seulement s'il existe un $c \subseteq$ *Notre_Monde* tel que *c* est une séquence de choix continue pour α.

---

[106] Mark Brown, « On thé Logic of Ability », *Journal of Philosophical Logic*, 17, 1988 : 4

[107] Belnap et co. 2001 : 383 (10.1) et 219 (10.2)



Un exemple de décideur occupé. Entre m_1 et m_2 notre coureur à un nombre infini de moments de choix.

Belnap et co. ne soutiennent pas qu'il existe, dans le monde, des décideurs occupés. Ils se contentent de présenter quelques exemples qui semblent être des cas potentiels (un coureur[108] et un combat de Don Quixotte [109]). Notons que Lennart Åqvist[110] a lui aussi remarqué la possibilité de formaliser des situations de décideurs occupés dans un arbre dense. Il donne lui aussi l'exemple d'un coureur pour l'illustrer et, en bout de ligne, s'abstient lui aussi d'affirmer catégoriquement l'existence ou l'inexistence de telles situations.

Quoique la question de l'existence des décideurs occupés reste ouverte au plan philosophique, elle a des conséquences importantes au niveau formel. Tout d'abord, elle suppose que certaines portions de *Notre_Monde* sont denses. Ensuite, elle invalide l'équivalence entre agir et s'abstenir de s'abstenir ([α *stit* : A] $\leftrightarrow$ [α *stit* : $\neg$ [α *stit* : $\neg$ [α *stit* : A]) dans la théorie des *stits*. Enfin elle détermine le nombre de modalités d'action différentes dans la théorie des *stits*[111].

2.2 Explicitation philosophique du concept de choix

2.2.1. Les concepts de possibilité objective et de possibilité immédiate :

Les différents éléments de $Choix^{\alpha}_{m}$ sont les possibilités objectives de α à *m*. Dans la suite, les expressions « options de α à m », « alternatives de α à m » et « choix possibles de α à

---

[108] *Idem* : 49
[109] *Idem* : 268
[110] Leenart Aqvist, « An analysis of Action Sentences based on a " Tree" system of Modal Tense Logic », dans C. Rohrer (ed.), *Paper on Tense, Aspect and verb classification*, TBL Verlag Gunter Narr, Tübingen, 1978, pp. 111-161

m » seront également utilisées pour distinguer plus nettement les choix possibles des possibilités immédiates, qui sont indépendantes d'un agent et qui désignent les éléments de la partition Π_m. L'expression « choix possible » est la plus largement utilisé par Belnap et co.. Elle me paraît adéquate pour autant qu'on garde à l'esprit que « choix » n'a pas de connotation mentaliste. Par « connotation mentaliste » j'entends une quelconque référence à un aspect intentionnel du choix, comme par exemple le rôle des croyances et des désirs, ou à un quelconque acte, peut-être mental, tel que décider, délibérer ou tout simplement choisir.

Cette conception totalement objective des éléments de $Choix_m^\alpha$ est renforcée par le postulat *pas de choix entre les histoires indivisées*. Rappelons que ce postulat stipule que les agents ne peuvent pas faire maintenant ce que la nature ne leur permettra de faire que plus tard. Or, si on associe au concept de choix celui de délibération ou de décision, il est concevable qu'un agent *décide* à l'avance de ce qu'il entreprendra plus tard, ou tout simplement que cet agent considère les options auxquelles il prévoit être confronté; par exemple lorsqu'il planifie. Lorsqu'un joueur choisit une stratégie pour jouer à un jeu, il choisit ce qu'il fera dans d'éventuelles situations qui se présenteront subséquemment. En d'autres termes, si on conçoit le choix comme une *représentation* des possibilités objectives d'un agent, alors *pas de choix entre les histoires indivisées* semble trop restrictif parce que l'agent peut décider ce qu'il fera plus tard. Si, au contraire, le concept de choix ne désigne *que* les possibilités objectives d'un agent à un point, *pas de choix entre les histoires indivisées* paraît adéquat. Si deux possibilités ne seront ouvertes, pour α, que plus tard, il paraît tout à fait correct de supposer que ces possibilités ne sont pas ouvertes pour α maintenant. En termes très simples : chaque chose en son temps.

Les éléments de $Choix_m^\alpha$ représentent les possibilités objectives *d'un agent* à un moment. Pourquoi faut-il relativiser les possibilités à un agent? Si l'agent α était capable de déterminer tout ce qui se passera dans l'univers au prochain moment, alors on aurait $Choix_m^\alpha = \Pi_m$, vu le caractère global des moments, et la partition $Choix_m^\alpha$ serait superflue. Nous savons, en vertu de l'indépendance des agent, que cet agent devrait être considéré comme le seul acteur dans tout l'univers à ce moment. Comme la plupart des agents n'ont

---

[111] Voir Ming Xu, « Busy Choice Sequences, Refraining Formulas and Modalities », *Studia Logica*, 54,

pas une influence aussi globale, ou qu'ils ne sont pas seuls dans l'Univers, leur options consistent plutôt à « restreindre le cours des événements à un sous-ensemble défini des histoires encore possibles à ce moment »[112]. L'introduction de la partition $Choix_m^\alpha$ est donc motivée par le désir de tenir compte des actions et processus indéterministes ayant cours simultanément à l'action de l'agent α. Prenons un exemple.

Je rédige présentement mon mémoire. De nombreuses possibilités me sont ouvertes. Je peux (1) continuer cette rédaction, (2) aller en voiture au café ou (3) ouvrir mon navigateur pour regarder mon courrier électronique. Supposons qu'au moment où je rédige ce texte, un individu s'apprête à voler une des voitures dans la rue. Si je continue à taper, je contrains l'ensemble des moments subséquents possibles à l'ensemble de ceux où je me consacre à mon travail. Je suis cependant limité. Je ne contrôle pas tout ce qui se passe dans l'Univers au moment où je continue à taper. En particulier, je ne contrôle pas les agissements du présumé voleur. Le postulat d'indépendance des agents garantit que, pour chacune de mes actions possibles, il y a une possibilité immédiate compatible avec chacune des options du voleur. En d'autres termes, il y a plusieurs moments futurs incomparables entre eux qui sont compatibles avec la poursuite de ma rédaction. Par exemple, m_1 : je rédige et on vole ma voiture, m_2 je rédige et le voleur s'attaque plutôt à la voiture de mon voisin.

Utilisons le formalisme présenté dans la section précédente pour clarifier cet exemple. Supposons que P_1 corresponde à l'action " je continue l'écriture de ce texte ". Les possibilités immédiates suivantes sont compatibles avec cet acte : 1) on vole ma voiture et 2) le voleur s'empare de la voiture de mon voisin. Malheureusement, mon influence sur le monde est locale; elle se limite à établir si oui ou non je continue à travailler et je n'ai aucun contrôle sur les actions du voleur. On a donc, pour moi et pour le voleur :

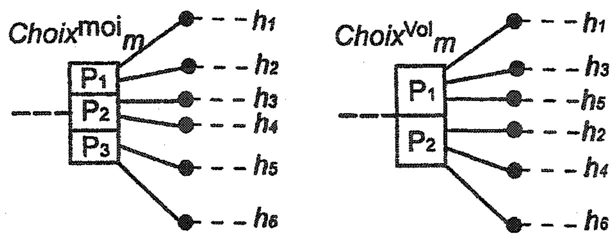
267-301, 1995

[112] « [...] constraining the future course of events as to lie within au definite subset of the possible histories still available at that moment. » John Horty et Nuel Belnap, « The Deliberative *Stit*: A Study of Action, Omission, Ability and Obligation », *Journal of Philosophical Logic*, No.24, 1995 : 311

Mes actions	$Choix^{Oli}_{m_0}$
Travailler	$P_1 = \{h_1, h_2\}$
Aller au café	$P_2 = \{h_3, h_4\}$
Regarder mon courriel	$P_3 = \{h_5, h_6\}$

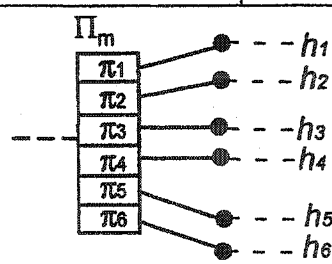
Actions du voleur	$Choix^{Vol}_{m_0}$
Prendre la voiture d'Olivier	$P_1 = \{h_1, h_3, h_5\}$
Prendre la voiture de son voisin	$P_1 = \{h_2, h_4, h_6\}$

Ou, en utilisant la schématisation de Belnap et co. :

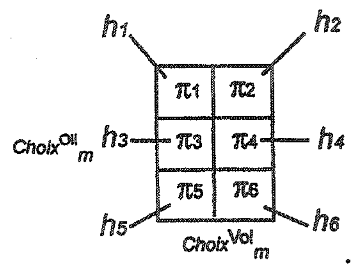


En regard de ces deux partitions, Π_m est composé de six éléments. Rappelons-nous que chacun d'eux identifie au moins un m' (m < m') pour lequel $H_{(m')} = \pi$.

Π_m	Moi	Le voleur
π_1	Travailler	Prendre la voiture d'Olivier
π_2	Travailler	Prendre la voiture de son voisin
π_3	Aller au café	Prendre la voiture d'Olivier
π_4	Aller au café	Prendre la voiture de son voisin
π_5	Regarder mon courriel	Prendre la voiture d'Olivier
π_6	Regarder mon courriel	Prendre la voiture de son voisin



Pour représenter conjointement les possibilités des deux agents et les possibilités immédiates à m, Belnap et co. utilisent la représentation en forme extensive d'un jeu telle qu'elle fut introduite par von Neumann et Morgenstein.



Chacune des actions possibles d'un agent est un événement local qui n'influence pas tout ce qui se passe dans l'univers à ce moment. Alors que la partition Π_m permet de représenter la somme de toutes les possibilités engendrées par des événements locaux, il faut noter que $Choix_m^{\alpha}$ permet de relativiser l'ensemble des futurs possibles aux individus spatio-temporellement localisés qui prennent part à ces événements, et ce, sans faire intervenir une nouvelle catégorie ontologique d'événement local. $Choix_m^{\alpha}$ ne peut cependant pas relativiser les possibilités à un événement local particulier. Cette partition ne permet de représenter que la somme des possibilités d'un agent à un moment. Reprenons notre exemple.

De la supposition que ni moi ni le voleur n'avons d'influence sur les actions de l'autre, il paraît normal de dire que, relativement à l'événement local « Olivier continue à travailler », le voleur n'a qu'une seule option : à être témoin passif de cet événement. Malheureusement, il en est de même pour moi relativement à l'événement local « le vol de la voiture d'Olivier ». Ici « être témoin » signifie simplement être dans le monde au même moment que l'événement. Il semble donc qu'il soit possible de représenter cette indépendance dans les tableaux suivants :

<table>
<tr><th>Actions du voleur</th><th>$Choix_{m_0}^{Oli}$ relativement aux actions du voleur</th></tr>
<tr><td>Prendre la voiture d'Olivier</td><td rowspan="2">$P_1 = \{H_{(m)}\}$</td></tr>
<tr><td>Prendre la voiture de son voisin</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Mes actions</th><th>$Choix_{m_0}^{Vol}$ relativement à mes actions</th></tr>
<tr><td>Travailler</td><td rowspan="3">$P_1 = \{H_{(m)}\}$</td></tr>
<tr><td>Aller au café</td></tr>
<tr><td>Ouvrir son courriel</td></tr>
</table>

Cette représentation est inexacte parce que moi et le voleur avons des possibilités dans $H_{(m)}$. L'ontologie temporelle de la logique du temps ramifié, où la notion de moment est primitive, ne permet pas d'exprimer l'indépendance des événements locaux simultanés. Les moments sont des événement complets à un instant et, compte tenu de ce fait, on ne peut que relativiser les possibilités aux agents en tenant compte de tout ce qui se passe par ailleurs à ce moment. En d'autres termes, les moments sont globaux et doivent être pris comme tels même si on relativise les possibilités à des agents locaux. Nous touchons donc ici à la limite de ce que permet une théorisation des possibilités objectives en termes de moments.

2.2.2 Choix, Agents et processus indéterministes :

Considérons donc que le concept de choix représente, dans la théorie des *stits*, les possibilités objectives d'un agent à un moment. J'ai mentionné dans la section 1 de ce chapitre que le concept d'agent est primitif et, par conséquent, qu'il n'y a pas de critère pour distinguer quels individus sont des agents. Il faut supposer, comme le font Belnap et co., que les agents forment un sous-ensemble propre des individus. On peut maintenant apprécier l'importance de cette supposition en étudiant une interprétation possible du modèle où la supposition de Belnap et co. n'est pas prise en compte.

L'exemple que je présente est adapté d'un autre exemple d'Isaac Levi[113]. L'objectif est de montrer que le modèle ⟨*Notre_Monde*, ≤, *Agents*, *Choix*⟩ peut être utilisé pour décrire des processus aléatoires. Ce fait fut remarqué par Franz von Kutchera et Stephen Wölfl:

> « Notre utilisation de "agent" et "choix" doit être prise dans un sens très large. Mère Nature est aussi un agent et ses "actions" consistent en des événements de chances. Les "actions" dont nous parlons ne sont donc pas toutes des actions dans le sens usuel du terme. »[114]
> « Les agents, dans le sens de l'approche en arbre de l'action, n'ont pas besoin d'être conçus comme des personnes. *Il n'y a pas de condition dans cette approche qui interdise de compter des processus aléatoires (réels, s'il en existe) comme des agents.* »[115]

---

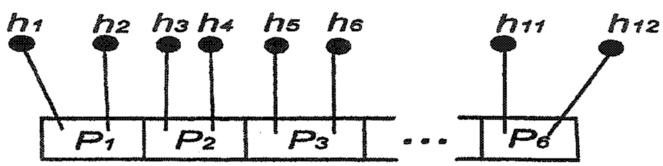
[113] Isaac Levi, *Hard Choices*, Cambridge UP, Cambridge, 1986 : 45-51

[114] « Our talk of "agents" and "choices" has to be taken in a very broad sense, though. Mother Nature is an agent, too, and her "actions" consist in chance events. The "actions" we talk about, then, are not all of them actions in the usual sense of the word. », Franz von Kutschera, « Causation », *Journal of Philosophical Logic*, 22 : 577

[115] « Agents in the sense of the tree approach to agency need not be thought of as persons. There is no condition in the approach that would forbid counting (real) random processes (given that there are such) as agents. », Stepen Wölfl, compte-rendu de Belnap et co. 2001, *Notre Dame Philosophical Review*, 2002.08.02, http://ndpr.icaap.org/content/archives/2002/8/wolfl-belnap.html, je souligne.

Supposons la chute d'un dé régulier à six faces. Qu'il soit lancé par un agent ou que cette chute soit causée par une collision avec un autre objet en mouvement n'est pas important ici. Ce qui compte est que le dé puisse s'immobiliser en présentant une des six faces vers le haut. Pour les fins de l'exemple, supposons que la chute du dé est un authentique processus aléatoire[116]. Avant que le dé ne s'immobilise, nous sommes donc en présence de six résultats possibles. En termes statistiques, on dira que l'espace échantillonal de cet événement, la chute du dé, contient six éléments.

On peut aisément intégrer cette situation dans le cadre ⟨*Notre_Monde*, ≤ , *Agents*, *Choix*⟩. Soit un moment m où le dé est sur le point de s'immobiliser. Il y a, à m, six possibilités objectives dans lesquelles le dé est immobile et présente l'une de ses faces vers le haut.



Comme les agents, l'événement auquel le dé prend part est local et a une influence limitée sur le monde. Sa course ne suffit pas à déterminer un seul moment qui suivra la chute; elle restreint l'ensemble des moments subséquents possibles à ceux où il tombe sur un chiffre en particulier. Ainsi, la partition $Choix_m^\alpha$ est tout indiquée pour représenter l'influence causale du dé sur les histoires. $Choix_m^\alpha = \{\{h_1, h_2\}, \{h_3, h_4\}, ..., \{h_{11}, h_{12}\}\}$ pourrait, par exemple, représenter la partition de $H_{(m)}$ assignée par la fonction *Choix* à m, *si on considère le dé comme un agent.* Dans cette partition, les histoires pourvues d'un indice impair (h_1, h_3, h_5...) représentent une histoire où le dé tombe sur une de ses six faces et quelqu'un vole ma voiture alors que dans les autres histoires (h_2, h_4, h_6...) le dé tombe sur la même face mais le voleur se laisse plutôt tenter par la voiture de mon voisin.

Il semble que les termes « agent » et « choix » ne soient pas appropriés pour décrire la chute d'un dé. Devant cette tension, deux attitudes sont possibles. La première consiste à accepter que la partition $Choix_m^\alpha$ ne représente que les possibilités objectives

[116] L'exemple ne repose pas sur ce cas précis. On peut le reconstruire avec n'importe quel processus indéterministe; la dégénération d'un atome radioactif par exemple.

d'un individu à un moment et que, comme Levi le remarque, les possibilités objectives « peuvent être attribuées à des objets et des systèmes pour lesquels il n'est pas question de choix »[117]. C'est la position de Von Kutchera et la lecture de Wölfl de la théorie des *stits*. L'autre consiste à postuler explicitement que l'ensemble des agents est restreint dans l'ensemble des individus. C'est la stratégie de Belnap et co. Dans les deux cas, la fonction *Choix* attribue aux éléments de *Agents* des possibilités objectives *et seulement ceci*. Il ne s'agit pas d'une lacune de la théorie puisque le concept de possibilité objective semble être une condition essentielle à une conceptualisation de l'action en termes de « contraindre le cours des événements futurs à un sous-ensemble précis de l'ensemble des possibilités <immédiates> ouvertes à ce moment »[118]. Il faut cependant être bien attentif au fait que le terme « choix » n'a aucune connotation mentaliste.

2.2.2 Moment de choix et dernier moment d'indétermination:

Par simple contra-position sur *pas de choix entre les histoires indivisées*, on obtient une propriété philosophique fondamentale du concept de choix dans la théorie des *stits* (en supposant que h_1 et h_2 appartiennent à $H_{(m)}$).

P7.3 Si $h_1 \perp^{\alpha}_{m} h_2$ alors $h_1 \perp_{m} h_2$

Si deux histoires ne sont pas équivalentes pour le choix d'un agent à *m*, alors ces histoires se divisent à *m*. En d'autres termes, si pour un agent α à *m* la fonction *Choix* assigne plus d'une possibilité objective, alors *m* est « le dernier moment avant que les choses ne soient décidées »[119]. Un moment de choix n'est pas un moment où l'agent *choisit* effectivement l'une des options qui se présentent à lui, c'est plutôt le dernier moment où ces options sont encore ouvertes.

La situation est la même pour les moments d'embranchement, c'est-à-dire les moments où la partition Π_m contient plus d'un éléments. Ces moments sont les derniers avant qu'une des possibilités immédiates π se réalise.

Pour n'importe quelle paire d'histoires (h_1, h_2), s'il existe un moment m tel que $h_1 \perp^{\alpha}_{m} h_2$ ou $h_1 \perp_{m} h_2$, alors ce moment est le *supremum* de $h_1 \cap h_2$. Or, nous verrons que la

---

[117] « Abilities may be attributed to objects and systems when no question of choice arises », Issac Levi, *Hard Choices*, 1986 : 47. Le concepts d'habilité de Levi correspond à celui de possibilité objective chez Belnap et co..

[118] « [...] constraining the future course of events as to lie within au definite subset of the possible histories still available at that moment. » Horty, 2001 :12.

vérité d'un énoncé contenant un connecteur *stit*, à un moment m_1, est conditionnelle à l'existence d'un moment m_0 tel que $m_0 < m_1$ et où il existe au moins une paire d'histoires telle que $h_1 \perp^{\alpha}_{m0} h_2$. Ainsi, s'il existe des énoncés de la forme [α *stit*: A] qui sont vrais alors il existe dans *Notre_Monde* des paires d'histoires dont l'intersection contient un *supremum*.

C'est pour cette raison que j'ai noté, dans le chapitre précédent, que l'existence de certains *suprema* est garantie par l'existence de moments de choix, et ce, malgré le fait que Belnap et co. s'abstiennent de postuler que *Notre_Monde* est un semi-treillis.

Fin de la remarque.

2.3 Rôle des concepts de choix et d'agent dans l'interprétation du langage-objet de la théorie des stits :

2.3.1 Langage-objet :

Le langage formel le plus simple qui est interprété grâce à la structure ⟨*Notre_Monde*, ≤, *Agents*, *Choix*⟩ est nommé L_{stit}.

Vocabulaire de L_{stit} :

(1) des constantes individuelles $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta, \beta_2, \beta_2, \ldots$ représentant des agents.

(2) des constantes propositionnelles : $p, p_1, p_2, \ldots$ exprimant des propositions.

(3) les constantes logiques suivantes : ¬, &, *stit*, [G,H, □]

Règles de formation dans L_{stit} :

p est une formule bien formée (fbf). Si A et B sont des fbfs et α est une constante d'agent, alors ¬A, A & B et [α stit :A] sont de nouvelles formules bien formées. Rien d'autre n'est une formule bien formée.

Règles d'abréviation dans L_{stit} :

Disjonction (A ou B): $A \vee B =_{df} \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$

Implication matérielle (Si A alors B) : $A \rightarrow B =_{df} \neg(A \,\&\, \neg B)$

Équivalence matérielle (A si et seulement si B) : $A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

[Passé : $PA =_{df} \neg H \neg A$; Futur : $FA =_{df} \neg G \neg A$, possibilité historique : $\Diamond A =_{df} \neg \Box \neg A$]

Tautologie : $T =_{df} A \rightarrow A$

On remarque que le connecteur *stit* n'est pas introduit par définition à partir de

---

[119] « The moment of choice is the last moment before the matter is decided. », Belnap et co. 2001 : 212

notions plus primitives. Il s'agit d'un élément primitif de la syntaxe.

Les connecteurs temporels et modaux sont entre crochets pour indiquer que le langage minimal de la théorie ne les contient pas. L'axiomatisation correcte (*sound*) et complète du *astit* proposée par Ming Xu n'utilise que ce langage minimal. Celle pour le *dstit* contient le connecteur $\Box$. Belnap et co. utilisent les connecteurs temporels de Prior (G et H qui signifient respectivement « il sera toujours le cas que » et « il fut toujours le cas que ») pour montrer les différentes propriétés logiques du *stit*.

2.3.2 Interprétation de L_{stit}:

Ce langage est interprété dans un cadre M = ⟨G, *Val*⟩ où G est la structure ⟨*Notre_Monde*, ≤, *Agents*, *Choix*, *Instants*⟩ et *Val* une fonction d'interprétation qui assigne à chaque formule bien formée un élément du domaine d'interprétation. *Val* assigne aux propositions un ensemble de paires de moments et d'histoires. Une proposition est vraie dans une modèle à une paire moment/histoire si cette paire fait partie de l'ensemble de paires que lui a assigné *Val*.

(*Interprétation des propositions*) $<m, h> \models p =_{df} <m, h> \in Val(p)$

La théorie de Belnap et co. utilise donc la notion classique de condition de vérité pour les propositions. Les seules constantes non-logiques de L_{stit}, outre les propositions, sont les agents. Il va sans dire que la fonction d'interprétation *Val* leur assigne des éléments de *Agents*.

(*Agents*) : $Val(\alpha) \in Agents$

Les conditions de vérité des connecteurs de négation et de conjonction sont habituelles. Pour A et B n'importe quelle formule bien formée de L_{stit} :

(*Négation*) $<m, h> \models \neg A =_{df} <m, h> \notin Val(A)$

(*Conjonction*) $<m, h> \models A \,\&\, B =_{df} <m, h> \in Val(A) \cap Val(B)$

Les connecteurs temporels et modaux reçoivent eux aussi leur interprétation classique :

(*Il sera toujours le cas que*) $<m, h> \models GA =_{df} \forall m_1 \, [m_1 \in h \wedge m < m_1 \wedge <m_1, h> \models A]$

(*Il fut toujours le cas que*) $<m, h> \models HA =_{df} \forall m_1 \, [m_1 \in h \wedge m_1 < m \wedge <m_1, h> \models A]$

(*Nécessité historique*) $<m, h> \models \Box A =_{df} \forall h_1 \, [m \in h_1 \wedge <m, h_1> \models A]$[120]

[120] Rappelons que cette nécessité historique correspond à ce que Belnap et co. traduisent par « il est établi que ». Elle est différente de la nécessité historique qui quantifie sur les moments co-instantanés.

Il y a deux concepts d'action qui sont formalisés par le connecteur *stit*. Ils font intervenir les conditions négatives et positives présentées en introduction. Un troisième s'y ajoute. Elle est l'adaptation du connecteur modal de Brian Chellas à la théorie des *stits*, le *cstit*.

Le premier connecteur *stit* à avoir été développé par Belnap et co. est nommé *astit* pour *stit* d'accomplissement. Il est nommé ainsi parce qu'il est évalué seulement lorsque que la vérité de son contenu déclaratif (le A dans [α stit : A]) est établie, c'est-à-dire *après* le moment de choix. De manière quasi-formelle, les conditions positives et négatives du *astit* sont les suivantes :

(Vérité du *astit*) : $\langle m, h \rangle \models [\alpha \textit{ astit} : A]$ ssi il existe un moment $m_0 < m$ tel que :

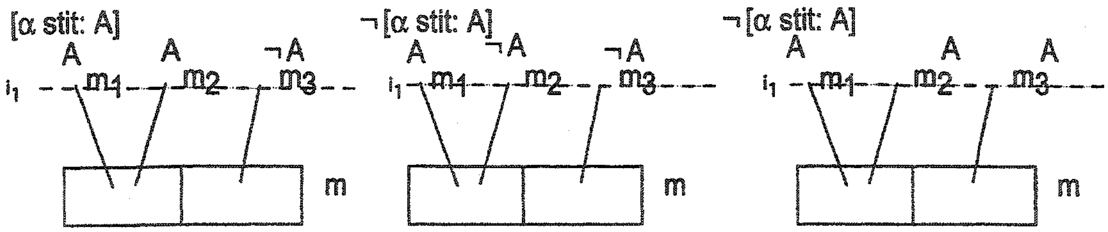
(i) pour tout moment $m_1 \in \underline{Choix}^{\alpha}_{m_0}(m)$ et pour toute histoire $h_1 \in H_{(m1)}$, $\langle m_1, h_1 \rangle \models A$.

(ii) il existe un moment $m_2 \in i_{(m)}$ tel que $m_0 < m_2$ et il existe une histoire $h_2 \in H_{(m2)}$, et $\langle m_2, h_2 \rangle \models A$

Le *astit* est interprété dans un modèle avec instants; les deux clauses de sa règle d'interprétation quantifient sur des moments co-instantanés. Rappelons-nous que $\underline{Choix}^{\alpha}_{m_0}(m)$ désigne l'ensemble des moments co-instantanés à m dont les histoires font parties de la même possibilité objective à m_0. La condition (i) est la condition positive qui assure que la vérité de A est garantie dans la possibilité objective de α à m_0 qui menait à m. La condition (ii) quantifie sur un ensemble plus grand de moments co-instantanés. Plutôt que de se limiter aux éléments d'une seule possibilité objective à m_0, elle quantifie sur toutes les histoires qui passent par m_0 et y cherche une histoire dans laquelle A est fausse. La condition négative assure que la vérité de A n'est pas déjà établie avant le choix de α.

Il vaut la peine de répéter que le *astit* est évalué à un moment *postérieur* au moment de choix m_0[121]. Pour cette raison, « α fait en sorte que p à m» signifie « un choix antérieur de α a établie la vérité de A au moment *m* » pour le *astit*.

[121] Aucun limite temporelle n'est imposée à l'intervalle séparant le moment de choix du moment d'évaluation. Nous verrons dans quelques instants une conséquence de ce fait.



Une illustration du astit : À gauche on a $<m_1, h_1> \models [\alpha \textit{ astit} :A]$ parce que A est vrai dans tous les moments de $\underline{Choix}^{\alpha}_{m_0}(m_1)$ et faux dans un moment co-instantané à m $_1$ postérieur à m. Au centre [α *astit :A*] est faux parce que la condition positive est violée : A est faux dans un moment de $\underline{Choix}^{\alpha}_{m_0}(m_1)$. À droite c'est la condition négative qui est violée : A et vrai dans tous les moments co-instantanés à m_1 postérieurs au moment de choix.

Le rôle du concept de choix dans l'interprétation du *astit* est donc conforme à ce que nous avons présenté dans les sections précédentes de ce chapitre. Philosophiquement, il représente les limites de l'influence locale de α à un moment. Pour que l'agent α fasse en sorte que A il faut que A soit garanti dans les limites de son influence. Formellement, la partition que $Choix^{\alpha}_{m}$ limite le domaine du quantificateur universel dans la condition positive du *astit*.

L'autre connecteur *stit* étudié par Belnap et co. est le *dstit*, pour *stit* délibératif. Les concepts d'agents et de choix y jouent essentiellement le même rôle que dans l'interprétation du *astit*. La différence principale entre ces deux connecteurs est que le *dstit* est évalué au moment de choix. Ceci évite le recours aux instants; plutôt que de quantifier sur des moments co-instantanés, on quantifie sur les histoires dont le moment de choix fait partie ou sur un sous-ensemble de ces histoires formant une possibilité objective à m. Encore une fois, quasi-formellement, l'interprétation du *dstit* est :

(dstit) : $<m, h> \models [\alpha \textit{ dstit} :A]$ ssi :

(i) pour tous $h_1 \in \underline{Choix}^{\alpha}_{m_0}(h)$, $<m, h_1> \models A$

(ii) il existe au moins une $h_2 \in H_{(m)}$ où $<m, h_2> \not\models A$

L'appellation *stit délibératif* est quelque peu trompeuse. Elle semble référer à une délibération de l'agent. Les conditions de vérité du *dstit* révèlent qu'il n'en est rien. Comme tous les connecteurs interprétés au moyen des concepts d'agent et de choix, le *dstit* n'exprime que le rôle que peuvent jouer les possibilités objectives de l'agent, et ce, indépendamment de toute composante intentionnelle.

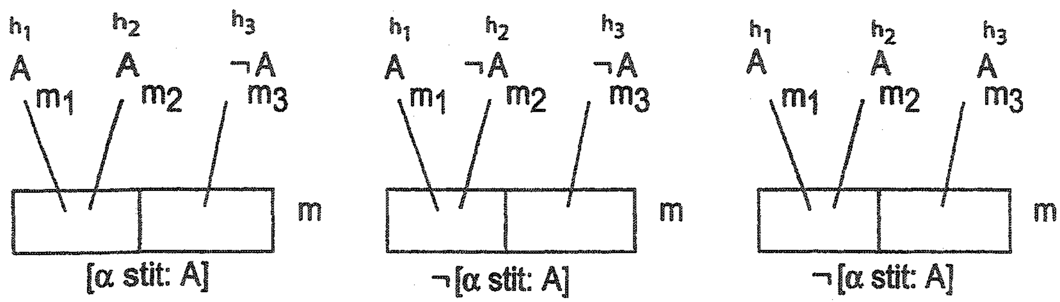
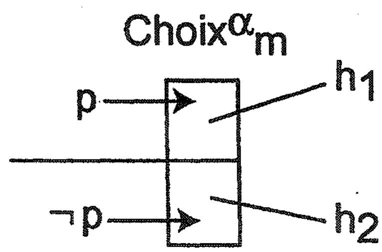


Illustration pour le dstit : La différence principale entre la sémantique du *astit* et du *dstit* est que la seconde ne nécessite pas de quantification sur les instants. À gauche, <m, h> ⊨ [α *dstit :A*] parce que A est vrai dans toutes les *histoires* de $Choix^{\alpha}_{m_0}$ (h_1) et que A est faux dans une histoire de H $_m$. Au centre la condition positive est violée : A est faux dans h_2 qui est équivalente à h_1 pour le choix de α à m. À droite, la condition négative est violée : A est vraie dans toutes les histoires de H_m.

Même si le *dstit* est évalué au moment de choix, Belnap et co. soutiennent qu'il « est naturel de prendre le complément d'un *stit* délibératif comme une formule conjuguée au futur »[122]. Les contraintes sur la fonction d'interprétation *Val* sont cependant trop faibles pour garantir que le [α *dstit* : A] est toujours faux pour des phrases au présent et au passé[123]. Prenons un exemple.



Soit p pour laquelle *Val*(p) = {<m, h_1>} et Π_m = $Choix^{\alpha}_{m}$ = {{h_1}, {h_2}}. Dans ce modèle, on a que (i) pour toutes -en fait, il n'y en a qu'une- histoires de $Choix^{\alpha}_{m}$ (h_1), <m, h_1>⊨ p et (ii) il existe une histoire dans $H_{(m1)}$, h_2, pour laquelle on a que <m_1, h_2> |≠ p. Par conséquent <m_1, h_1> ⊨ [α *dstit* : p] même si p n'est pas au futur.

Cet exemple révèle que la falsification systématique du *dsit* pour les formules au présent requiert la contrainte suivante sur *Val* : si *Val* assigne une paire <m, h> à une constante propositionnelle p alors elle doit également lui assigner toutes les paires <m, h_1> correspondant aux autres histoires de H_m. En termes moins techniques : si une

[122] « It is natural to take the complement of a deliberative *stit* as future tensed », Belnap et co. 2001 : 37.

constante propositionnelle p est vraie dans une paire moment/histoire alors la vérité de p doit être établie à ce moment. Cette condition a déjà été proposée dans la littérature en logique temporelle : « dans [Thomason 1984], on suppose que les évaluations des formules propositionnelles remplissent la condition suivante : $w \approx_t w' \Rightarrow \langle t, w\rangle \in Val(p)$ ssi $\langle t, w'\rangle \in Val(p)$ »[124]. La condition en question est énoncée dans les termes du modèle T x W. Transférée dans le modèle du temps ramifié, elle nous donne que, si une constante propositionnelle est vraie dans une paire moment/histoire, alors elle est vraie à ce moment pour toutes les histoires dont elle fait partie. Sans une telle condition, non seulement certains *stit* délibératifs peuvent être vérifiés pour des phrases au présent mais également au passé. Reprenons notre exemple. Le seul changement à apporter est que $Val(p) = \{\langle m_0, h_1\rangle\}$ avec $m_0 < m$. En gardant les autres caractéristiques du modèle inchangées, on a que $\langle m_1, h_1\rangle \models [\alpha$ *dstit* : Pp].

Au niveau philosophique, la possibilité que des agents puissent faire en sorte maintenant que p fut vrai est très problématique. On peut donc supposer que Belnap et co. imposent la contrainte nécessaire à la fonction *Val* même si, à ma connaissance, ils ne le font pas explicitement.

John Horty a proposé une adaptation du connecteur Δ de Brian Chellas. Pour Horty, ce connecteur n'est rien d'autre qu'un *dstit* sans condition négative. Mentionnons que Chellas évalue son connecteur à partir de l'ensemble d'un ensemble de moments co-instantanés plutôt qu'à partir des histoires qui passent par un moment de choix. Je présente plus en détail le connecteur de Chellas dans l'annexe 1 de ce mémoire.

(cstit) : $\langle m, h\rangle \models [\alpha$ *cstit* :*A*] ssi :

(i) pour tous $h_1 \in Choix^{\alpha}_{m}(h)$, $\langle m, h_1\rangle \models A$

Dans un langage contenant le *dstit* et le connecteur de modalité historique, □ ou ◊, on peut définir par abréviation le *cstit* : [α *cstit* : A] $=_{df}$ [α *dstit* : A] v □ A. À l'inverse, on peut définir le *dstit* dans un langage contenant le *cstit* et le □ : [α *dstit* : A] $=_{df}$ [α *cstit* :

---

[123] Dans « Time and Modality in the Logic of Agency », Brian Chellas a remarqué la nécessité de cette contrainte qu'il nomme « condition d'extensionnalité », voir p.495.

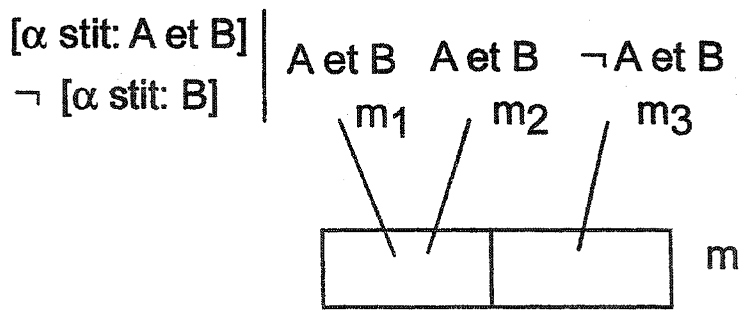
[124] « In [Thomason 1984] the evaluations of propositional formulas are also assumed to fullfil the condition … » Alberto Zanardo, « Branching Time Logic with Quantification over Branches : the point of view of Modal Logic », *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 61, No.1, 1996 : 6.

A] $\wedge \neg \Box$ A. Le connecteur $\Diamond_C$ que j'ai introduit de manière analogue au $\Diamond_\Pi$ de Zanardo, peut être définit à partir du *cstit* : $\Diamond_c A =_{df} \neg$ [α *cstit* : ¬A]. En fait, le *cstit* est le $\Box_c$. Mentionnons que le *astit* et le *dstit* ne sont pas interdéfinissables, contrairement à ce qui est le cas pour *dstit* et le *cstit*.

2.3.3 Quelques propriétés logiques des stits :

Outre le fait déjà mentionné, que [α *dstit* : A] ne peut être vrai que pour un A au futur sous une restriction de *Val*, trois autres propriétés logiques des *stits* méritent qu'on s'y attarde.

Tout d'abord, L_{stit} ne valide pas [α *astit* : A ∧ B] → ([α *astit* : A] ∧ [α *astit* : B]). Belnap et co. ont démontré ceci à travers un contre-exemple simple où [α *astit* : *A* ∧ *B*] ∧ ¬[α *astit* : *B*] est vrai. La condition négative de [α *astit* : A ∧ B] exige que A ∧ B soit faux dans un moment co-instantané à m postérieur au moment de choix. Ceci peut être le cas sans que B soit fausse dans aucun de ces moments, comme le démontre ce schéma.



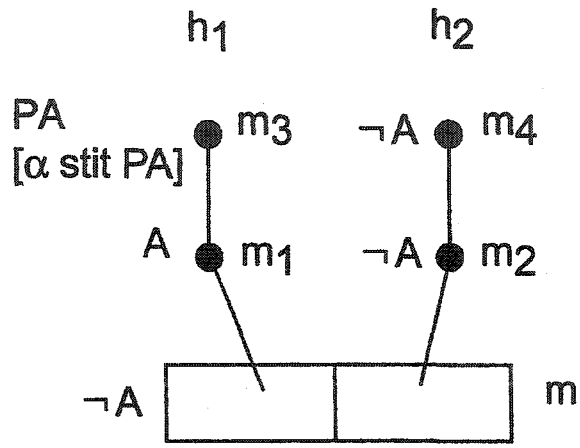
Pour, Belnap et co., ceci est tout à fait adéquat : « il n'y a pas le moindre paradoxe à dire que [...] du fait que vous faites en sorte qu'il y ait un homme blessé qui soit soigné il ne s'en suit pas que vous faites en sorte qu'il y ait un homme blessé [...]. »[125] Cet exemple sous-entend cependant une quantification existentielle, et donc un calcul des prédicats, qui est absent de L_{stit}.

La seconde propriété logique du *astit* exprimant un principe important pour une théorie de l'action est l'équivalence entre agir et s'abstenir de s'abstenir : [α *astit* : ¬ [α *stit* : ¬ [α *stit* : *A*]]] ↔ [α *stit* : *A*]. Cette équivalence tient tant que le modèle ne contient

[125] « There is not the slightest paradox in saying that [...] from the fact you see to it that there is at least one injuried man who is bangaged, it does not follow that you see to it that there is at least one injuried man [...] », Belnap et co., 2001 : 40

pas décideur occupé[126].

La dernière propriété logique du *astit* digne de mention est plutôt contre-intuitive. Brian Chellas[127] a montré que certains modèles d'interprétations satisfont des formules de la forme [α *astit* : PA] ; « α fait en sorte qu'il fut le cas que A ». Pour satisfaire cette formule, il suffit d'introduire un moment entre le moment de choix et le moment d'évaluation du *astit*. Ceci est tout à fait possible parce qu'aucune contrainte sur l'intervalle entre le moment de choix et le moment d'évaluation du *astit* n'est imposée dans la théorie. Examinons l'exemple de Chellas.



Dans cet exemple, on a $Val(\mathrm{PA}) = \{<m_3, h_1>\}$ et $\Pi_{m0} = Choix^{\alpha}_{m} = \{\{h_1\}, \{h_2\}\}$. Dans ce modèle [$\alpha$ *astit* : PA] est vraie à m_3.

La théorie peut-elle éviter ces modèles contre-intuitifs ? Comme le remarque Chellas, elle pourrait le faire en postulat que *Notre_Monde* est discret et que le *astit* ne peut être évalué que dans le successeur immédiat du moment de choix. Belnap et co. semblent avoir opté pour une autre stratégie : développer le concept de chaîne de choix. L'idée étant qu'on modifie la condition de vérité du *astit* de sorte qu'elle admette des chaînes plutôt qu'un unique moment de choix. Cette stratégie s'avère efficace à la condition de postuler que tous les *astits* dont le premier moment de choix est dans le passé plus ou moins lointain du moment d'évaluation doivent être évalués à partir d'une chaîne de choix. La théorie ne fait cependant pas ce postulat.

---

[126] Voir preuve de Ming Xu dans *idem* : 455-458
[127] Brian Chellas, « Time and Modality … », 1992 : 511

2.3.4 Axiomatisation :

Pour clore cette section sur le rôle des concepts d'agents et de choix dans le langage-objet de la théorie, j'en présente deux axiomatisations pour lesquelles Ming Xu a montré certaines propriétés mathématiques.

2.3.4.1 Axiomatisation pour le astit :

J'ai mentionné plus tôt que l'axiomatisation du *astit* de Xu n'utilise que le langage minimal de la théorie. Cette axiomatisation est correcte et complète :

A1. $\neg$ [α *astit* : T] (T = tautologie)

A2. [α *astit* : A] $\rightarrow$ A

A1 représente le fait qu'un agent ne peut pas faire en sorte qu'une tautologie soit vraie alors qu'A2 représente le fait que l'action de α garantie bien la vérité de A. Ils caractérisent les deux composantes de la sémantique du *astit*. Dans le langage plus riche contenant les connecteurs de modalités historiques, on aurait probablement un axiome plus fort que A2, [α *astit* :A] $\rightarrow$ $\Box$ A, à partir duquel on pourrait dériver A2, au moyen de $\Box$ A $\rightarrow$ A, un axiome classique des modalités historiques.

A3. [α *astit* : A] $\rightarrow$ [α *astit* : [α *astit* : A]]

A3 exprime l'idée que « faire en sorte que p » implique « faire en sorte de faire en sorte que p ». Avec A2 et A3, on obtient une propriété fondamentale du *astit*, tant au niveau philosophique que formel : [α *astit* : A] $\leftrightarrow$ [α *astit* : [α *astit* : A]]. La répétition de « faire en sorte que » est inutile.

A4. [α *astit* : A] & [α *astit* : B] $\rightarrow$ [α *astit* : A & B]

A5. [α *astit* : [α *astit* : A] & B] $\rightarrow$ [α *astit* : A & B]

A4 nous permet de dériver [α *astit* : A & B] $\rightarrow$ [α *astit* : [α *astit* : A] & [α *astit* : B]]. Ainsi, dans la théorie, même si [α *astit* : A & B] $\rightarrow$ [α *astit* : A] & [α *astit* : B] est falsifié dans certains modèles, si un agent fait en sorte qu'une conjonction soit vraie alors il fait en sorte qu'il fasse en sorte que chacun des éléments de la conjonction le soit.

A6. [α *astit* : A & B] $\wedge$ $\neg$ [α *astit* : B] $\rightarrow$ [α *astit* : A & B^a]

A7. [α *astit* : $\neg$ [α *astit* : A & B] & B^a] $\rightarrow$ [α *astit* : $\neg$ [α *astit* : A] & B^a]

A8. $[\alpha\ astit : A] \leftrightarrow [\alpha\ astit : A \ \&\ B^a] \vee [\alpha\ astit : A \ \&\ \neg\ [\alpha\ astit : A \ \&\ B^a]]$

A9. $[\alpha\ astit : \neg\ [\alpha\ astit : A \ \&\ [\alpha\ astit : B \ \&\ \neg\ [\alpha\ astit : B \ \&\ C^a]]] \ \&\ C^a] \rightarrow [\alpha\ astit : B]$

A^a est une abréviation de Xu qui signifie « A, mais α ne fait pas en sorte que A » : $A^a =_{df} A \ \&\ \neg [\alpha\ astit : A]$. Les axiomes faisant intervenir cette abréviation, A6 à A9, n'ont qu'un intérêt technique. Ils sont utilisés dans la preuve de complétude et de décidabilité de cette axiomatisation.

2.3.4.2 *Axiomatisation du* dstit *:*

Ming Xu a montré que l'axiomatisation du *dstit* est complète et décidable pour un langage contenant non seulement le *stit* mais aussi le connecteur de modalité historique $\Box$ ainsi que pour des modèles où l'ensemble *Agents* contient plusieurs éléments. Cette dernière caractéristique exige d'introduire dans la syntaxe une relation d'égalité entre agents, =, et un attribut particulier s'appliquant à des agents, *diff*(α, ...), satisfait seulement si les agents sur lesquels il s'applique sont distincts. Pour chacun de ces attributs des axiomes sont énoncés. Rappelons que le *cstit* est définissable dans ce langage.

(A_d1) $\Box\ (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, $\Box A \rightarrow A$, $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$.

On reconnaît ici les axiomes classiques de la nécessité historique.

(A_d2) $[\alpha\ cstit : (A \rightarrow B)] \rightarrow ([\alpha\ cstit : A] \rightarrow [\alpha\ cstit : B])$, $[\alpha\ cstit : A] \rightarrow A$, $\neg\ [\alpha\ cstit : A] \rightarrow [\alpha\ cstit : \neg\ [\alpha\ cstit : A]]$

L'ensemble d'axiome A_d2 est le plus intéressant en ce qui a trait au rôle du concept de choix dans l'axiomatisation du *dstit*. Il permet de caractériser la relation d'équivalence au choix comme réflexive, directement avec $[\alpha\ cstit : A] \rightarrow A$, transitive, par dérivation à partir de $\neg\ [\alpha\ cstit : A] \rightarrow [\alpha\ cstit : \neg\ [\alpha\ cstit : A]]$ et réflexive, par dérivation à partir de ces deux derniers axiomes.

(A_d3) $[\alpha\ dstit : A] \rightarrow \neg\ \Box A$

A_d3 permet de dériver deux équivalences fondamentales entre le *cstit*, le *dstit* et le $\Box$. Tout d'abord $[\alpha\ dstit : A] \leftrightarrow [\alpha\ cstit : A] \ \&\ \neg\ \Box A$ qui signifie que « $\Box$ fait en sorte que A » est équivalent à « $\Box$ a une possibilité objective dans laquelle A est garantie mais il n'est pas présentement inévitable (historiquement nécessaire) que A ». Ceci est tout à fait en accord avec la sémantique du *dstit*.

Ensuite, $\square$ A $\leftrightarrow$ [α *cstit* A] & $\neg$ [*dstit* : A] qui signifie que « il est présentement inévitable que A » est équivalent à « $\square$ a une possibilité objective dans laquelle A est garantie mais $\square$ ne fait pas en sorte que A ». La validité de ce théorème repose essentiellement sur la condition négative du *dstit.*

(A_d4) $\alpha = \alpha$, $\alpha = \beta \rightarrow \beta = \alpha$, $(\alpha = \beta \,\&\, \beta = \gamma) \rightarrow \alpha = \gamma$

A_d4 caractérise = comme une relation d'équivalence.

(A_d5) $\alpha = \beta \rightarrow (A \rightarrow A(\alpha/\beta))$ où $A(\alpha/\beta)$ est la formule obtenue de A en remplaçant une ou plusieurs occurrences de α par β

A_d5 régit la substitution des constantes d'agents.

(A_d6_k) (*diff*(β_0, …β_k) & $\Diamond$[β_0 *cstit* : B_0] & … $\Diamond$[β_k *cstit* : B_k]) $\rightarrow$ $\Diamond$([β_0 *cstit* : B_0] & … [β_k *cstit* : B_k]) pour k pour $k \leq 1$.

A_d6_k est un schéma d'axiome qui caractérise l'indépendance des agents pour un ensemble *Agents* fini contenant k agents. Pour le voir, supposons que (*diff*(β_0, …β_k) & $\Diamond$[β_0 *cstit* : B_0] & … $\Diamond$[β_k *cstit* : B_k]) est vrai, que l'indépendance des agents est respectée mais que $\Diamond$([β_0 *cstit* : B_0] & … [β_k *cstit* : B_k]) est fausse. La vérité de (*diff*(β_0, …β_k) & $\Diamond$[β_0 *cstit* : B_0] & … $\Diamond$[β_k *cstit* : B_k]) signifie que les agents (β_0, …β_k) sont distincts et qu'ils ont respectivement une possibilité objective dans laquelle B_0, …B_k sont garanties. Par l'indépendance des agents, l'intersection de n'importe quelle de ces possibilités avec n'importe quelle autre possibilité d'un autre agent n'est jamais vide. Or, si $\Diamond$([β_0 *cstit* : B_0] & … [β_k *cstit* : B_k]) est fausse, c'est qu'il y a au moins une possibilité objective dans laquelle [β_n *cstit* : B_n] n'est pas vraie pour $0 \leq n \leq k$. Ce qui contredit l'indépendance des agents.

A_d6_k ne caractérise cependant pas l'indépendance des agents lorsque *Agents* est infini. Ming Xu remarque en effet qu'il « n'y a pas de phrase correspondant à la condition d'indépendance des agents parce qu'on ne peut parler que d'un nombre fini d'agent dans chaque phrase. »[128]

(A_d7_n) ($\Diamond$[α *cstit* : A_1] & $\Diamond$ ($\neg A_1$ & [α *cstit* : A_2]) & …& $\Diamond$ ($\neg A_1$ & … & $\neg$ A_{n-1} & [α

cstit : A_n])) → $A_1 \vee \ldots \vee A_n$.

Le schéma d'axiome A_d7_n sert à garantir que chaque agent a au plus un nombre n fini de choix possibles à chaque moments. Cette condition sert principalement dans la preuve de décidabilité. Elle permet de montrer la satisfiabilité, dans un modèle fini où chaque agent a au plus n choix possibles, de n'importe quelle formule cohérente avec les autres formules du langage (*finite model property*).

3. Conclusion

J'ai tenté de mettre en lumière les caractéristiques philosophiques et mathématiques principales des concepts d'agents et de choix dans le modèle du temps ramifié. Récapitulons-les:

Caractéristiques philosophiques:

1. Le concept de choix représente les possibilités objectives d'un agent à un moment. Cet agent peut être n'importe quel individu impliqué dans un processus aléatoire, à moins que l'on ne postule le contraire. C'est ce que font Belnap et co.

2. Si deux histoires sont divisées pour le choix d'un agent α à un moment m alors m est le dernier moment où ces deux histoires se recoupent.

3. La partition $Choix_m^\alpha$ ne peut pas exprimer le fait qu'un agent est indépendant relativement à un événement local.

4. Relativement à l'interprétation du *astit* et du *dstit*, un agent peut, à un moment m, faire en sorte que A fut vraie à un moment m_0 antérieur à m. Ces interprétations contre-intuitives des deux *stits* peuvent être évitées si on fait certains postulats supplémentaires sur la fonction d'interprétation et/ou sur le modèle.

Caractéristiques formelles :

1. $Choix_m^\alpha$ est une partition de $H_{(m)}$ et Π_m est une sous-parition de $Choix_m^\alpha$ en vertu de *pas de choix entre les histoires indivisées*. L'*indépendance des agents* s'applique aussi à cette partition. $Choix_m^\alpha$ est un cas particulier de la partition d'indiscernabilité étudiée par Zanardo.

---

[128] « [...] there are no sentences corresponding to the independance of agent condition since we can only talk about finitely many agents in each sentences. » Belnap et co., 2001 : 439

3. On doit supposer que la vérité des constantes propositionnelles est toujours établie à un moment pour que les formules [α *dstit* : A] ne soient satisfaisables que pour des A au futur.

4. Si un agent fait en sorte que A et B, il ne s'en suit pas qu'il fait en sorte que A et qu'il fait en sorte que B, dans l'interprétation du *astit*.

5. Sous la contrainte qu'il n'y a pas de décideurs occupés, s'abstenir de s'abstenir est équivalent à agir dans l'interprétation du *astit*.

2. L'axiomatisation du *astit* est correcte et complète pour langage ne contenant que le *astit* comme connecteur modal. L'axiomatisation du *dstit* est, quant à elle, correcte, complète et décidable pour un modèle fini à k agents ayant au plus n choix possibles. Le langage formel utilisé pour axiomatiser le *dstit* contient le connecteur de nécessité historique. La fiabilité, la complétude et la décidabilité d'un langage plus riche contenant, en plus du *stit* et du connecteur de modalité historique, les connecteurs temporels prioriens n'ont pas été prouvées à ce jour.

L'annexe de ce mémoire contient un bref historique des partitions qui représentent les possibilités d'un agent.

CHAPITRE 3 : Le modèle de l'espace-temps ramifié

0. Introduction :

Dans ce chapitre, je présente le modèle de l'espace-temps ramifié développé par Belnap. Ce modèle permet de traiter plus adéquatement des concepts d'agents et de choix pour deux raisons. Premièrement, il s'agit d'un modèle compatible à la fois avec la relativité restreinte et l'indéterminisme parce qu'il ne suppose pas de cadre de référence absolu et qu'il admet des cours incompatibles du monde. Deuxièmement, il permet d'exprimer les différents cours possibles de la vie des agents et leur indépendance face à des événements locaux contemporains. Ces deux composantes du concept d'agent, inexprimables ou laissées implicites dans le modèle du temps ramifié, ont des conséquences importantes sur le concept de choix.

L'examen de ces nouvelles composantes des concepts d'agents et de choix se fera dans le chapitre 4. La présentation du modèle dans le présent chapitre est cependant centrée sur les concepts qui permettront d'exprimer ces composantes : l'indéterminisme, les événements résultants et les possibilités objectives. Certains concepts moins directement liés aux agents et à leurs choix sont présentés, par exemple le principe du choix antérieur et le postulat de densité, parce qu'ils influencent de manière non négligeable le modèle. Je laisse cependant largement de côté les considérations entourant la compatibilité du modèle avec la théorie de la relativité et la mécanique quantique.

Sur certains points, je comparerai le modèle de l'espace-temps avec celui du temps ramifié. Ces comparaisons ne constituent cependant pas l'objet de ce chapitre. Elle restent donc ponctuelles et peu développées.

J'ai tenté de garder la même méthodologie qu'au chapitre précédent, soit exposer les présupposés philosophiques puis leur formalisation. La section sur les présupposés est cependant beaucoup plus courte que celle du chapitre 2. Certains présupposés m'ont semblé redondants; j'ai préféré ne pas les répéter. Le présupposé fondamental porte sur le primitif spatio-temporel : les événements ponctuels (*point events*). La formalisation permet d'exprimer plus clairement les conséquences de ce changement de primitif. J'ai donc procédé à une introduction philosophique minimale dans la section 1 et j'y reviens dans la formalisation.

1. Postulats philosophiques :

T_{ETR}1.1 : Les unités spatio-temporelles du monde sont représentées comme les éléments d'un espace-temps de Minkowski, des événements ponctuels.

Un espace-temps est un espace géométrique dont l'un des axes est l'axe temporel[129]. Pour un objet à n dimensions spatiales, son espace-temps aura n + 1 dimensions. Les événements ponctuels sont considérés comme des objets à (3 + 1) dimensions. Hermann Minkowski a proposé une géométrie non-euclidienne compatible avec la théorie de la relativité. À la suite de ses travaux, un ensemble de points dans un espace-temps à quatre dimensions est nommé un espace-temps de Minkowski. Belnap « ne fait pas usage [...] des nombres réels ni du système de coordonnées »[130] de Minkowski. Seul l'ensemble partiellement ordonné est utilisé.

Les éléments d'un espace de Minkowski sont habituellement nommés « points du monde » (*world points*)[131] et sont interprétés comme étant des particules élémentaires [132]. Le « trajet » spatio-temporel d'une particule dans l'espace-temps constitue sa « ligne du monde » (*world line*). Pour sa part, Belnap « n'offre ni ne présuppose de théorie des particules. »[133] En outre, comme le modèle est compatible avec l'indéterminisme, les « lignes » sont plutôt des arbres. Pour ces deux raisons, Belnap « évite le vocabulaire habituel des "lignes du monde" »[134] et laisse indéterminée la nature des événements ponctuels.

Les événements ponctuels sont considérés comme des unités spatiales infinitésimales[135]. Ils sont donc à l'antipode des moments quant à leur étendue spatiale. Alors que les moments sont des super-événements s'étendant d'un bout à l'autre de l'Univers, les événements ponctuels sont, en quelque sorte, des micro-événements occupant une portion infime de l'espace-temps. Belnap ne fait pas de remarques

---

[129] Callahan, J. J., *The Geometry of SpaceTime*, Springer-Verlag, New-York, 2000

[130] « [...] real numbers neither of an axis system », Carnap, *Introduction...*, 1958 : 197

[131] *Idem.*

[132] Carnap : *idem* et Callahan : 2

[133] « This essay neither offers nor persupposes any theory of particules. » Belnap, « Branching Space-Time : Postprint January 2003 », téléchargé de http://www.pitt.edu/~belnap/papers.html le 25/02/2003 : 9. Ce texte est une version annotée de 1992. Sauf avis contraire, toutes les référence proviennent de la version de 2003.

[134] « I have avoided the customary language of "world lines" », *idem*.

[135] « Infinitesimally small point events », *idem* : 2

explicites nous permettant de trancher sur la « durée » d'un événement ponctuel. Or, la théorie de l'espace-temps ramifié contient un postulat de densité ($P_{ETR}4.1$). On peut donc supposer que les événements ponctuels sont également infinitésimaux dans le temps.

Justification :

Le principal argument en faveur des événements ponctuels est qu'ils permettent de construite un modèle compatible avec la relativité. Pour cette même raison, Belnap n'a plus besoin d'avancer un argument méthodologique en leur faveur, comme lui et ses collaborateurs l'avaient fait pour les moments.

$T_{EPR}1.2$: Les événements ponctuels sont partiellement ordonnés selon une relation d'antériorité/postériorité statique (voir T1.2 chap.1).

Cette relation est l'équivalent de la relation $\leq$ dans le modèle du temps ramifié, à la différence évidente que ses *relata* sont maintenant des événements ponctuels. De ce fait, elle permet d'exprimer les limites locales de l'influence causale d'un événement. Deux événements ponctuels liés par la relation d'antériorité/postériorité sont dans le passé/futur causal l'un de l'autre.

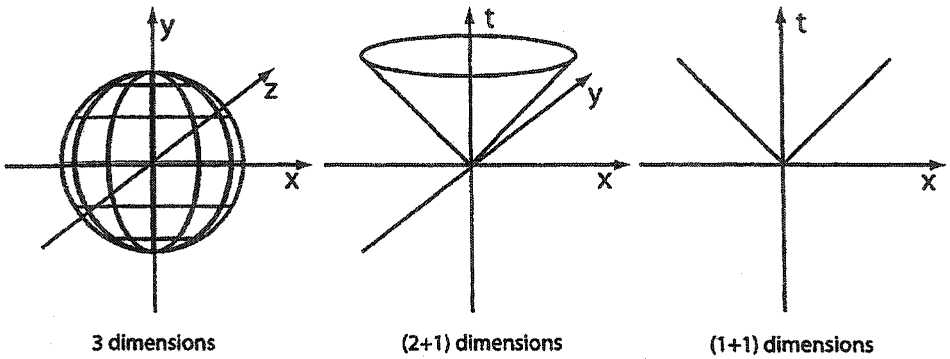
Les notions de « passé causal » et de « futur causal » dénotent respectivement le cône de lumière antérieur et postérieur d'un événement ponctuel. Un cône de lumière est une représentation graphique de la dispersion d'un photon à partir d'un point initial :

> « Dans un espace complet à trois dimensions, les photons émanant d'un éclair se dispersent dans toutes les directions et occupent la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ d'un rayon ct après t secondes <c est la vitesse de la lumière dans le vide>. Dans un espace bidimensionnel, la sphère devient un cercle $x^2 + y^2 = (ct)^2$ aussi de rayon ct. Si nous plaçons ce cercle dans espace-temps <à (2+1) dimensions>, on obtient un cône normal. Les lignes de monde de tous les photons se déplaçant dans le plan spatial se situent dans ce cône, qui est nommé *cône de lumière*. »[136]

Les figures de la page suivante permettent de visualiser ces notions.

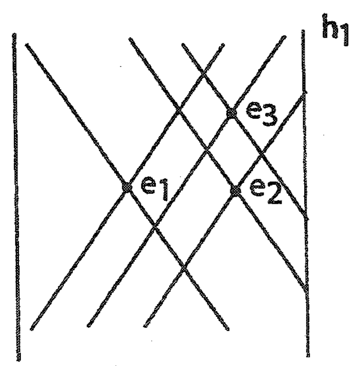
Comme la surface d'un cône de lumière représente le trajet des éventuels photons émanant d'un point, elle délimite l'influence causale possible de ce point. On suppose en effet que cette influence ne peut pas se propager plus vite que la lumière et donc que tout événement e_2 sur lequel e_1 peut avoir une influence se situe à l'intérieur du cône de lumière futur de e_1. À l'inverse, tous les événements pouvant exercer une influence causale sur e_2 sont dans le cône de lumière passé de e_2. Les événements hors des deux cônes de lumière d'un événement donné lui sont contemporains. C'est pour cette raison que les cônes de lumière représentent le *passé* et le *futur causal* d'un événement.

Le concept de cône de lumière permet de représenter l'influence *locale* d'un événement; ce qui était impossible dans le modèle du temps ramifié parce que le concept de moment était global. Ainsi, plus deux événements sont éloignés dans l'espace plus les événements qu'ils peuvent conjointement influencer sont éloignés d'eux dans le temps. Il en est de même pour l'influence causale future d'un événement.



Trois représentations de la dispersion d'un éclair. À gauche, la dispersion est représentée dans un plan à trois dimensions spatiales (l'axe x, y et z). La sphère représente l'état de la dispersion à *un* instant. Au centre, la dispersion est représentée dans plan à deux dimensions spatiales (l'axe x et y) et une dimension temporelle (l'axe t). Ce *cône de lumière* représente l'évolution de la dispersion en fonction du temps. À droite, la dispersion est représentée dans un plan à une dimension spatiale (l'axe x) et une dimension temporelle (l'axe t).

Les zones hors du cône de lumière d'un événement ponctuel contiennent les points qui lui sont contemporains. Dans ces zones, les événements ponctuels peuvent être antérieurs ou postérieurs l'un à l'autre.

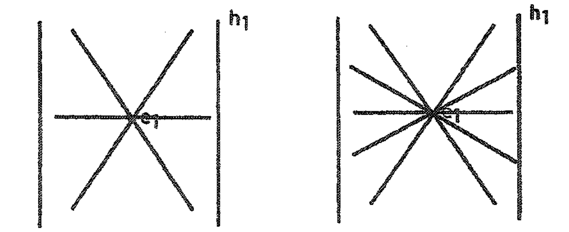


Dans cette figure, e_1 est contemporain à e_2 mais ces deux points ne sont pas contemporains entre eux.

---

[136] Callahan 2000 : 8

À partir de e_1, on peut tracer une ligne de simultanéité sur laquelle tous les points sont contemporains entre eux.



ligne de simultanéité

laquelle représente le présent?

Cette ligne ne représente pas *le* présent ou l'instant de e_1 parce qu'on peut en tracer un grand nombre. En fait, il n'y a pas de présent absolu, ni d'instants, dans ce modèle. Chaque événement ponctuel est contemporain *relativement* à certains autres points.

Comme la relation ≤ dans le modèle du temps ramifié, la relation d'antériorité/postériorité est étudiée dans une perspective statique (ordre-B) par Belnap : « [...] j'essaierai d'éviter un langage indexical. En particulier, je ne tracerai pas de distinction [...] entre l'actuel et le possible [...]. Des " événements ponctuels possibles" sont seulement des " événements ponctuels ". »[137]

Remarque sur la représentation graphique de l'espace-temps ramifié :

Belnap utilise la représentation graphique à (1+1) dimensions, sans axe. Je ferai de même. Le plan horizontal représente la dimension spatiale et le plan vertical la dimension temporelle. Lorsqu'il y a plus d'une histoire en jeu, chaque histoire est représentée par un schéma différent et les zones d'intersection sont indiquées. Lorsqu'il sera question des possibilités objectives à un point, elles seront représentées dans les histoires par l'ajout de symboles (+, –, ×) immédiatement au-dessus du point en question. Le même symbole dans deux histoires différentes signifiant qu'elles sont indivisées à ce point.

Fin de la remarque.

T_{EPR}1.3 : Les événements ponctuels sont des entités concrètes et objectives.

Les remarques faites au sujet de T3.1 (chapitre 1) s'appliquent aussi pour les événements

---

[137] « I will try to avoid indexical language. In particular, I will not draw a distinction [...] between the actual and the possible. [...] "Possible point events" are thus just "point events". », Belnap 2003 : 4

ponctuels. Pour preuve, cette remarque de Belnap :

> « Ces événements ponctuels doivent être pris non pas comme des positions spatio-temporelles ouvertes à une variété d'occupants concrets, mais comme eux-mêmes étant des particuliers concrets. »[138]

Les événements ponctuels sont, par conséquent, irrépétables tout comme l'étaient les moments.

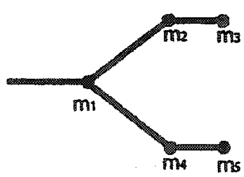
$T_{EPR}1.4$: Il y a des événements ponctuels incompatibles.

Comme dans le modèle du temps ramifié, l'introduction de l'indéterminisme au modèle relativiste de Minkowski nécessite qu'on postule l'existence d'événements ponctuels incompatibles.

Au niveau philosophique, Belnap ne donne pas de définition explicite de l'incompatibilité. Il donne cependant quelques exemples (un agent tourne à gauche ou il tourne à droite[139] et la mesure du spin ascendant ou descendant d'une particule[140]) et affirme que deux événements incompatibles peuvent être vus comme occupant la même position spatio-temporelle[141]. L'idée d'utiliser la notion de position spatio-temporelle pour définir l'incompatibilité n'est cependant pas satisfaisante pour deux raisons.

1) Belnap mentionne clairement que la théorie n'utilise pas la notion de position spatio-temporelle.

2) Bien qu'occuper la même position spatio-temporelle soit une condition suffisante pour que deux moments soient incompatibles, ce n'est pas une condition nécessaire. Prenons un exemple dans le modèle du temps ramifié. Supposons que l'on définisse la « position temporelle » d'un moment comme sa place dans l'ordre temporel.



Dans cette figure, m_2 et m_3 occupent respectivement les mêmes positions temporelles que m_4 et m_5. Or, même si m_2 et m_5 occupent des positions temporelles différentes, ils sont néanmoins incompatibles parce qu'ils appartiennent à des histoires qui se sont divisées auparavant. La même situation se répète pour les événements ponctuels dans le modèle du temps ramifié. Même si l'on disposait d'un concept de position spatio-temporelle, « occuper la

---

[138] « These point events are to be taken not a mere spatiotemporal positions open for alternative concrete fillings, but as themselves concrete particulars. » *idem*.

[139] Belnap 2002d : 5

[140] Belnap 2003 : 5

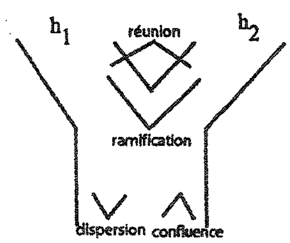
même position spatio-temporelle » ne permettrait pas de définir le concept d'incompatibilité.

La définition philosophique d'incompatibilité est donc absente du modèle de l'espace-temps ramifié, tout comme elle l'est dans le modèle du temps ramifié. Est-ce à dire que ce concept n'est pas définissable? Un moyen de le définir me semble être de prendre comme primitif des points (moments ou événements ponctuels) de choix et de définir deux points incompatibles comme deux points faisant partie de deux histoires pour lesquelles on a un point de choix dans le passé causal de ces deux points[142]. Il faut cependant voir que cette stratégie consiste à échanger un primitif (la relation d'incompatibilité) contre un autre (les points de choix). Au plan philosophique, le concept d'incompatibilité me semble donc être un primitif fondamental des deux modèles que j'ai étudiés.

Au niveau formel, nous verrons que deux événements ponctuels sont compatibles s'ils appartiennent aux mêmes histoires. Ce concept d'histoire est analogue, quant à son contenu philosophique[143], au concept d'histoire dans le modèle du temps ramifié: chaque histoire est un cours complet du monde. On peut donc, dire de manière provisoire, que deux événements ponctuels sont compatibles s'ils font partie du même cours du monde.

Cette notion sommaire de compatibilité permet de représenter les trois types de relations causales admises dans le modèle.

1) Dispersion causale : Lorsque $e_1 \leq e_2$, $e_1 \leq e_3$ et que e_2 et e_3 sont compatibles; e_1 influence deux événements futurs différents.



2) Confluence causale : Lorsque $e_2 \leq e_1$, $e_3 \leq e_1$ et que e_2 et e_3 sont compatibles; deux événements ont une influence conjointe sur l'événement futur e_1.

3) Ramification causale : Lorsque $e_1 \leq e_2$, $e_1 \leq e_3$ *mais* que e_2 et e_3 sont *in*compatibles; e_1 peut influencer deux événements futurs s'excluant l'un de

---

[141] *Idem* : 9

[142] C'est la stratégie qui semble adoptée par Tomasz Placek dans « Branching for a Transient Time », dans H. Eilstein (ed.) *A Collection of Polish Works on Philosophical Problems of Time and Spacetime*, Kluwer, 2002 : 81 et par Thomas Müller dans « Branching space-time as a semantics for modal talk in quantum mechanics », *International Journal of Theoretical Physics*, *à paraître*. Les citations proviennent d'une pré-publication de ce texte téléchargée de http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00000509/ le 31/08/03.

[143] Nous verrons dans la section 2.4 qu'il est formalisé de manière très différente dans les deux modèles.

l'autre.

Les cas de ramifications causales seront, bien entendu, des cas de relation indéterministe entre événements ponctuels. La confluence causale ne contredit pas l'unicité du passé. Une violation de l'unicité du passé se définit de la manière suivante :

4*) Réunion causale : Lorsque $e_2 \leq e_1$, $e_3 \leq e_1$ *mais* que e_2 et e_3 sont *incompatibles*; e_1 est influencé par deux événements passés s'excluant l'un de l'autre.

La confluence causale est permise dans NMR alors que la réunion causale (4*) est exclue pour préserver la cohérence du passé d'un événement ponctuel. Voir $P_{ETR}3$ plus loin.

2. Formalisation :

2.1. Notre Monde relativiste :

Tout comme dans le modèle arborescent, le modèle de l'espace-temps se fonde sur un ensemble de points.

$D_{ETR}1$: (*Notre_Monde_Relativiste*) NMR = $\{e, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$.

Les éléments de NMR sont des événements ponctuels.

$P_{ETR}1$ (*Non-trivialité*) : NMR $\neq \emptyset$

Les remarques que j'ai faites à propos de P1 (chapitre 1) sur l'importance philosophique de cette thèse, et sur sa justification, s'appliquent également à $P_{ETR}1$.

2.2 Relation d'ordre causale :

NMR est partiellement ordonné selon la relation d'ordre causale.

$D_{ETR}2$: (*Relation d'ordre causale*) $\leq\ \subseteq$ *NMR* $\times$ *NMR*. $\langle e_1, e_2\rangle \in\ \leq$ sera noté $e_1 \leq e_2$.

$P_{ETR}2$: (Caractérisation de $\leq$), Réflexivité, Transitivité, Anti-symétrie (comme dans P2)

$D_{ETR}2.1$ (*Relation d'ordre causale stricte*) $e_1 < e_2 =_{df} (e_1 \leq e_2 \wedge e_2 \neq e_2)$

$D_{ETR}2.2$ (Comparable) e_1 *comparable* $e_2 =_{df} (e_1 \leq e_2 \vee e_2 \leq e_1)$

Bien entendu, la relation $\leq$ est la relation d'antériorité/postériorité discutée dans la section précédente; $e_1 \leq e_2$ signifie que e_1 est dans le *passé causal* de e_2 ou que e_2 est dans le *futur causal* de e_1.

$D_{ETR}2.3$ (*Chaînes et pistes causales*)

> $D_{ETR}2.3.1$ (*Chaînes*) Une *chaîne* est un sous-ensemble de NMR tel que $\forall e_1, e_2 \in$ c [e_1 comparable e_2]. Dans notre symbolisme, $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sont des constantes pour des chaînes.
>
> $D_{ETR}2.3.2$ (*Piste causale*) Une chaîne c_1 est une *piste causale fermée* [*ouverte*]

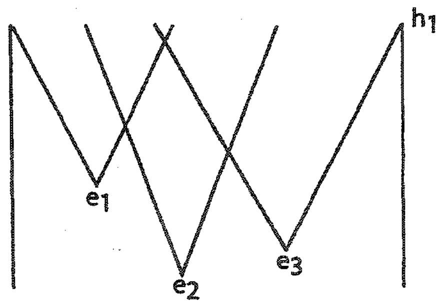
ssi 1) $\exists e_1$ *infimum* de c_1 et $\exists e_2$ *supremum* de c; 2) $e_1, e_2 \in [\notin] c_1$; 3) $\neg\exists e_3 [e_1 \leq e_3 \leq e_2 \rightarrow c_1 \cup \{e_3\} = c_2]$. « Une piste causale [...] est une chaîne maximale d'événements ponctuels située entre deux événements ponctuels donnés. »[144]

D_{ETR}2.3.3. (*Piste maximale*) Une chaîne c_1 est une *piste causale maximale* ssi $\forall c_2 \neg\exists e_2 [c_1 \cup \{e_2\} = c_2]$

2.3 Histoires et compatibilité :

Une piste causale maximale est une suite maximale de points ordonnés selon la relation ≤. En ce sens, il s'agit d'un concept analogue, au niveau formel, à celui d'histoire dans le modèle du temps ramifié. Il y a cependant une différence philosophique fondamentale : alors que chaque histoire représente un court *complet* possible du monde dans le modèle arborescent, une piste maximale est *partielle* puisqu'elle ne constitue qu'une suite d'événements ponctuels temporellement ordonnés et donc « sans dimension spatiale. »[145]

Pour reconstruire, dans le modèle de l'espace-temps ramifié, un concept d'histoire qui puisse représenter un cours complet possible du monde, il faut non seulement tenir compte des événements ponctuels temporellement ordonnés mais également des événements ponctuels contemporains. Belnap propose que « pour n'importe quelle paire d'événements ponctuels dans une même histoire, cette histoire contient un événement ponctuel qui a ces deux points dans son passé causal. »[146] Les histoires sont donc des sous-ensembles dirigés de NMR. Un ensemble dirigé est un ensemble ordonné où toutes les paires d'éléments ont au moins un élément postérieur commun. En termes plus relativistes, dans chaque histoire « toute paire de cônes de lumière futurs (passés) se croisent »[147], comme dans cette figure.



D_{ETR}3 (*histoire*) : $h, h_1, h_2, \ldots$ sont des histoires. Un sous-ensemble h de NMR est une *histoire* ssi 1) $\forall e_1, e_2 \in h\ \exists e_3 \in h[e_1 \leq e_3 \wedge e_2 \leq e_3]$ et 2) $\neg\exists h_1 \exists e_2 [h \cup \{e_2\} = h_1]$.

---

144 « A causal track is a maximal chain of point events lying between two given point events. » Belnap 2003 : 8

145 « without a spatial dimension », Belnap 2003 : 10

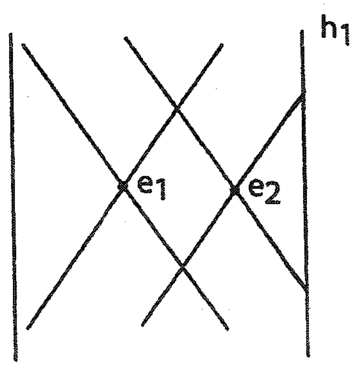
146 « For every two point events in a history, the history contains a later point event that has both in its past », *Idem*.

147 « Every two light cones intersect », Van Benthem 1991 : 29

D_{ETR} 3.1 (*Hist*) *Hist* est l'ensemble des histoires de *NMR*.

L'idée que les points d'un espace-temps forment un ensemble dirigé était présente chez Prior[148], Goldblatt [149] et Shehtman [150]. Ceux-ci ont remarqué et/ou prouvé que l'axiomatisation appropriée d'un langage-objet contenant le connecteur modal $\Box$ interprété dans un espace-temps de Minkowski non-ramifié est le système S4.2 de Lewis. Ce système contient l'axiome $\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$ qui caractérise la directionnalité en plus de l'axiome $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ qui caractérise la transitivité.

Belnap note que chaque histoire « *peut* être un espace-temps de Minkowski » mais il « ne postule pas qu'elles le sont. »[151] Selon Thomas Müller, s'abstenir de postuler que les histoires sont des espaces-temps de Minkowski fait que le modèle « pourrait être un modèle ramifié de la relativité générale »[152]. Le postulat d'antisymétrie de la relation d'ordre causale vient cependant nuancer cette affirmation selon Tomasz Placek : « il existe des espaces-temps de la relativité générale qui admettent des boucles causales »[153]. Mes connaissances en physique et en géométrie sont cependant trop limitées pour évaluer ces affirmations.



Les histoires permettent de définir la relation d'incompatibilité entres événements ponctuels (à distinguer de la relation d'incomparabilité!) :

D_{ETR}4 : e_1 compatible e_2 ssi $\exists h\ [e_1, e_2 \in h]$

Deux événements ponctuels incomparables peuvent être compatibles. Dans cette figure, e_1 et e_2 sont incomparables

---

148 Prior, 1967 : 200

149 Goldblatt, « Diodorean Modality in Minkowski Spacetime », *Studia Logica*, 39, 1980: 219

150 Shehtman, « Modal Logic on the Real Plane » *Studia Logica*, 42, 1983 : 64

151 « [...] most people think that they know that histories are not really Minkoski space-times, and I will not postulate that they are », Belnap 2003 : 10

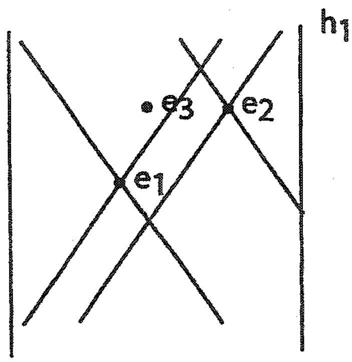
152 « [...] could be a model of general relativity. » Thomas Müller, « Branching space-time as a semantics for modal talk in quantum mechanics », *International Journal of Theoretical Physics, à paraître*. Les citations proviennent d'une pré-publication de ce texte téléchargée de http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00000509/ le 31/08/03 : 2

153 « Some spacetimes of general [...] allow causal loops, which imply a failure of antisymemtry. » Tomasz Placek, « Branching for a Transient Time », dans H. Eilstein (ed.) *A Collection of Polish Works on Philosophical Problems of Time and Spacetime*, Kluwer, 2002 : 81

mais éléments d'une même histoire, ils sont alors contemporains (*spacelike related*). Ces deux points ne sont ni postérieurs ni antérieurs l'un à l'autre, mais, par exemple, l'un est « ici » alors que l'autre est « là-bas ».

$D_{ETR}5$: $e_1 \sim e_2 =_{df} e_1$ compatible $e_2 \wedge \neg(e_1$ comparable $e_2)$[154]

Remarquons que ~ n'est pas transitive. Dans la figure ci-dessous, $e_1 \sim e_2$ et $e_2 \sim e_3$ mais pas $e_1 \sim e_3$. La relation est cependant symétrique et réflexive.



Pour chaque événement ponctuel, on peut définir l'ensemble des histoires auxquelles il appartient.

$D_{ETR}6$. (*Ensemble des histoires auxquelles e appartient*)

$H_{(e)} = \{h : e \in h\}$

On peut définir l'unicité du passé en termes d'appartenance aux histoires :

$P_{ETR}3$ (*Unicité du passé causal*) $\forall e_1, e_2 \in$ NRM $[e_1 \leq e_3 \wedge e_2 \leq e_3 \rightarrow e_1$ compatible $e_2]$

Avec $D_{ETR}2$, $D_{ETR}6$ et $P_{ETR}3$ on peut vérifier les implications suivantes qui clarifient la relation entre comparabilité et compatibilité :

CC1. Si e_1 est comparable avec e_2 alors e_1 est compatible avec e_2

CC2.Que e_1 soit compatible avec e_2 n'implique pas qu'ils soient comparables.

2.4 Événements initiaux, résultants et transitions :

La relation de compatibilité permet de définir certains ensembles d'événements ponctuels comme des événements particuliers :

2.3.1.1 (*Événement initial*) I est un ensemble non-vide d'événements ponctuels compatibles.

2.3.1.2 (*Chaîne résultante*) Une chaîne résultante (O)[155] est une chaîne non-vide bornée vers le bas. (Voir $P_{ETR}4.3$ plus loin)

Un événement initial est n'importe quel ensemble d'événements ponctuels, comparables ou non, pouvant servir d'initiateur dans une transition vers un autre ensemble d'événements ponctuels. Le seul critère retenu par Belnap pour caractériser les

---

[154] Belnap note cette relation e_1 slr e_2. Il s'agit évidemment d'une abréviation de l'expression anglaise « *spacelike related* ».

[155] Je garde la lettre O qui provient de l'anglais « *outcome* » pour conformer ma présentation à celle de Belnap.

événements initiaux est que tous leurs éléments soient compatibles entre eux. Le qualificatif « initial » n'a donc rien à voir avec le Big Bang ou quelqu'autre premier événement dans NMR. Les chaînes résultantes sont, quant à elles, caractérisées par le fait qu'elles ont un « début », une borne inférieure, bien identifiable. Comme leur nom l'indique, elles seront utilisées pour caractériser des résultats de transitions. Par la définition des chaînes, tous les points d'une chaîne résultante sont compatibles.

Les concepts d'événement résultant et initial peuvent servir à caractériser l'exemple du voleur de voiture que j'ai donné dans le chapitre précédent. Supposons qu'il vole ma voiture. On peut supposer que plusieurs conditions ont du être remplies pour qu'il passe à l'acte : que la rue soit déserte, que ma voiture lui paraisse accessible, etc.. Si on associe à chacune de ces conditions un événement ponctuel, il est clair que plusieurs d'entre eux seront contemporains les uns aux autres mais qu'ils précéderont tous le point où le voleur prend sa décision. De l'autre côté, la piste causale du vol peut être représentée, en idéalisant, par une chaîne qui débute juste après ce point de décision.

Beaucoup de choses peuvent cependant arriver au cours du vol, et certaines d'entre elles dépendront probablement de décisions du voleur. De plus, on peut supposer que cet événement n'est pas limité au voleur, mais qu'il englobe mes efforts pour retrouver ma voiture, les actions de ceux à qui le voleur la remettra ainsi que les actions des policiers. Tous ses événements forment des chaînes contemporaines. C'est donc dire que l'événement résultant « le vol de ma voiture » est probablement beaucoup plus complexe qu'une simple chaîne d'événements ponctuels. Belnap a remarqué ce fait et proposé d'élargir le concept d'événement résultant en deux temps.

D_{ETR}2.4 (*Résultat dispersé*) Si O est une chaîne résultante, **O** est un résultat dispersé seulement s'il est un ensemble de O qui recoupent toutes au moins une histoire.

Un résultat dispersé est dispersé en deux sens. Premièrement, ses différentes chaînes peuvent être disséminées dans l'espace. Le vol de ma voiture peut contenir la chaîne résultante du voleur, celle du receleur, la mienne et celles des policiers. Deuxièmement, ils peuvent contenir des événements ponctuels incompatibles. Moi, le voleur et les autres auront sûrement à décider entre plusieurs éventualités au cours du vol. Des chaînes incompatibles correspondront à chacune de ces décisions et feront toutes parties du vol de ma voiture. Ces chaînes ont cependant une origine historique commune. Elles ont débuté dans le même ensemble d'histoire, celui que le voleur a réalisé lorsqu'il a entrepris de voler ma voiture. C'est pour rendre compte de cette origine historique que Belnap impose la condition que les chaînes O éléments de **O** recoupent toutes au moins une histoire. Comme NMR ne se ramifie que vers le futur, ces chaînes ne peuvent être qu'au « début » de l'événement résultant

Le second type de résultat est construit à partir des événements dispersés.

D_{ETR}2.5 *(Résultat disjonctif)* Si **O** est un résultat dispersé, **Ô** est un résultat disjonctif seulement s'il est un ensemble de **O** incompatibles deux à deux.

L'idée ici est qu'à un même événement résultant peut correspondre plusieurs résultats dispersés différents. Dans l'exemple du voleur, l'ensemble des agissements possibles subséquents à sa prise de décision correspond à un résultat disjonctif; il peut voler ma voiture ou bien celle de mon voisin ou encore ne rien voler du tout. Quoiqu'aucun de ces résultats dispersés ne soit compatible avec les autres, ils font tous partie de l'événement « les actions du voleur ».

À partir de ces trois catégories de résultats, Belnap définit les transitions. Pour en alléger la définition, la notation suivante est introduite :

D_{ETR}2.7 (*Notation générique*) $\underline{I}$ dénote n'importe quel événement initial, incluant le singleton $\{e_1\}$. $\underline{O}$, dénote un événement résultant de n'importe quel des trois types définis plus haut (O, **O**, **Ô**).

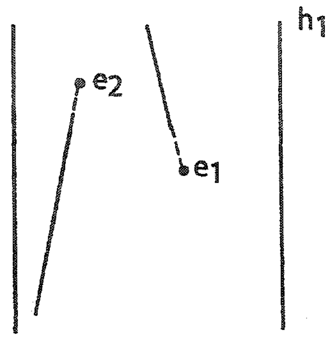
D_{ETR}2.6 (*Transitions*)

2.6.1 $\underline{I} \Rightarrow \underline{O}$ est une *transition* ssi $\underline{I} < \underline{O}$.

2.6.2 Une transition est *immédiate*, noté $\Rightarrow_{im}$, ssi $\neg\exists e_1 [\underline{I} < e_1 < \underline{O}]$

Une transition est donc, sans surprise, une paire composée d'un événement initial et d'un résultat. Les transitions immédiates sont distinguées des transitions en général parce que l'événement initial et le résultat peuvent être distants dans le temps. Le seul critère étant que le résultat soit postérieur à l'événement initial, en tenant compte des définitions de postériorité propres à chaque résultat.

Belnap souligne que « en raison de la densité, pour toute $\underline{I} \Rightarrow_{im} \underline{O}$, soit $\underline{I}$ a un dernier élément e et $\underline{O}$ ne se termine pas vers le bas et e = *inf*($\underline{O}$) ou bien $\underline{O}$ a un premier élément p et I ne se termine pas vers le haut et $p = sup_h(I)$ pour un $h \in H_{(I)}$. »[156] La figure suivante illustre ce cas.



Le cas e_1 est noté « $e \Rightarrow O$ » et le cas e_2 « $I \Rightarrow e$ ». Ces deux cas seront importants pour caractériser les cas d'indéterminisme sans point de choix.

2.5 Postulats supplémentaires :

Contrairement à ce que Belnap et co. ont fait pour le modèle du temps ramifié, Belnap postule que NMR est dense, que les chaînes ont un *infimum* et qu'elles ont des *suprema* relatifs aux histoires et que les histoires sont connectées par le bas. La justification de ces postulats est purement méthodologique; les trois postulats simplifient l'analyse du modèle et les cas qu'ils excluent ne présentent pas d'intérêt particulier[157]. J'examinerai leurs effets dans la section suivante. Pour l'instant, je me contente de les présenter sommairement.

$P_{ETR}4.1$: (*Densité*) $\forall e_1, e_2\ (e_1 < e_2 \rightarrow \exists e_3\ [\ e_1 < e_3 < e_2]$

Il s'agit de la forme classique du postulat de densité. Van Benthem[158] a remarqué que ce postulat doit être distingué du postulat de continuité. La forme originale de ce postulat, proposée par Dedekind, n'est pas adaptée pour les plans à deux dimensions. Van Benthem a proposé de le remplacer par le principe de la tache d'encre (*Ink spot principle*), probablement nommé ainsi parce que qu'on peut se représenter un ensemble

---

[156] « Because of denseness, given any immediate chain transition $I \Rightarrow_{im} O$, *either* I has a last member *e* and O is downward nonterminating with $inf(O) = e$, *or* O has a first member *p* and I is upward non-terminating with $sup_h(I) = p$. » Belnap, « EPR-like "funny-business" in the Theory of Branching Space-Times », dans T. Placek and J. Butterfield (eds.), *Non-Locality and Modality*, Kluwer 2002 : 7. La version que j'ai utilisée provient de http://www.pitt.edu/~belnap/papers.html. La pagination est celle de ce document.

[157] Voir Belnap, 2003 : 24 note

[158] Van Benthem, *The Logic of Time*, 1990 : 29-30

continu comme une « tache » sans aucun vide, donc tout à fait opaque, dans un plan à deux dimensions.

(*Tache d'encre*)

$\forall A((\exists e A(e) \wedge \forall e\,(A(e) \rightarrow \exists e_1\,(e < e_1 \wedge A(e_1))) \wedge \forall e\,(A(e) \leftrightarrow \forall e_1\,(e_1 < e \rightarrow A(e_1)))) \rightarrow \forall e(A(e) \rightarrow \forall e_1\,(e < e_1 \rightarrow A(e_1)))$

L'idée derrière ce postulat est que, dans un ensemble continu, on peut zigzagger à notre guise de vers l'antérieur ou le postérieur et toujours obtenir un point qui est dans l'ensemble.

Elzabieta Hajnicz[159] offre une étude plus approfondie des axiomes de continuité dans un modèle à plus d'une dimension. Notons que le postulat de van Benthem et ses variantes proposées par Hajnicz ne s'appliquent qu'à des espaces-temps qui ne sont pas ramifiés. Compte tenu des complications engendrées par la construction d'un postulat de continuité dans le modèle du temps ramifié, je crois que le principe de la tache d'encre devra être modifié pour s'appliquer à l'espace-temps ramifié de Belnap. Je n'ai trouvé, dans la littérature, aucune suggestion d'un tel principe.

$P_{ETR}4.2$: (*Infimum des chaînes*) Si *c* est une chaîne avec une borne inférieure, alors elle a une plus grande borne inférieure.

$P_{ETR}4.3$: (*Supremum historique des chaînes*) Si *c* est une chaîne non-vide, alors elle a une plus petite borne supérieure dans les histoires dont elle est sous-ensemble.

$P_{ETR}4.3$ garantit la satisfaction du postulat suivant :

$P_{ETR}4.4$ (*Pas d'événement ponctuel maximal dans NMR*) $\forall e\, [e \in NMR \rightarrow \exists\, [e_1 \in NMR \wedge e < e_1]]$

Dans « Branching Space-Time » (p.24-25) et dans « EPR-like funny business… » (p.4), les deux derniers postulats sont énoncés séparément et explicitement. Dans « Non-common-cause… »[160] et « A Theory of causation : … »[161], seul $P_{ETR}4.4$ est énoncé.

Dans le modèle du temps ramifié, la première formulation du principe de *Connection Historique* stipulait que toutes les paires de moments ont un ancêtre commun

---

[159] Elzabieta Hajnicz, « Some Considerations on Branching Areas of Time », *Journal of Logic, Language and Information*, 8, 1999

[160] Belnap, « No-Common-Cause EPR-like funny business in Branching Space-Times », *Philosophical Studies* 114(3) : 199-221; Juin 2003b.

[161] Belnap, « A Theory of Causation : *Causae Cansantes* (Originating Causes) as Inus Conditions in Branching Space-Times », manuscrit téléchargé de http://www.pitt.edu/~belnap/papers.html le 15/02/2003

et la seconde que toutes les paires d'histoires ont une intersection non-vide. La présence d'un tel postulat est requise dans NMR pour lier toutes les histoires « par la base ».

Belnap a montré qu'aucune des deux formulations n'est satisfaisante dans le modèle du temps ramifié. Il propose de postuler l'existence d'un point de choix pour toutes les paires d'histoires. Pour pallier à diverses complications, il propose le principe général suivant :

$P_{ETR}9.3$ (*Principe du choix antérieur pour les chaînes*) $\forall h_1, h_2\ \forall O \in (h_1 - h_2 \cup h_2 - h_1)\ \exists e_0\ [h_1 \perp_e h_2 \wedge e_0 < O]$

Ce principe stipule que toutes les paires de chaînes résultantes incompatibles ont un point commun dans leur passé. Ceci garantit la connexion de toutes les histoires par la base.

2.6 La logique de l'espace-temps ramifié :

2.6.1 Considérations philosophiques préliminaires :

Le langage-objet pour la logique de l'espace-temps ramifié est différent de celui de la logique du temps ramifié. Bien qu'à ce jour Belnap a seulement ébauché la sémantique de ce langage[162], on y remarque déjà la présence de deux types de propositions : « les propositions dépendantes des événements ponctuels <et> les propositions qui sont des ensembles d'histoires. »[163]

Que signifie cette distinction? Chaque proposition est identifiée à un ensemble de circonstances qui sont des paires de moments et histoires dans le modèle du temps ramifié. Ces circonstances représentent les moments et cours possibles du monde dans lesquelles la proposition est vraie. Par exemple, dans le cas du vol de ma voiture, la proposition « le voleur s'empare de ma voiture » est vraie dans une circonstance (m, h) seulement si, dans le moment m et selon l'histoire h, le voleur s'empare de ma voiture. On peut tenter la même approche pour interpréter cette proposition dans le modèle du temps ramifié : « le voleur s'empare de ma voiture » est vraie dans une circonstance (e, h) seulement si, dans l'événement ponctuel e et selon l'histoire h, le voleur s'empare de ma voiture. Même si, à première vue, les deux interprétations semblent analogues, elles ont des implications philosophiques différentes.

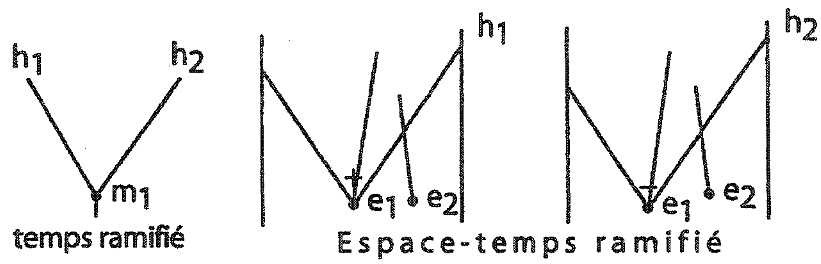
Relativiser la vérité d'une proposition à un moment et une histoire revient à dire

---

[162] On trouve cette ébauche dans un l'annexe de Belnap, « A Theory of Causation… », 2002 : 34.

[163] « […] point-event-dependent proposition […] <and> propositions as a set of histories […]. », *idem*, 34

qu'une proposition est vraie *dans tous l'univers* à un certain instant, et ce, parce que les moments sont des événements complets, c'est-à-dire *globaux* et instantanés. Or, les événements ponctuels sont *locaux* et donc partiels. Relativiser la vérité d'une proposition à un événement ponctuel et une histoire revient donc à dire qu'une proposition est vraie *dans la portion de l'espace-temps* délimitée par cet événement ponctuel. Illustrons cette différence par l'exemple du voleur :



Dans le modèle du temps ramifié (à gauche), au moment m_1, le voleur s'empare de ma voiture et je continue à taper ce mémoire. La conjonction « le voleur s'empare de ma voiture et je continue à taper ce mémoire » est vraie à ce moment parce qu'il englobe ces deux événements locaux. Dans le modèle de l'espace-temps ramifié (au centre et à droite), e_1 est l'événement ponctuel où le voleur s'empare de ma voiture et e_2 est l'événement ponctuel où je continue à travailler. À première vue, il semble que « le voleur s'empare de ma voiture » est vraie seulement à e_1 et que « je continue à travailler » est vraie seulement à e_2. Il en découle que la conjonction « le voleur s'empare de ma voiture et je continue à taper ce mémoire » n'est vraie à aucun de ces événements ponctuels. En d'autres termes, si l'on se place au point e_1, la proposition « le voleur s'empare de la voiture d'Olivier » est vraie *ici*, c'est-à-dire dans la portion de l'espace-temps constituée par e_1, alors qu'elle est fausse *ailleurs*, par exemple là où je continue à travailler. Lorsqu'on affirme « la proposition p est vraie dans l'événement e selon l'histoire h » on dit en fait « la proposition p est vraie *à cet endroit* selon l'histoire h ». L'évaluation des propositions dans des circonstances qui sont des paires d'un événement ponctuel et d'une histoire est locale non seulement dans le temps mais aussi dans l'espace. En comparaison, l'évaluation des propositions est locale dans le temps mais globale dans l'espace selon la logique du temps ramifié. Ceci est évidemment une conséquence de l'interprétation philosophique des concepts de moment et d'événement ponctuel.

Fait-il sens de relativiser la vérité des propositions à des événements aussi locaux que les événements ponctuels? Cette relativisation paraît contre intuitive dans certaines situations, notamment dans notre exemple. Supposons que, dans mon bureau (au point e_2), j'affirme « le vol de ma voiture a présentement lieu dans la rue ». Cette proposition semble vraie à e_2, même si ce point n'est pas celui où ma voiture est volée, parce que cette proposition marque explicitement un endroit et un lieu. De même, la conjonction « on vole ma voiture dans la rue alors que je continue à travailler dans mon bureau » semble, à première vue, vraie à e_2. Notre modèle appuie cette intuition; e_1 et e_2 sont contemporains. Ainsi, la vérité de certaines propositions ne semble pas strictement liée à des événement ponctuels bien délimités.

Cette situation existe aussi dans le modèle du temps ramifié. Alors que beaucoup de propositions sont vraies à certains moments, d'autres sont *éternellement* vraies. On compte parmi elles non seulement les tautologies, mais également des propositions temporellement marquées. Par exemple, la proposition « je nais le 6 novembre 1978 » est vraie à tous les moments dans les cours de l'histoire du monde où je nais. Comme le modèle de l'espace-temps ramifié apporte une dimension spatiale, ces propositions seront non seulement éternellement vraies mais également *globalement vraies*.

Je crois que Belnap distingue deux classes de propositions dans la logique de l'espace-temps ramifié - celles dont la vérité dépend des événements ponctuels et celles dont la vérité ne dépend que d'un cours possible de l'histoire du monde - pour tenir compte des propositions globalement vraies. Ces dernières appartiennent à la catégorie des propositions indépendantes des événements ponctuels. Belnap choisit de les évaluer dans des ensembles d'histoires parce que, comme dans le modèle du temps ramifié, elles sont vraies ou fausses selon des cours possibles de l'histoire du monde plutôt que selon des moments.

Ainsi, Belnap propose de considérer que toutes les propositions marquant *l'occurrence* d'un événement quelconque sont des propositions dont la vérité ne dépend pas des événements ponctuels. Elles sont vraies dans toutes les histoires où cet événement à lieu. Par exemple, « je continue à travailler dans mon bureau à 14h00 » peut être considérée comme une proposition marquant l'occurrence de l'événement e_2 et signifiant

« l'événement "Olivier travaille" à lieu dans cette portion de l'espace-temps ». Cette proposition sera vraie dans toutes les histoires qui contiennent cet événement ponctuel, donc dans l'ensemble H_{e2}.

Or, nous avons défini cinq types d'événements complexes : les événements initiaux, résultants, les résultats dispersés, disjonctifs et les transitions. Il faut donc voir comment Belnap construit les ensembles d'histoires correspondants aux conditions de vérité des propositions d'occurrence de ces événements complexes.

2.6.2 Propositions d'occurrences :

Pour un événement ponctuel, nous l'avons vu, la condition de vérité de sa proposition d'occurrence est simplement l'ensemble des histoires dont il fait partie (H_e). Belnap remarque qu'un même ensemble d'histoire peut correspondre à plusieurs événements ponctuels distincts. Ainsi, dans notre exemple, les propositions « je continue à travailler » et « ma voiture est volée » sont vraies dans les mêmes cours possibles du monde, d'où l'idée que la conjonction « je continue à travailler et ma voiture est volée » est vraie à e_1 et à e_2 même si un seul événement local correspond à chacun de ces événements ponctuels. Tournons-nous maintenant vers les événements plus complexes.

Rappelons-nous qu'un événement initial est un ensemble d'événements ponctuels qui ont tous au moins une histoire en commun. Suivant cette idée, Belnap propose que la définition d'une proposition d'occurrence pour un événement initial I corresponde justement à l'ensemble des histoires qui contiennent tous les événements ponctuels de I. « L'événement I a lieu » est vraie dans les histoires qui contiennent tous les points de I.

D_{ETR}6.1.1 (*Histoires où un événement initial a lieu*) $H_{[I]} =_{df} \{h : I \subseteq h\}$

Comme les histoires ne se ramifient que vers le futur, $H_{[I]}$ correspond à l'ensemble des histoires qui contiennent le ou les « derniers » points de I, c'est-à-dire les points qui sont postérieurs ou contemporains à tous les autres points de I. En ce sens, la proposition d'occurrence d'un événement initial est vraie seulement lorsque cet événement a complètement lieu.

Les contraintes sur les ensembles d'histoires contenant des événements résultants sont différentes. Rappelons-nous que les événements résultants débutent à un point précis; ils ont une borne inférieure. Ils peuvent, après ce point, être indéfiniment longs. Compte tenu de ce fait, Belnap propose de considérer qu'ils ont lieu dans toutes les histoires où ils débutent, même si certaines de ces histoires les quittent à un point ou à un autre. Parce que les histoires ne se ramifient que vers le futur, l'intersection des histoires qui passent par les points d'un événement résultant correspond au début de cet événement :

D_{ETR}6.1.2 (*Histoires où un événement résultant a lieu*) $H_{[O]} =_{df} \{h : h \cap O \neq \emptyset\}$

L'idée est la même pour les résultats dispersés. Comme ceux-ci ont été définis en termes d'événements résultants, leurs propositions d'occurrence sont définies par la grande intersection des propositions d'occurrence de leurs composantes.

D_{ETR}6.1.3 (*Histoires où un résultat dispersé a lieu*) $H_{[O]} =_{df} \bigcap_{O \in O} H_{[O]}$

Les différentes composantes d'un résultat disjonctif ne peuvent avoir lieu en même temps parce que, par définition, elles sont incompatibles. Pour tenir compte de ce fait, Belnap propose de définir la proposition d'occurrence d'un événement disjonctif comme la grande union des propositions d'occurrences de ses composantes. Ainsi, la proposition « l'événement disjonctif **Ô** a lieu » est vraie dans les histoires où un des éléments dispersés qui le composent débute.

D_{ETR}6.1.4 (*Histoires où un résultat disjonctif a lieu*) $H_{[\hat{O}]} =_{df} \bigcup_{O \in \hat{O}} H_{[O]}$

La définition de la proposition d'occurrence d'une transition formalise l'idée que « pour une transition, *ne pas* avoir lieu c'est pour l'événement initial I d'avoir lieu et ensuite pour *d'autres* événements résultants de I d'avoir lieu. »[164] La proposition d'occurrence d'une transition est donc une implication matérielle qui peut être trivialement vraie lorsque l'événement initial n'a pas lieu.

D_{ETR}6.1.5 (*Histoires où une transition a lieu*) $H_{(I \Rightarrow \underline{O})} =_{df} - H_{\underline{I}} \cup H_{\underline{O}}$ ($-H_I = \mathit{Hist} - H_{\underline{O}}$)

Belnap[165] a montré les avantages d'utiliser les propositions d'occurrence de transitions pour exprimer le concept de cause dans le modèle de l'espace-temps ramifié.

Avec ces définitions en main, on peut maintenant se tourner vers le langage formel de la logique de l'espace-temps ramifié.

2.6.3 Le langage formel :

Comme je l'ai dit plus tôt, Belnap propose de construire son langage formel en distinguant *au niveau syntaxique* les propositions qui dépendent des événements

---

[164] « For the transition *not* to occur is for the initial to occur and then for some *other* outcome to occur instead. » Belnap 2002c : 12.

ponctuels de celles qui n'en dépendent pas. En d'autres termes, le vocabulaire du langage formel de Belnap semble contenir deux catégories primitives de constantes propositionnelles. Le lien entre ces deux types de propositions est fait par deux connecteurs, E^+ et E^-, qui transforment respectivement les propositions indépendantes des événements en propositions dépendantes et vice-versa.

Cette approche alourdit la sémantique, en obligeant à doubler chaque règle d'interprétation[166]. Par exemple, il y aura une règle pour interpréter le connecteur futur lorsqu'il s'applique aux propositions dépendantes des événements ponctuels et une autre règle couvrant les cas où il s'applique aux autres propositions. Belnap n'a pas proposé d'axiomatisation à ce jour, mais on peut conjecturer que le nombre d'axiome subira une inflation analogue.

Pour éviter ces complications, je propose ici un langage quelque peu différent de celui de Belnap mais qui permet de rendre compte de la distinction entre les deux types de propositions. L'idée générale est de n'utiliser qu'une catégorie primitive de proposition correspondant aux propositions dépendantes des événements ponctuels et de *construire* les propositions indépendantes au moyen d'un opérateur que je noterai O et dont l'effet est analogue à la combinaison E^+E^- dans la sémantique de Belnap. Cette sémantique permet, selon moi, de rendre compte des propositions globalement vraies sans distinguer deux catégories syntaxiques de propositions.

Vocabulaire de L_{ETR} :

(1) des constantes propositionnelles : $p, p_1, p_2,\ldots$ exprimant des propositions.

(4) les constantes logiques suivante : $\neg$ (la négation), & (et), P (il fut le cas que),F (il sera le cas que), $\Box$ (il est établi que), O (l'événement __ a lieu)

Règles de formation dans L_{ETR} :

Les constantes propositionnelles sont des formules bien formées (fbfs). Si A et B sont des fbfs alors $\neg$A, A & B, PA, FA, $\Box$ A et O(A) sont des fbfs. Rien d'autre n'est une formule bien formée.

---

[165] Belnap, 2002c : 23-31

[166] Belnap le mentionne explicitement : « The underlying ideas may also be adapted to make sense for "point-event dependent propostitions", which are sets of point-event histories pairs [...]. The connectives

Règles d'abréviation dans L_{ETR} :

Disjonction : $A \vee B =_{df} \neg(\neg A \& \neg B)$

Implication matérielle : $A \rightarrow B =_{df} \neg(A \& \neg B)$

Équivalence matérielle : $A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Passé : $PA =_{df} \neg H \neg A$; Futur : $FA =_{df} \neg G \neg A$; Possibilité historique : $\Diamond A =_{df} \neg \Box \neg A$

Tautologie : $T =_{df} A \rightarrow A$

2.6.4 Interprétation :

Ce langage est interprété dans un cadre M = ⟨G, *Val*⟩ où G est la structure ⟨NMR, ≤⟩ et *Val* est une fonction d'interprétation qui assigne à chaque formule un élément du domaine d'interprétation. *Val* assigne aux fbfs un ensemble de paires (e, h). Les autres règles d'interprétations sont habituelles, sauf pour le connecteur O, bien entendu.

(*Négation*) $<e, h> \models \neg A =_{df} <e, h> \notin Val(A)$

(*Conjonction)* $<e, h> \models A \& B =_{df} <e, h> \in Val(A) \cap Val(B)$

(*Il fut le cas que* A) $<e, h> \models PA =_{df} \exists e_1 [e_1 \in h \wedge e_1 < e \wedge <e_1, h> \models A]$

(*Il sera le cas que)* $<e, h> \models FA =_{df} \forall e_1 [(e_1 \in h \wedge e < e_1) \rightarrow <e_1, h> \models A]$

(*Nécessité historique*) $<e, h> \models \Box A =_{df} \forall h_1 [e \in h_1 \rightarrow <e, h_1> \models A]$

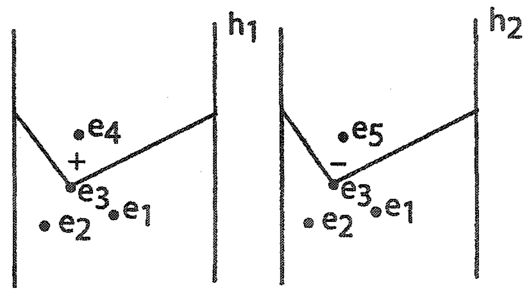
(*Occurrence de A*) $<e, h> \models O(A) =_{df} \exists e_1 [e_1 \in h \wedge <e_1, h> \models A]$.

Une formule O(A), est vraie dans une paire (e, h) seulement s'il existe un e_1 dans h où A est vraie. En termes plus simples, une formule de la forme « l'événement A a lieu » est vraie dans un événement ponctuel et selon une histoire seulement si A a lieu quelque part dans cette histoire. Le connecteur O(A) étend donc la vérité de A à tous les événements ponctuels contenus dans les histoires où A est vraie. Il délocalise la vérité de A.

Comme la fonction d'interprétation *Val* assigne des paires (e, h) à chaque formule bien formée du langage, nous aurons des formules qui correspondent à chacun des cinq types d'événements que Belnap distingue. Prenons un exemple.

---

defined above are turned into operations n such propositions by fixing model *M* and context e_c, and just replacing "M, e_c, e/h $\models$ A" by "e/h $\in H^{+}$" », dans « A theory of causation… », 2002 : 34.



Supposons que l'événement initial I = $\{e_1, e_2, e_3\}$ et que l'événement résultant O = $\{e_3, e_4, e_5\}$. On sait que $H_I = H_O = \{h_1, h_2\}$. On peut supposer que notre langage formel contient une proposition A à qui *Val* assigne l'ensemble $\{<e_1, h_1>, <e_1, h_2>, <e_2, h_1>, <e_2, h_2>, <e_3, h_1>, <e_3, h_2>\}$. De même, un peut supposer que le langage contient une proposition B avec *Val*(B) = $\{<e_3, h_1>, <e_3, h_2>, <e_4, h_1>, <e_4, h_2>, <e_5, h_1>, <e_5, h_2>\}$. Ces deux propositions expriment quelque chose comme « l'événement I (ou O) a lieu *ici* » ; elles sont dépendantes des événements ponctuels. A et B sont des propositions qui jouent, en quelque sorte, le rôle de constantes événementielles; elles ne sont vraies que dans les paires (e, h) qui correspondent à I et O. Si on leur applique le connecteur O, alors on aura *Val*(O(A)) = *Val* (O(B)) = $\{<e, h> : e \in h_1 \cup h_2$ et $h = h_1$ ou $h_2\}$. Les propositions complexes O(A) et O(B) sont vraies dans tous les points de h_1 et h_2. Elles expriment l'occurrence de I et O.

Je reviendrai sur ce langage formel dans le chapitre suivant pour y intégrer des constantes individuelles d'agents et y interpréter le connecteur *stit*.

2.7 Possibilités objectives :

Tout comme dans le modèle du temps ramifié, la notion de possibilité objective se définit sur la base de la relation d'indivision à un point[167] :

$D_{ETR}7.1$: (*Indivision e*) $h_1 \equiv_e h_2 =_{df} ((h_1, h_2 \in H_{(e)}) \wedge ((\exists e_1 > e\ [e_1 \in h_1 \cap h_2]) \vee (\neg\exists e_1[e_1 > e]))$

Deux histoires sont indivisées à e si elles partagent un événement ponctuel postérieur à e. Si un tel point n'existe pas, alors les histoires sont indivisées.

$D_{ETR}7.2$: (*Division e*) $h_1 \perp_e h_2 =_{df} ((h_1, h_2 \in H_{(e)}) \wedge ((\exists e_1[e_1 > e]) \wedge (\forall e_1 > e\ [\neg(e_1 \in h_1 \cap$

[167] La relation que j'ai présentée comme étant l'indivision est en réalité, dans les travaux de Belnap, l'indivision *apparente* parce qu'elle n'est pas transitive ni symétrique sans les postulats d'existence d'un supremum des chaînes et de densité. J'ignore cette complication dans la suite et je considère l'indision est une relation d'équivalence sur H_e.

h_2)]))
En termes plus simple : e est maximal dans $h_1 \cap h_2$ [Belnap 2003 : 9]. La division apparente n'est pas la simple négation de l'indivision. Elle exige également que les deux histoires considérées contiennent l'événement ponctuel e. Deux histoires peuvent n'être divisées ni indivisées à e si elles se sont divisées à un moment antérieur à e.

La relation $\equiv_e$ est évidemment une relation d'équivalence qui induit une partition de $H_{(e)}$.

D_{ETR}8.1 Π_e est la partition de $H_{(e)}$ induite à $H_{(m)}$ par $\equiv_e$. Les éléments de Π_e sont les possibilités objectives à e.

D_{ETR}8.2 (*Point de choix*) e est un point de choix ssi Π_e contient plus d'un élément. e est un point de choix pour h_1 et h_2 ssi $h_1 \perp_e h_2$[168].

Le terme « choix » nomme, non sans surprise à ce point de l'exposition, les éléments de Π_e dans P_{ETR}8. Nous verrons dans le chapitre suivant que, pour Belnap, il ne semble pas nécessaire d'introduire une partition supplémentaire pour exprimer les possibilités des agents.

2.7.1 Possibilités objectives et événements résultants :

La relation entre les possibilités objectives (qui sont des ensembles d'histoires) et les événements résultants (qui sont des ensembles d'événements ponctuels) met en lumière le rôle de chacun de ces concepts. Pour exposer cette relation, un type particulier d'événement résultant dispersé est nécessaire[169] :

D_{ETR}2.4.2 (*Résultat dispersé de base*) $\Omega_e(h) = \{O : inf(O) = e \wedge h \cap O \neq \varnothing\}$

$\Omega_e(h)$ est un résultat dispersé qui a deux caractéristiques particulières. Il est, premièrement, composé d'événements résultants débutant immédiatement après e. Plus précisément, en tenant compte du postulat de densité, e est le dernier événement ponctuel avant chaque O dans $\Omega_e(h)$. Il n'y a pas de premier événement ponctuel dans ces O; les transitions de e vers O sont de la forme e $\Rightarrow_{imm}$ O. Deuxièmement, $\Omega_e(h)$ est l'ensemble

[168] Dans Belnap « Branching Space-Times », le postulat suivant s'applique :
P_{ETR}8 (*Pas de choix entre les histoires apparemment non-divisées*) $h_1 \approx_e h_2 \rightarrow h_1 \equiv_e h_2$
Si on défini Π_e indépendamment de $\approx_e$, alors ce postulat est d'une importance capitale et exprime la même idée que P7 dans le modèle du temps ramifié. Il est cependant redondant compte-tenu de la définition de $\equiv_e$ que nous avons donné ici. Il est absent de [Belnap 2002a, b et 2003b], qui font pourtant usage de la partition Π_e.

[169] Belnap 2002a : 7 et 2002b 15

de *tous* les O qui débutent immédiatement après e, par définition. $\Omega_e(h)$ est, en quelques sortes, complet.

Pour tous les éléments de H_e, on peut définir l'ensemble des ensembles $\Omega_e(h)$:

D_{ETR}2.4.3 (Ω_e) $\Omega_e = \{\Omega_e(h) : h \in H_e\}$

Belnap[170] remarque que, selon les définitions D_{ETR}2.4.2 et 2.4.3, $H_{(\Omega e(h))}$ est toujours équivalent à $\Pi_e(h)$. Par conséquent : $\Omega_e(h_1) = \Omega_e(h_2) \leftrightarrow \Pi_e(h_1) = \Pi_e(h_2)$ (sous la supposition qu'il n'y a pas d'interaction à distance). Belnap ne donne pas de preuve de ce fait, probablement parce qu'elle est simple. On peut, en effet, le montrer de la manière suivante :

Implication de gauche à droite : Si $\Omega_e(h_1) = \Omega_e(h_2)$, alors, par définition, il existe un événement ponctuel postérieur à e qui est élément de $h_1 \cap h_2$.

Implication de droite à gauche : Supposons $h_1 \equiv_e h_2$ et $\Omega_e(h_1) \neq \Omega_e(h_2)$. Prenons O dans $\Omega_e(h_1)$ mais pas dans $\Omega_e(h_2)$ $(O \cap (h_1 \cap h_2) = \emptyset)$. L'existence O est garantie par la supposition. Par le principe du choix antérieur, il doit exister un $e_1 < O$ tel que $h_1 \perp_e h_2$ (puisqu'on suppose que $h_1 \in H_O$). Si $e < e_1$, alors e_1 est dans O, par définition de O. Ceci est évidemment impossible. $e_1 \leq e$ est également impossible parce que $h_1 \equiv_e h_2$. Si $e \sim e_1$, alors on est en présence d'un cas d'interaction à distance du type « un locus causal pas dans le passé de O »[171]. Si l'on suppose qu'il n'y a pas d'interaction à distance, alors il ne peut pas exister de O qui est dans $\Omega_e(h_1)$ mais pas dans $\Omega_e(h_2)$ si h_1 et h_2 sont indivisées à e.

Il y a donc correspondance univoque entre chaque $\Pi_e(h)$ et $\Omega_e(h)$ pour H_e. Belnap remarque avec raison que cette correspondance n'est pas valide si on fait varier les événements ponctuels. De plus, elle n'est valide *que* pour les événements dispersés de base. En général, les possibilités objectives peuvent correspondre à plusieurs événements dispersés. Les événements sont donc plus « précis » que les possibilités objectives parce qu'ils sont composés d'événements ponctuels et non pas d'histoires. Pour bien apprécier ce fait, introduisons une notation qui indique, selon Belnap, « que l'occurrence de O est maintenue possible »[172] à e, et ce, même si e est distant de O dans le temps :

---

[170] Belnap, 2002b : 15

[171] « some-cause-like-locus-not-in-the-past », Belnap 2002a : 21

[172] « The occurrence of O is kept possible. », Belnap 2002b : 17

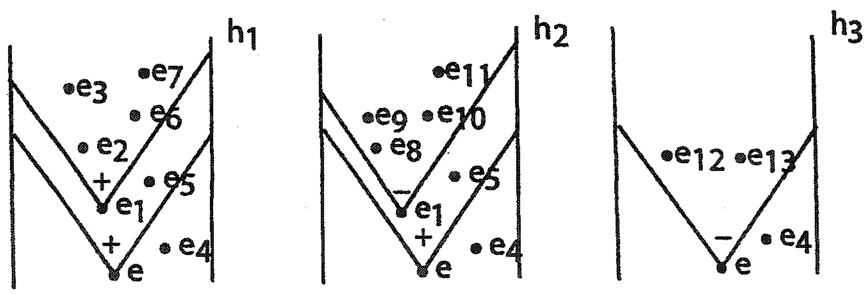
$D_{ETR}8.3\ \Pi_e \langle O \rangle =_{df} \{h : h \equiv_e H_{(O)}\}$

Le fait prouvé il y a quelques instants nous donne :

$\Pi_e\langle O\rangle$-$\Omega_e(h)$: $\Pi_e\langle\Omega_e(h)\rangle = \Pi_e\langle\Omega_e(h)\rangle \leftrightarrow \Omega_e(h) = \Omega_e(h)$.

Si on substitue aux $\Omega_e(h)$ des événements dispersés mais qui ne sont pas de base, $\Pi_e\langle O\rangle$-$\Omega_e(h)$ est facilement invalidée. Examinons un cas falsificateur à travers un exemple :

Reprenons le cas du voleur et de ma voiture (chap.2). Supposons qu'à l'événement ponctuel e le voleur est sur le point de prendre ma voiture $\{h_1, h_2\}$ ou de prendre celle de mon voisin $\{h_3\}$. S'il prend ma voiture, nerveux, le voleur peut accidentellement faire crisser mes pneus (e_1 +) ou ne pas le faire (e_1 -). Dans le premier cas, il se sauve avec ma voiture (e_2, e_3), je l'entends (e_6) et appelle la police (e_7). Dans le second cas il se sauve « ni vu ni connu » (e_8, e_9). Voici la représentation graphique et la formalisation plus précise de cette mésaventure.



$\Pi_e = \{\{h_1, h_2\}, \{h_3\}\}$, $O_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $O_2 = \{e_1, e_6, e_7\}$, $O_3 = \{e_1, e_8, e_9\}$, $\mathbf{O_A} = \{O_1, O_2\}$, $\mathbf{O_B} = \{O_3\}$, $H_{O1} = H_{O2} = H_{O3} = H_{\mathbf{OA}} = H_{\mathbf{OB}} = \{h_1, h_2\}$. (Les points supplémentaires seront utilisés plus loin.)

On voit ici que $\Pi_e(h_1)$ correspond à deux événements résultants dispersés différents parce que ce n'est pas des événements dispersés de base. On a donc $\Pi_e\langle \mathbf{O_A}\rangle = \Pi_e\langle \mathbf{O_B}\rangle$ mais pas $\mathbf{O_A} = \mathbf{O_B}$. C'est en ce sens que les événements résultants, sauf les $\Omega_e(h)$, sont plus précis que leur proposition d'occurrence.

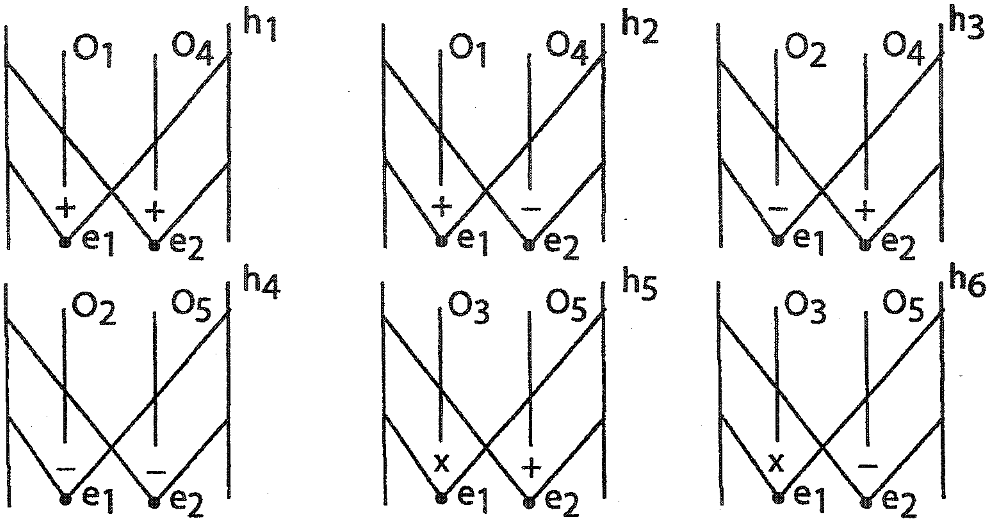
2.8 Indépendance face à des événements contemporains :

J'ai noté au chapitre 2 que le modèle du temps ramifié ne peut pas exprimer le fait qu'un événement local est indépendant relativement aux possibilités objectives d'un autre événement local qui lui est contemporain. Cette lacune est facilement comblée dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Pour nous en convaincre, il faut introduire la notion de

« locus causal » (*causal locus*), utilisée par Belnap pour définir la relation de causalité dans son modèle.

$D_{ETR}9$ (*Locus Causal de O*) e est un locus causal ssi $h \perp_e H_O$ pour un $h \in H_e$. $cl(O) = \{e :$ e locus causal de O$\}$

Un événement est indépendant d'un résultat simplement s'il n'est pas un locus causal pour cet événement. Retournons à l'exemple du voleur :



Supposons que l'événement ponctuel correspondant à moi rédigeant mon texte soit e_1 et que l'événement ponctuel correspondant au voleur volant ma voiture soit e_2. Nous avons six événements : O_1 = je continue à travailler, O_2 = je vais au café, O_3 = je regarde mon courrier électronique, O_4 = le voleur prend ma voiture, O_5 = il prend celle de mon voisin. $\Pi_{e1} = \{\{h_1, h_2\}, \{h_3, h_4\}, \{h_5, h_6\}\}$, $\Pi_{e2} = \{\{h_1, h_3, h_5\}, \{h_2, h_4, h_6\}\}$. $H_{O1} = \{h_1, h_2\}$, $H_{O2} = \{h_3, h_4\}$, $H_{O3} = \{h_5, h_6\}$, $H_{O4} = \{h_1, h_3, h_5\}$, $H_{O5} = \{h_1, h_3, h_5\}$.

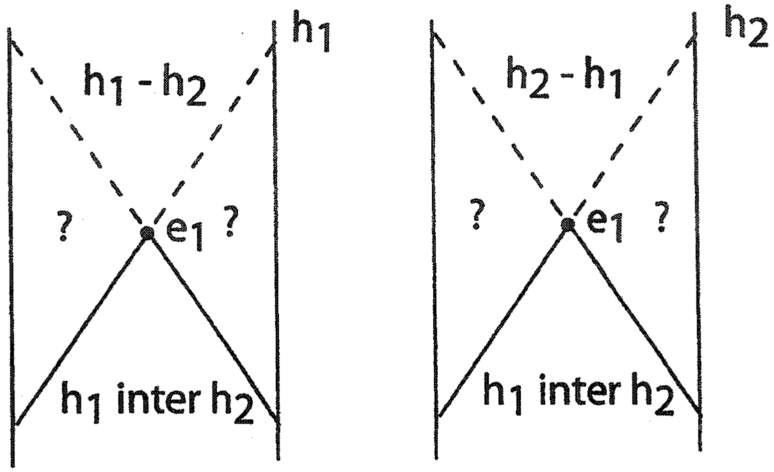
On arrive clairement à $cl(O_1) = cl(O_2) = cl(O_3) = \{e_1\}$ et $cl(O_4) = cl(O_5) = \{e_2\}$. On peut, de plus, exprimer le fait qu'il y a six possibilités objectives en tenant compte de moi et du voleur. $I = \{e_1, e_2\}$, $\Pi_I = \{\{h_1\}, \{h_2\}, \{h_3\}, \{h_4\}, \{h_5\}, \{h_6\}\}$.

Le modèle de l'espace-temps ramifié peut donc, comme on pouvait s'y attendre, exprimer l'indépendance d'événements locaux .

2.9 Ramification dans NMR :

Les points de choix sont des points où certaines histoires se séparent. Comment s'effectue cette séparation? Étudions l'exemple que présente Belnap[173]. Soit $h_1 \perp_{e1} h_2$. Par définition, e_1 est maximal dans $h_1 \cap h_2$ et donc tous les points dans le passé causal de e_1 sont dans $h_1 \cap h_2$ alors que tous les points dans le futur causal de e sont soit dans $h_1 - h_2$ ou dans $h_2 - h_1$. Belnap utilise la figure si-dessous pour représenter ce fait.

Les points sur la ligne pleine appartiennent à $h_1 \cap h_2$ alors que les points sur la ligne pointillée appartiennent à dans $h_1 - h_2$ ou $h_2 - h_1$, selon le schéma. Je rappelle que ces lignes représentent les limites de l'influence causale possible de e_1.



Comment les événements ponctuels contemporains à e (les zones marquées d'un point d'interrogation dans la figure si-dessus) se comportent-ils lorsqu'il y a ramification? Dans l'exemple de Belnap, un seul point de choix et deux histoires, plusieurs cas sont possibles.

(Cas 1) Les événements ponctuels contemporains à e sont dans $h_1 \cap h_2$.

(Cas 2) On peut tracer une ligne simultanée (*simultaneity slice*) qui passe par e. Tous les points sur cette ligne et au dessus sont soit dans $h_1 - h_2$ ou dans $h_2 - h_1$, à l'exception de e qui est l'unique point de choix de h_1 et h_2. Tous les points sous cette ligne sont dans l'intersection. Ce cas rappelle la ramification globale dans le modèle du temps ramifié.

(Cas 3) Les points contemporains de e sont dans $h_1 - h_2$ ou dans $h_2 - h_1$.

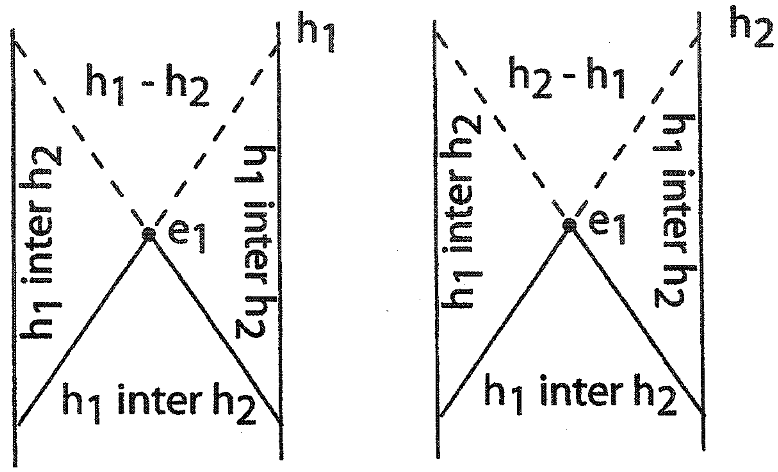
Le cas 3 n'est pas traité par Belnap. Il a montré[174] que le cas 2 contredit le principe du choix antérieur : tous les points contemporains à e au-dessus de la coupe

---

[173] 2003 : 33

simultanée sont soit dans $h_1 - h_2$ soit dans $h_2 - h_1$ mais ils n'ont aucun point e_0 dans leur passé qui soit tel que $h_1 \perp_{e0} h_2$ parce que e n'est pas dans le passé de ces points.

Cet argument est aussi valable pour le cas 3. Par conséquent, dans l'exemple qui nous occupe, les points contemporains à e doivent être dans $h_1 \cap h_2$ si on accepte le principe du choix antérieur. Les ramifications sont donc *locales* et non pas *globales*, elles se propagent le long du cône de lumière postérieur d'un point de choix.



Belnap insiste sur le fait que cette conclusion est conditionnelle aux caractéristiques de l'exemple : modèle à deux histoires et un seul point de choix. Si on varie ces conditions, la simultanéité globale n'est plus contradictoire.

Généralisons l'exemple en variant tout d'abord le nombre de points de choix, mais en laissant le nombre d'histoire constant. Où seront situés les nouveaux points de choix pour h_1 et h_2? Pas dans le cône de lumière inférieur de e parce que, dans ce cas, e ne serait plus dans $h_1 \cap h_2$ et ne serait donc plus un point de choix. Ils ne peuvent pas être dans le cône supérieur de e parce que, dans ce cas, e ne serait plus maximal dans $h_1 \cap h_2$ et donc ne serait plus un point de choix. Ils doivent donc être contemporains à e. Tomasz Placek soutient la même chose : « il est naturel de supposer que, pour n'importe quel point de choix <e_1, $e_2 \in$ NMR, pour la même paire d'histoire> , ni <e_1> est au-dessus de <e_2> ni *vice versa* »[175].

Pour représenter une ramification globale passant par e, on peut remplacer la ligne

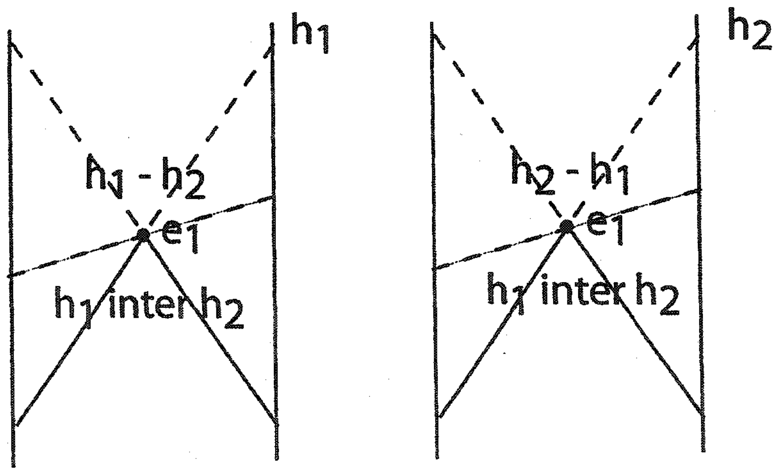
---

[174] 2003 : 30

[175] « It is natural to require that for any choice points $x, y \in C_{\sigma\eta}$, neither x is above y nor *vice versa*. » Belnap, 2002 : 81

simultanée par une ligne de choix : un ensemble dense de points de choix pour h_1 et h_2 contemporains à e. Chacun des points sur cette coupe de choix ne doit être ni antérieur ni postérieur à aucun autre (sinon ils ne sont plus des points de choix, par le même raisonnement que j'ai fait plus haut). Une telle représentation ne viole plus le principe du choix antérieur parce que pour n'importe quel point contemporain à e au-dessus de la ligne de choix, il y a un point de choix pour h_1 et h_2 dans le passé de ce point (sur la coupe). La figure ci-dessous illustre ce cas.

Pour défendre une telle forme de ramification globale, il faut cependant être disposé à accepter un cas d'interaction à distance entre tous les événements ponctuels dans la coupe de choix. En effet, pour tout point e_1, e_2 sur cette coupe, $\Pi_{e1} = \Pi_{e2} = \{\{h_1\}, \{h_2\}\}$. Or, le cas le plus simple d'interaction à distance est défini comme suit par Belnap [2002a] : $e_1 \sim e_2 \wedge e_1 \in h_1 \wedge e_2 \in h_2 \wedge \Pi_{e1}(h_1) \cap \Pi_{e2}(h_2) = \varnothing$. C'est le cas pour n'importe quelle paire d'événements ponctuels dans la coupe de choix.



Le seul moyen d'éviter l'interaction à distance globale est de multiplier les histoires de sorte que l'intersection de deux possibilités objectives de deux événements ponctuels dans la coupe de choix ne soit jamais vide. Si on suppose qu'il n'y a que deux possibilités par événement ponctuel, il y aura 2^n histoires dans le modèle, où n est le nombre de points (probablement infini) dans la coupe. On perd cependant l'idée d'une coupe globale de choix pour h_1 et h_2. En effet, pour éviter l'interaction à distance, il faut que, pour tout point e_1 ($e_1 \neq e$), $h_1 \equiv_{e1} h_2$.

On voit donc que le seul moyen de représenter une ramification globale simultanée est de supposer une interaction à distance globale. En dehors de ce cas pour le moins exceptionnel, les ramifications dans NMR sont locales et se propagent progressivement le long du cône de lumière du point de choix.

2.10 Indéterminisme avec et sans point de choix :

Dans le modèle du temps ramifié, nous avons identifié les moments indéterministes comme ceux dont la partition Π_m a plus d'un élément. On peut faire de même avec les points de choix :

$D_{ETR}9.1$ (*Indéterminisme*) e est *indéterministe* ssi Π_e contient plus d'un élément.

En d'autres termes, e est indéterministe seulement si e est un point de choix ou, en développant la définition de point de choix, si e est maximal dans l'intersection d'une paire d'histoire. Lorsqu'on parle d'événements ponctuels, il n'y a pas d'indéterminisme sans point de choix. Belnap a remarqué que ce n'est pas le cas pour certaines chaînes.

Belnap donne deux définitions d'indéterminisme pour une chaîne. La première[176] se construit à partir d'une extension aux chaînes de la relation $\equiv$, que je note $\equiv_c$. On trouve : « Pour $h_1, h_2 \in H_{[c]}$, $h_1 \equiv_c h_2$ ssi soit les histoires partagent un point strictement postérieur à c ou c n'est pas bornée dans NMR ». Formellement ceci donne :

$D_{ETR}8.3$ (*Indivision pour les chaînes* (1)) $h_1 \equiv_c h_2 =_{df} (h_1, h_2 \in H_c \rightarrow \exists e_1 [c < e_1 \wedge e_1 \in h_1 \cap h_2] \vee \neg\exists e_0 \forall e [e \in c \rightarrow (e_0 < c \vee c < e_0)]])$.

La négation du *definiens*, en conservant la condition que h_1 et h_2 soient dans H_c, donne la définition suivante de $\perp_c$: $h_1 \perp_c h_2$ ssi c est maximal dans $h_1 \cap h_2$.

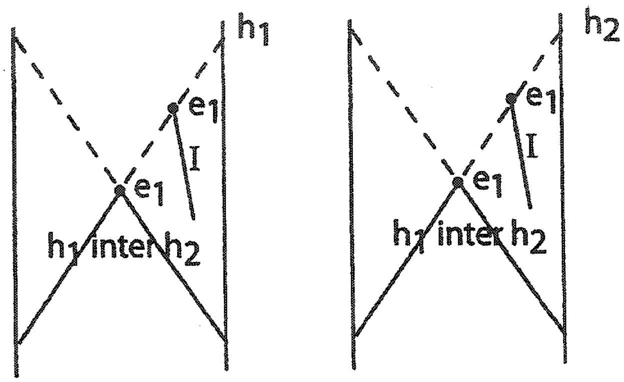
$D_{ETR}8.4$ (*Possibilités objectives pour une chaîne* (1)) Π_c est la partition de H_c induite par la relation $\equiv_c$ ($D_{ETR}8.3$).

$D_{ETR}9.2$ (*Indéterminisme pour une chaîne* (1)) Une chaîne est indéterministe ssi Π_c contient plus d'un élément.

Une chaîne est donc indéterministe si elle est maximale dans l'intersection d'une paire d'histoire. Cette définition admet des cas de chaînes indéterministes ne contenant aucun point de choix.

Prenons un exemple que donne Belnap (illustré dans la figure de la page suivante). Rappelons-nous que les événements ponctuels le long de la ligne pointillée sont dans $h_1 - h_2$ ou dans $h_2 - h_1$. Supposons que I est une piste causale maximale ouverte vers le haut avec comme *suprema* e_1 dans h_1 et e_2 dans h_2. En vertu de la densité de NMR et de $P_{ETR}4.3$, I est infinie (le seul point maximal dans $h_1 \cap h_2$ est e). En vertu de $D_{ETR}8.3$, I est indéterministe et $\Pi_c = \Pi_e = \{\{h_1\}, \{h_2\}\}$, et ce, même si elle ne contient aucun point de choix pour ces deux histoires!

La première définition de l'indéterminisme pour les ensembles d'événements ponctuels n'est cependant pas la seule possible. Belnap[177] en a donné une autre :



$D_{ETR}8.4\text{-}2$ (*Indivision pour les événements initiaux* (2)) $h_1 \equiv_I h_2 =_{df} (h_1, h_2 \in H_I \rightarrow \forall e[e \in I \rightarrow h_1 \equiv_e h_2])$

Ce qui donne, pour la division :

$D_{ETR}8.5\text{-}2$ (*Division pour les événements initiaux* (2)) $h_1 \perp_I h_2 =_{df} (h_1, h_2 \in H_I \rightarrow \exists e[e \in I \wedge h_1 \perp_e h_2])$

Et pour les possibilités objectives et l'indéterminisme :

$D_{ETR}8.6$ (*Possibilités objectives d'une chaîne*) Π_I est la partition de H_I induite par $\equiv_I$ ($D_{ETR}9.4$).

Sous cette définition, il ne peut évidemment plus avoir d'événements initiaux indéterministes qui ne contiennent pas de points de choix. Dans l'exemple précédent, I n'est plus indéterministe parce qu'aucun de ses événements ponctuels n'est un point de choix. Pour chacun d'eux il y a toujours un autre point dans la chaîne; aucun des points dans I n'est maximal dans $h_1 \cap h_2$.

3. Conclusion :

À la fin du chapitre 1, j'ai mentionné que j'espérais trouver dans le modèle de l'espace temps ramifié une alternative au caractère non-relativiste des moments et une définition philosophique plus étoffée de l'incompatibilité entre événements locaux. Dans le chapitre 2, j'avais remarqué que le caractère global des moments empêchait de représenter l'indépendance d'un événement local par rapport à un autre événement local simultané. L'examen du modèle de l'espace-temps ramifié a permis de combler deux de ces trois

---

[176] Nuel Belnap, 2003 : 33

lacunes. L'élaboration du modèle de l'espace-temps est, dans l'ensemble, une réponse au problème de la non-relativité des moments. Nous l'avons remarqué dès $T_{ETR}1.1$ et nous en avons examiné les effets sur la conception d'une ramification, sur la relation entre possibilité objective et événement résultant et sur la possibilité d'indéterminisme sans point de choix. Nous avons également vu que le modèle de l'espace-temps ramifié permet d'exprimer l'indépendance d'un événement local relativement à un autre événement simultané. Le modèle ne nous donne cependant pas de définition philosophique de l'incompatibilité entre événements locaux. Cette notion est donc bien une notion primitive de l'approche de Belnap et co. dans les deux modèles étudiés.

---

[177] Belnap, 2003b et 2002c

CHAPITRE 4 : Agents et choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié

Introduction:

Dans ce dernier chapitre, je me penche sur les concepts d'agent et de choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié. J'étudie tout d'abord le concept d'agent. Le modèle de l'espace-temps permet de le caractériser plus précisément que dans le modèle du temps ramifié. Je présente ensuite le concept de choix.

La théorie des agents et du choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié n'en est, pour l'instant, qu'à ces premiers pas. La plupart des considérations de ce chapitre sont basées sur « Agents and Agency... »[178], le seul texte actuellement disponible portant sur cette question. En raison de cette littérature restreinte, ce chapitre est beaucoup plus exploratoire que les précédents. Je tente d'y développer certaines remarques de Belnap et je propose quelques ajouts qui me paraissent nécessaires.

1. Le concept d'agent :

1.1 L'ensemble Agents :

Le concept d'agent est introduit dans le formalisme de la même manière que dans le modèle du temps ramifié :

$D_{ETR}10$ (*Agents*) *Agents* = $\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2 ...\}$ L'ensemble *Agents* est un ensemble dont les éléments sont des agents.

Dans le modèle du temps ramifié, la caractérisation des agents s'arrête ici. Ce n'est pas le cas dans le modèle de l'espace-temps ramifié.

1.2 Postulats sur Agents :

1.2.1 Les agents sont des ensembles d'événements ponctuels:

$P_{ETR}10.1$ (*Agents dans NMR*) $\forall\alpha\ [\ \alpha \in Agents \rightarrow \alpha \subseteq \text{NMR}]$

Ce postulat stipule directement que les agents sont des ensembles d'événements ponctuels dans NMR. Est-ce à dire que le concept d'agent n'est plus primitif, comme il l'était dans le modèle du temps ramifié, mais qu'il est dérivé?

On peut considérer que tous les sous-ensembles d'événements ponctuels sont des agents, sous condition qu'ils satisfassent les deux postulats que j'examinerai dans quelques instants. Dans cette éventualité, l'ensemble *Agents* sera dérivé. La situation est analogue pour l'ensemble *Hist* des histoires dans NMR. Il est dérivé des deux conditions imposées aux histoires : directionnalité et maximalité.

On peut aussi utiliser un ensemble primitif dont on suppose que les éléments satisfont les deux postulats qui suivront. Dans ce cas, les agents seront ceux qui, par stipulation, font partie d'*Agents*. Ici encore, il y a une situation analogue pour le concept d'histoire, cette fois dans le modèle non-linéaire en faisceau (*bundle of tree*) de Burgess[179]. Ce modèle prend comme primitif un ensemble de branches, et ce, même si les branches sont des ensembles de moments.

Dans « Agents and Agency... », Belnap semble adopter la seconde approche. Elle permet de donner une forme plus explicite à la présupposition de Belnap et co. quant à la nature des agents. Rappelons-nous qu'au chapitre 2 j'ai présenté une interprétation de la partition $Choix_m^\alpha$ où l'agent α est un dé. J'ai mentionné que Belnap et co. semblent rejeter pareille interprétation parce qu'ils présupposent que les agents, dans la théorie, sont des agents au sens intuitif du terme. En prenant l'ensemble des agents comme primitif, on peut exclure à notre convenance les sous-ensembles de NMR qui ne nous semblent pas être des agents.

La possibilité de donner une forme plus explicite à la présupposition de Belnap et co. quant au contenu de l'ensemble *Agents* est une conséquence directe de la possibilité de représenter les agents comme des ensembles d'événements ponctuels. Une telle définition est impossible dans le modèle du temps ramifié parce qu'on n'y dispose pas d'un primitif local. Belnap[180] remarque qu'il est contre-intuitif de concevoir les agents comme des ensembles de moments, justement parce que ces derniers sont des événements globaux.

Alors que les agents semblent appartenir à la catégorie ontologique des individus, c'est par un ensemble d'événements qu'ils sont représentés dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Cet ensemble correspond plutôt à la vie d'un agent qui semble, quant à elle, être un événement qui dure. Cette précision n'est pas nécessaire dans le modèle du

---

[178] Nuel Belnap, « Agents and Agency in Branching Space-Times », *sous presse,* dans Vanderveken (ed.), *Logic, Thought and Action*, Kluwer

[179] John Burgess, « Logic and Time », *The Journal of Symbolic Logic*, Vol.44, No.4 (Dec. 1979) : 577

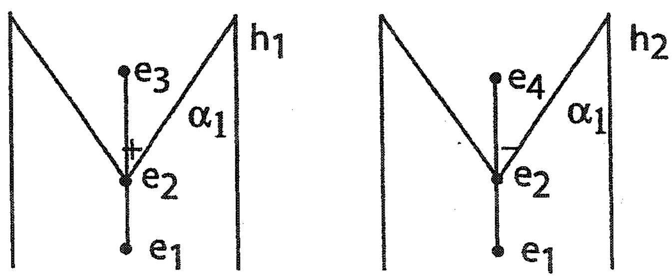
temps ramifié parce qu'aucun ensemble de moments ne correspondait aux agents. J'utiliserai dorénavant l'expression « vie d'un agent ».

1.2.2 Les éléments d'Agents sont des ensembles d'événements ponctuels.

P_{ETR}10.2 (*Chaîne de α dans une histoire*) $\forall\alpha\forall h$ [($\alpha \in$ *Agent* $\wedge$ $h \in$ *Hist*) $\rightarrow$ $\forall e_1, e_2$ [e_1 e_2 $\in (\alpha \cap h) \rightarrow e_1$ comparable e_2]]

Ce postulat stipule que toutes les paires de point d'un agent dans une histoire sont comparables. L'idée de Belnap est donc que, dans chaque histoire, la vie d'un agent est une chaîne. Comme cette chaîne peut avoir une borne inférieure et une borne supérieure, on peut explicitement exprimer le caractère « mortel », ou fini dans le temps, des agents. C'est le cas dans l'exemple ci-dessous, où la vie de α_1 débute à l'événement ponctuel e_1 et peut se terminer de deux manières différentes. Elle se termine à e_3 dans l'histoire h_1 et à e_4 dans l'histoire h_2. Rappelons-nous que la vie d'un agent n'était pas représentée dans le modèle du temps ramifié.

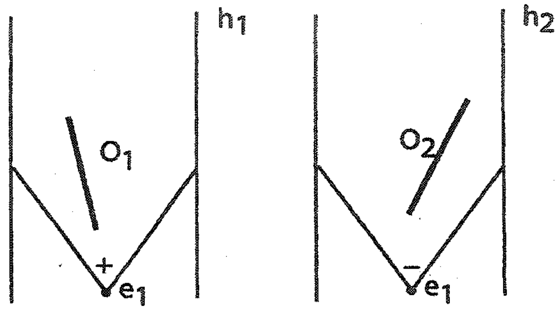
La relativisation aux histoires introduite par Belnap ($\alpha \cap h$) permet de représenter la vie des agents comme un mini-arbre où certains embranchements sont des points de choix de l'agent. La figure suivante illustre un tel cas. Supposons que α_1 a quatre points dans sa vie, $\alpha_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. On a $H_{e1} = H_{e2} = \{h_1, h_2\}$, $H_{e3} = \{h_1\}$ $H_{e4} = \{h_2\}$. On a donc $(\alpha \cap h_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $e_1 < e_2 < e_3$. De même pour $(\alpha \cap h_2)$. Le postulat *Chaînes de α dans une histoire* est donc satisfait pour α. Cet agent a deux cours possibles de vie.



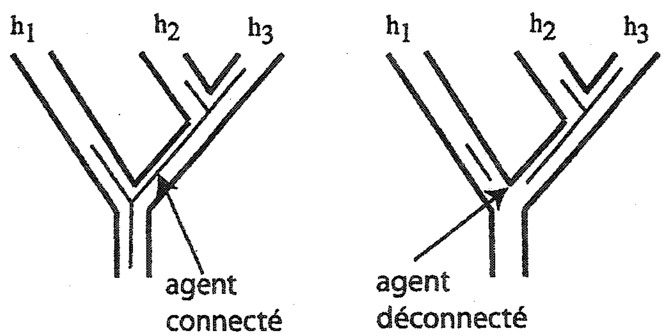
P_{ETR}10.2 admet donc l'identité trans-historique des agents. Je reprends cette expression de Storrs McCall[181] selon qui il y a identité trans-historique lorsqu'un individu existe dans plus d'une histoire à la fois. Évidemment, il existe beaucoup de cas inintéressants d'identité trans-historique, notamment tout ceux où la vie d'un agent contient un point e où h_1 et h_2 sont indivisées. Les cas plus intéressants sont ceux où e_1 et e_2 sont deux points incompatibles faisant partie de la vie de α. L'exemple du paragraphe

[180] *Idem* : 15, note 6

précédent est un cas d'identité trans-historique qu'on peut qualifier de connectée parce que α contient deux « branches » mais a une origine unique (e_1 et e_2). Une autre forme d'identité trans-historique est cependant admise par $P_{ETR}10.2$: des agents déconnectés. Prenons un exemple :



Soit les événements O_1 et O_2 représentant une vie possible pour un agent α. Le point où est décidé laquelle de ces vies sera réalisée n'est pas élément de α. On peut imaginer, par exemple, que e_1 est élément d'un autre agent, disons la mère de α. Ici l'ensemble représentant la vie de α est un événement disjonctif $\alpha = \{O_1, O_2\}$, tel que défini dans $D_{ETR}6.1$ (chap.3). Chacun des éléments de la vie de α est une chaîne dans l'histoire dont il fait partie : $(\alpha \cap h_1)$ et $(\alpha \cap h_2)$ sont des chaînes. Ce cas d'agent déconnecté satisfait donc aussi des postulats des chaînes de α dans une histoire. Ce postulat admet des agents connectés et des agents déconnectés[182].



Faut-il exclure, pour des raisons philosophiques, les vies d'agents déconnectées? La littérature sur le sujet, au moins depuis Kripke[183] me semble trop vaste pour en faire ici une revue. Notons cependant qu'un postulat de connexion de la vie des agents peut

---

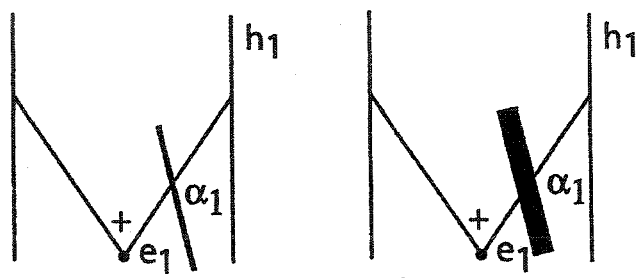
[181] Storrs McCall, *A Model of the Universe*, Clanrendon, 1994 : 218, qui cite Lewis 1986.
[182] Je reprends la figure suivante de McCall 1994 : 219
[183] Saul Kripke, *Naming and Necessity*, Harvard UP : 1971

facilement être énoncé, en prenant comme modèle celui de connexion pour *Notre_Monde*.

(*Connexion*) $\forall e_1, e_2\, [e_1, e_2 \in \alpha \rightarrow \exists e_0 \in \alpha\, [e_0 \leq e_1 \wedge e_0 \leq e_1]]$

1.2.3 Étendue spatiale des agents :

Belnap a remarqué qu'il « peut s'avérer plus adéquat de représenter un agent dans une histoire comme un nuage d'événements ponctuels »[184]. Les événements ponctuels sont en effet conçus comme des unités spatiales infinitésimales. La conception des agents comme des chaînes est donc hautement idéalisée. En d'autres termes, la vie des agents est un arbre très fin, comme dans la figure ci-dessous à gauche. Belnap entend probablement par « nuage de point » des agents conçus comme des individus quadridimensionnels ayant la forme d'un vers dans une histoire[185] (à droite dans la figure).



Agent comme une chaîne fine. Agent comme un nuage de points

Comment traiter formellement l'étendue spatiale des agents? Belnap ne propose pas de solution. L'approche la plus libérale du problème me semble être le rejet de $P_{ETR}10.2$. En effet, si les agents occupent un certain espace, il est clair que certains points du « nuage » seront incomparables. Peut-on remplacer $P_{ETR}10.2$ par un autre postulat? On pourrait, à tout le moins, postuler la densité spatiale pour éviter des agents ayant des parties disjointes dans l'espace.

(*Densité spatiale des agents*) $\forall e_1, e_2[\, (e_1, e_2 \in \alpha \wedge e_1 \sim e_2) \rightarrow \exists e_0[\, e_0 \in \alpha \wedge e_1 \sim e_0 \sim e_2]]$

Mais peut-être qu'il n'est pas nécessaire de remplacer $P_{ETR}10.2$ par un ou plusieurs postulats. On peut en effet supposer que les agents éléments de *Agents* sont seulement ceux qui constituent des arbres épais tels que celui de la figure précédente. Cette

---

[184] « It may well turn out to be better to represent an agent in a single history as a cloud of point events [...] », Belnap, *sous presse* : 17

[185] C'est la conception des individus dans l'espace-temps que Storrs McCall semble endosser . Voir 1994 : 217

caractérisation implicite des agents n'est possible que si on utilise un ensemble *Agents* primitif.

Je doute que de considérer l'étendue spatiale des agents n'apporte, actuellement, un éclairage réellement pertinent à l'analyse du choix et de l'action dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Considérer la vie des agents selon comme des chaînes fines est, bien entendu, une idéalisation, mais il s'agit d'une idéalisation qui donne une image claire des objets étudiés. À l'inverse, laisser tomber $P_{ETR}10.2$ ouvre la porte à plusieurs formes étranges d'agents dont l'interprétation semble difficile.

1.2.4 Agents denses? Continus ?

Le caractère discret, dense ou continu *dans le temps* des agents est laissé en suspend par Belnap : « il se peut que la piste d'un agent dans chacune des histoires soit dense ou continue; mais à ce point des recherches je doute que cela importe d'une manière ou d'une autre. »[186]

1.2.5 Un agent par événement ponctuel :

$P_{ETR}10.3$ (*Un agent par événement ponctuel*) $\forall \alpha_1, \alpha_2 [\alpha_1 \cap \alpha_2 = \varnothing]$

Ce postulat est proposé par Belnap parce que « les moments sont des "super événements" pris comme étant spatialement assez riches pour être occupés par plus d'un agent <alors que> les événements ponctuels semblent être si petits qu'ils n'admettent la présence d'au plus un agent. »[187] Immédiatement après avoir introduit ce postulat. Belnap le nuance : « il serait peut-être mieux que seuls les <points de choix> ne puissent pas être occupés par plus d'un agent. »[188] Rappelons que les points de choix sont les points où des histoires se divisent. Belnap ne propose pas de formalisation de cette idée. Elle pourrait, selon moi, prendre la forme suivante :

$P^*_{ETR}10.3$ (*Un agent par point de choix*) $\forall \alpha \forall e \in \alpha [\Pi_e \neq \{H_e\} \rightarrow \neg \exists \alpha_2 [\alpha \neq \alpha_2 \wedge e \in \alpha_2]]$

---

[186] « [...] it may be that the track of an agent in any one history is dense or continuous ; but at this stage of inquiry I doubt that it matters one way or the other. » Belnap, *à paraître*, 16

[187] « [...] moments are super-events taken to be "spatially" rich enough to be " occcupied" by more than one agent. [...] point events would seem to be so small as to admit the "presence" of at most one agent. » *Idem* : 15

[188] « [...] it might be better to say only that no *nonvacuous* point events [...] can be shared by two agents. » *Idem* : 16

Au plan formel, ce postulat autorise les intersections d'agents pour les points qui ne sont pas des points de choix (où $\Pi_e = \{H_e\}$). Philosophiquement, le concept d'agent en est substantiellement modifié puisque certaines fusions d'agents sont admises.

1.3 Les agents sont des mini-arbres :

Belnap mentionne : « on voit facilement (et c'est prouvable) que les ensembles α ont l'air d'un arbre. »[189] Un ensemble est un arbre s'il respecte les deux conditions suivantes :

(1) (*Unicité du passé*) $\forall e_1, e_2\ [e_1, e_2 \in \alpha \rightarrow ((e_1 < e_3 \wedge e_2 < e_3) \rightarrow e_1$ comparable $e_2)]$

(2) (*Connexion*) $\forall e_1, e_2\ [e_1, e_2 \in \alpha \rightarrow \exists e_0 \in \alpha\ [e_0 \leq e_1 \wedge e_0 \leq e_2]]$

Les postulats sur *Agents* et NMR ne suffisent pas à garantir que tous les agents respectent la condition de connexion. Nous avons en effet vu que les postulats sont suffisamment souple pour admettre des cas d'agents déconnectés qui, comme leur nom l'indique, violent la condition de connexion. Si on se restreint aux portions jointes des agents, ou si on accepte de postulat de connexion des agents que j'ai énoncé plus tôt, alors (1) est prouvable. Concentrons-nous sur les α tels que $\bigcap H_\alpha \neq \emptyset$. Je prends $H_\alpha = \{h : \alpha \cap h \neq \emptyset\}$ (voir section suivante).

FAIT 1 : *Si* $\bigcap H_\alpha \neq \emptyset$ *alors si* $e_1, e_2 \in \bigcap H_\alpha$ *alors* e_1 *et* e_2 *sont comparables.*

Supposons que e_1 n'est pas comparable à e_2 mais que e_1 et e_2 sont dans $\bigcap H_\alpha$. e_1 et e_2 sont dans toutes les histoires de H_α. Prenons une histoire au hasard dans H_α. Si, comme on le suppose, e_1 et e_2 sont incomparables, ils ne peuvent former une chaîne dans cette histoire. Ceci contredit le postulat des chaînes d'agents dans les histoires.

FAIT 2 : $\forall e_1, e_2, e_3\ [e_1, e_2, e_3 \in \alpha \rightarrow ((e_1 < e_3 \wedge e_2 < e_3) \rightarrow e_1$ comparable $e_2)]$

Soit e_3 postérieur à e_1 et postérieur à e_2 dans α. Comme les histoires sont fermées vers le passé, on a que $H_{e3} \subseteq H_{e2}$, $H_{e3} \subseteq H_{e1}$ et, par l'unicité du passé causal, $H_{e2} \subseteq H_{e1}$ ou $H_{e1} \subseteq H_{e2}$. e_1 et e_2 sont donc compatibles. Si $H_{e2} \subset H_{e1}$, soit $e_1 < e_2$ (ce que l'on cherche à montrer), soit $e_1 \sim e_2$. Cette seconde éventualité est impossible, puisqu'elle contredit le fait précédent. Il existe en effet au moins un $h \in H_{e1} \cap H_{e2}$, puisque e_1 et e_2 sont compatibles. On fait le même raisonnement pour $H_{e1} \subset H_{e2}$. Si $H_{e1} = H_{e2}$, alors il sont comparables, par le fait précédent.

---

[189] « [...] it is easy to see (and is provable) that the entire set α will look like a tree [...]. » *Idem*

Les agents sont donc des arbres s'ils sont connectés par la base. On peut utiliser ce fait pour définir les branches d'un agent, qui seront utilisées plus loin. Cette définition est calquée sur celle des histoires dans le modèle du temps ramifié.

(*Branche de* α) b_α est une branche de $\alpha =_{df} b_\alpha$ est une chaîne maximale dans α.

Branches$_\alpha$ est l'ensemble des branches de α.

1.4 Occurrence des agents :

Belnap ne donne pas de définition l'ensemble des histoires qui passent par un agent (H_α). Cette définition semble importante, tant au niveau philosophique que formel. Au niveau philosophique, cet ensemble reflète des postulats ontologiques sur les conditions d'existence de certains types d'événements. Ce fut le cas pour les événements initiaux et résultants au chapitre précédent. Au plan formel, la définition de H_α donne les conditions de vérité d'éventuelles propositions de la forme « la vie de l'agent α a lieu ».

Au chapitre 3, j'ai examiné plusieurs définitions pour des ensembles d'histoires. Pour les événements initiaux I, $H_I = \{h : I \subseteq h\}$. Cette définition exprime l'idée que l'événement initial I a lieu dans les histoires où il a lieu en entier. Pour les événements résultats O, $H_O = \{h : h \cap O \neq \emptyset\}$ et elle exprime l'idée que O a lieu dans les histoires où il débute. La définition de H_α peut-elle être construite à partir d'une de ces définitions?

On ne peut pas utiliser directement H_I pour définir H_α parce que α contient des points incompatibles. On aura alors $H_\alpha = \{h : I \subseteq h\} = \emptyset$. Or, les agents qui nous intéressent sont justement ceux qui contiennent des points incompatibles, notamment ceux qui peuvent faire des choix. La définition de la proposition d'occurrence d'un point événement initial n'est applicable qu'aux branches d'agents (b_α). On aura alors $H_{b_\alpha} = \{h : b_\alpha \subseteq h\}$. On peut ensuite construire H_α en faisant l'union des H_{b_α} pour les différentes branches dans *Branches*$_\alpha$. : $H_\alpha = \bigcup_{b_\alpha \in Branches_\alpha} H_{b_\alpha}$.

La définition de l'ensemble d'histoires pour les événements résultants s'applique plus facilement aux agents. Si α est connecté : $H_\alpha = \{h : \alpha \cap h \neq \emptyset\}$. Si la vie de α n'est pas connectée, alors c'est la définition pour un événement disjonctif qui s'applique. Quelques nouvelles définitions s'imposent cependant, pour alléger la notation. Il faut notamment identifier les branches de α à des événements dispersés : $O_{\alpha 1}$, $O_{\alpha 2}$, et ainsi de suite. On aura alors : $H_\alpha = \bigcup_{O_\alpha \subseteq \alpha} H_{O_\alpha}$. Il est clair qu'un agent dont la vie est connectée est un cas simple d'agent déconnecté.

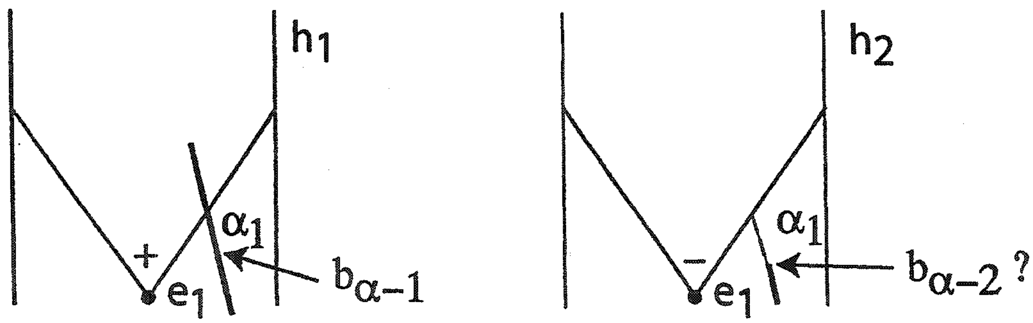
Nous avons deux définitions possibles de H_α. Pour éviter les confusions, je vais noter $H_{I\text{-}\alpha}$ l'ensemble H_α construit sur la base de l'occurrence d'un événement initial et $H_{O\text{-}\alpha}$ celui construit sur la base d'un événement résultant. Est-ce que ces deux définitions sont équivalentes? Il semble que non. Si $h \in H_{I\text{-}\alpha}$ alors $h \in H_{O\text{-}\alpha}$ mais pas le contraire.

Preuve de $h \in H_{I\text{-}\alpha} \rightarrow h \in H_{O\text{-}\alpha}$.

Supposons que $h \notin H_{O\text{-}\alpha}$. Si $h \in H_{I\text{-}\alpha}$, alors il existe un b_α tel que $b_\alpha \subseteq h$. Pour n'importe quel e de b_α, $h \in H_e$. En outre, si $h \notin H_{O\text{-}\alpha}$, aucun $e \in \alpha$ n'est tel que $h \in H_e$. Contradiction.

Contre-exemple à $h \in H_{O\text{-}\alpha} \rightarrow h \in H_{I\text{-}\alpha}$

Soit $H_{O\text{-}\alpha} = \{h_1, h_3\}$ tel que sur cette figure. $b_{\alpha\text{-}2}$ n'est pas une branche dans α parce qu'elle est sous-ensemble de $b_{\alpha\text{-}1}$. On a donc $Branches_\alpha = \{b_{\alpha\text{-}1}\}$, $H_{b_{\alpha\text{-}1}} = \{h_1\}$ et $H_{I\text{-}\alpha} = \{h_1\}$.



Quoique ce contre-exemple soit déterminant au niveau formel, il me semble difficile à interpréter. Il s'agit d'une situation où la vie de α suit son cours normal jusqu'au cône de lumière de e, où elle continue dans h_1 et s'arrête dans h_2. La difficulté dans l'interprétation de ce cas est qu'il n'y a pas d'événement dans $\alpha \cap h_2$ qui puisse correspondre à la mort de α parce que tous les points dans $\alpha \cap h_2$ sont aussi dans $\alpha \cap h_1$ et que α ne décède pas dans $\alpha \cap h_1$. Or, comme la vie de α s'arrête après e_1 dans h_2, on devrait s'attendre à ce qu'au moins un point de α corresponde à son décès. Comme ce point manque, je qualifierai les cas analogues à celui-ci de cas d'arrêts étranges de la vie de α. Il est possible d'exclure les cas d'arrêts étranges de vie, et ainsi de postuler que chaque agent décède lorsque sa vie s'arrête dans une histoire.

(*Pas d'arrêts étranges de vie*) $\forall\alpha\forall h[(\alpha \cap h) \neq \varnothing \rightarrow \exists b_\alpha[b_\alpha \subseteq h]]$

Sous ce postulat, $H_{O\text{-}\alpha}$ et $H_{I\text{-}\alpha}$ sont équivalents : comme $h \in H_{O\text{-}\alpha}$ seulement si $\alpha \cap h \neq \varnothing$ et que $h \in H_{I\text{-}\alpha}$ seulement s'il existe un b_α tel que $b_\alpha \subseteq h$, il est clair que $h \in H_{O\text{-}\alpha} \rightarrow h \in H_{I\text{-}\alpha}$ s'il n'y a pas d'arrêts étranges de vie.

2. Le concept de choix :

Belnap introduit le concept de choix comme un nouveau primitif mais il l'identifie au concept de possibilité immédiate :

D_{ETR}11($Choix_e^\alpha$ (h)) $Choix_e^\alpha$ (h) est un primitif qui signifie « le choix disponible pour α à e auquel appartient h ».

> D_{ETR}11.1 ($Choix_e^\alpha$)$Choix_e^\alpha$ = {$Choix_e^\alpha$ (h) : h ∈ H_e}
>
> D_{ETR}11.2 (*Choix*) *Choix* est une fonction de *Agents* × NMR qui s'applique seulement si e ∈ α et qui donne $Choix_e^\alpha$ pour chaque e ∈ α.
>
> D_{ETR}11.3 ($Choix_e^\alpha$ ⟨e_1⟩) $Choix_e^\alpha$ ⟨e_1⟩ est une fonction qui s'applique seulement lorsque e < e_1 et qui donne, pour n'importe quelle histoire h de H_{e1}, l'élément de $Choix_e^\alpha$ (h) auquel elle appartient. En particulier :
>
> > D_{ETR}11.3.1 $Choix_e^\alpha$ ⟨O⟩ est une fonction qui s'applique seulement lorsque e<O et qui donne, pour n'importe quelle histoire de $H_{[O]}$ l'élément de $Choix_e^\alpha$ (h) auquel elle appartient.

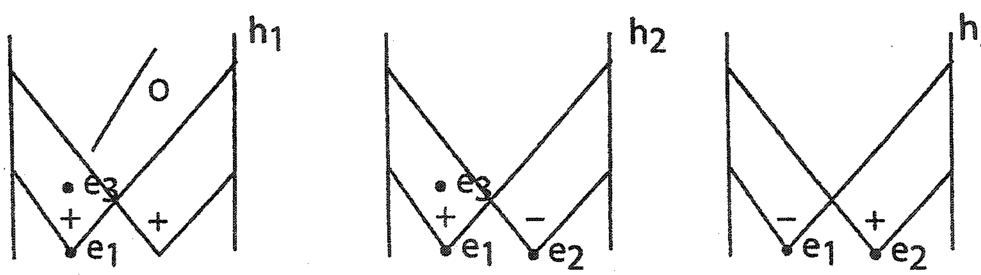


Illustration du concept de choix. Supposons que α = {e_1}. Le choix disponible pour α à e_1 auquel h_1 appartient : $Choix_{e_1}^\alpha$ (h) = {h_1, h_2}. L'ensemble des choix possibles de α à e_1 : $Choix_{e_1}^\alpha$ = {{h_1, h_2}, {h_3}}. Le choix de α compatible avec l'événement ponctuel e_2 : $Choix_{e_1}^\alpha$ (e_3) = {h_1, h_2}. Le choix de α compatible avec l'événement résultant O : $Choix_{e_1}^\alpha$⟨O⟩ = {h_1, h_2}.

La fonction *Choix* assigne à chaque agent et à chaque événement ponctuel un ensemble $Choix_e^\alpha$. Cet ensemble est composé des différents ensembles $Choix_e^\alpha$ (h) pour chaque histoire dont e fait partie. La fonction $Choix^{\alpha}_{e}\langle e_1\rangle$, ainsi que sa généralisation aux événements résultants, ne sont pas introduites par Belnap dans « Agents and Agency… » Je les ai construites comme dans le modèle du temps ramifié. On remarque que $Choix^{\alpha}_{e}\langle O\rangle$ est introduit comme une fonction alors que son analogue pour Π est un ensemble. Ceci est une conséquence du fait que $Choix^{\alpha}_{e}$ (h) ne fut pas introduit à partir d'une relation d'équivalence pour le choix, comme l'était $Choix^{\alpha}_{m}$(h).

L'identification du concept de choix avec celui de possibfait dans le postulat suivant.

$P_{ETR}11.1$ ($Choix^{\alpha}_{e}$ et Π_e) $\forall\alpha\forall e\forall h\ [e \in (\alpha \cap h) \rightarrow Choix^{\alpha}_{e}(h) = \Pi_e(h)]$

2.1 Équivalence pour le choix?

Alors que $Choix^{\alpha}_{e}$ est la partition induite sur H_m par la relation d'équivalence au choix $\equiv^{\alpha}_{m}$ et que $Choix^{\alpha}_{m}$(h) est l'élément de cette partition qui contient h, il n'est ni question de relation d'équivalence ni de partition pour $Choix^{\alpha}_{e}$, du moins explicitement. Il n'en demeure pas moins que l'ensemble $Choix^{\alpha}_{e}$ est une partition de H_e, en raison du postulat d'équivalence entre le choix et les possibilités immédiates.Rien n'exclut une introduction alternative du concept de choix qui utilise une relation d'équivalence sur H_e :

$D_{ETR}11^*$ $\equiv^{\alpha}_{e} \subset (H_e \times H_e)$. $\equiv^{\alpha}_{e}$ est une relation d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique). $\langle h_1, h_2\rangle \in \equiv^{\alpha}_{e}$ sera noté $h_1 \equiv^{\alpha}_{e} h_2$.

$D_{ETR}11.1^*$ $Choix^{\alpha}_{e}$ est la partition de H_e induite par $\equiv^{\alpha}_{e}$.

$D_{ETR}11.2^*$ $Choix^{\alpha}_{e}(h_1) = \{h_1 : h_1 \equiv^{\alpha}_{e} h\}$

$D_{ETR}11.3^*$ *Choix* (comme dans $D_{ETR}10.2$)

$D_{ETR}11.4^*$ $Choix^{\alpha}_{e}\langle e_1\rangle = \{h : h \equiv^{\alpha}_{e} H_{e1}\}$ et, en particulier, $Choix^{\alpha}_{e}\langle O\rangle = \{h : h \equiv^{\alpha}_{e} H_{[O]}\}$

Cette définition du concept de choix est parallèle à celle utilisée pour $Choix^{\alpha}_{m}$. La relation d'équivalence pour le choix, $\equiv^{\alpha}_{e}$, y est cependant superflue sous l'équivalence entre choix et possibilité immédiate. Alors que $\equiv_m$ est plus fine que $\equiv^{\alpha}_{m}$ (Π_m est une sous-partition de $Choix^{\alpha}_{m}$), $\equiv^{\alpha}_{e}$ est toujours équivalente à $\equiv_e$. Comme je l'ai mentionné, il y correspondance univoque entre les éléments de Π_e et de $Choix_e^\alpha$. Sous P $_{ETR}$11.1, l'équivalence pour le choix n'est rien d'autre que la relation d'indivision entre les histoires qui passent par un point. Il va sans dire qu'il n'est plus nécessaire de postuler qu'il n'y a pas de choix entre les histoires indivisées ($h_1 \equiv_e h_2 \rightarrow h_1 \equiv_e^\alpha h_2$) parce que P$_{ETR}$11.1 peut être reformulé comme une biconditionnelle, sous condition que e soit élément d'un agent.

P$_{ETR}$11.1* $\forall h_1, h_2 \forall \alpha \forall e[e \in \alpha \rightarrow (h_1 \equiv_e^\alpha h_2 \leftrightarrow h_1 \equiv_e h_2)]$

Deux remarques s'imposent ici. Tout d'abord, rappelons-nous que le concept de choix dans le modèle du temps ramifié fut introduit pour relativiser les possibilités globales d'un moment à l'influence locale d'un agent. Cette relativisation n'est plus nécessaire ici, parce que *Choix* s'applique à des événements ponctuels locaux de la vie d'un agent. L'influence locale de ce point est déjà représentée par son cône de lumière dans NMR.

Ensuite, d'après P$_{ETR}$11.1, le concept de choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié désigne seulement les possibilités objectives d'un agent, tout comme dans le modèle du temps ramifié. À un événement ponctuel, le choix d'un agent n'est rien d'autre que ses possibilités immédiates.

Dans le modèle du temps ramifié, le postulat *pas de choix entre les histoires indivisées* (P7) exprimait l'idée que les agents ne peuvent pas choisir maintenant entre deux éventualités qui ne se présenteront à lui que plus tard. Le fait que le choix d'un agent à un événement ponctuel ne soit rien d'autre que les possibilités immédiates à ce point implique que l'agent ne peut pas choisir maintenant entre des éventualités qui ne se présenteront à lui que plus tard. Belnap exprime cette idée comme suit : « il n'y a pas d'articulation plus fine que la nature (ou un autre agent) puisse imposer par delà le choix de l'agent lui-même pour son futur *immédiat.* »[190]

Remarque sur l'introduction du concept de choix comme primitif :

Belnap introduit le concept de choix via le primitif $Choix_e^\alpha$(h). L'introduction alternative fait également intervenir un primitif, la relation d'équivalence au choix. Dans les deux

[190] « There is no finer articulation that Nature (or other agents) can impose beyond the choosing powers of the agent himself for is immediate future. » *sous presse,*: 17

cas, les primitifs sont liés, par $P_{ETR}11.1$, à la relation d'indivision entre les histoires, qui elle est dérivée de l'ensemble partiellement ordonné NMR. Ainsi, le concept de choix, comme la vie d'un agent, *peut* être dérivé des deux primitifs NMR et $\leq$. Belnap préfère cependant les introduire comme primitifs. Pourquoi? « Introduire $Choix_e^\alpha(h)$ comme primitif laisse ouverte la possibilité que certaines idées intéressantes s'avèrent nécessiter $Choix_e^\alpha(h)$ comme un concept distinct. »[191] Belnap choisit donc d'introduire le concept de choix comme primitif parce qu'il veut se garder une marge de manœuvre théorique. Il est ainsi libre de modifier $Choix_e^\alpha$, ou $\equiv_e^\alpha$, comme il l'entend si un développement théorique dans ce modèle nécessite un concept de choix qui n'est pas équivalent à celui de possibilité objective. L'action conjointe semble être un de ces développements[192].

Dans une perspective plus générale, la possibilité de dériver les concepts d'agents et de choix, dans leur forme actuelle, à partir des primitifs NMR et $\leq$, montre que le modèle de l'espace-temps ramifié offre plus de possibilités que le modèle du temps ramifié. Dans $\langle Notre\_Monde, \leq\rangle$, on devait introduire *Agents* et *Choix* comme des primitifs alors que dans $\langle NMR, \leq\rangle$ cette méthode n'est pas la seule qui s'offre à nous.

Fin de la remarque.

2.2 Indépendance des agents :

Pour un événement ponctuel donné, le postulat d'indépendance des agents (P8, chap.2) est satisfait par $P_{ETR}11.1$ et $P_{ETR}10.3$ (un agent par point de choix). Rappelons que, lorsque le choix d'un agent, à un moment, était équivalent aux possibilités immédiates à ce moment, le postulat d'indépendance des agents interdisait que d'autres agents aient plus d'une possibilité à ce moment. En d'autres termes, si $Choix_e^\alpha = \Pi_e$, et que Π_e contient plus d'un élément alors α est le seul agent à avoir plus d'une possibilité à m. Comme $P_{ETR}11.1$ identifie le choix d'un agent aux possibilités immédiates à un point de choix et que $P_{ETR}10.3$ stipule qu'il y a seulement un agent par point de choix, les contraintes de l'indépendance des agents sont satisfaites pour un point de choix.

---

[191] « Introducing $Choice^\alpha_e(h)$ as a primitive leaves open the possibility that some interesting ideas turn out to need *Choice* as a separate concept. », *Idem* : 17

[192] Dans *sous presse* : 17, immédiatement après la dernière citation.

Belnap a remarqué qu'une formulation adéquate de l'indépendance des agents doit cependant tenir compte d'autres événements ponctuels contemporains :

> « Un renforcement supplémentaire pourrait considérer [...] un ensemble consistant arbitrairement complexe de points de choix. Il semble que tout le complexe devrait être indépendant de n'importe quel autre choix initial, et ce, peu importe sa complexité ou si <ce second complexe> s'applique à des agents, à la nature ou à un mélange des deux [...]. »[193]

Au moment de la rédaction de ce mémoire, Belnap n'a pas encore proposé de formulation explicite de l'indépendance des agents. Je ne suis arrivé à aucune formulation satisfaisante.

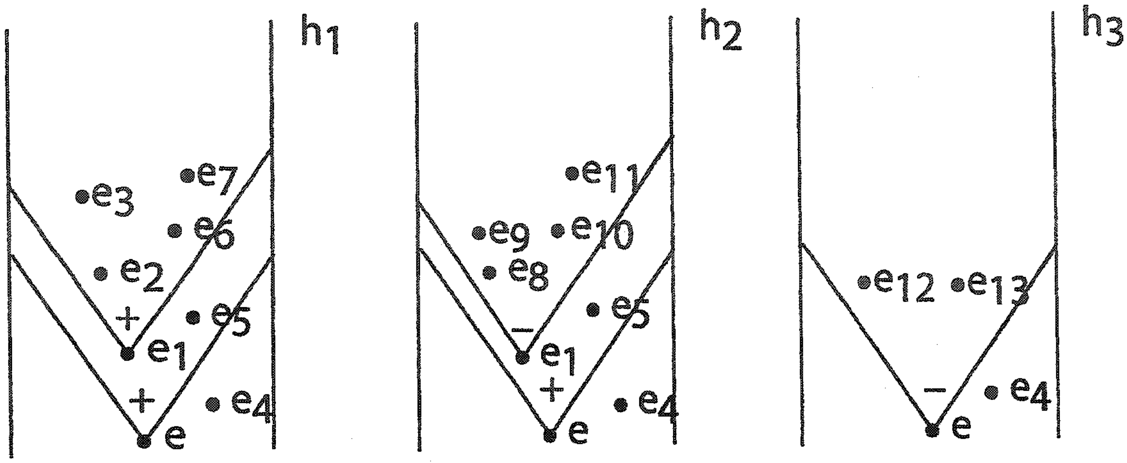
2.5 Choix d'un agent, résultats dispersés et indépendance relativement à un événement contemporain :

Dans la section 2.5.3 du chapitre précédent, j'ai présenté le concept de résultat dispersé de base ($\Omega_e(h)$) et j'ai noté qu'il y a correspondance univoque entre $\Omega_e(h)$ et $\Pi_e(h)$, c'est-à-dire que $\Omega_e(h_1) = \Omega_e(h_2) \leftrightarrow \Pi_e(h_1) = \Pi_e(h_2)$ sous l'hypothèse qu'il n'y a pas d'interaction à distance, comme Belnap semble le supposer dans le cas des agents. Par $P_{ETR}11.1$, on a donc l'équivalence suivante :

$\Omega_e(h)$- $Choix_e^{\alpha}(h)$: $\Omega_e(h_1) = \Omega_e(h_2) \leftrightarrow Choix_e^{\alpha}(h_1) = Choix_e^{\alpha}(h_2)$

Comme dans le cas de Π_e, cette équivalence tombe lorsqu'on considère des résultats dispersés qui ne sont pas des résultats dispersés de base, comme je l'ai illustré dans l'exemple du voleur. Même si les concepts d'agents et de choix n'étaient pas introduits à ce moment, on voit maintenant qu'on peut les y insérer facilement. Reprenons l'exemple avec *voleur* = $\{e, e_1, e_2, e_3, e_8, e_9, e_{12}\}$, *moi* = $\{e_4, e_5, e_6, e_7, e_{10}, e_{11}, e_{13}\}$, }}, $O_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $O_2 = \{e_5, e_6, e_7\}$, $O_3 = \{e_1, e_8, e_9\}$, $O_4 = \{e_5, e_{10}, e_{11}\}$, $\mathbf{O_A} = \{O_1, O_2\}$, $\mathbf{O_B} = \{O_3, O_4\}$

[193] « A further strengthening might consider a *joint* choice initial involving an arbitrarily complex (but consistent) set of choice points, each of which belong to some agent. It would seem that the whole complex should be independent of any joint choice initial, no matter how complex, and no matter if agentive or natural or mixed [...]. » *Idem* : 18



On obtient *moi* $\supset O_2 \cup O_4$ et *voleur* $\supset O_1 \cup O_3$. O_2 et O_4 sont des portions possibles de ma vie, de même O_1 et O_3 pour le voleur. Comme l'introduction du concept de choix, une fois les agents définis, ne revient qu'à substituer Π_e pour $Choix_e^{\alpha}$ lorsque $e \in \alpha$, on arrive aux mêmes conclusions que dans le chapitre précédent : $Choix_e^{Moi}\langle \mathbf{O_A} \rangle = Choix_e^{Vol}\langle \mathbf{O_B} \rangle$ même si $\mathbf{O_A} \neq \mathbf{O_B}$.

Chose intéressante, le modèle nous permet de distinguer formellement l'influence que peut exercer un agent sur lui-même, de celle qu'il peut exercer sur les autres agents et sur son environnement. Dans notre exemple, prenons e_6 et e_7 et supposons qu'ils correspondent à l'événement O_P, « j'appelle la police ». De même, prenons e_2 et e_3 comme correspondent à O_{VC}, « le voleur se sauve en faisant crisser les pneus ». À e_1, on a $Choix_{e_1}^{Vol} = \{\{h_1\}, \{h_2\}\}$. En termes d'événements, $Choix_{e_1}^{Vol}\langle O_P \rangle = Choix_{e_1}^{Vol}\langle O_{VC} \rangle = \{h_1\}$. Comme ni $O_p \subseteq$ voleur ni voleur $\subset O_P$, mais que e_1 est un locus causal de O_P (par $D_{ETR}9$), on a que le voleur influence ce que je ferai après e_1[194]. Comme $O_{VC} \subset$ voleur, la décision qu'il prend à e_1 influence évidemment son comportement futur.

On peut donc clairement distinguer, au niveau du modèle, l'influence qu'un agent peut exercer sur lui-même de celle qu'il exerce sur d'autres agents. De la même manière, si α contient un point qui est un locus causal pour un événement qui n'appartient à aucun agent, alors on peut représenter un cas où l'agent influence son environnement.

---

[194] Dans l'exemple, tel que je l'ai construit, il n'est pas de mon ressort d'appeler ou non la police. On peut remédier facilement à cette situation en insérant un point de choix pour moi entre e_1 et e_4 à l'intérieur du cône de lumière de e_1. Il faudra alors ajouter une histoire au modèle pour éviter l'interaction à distance. Le voleur sera alors partiellement responsable de mon appel.

À la fin du chapitre 2, j'ai noté que le concept de choix dans le modèle du temps ramifié ne permet pas d'exprimer le fait qu'un agent est indépendant relativement à un événement local. J'ai noté au chapitre 3 que le modèle de l'espace-temps ramifié permet d'exprimer ce fait pour un événement quelconque. Comme la vie des agents est un ensemble d'événements ponctuels et que leur choix à un point ne sont que les possibilités immédiates à ce point, il est clair que le modèle peut exprimer le fait qu'un agent est indépendant d'un événement local. L'exemple donné au chapitre précédent (section 2.5) s'applique directement aux agents et à leur choix. Il faut cependant noter que ce n'est pas parce que le modèle *peut* exprimer l'indépendance des agents que tous les agents sont nécessairement indépendants des événements locaux qui leur sont contemporains.

2.6 Indivision relative aux agents :

Au chapitre 3, nous avions les deux définitions suivantes pour l'indivision :

$D_{ETR}8.3$ (*Indivision pour les chaînes*) $h_1 \equiv_c h_2 =_{df} \forall c \forall h_1, h_2\ (h_1, h_2 \in H_c \rightarrow \exists e_1\ [c < e_1 \wedge e_1 \in h_1 \cap h_2] \vee \neg\exists e_0 \forall e\ [e \in c \rightarrow (e_o < c \vee c < e_0)]])$

$D_{ETR}8.4\text{-}2$ (*Indivision pour les événements initiaux*) $h_1 \equiv_I h_2 =_{df} (h_1, h_2 \in H_I \rightarrow \forall e[e \in I \rightarrow h_1 \equiv_e h_2])$

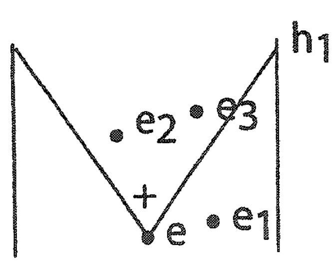
$D_{ETR}8.3$ s'applique aux agents :

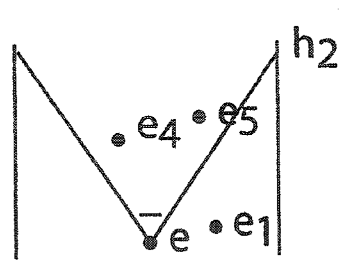
(*Indivision pour les agents 1*) $h_1 \equiv_\alpha h_2 =_{df} (h_1, h_2 \in H_\alpha \rightarrow \exists e_1\ [\alpha < e_1 \wedge e_1 \in h_1 \cap h_2] \vee \neg\exists e_0 \forall e\ [e \in \alpha \rightarrow (e_0 < \alpha \vee \alpha < e_0)]])$

Pour appliquer $D_{ETR}8.4\text{-}2$, il faut la restreindre aux branches d'agents, comme on l'a fait pour $H_{I\text{-}\alpha}$. On obtient :

(*Indivision pour les agents 2*) $h_1 \equiv_{b\alpha} h_2 =_{df} (h_1, h_2 \in H_{b\alpha} \rightarrow \forall e[e \in b_\alpha \rightarrow h_1 \equiv_e h_2])$

Examinons le comportement de ces définitions dans un exemple. Soit *Agents* = $\{\alpha, \beta\}$, $\alpha = \{e, e_2, e_4\}$ et $\beta = \{e_1, e_3, e_5\}$. Prenons $b_\beta = \beta \cap h_1$.





Supposons que $H_\beta = \{h : b_\beta \subseteq h\}$. On aura alors $H_{b_\beta} = \{h_1\}$. Selon nos deux définitions, la relation d'indivision est trivialement satisfaite pour h_1 et h_2 dans b_α parce que $h_2 \notin H_{b_\beta}$.

Pour éviter ce résultat trivial, on peut utiliser $H_{b_\beta} = \{h : (h \cap b_\alpha) \neq \varnothing\}$. On aura alors $H_{b_\beta} = \{h_1, h_2\}$. Or, à e_3, il n'est pas vrai que $h_1 \equiv_{e3} h_2$ (parce que h_1 et h_2 se divisent dans le passé causal de e_3). Par conséquent, h_1 et h_2 ne sont pas indivisées dans $\beta \cap h_1$ selon la définition de l'indivision pour les agents 2. Sont-elles divisés? Non. Parce que le conséquent de cette définition est également falsifié : il n'y a pas de point de choix dans β pour h_1 et h_2.

Si on utilise la définition 1, on obtient que h_1 et h_2 sont divisées pour β. Comme β ne contient aucun point de choix pour h_1 et h_2, nous sommes en présence d'un cas analogue au cas d'indéterminisme sans choix présenté à la fin du chapitre 3.

Nous avons donc trois résultats : h_1 et h_2 sont trivialement indivisées pour β, elles ne sont ni divisées ni indivisées et elles sont divisées sans point de choix. Peut-on construire une relation d'indivision qui évite les deux premier résultats sans engendrer de division sans choix? La construction d'une telle relation me paraît souhaitable pour exprimer, d'une manière qui ne soit pas triviale, le fait qu'un agent subit la division entre deux histoires sans y prendre part. On peut dériver cette relation de $\equiv_e$, ou de $\equiv_e^\alpha$, en contraignant les points sur lesquels elle s'applique. Je suppose ici qu'il n'y a pas d'arrêts étranges de vie pour α et donc que H_α peut aussi bien être $H_{I\text{-}\alpha}$ que $H_{O\text{-}\alpha}$.

(*Invidision relative à la vie d'un agent*) $h_1 \equiv_\alpha h_2$ seulement si pour tout h_1, h_2 dans H_α, pour tout e :

c1) si $e \in \alpha$

c2) si $e \in h_1 \cap h_2$

Alors $h_1 \equiv_e h_2$

En symboles :

(*Indivision relative à l'agent 3*) $h_1 \equiv_\alpha h_2 =_{df} \forall h_1, h_2\, [h_1, h_2 \in H_\alpha \rightarrow (\forall e\, [(e \in \alpha \wedge e \in h_1 \cap h_2) \rightarrow h_1 \equiv_e h_2])]$

Cette définition s'applique non seulement aux agents mais également aux événements résultants dispersés en général. Elle stipule que deux histoires sont indivisées relativement à l'agent α seulement si elle ne se divisent pas dans la portion de α qui recoupe ces deux histoires à la fois. Appliquons-la à notre exemple.

Comme il n'y a qu'un seul point de choix pour $h_1$et h_2 et qu'il est contemporain au point de β dans $h_1 \cap h_2$, il n'y a pas de point maximal dans $h_1 \cap h_2$ qui soit postérieur à $\beta \cap (h_1 \cap h_2)$. Rappelons qu'en raison de la densité de NMR, seul e est maximal dans $h_1 \cap h_2$. Nous avons donc l'assurance qu'il y a un point dans $h_1 \cap h_2$ postérieur à n'importe quel point dans β pour lequel h_1 et h_2 sont indivisées à ce point. La définition me semble vérifiée même pour un agent α dense maximal dans $h_1 \cap h_2$ mais ne contenant pas de point de choix pour ces histoires.

La division relative à l'agent ($\perp_\alpha$) n'est pas la négation directe de $\equiv_\alpha$ simplement parce que $\perp_e$ n'est pas la négation directe de $\equiv_e$.

(*Division relative à l'agent*) $h_1 \perp_\alpha h_2 =_{df} \exists h_1, h_2 [h_1, h_2 \in H_\alpha \wedge (\exists e [(e \in \alpha \wedge e \in h_1 \cap h_2 \wedge h_1 \perp_e h_2])]$

$\equiv_\alpha$ est une relation d'équivalence. C'est une conséquence directe de la réflexivité, de la transitivité et de la symétrie de $\equiv_e$. L'indivision relative à un agent induit donc une partition sur H_α à partir de laquelle on peut définir un autre concept de choix.

(*Choix*$_\alpha$) *Choix*$_\alpha$ est la partition induite à H_α par la relation $\equiv_\alpha$

Les concepts dérivés *Choix*$_\alpha$(h) et *Choix* sont analogues à ceux pour $Choix_e^\alpha$.

Ce concept de choix fait la somme des possibilités objectives d'un agent. Si *Choix*$_\alpha$(h_1) $\neq$ *Choix*(h_2) alors cela nous garantit que l'agent peut choisir entre h_1 et h_2 à un point. La partition ne nous indique cependant pas à quel point il le pourra. C'est au niveau de l'indivision que cette partition est la plus éclairante. Si *Choix*$_\alpha$(h_1) = *Choix*$_\alpha$(h_2), alors il n'est pas du ressort de α, à aucun point de son existence, de choisir entre h_1 et h_2. *Choix*$_\alpha$ nous permet d'identifier clairement pour quelles histoires α est passif.

3. Interprétation du *stit* dans le modèle de l'espace-temps ramifié :

Pour interpréter le connecteur *stit* dans le modèle de l'espace-temps ramifié, il faut enrichir le langage objet présenté dans le chapitre précédent du connecteur modal primitif *stit* et de constantes pour les agents.

La fonction d'interprétation *Val* assignera aux constantes d'agents des éléments de *Agents* :

(*Agents*) $Val(\alpha) \in Agents$

À ce jour, Belnap n'a proposé qu'une règle d'interprétation pour *dstit*. Rappelons-nous que le *dstit* est un connecteur d'action qui signifie « le *présent* choix de l'agent α garantit la vérité de A ». Il est différent du *astit* qui signifie « la vérité de A est garantie par un choix *antérieur* de α ». Alors que la vérité d'une formule contenant un *dstit* est évaluée au point de choix, l'évaluation d'une formule contenant un *astit* se fait après le point de choix et nécessite des points co-instantanés. Comme le modèle de l'espace-temps ramifié ne contient pas d'instants, on ne peut pas directement y transférer l'interprétation du *astit*.

(*Interprétation du dstit*) : $<e, h> \models [\alpha\ dstit : A]$ ssi :

(i) $e \in Val(\alpha)$

(ii) pour tous $h_1 \in Choix^{\alpha}_{e}(h)$, $<e, h_1> \models A$

(iii) il existe au moins une $h_2 \in H_{(e)}$ où $<e, h_2> \not\models A$

La première condition vise à s'assurer que le point d'évaluation est un élément de la vie de l'agent α. On reconnaît dans les conditions (ii) et (iii) les conditions positives et négatives du *stit*. Pour éviter que ce *dstit* ne soit satisfaisable pour un A au passé, il faut encore une fois supposer que si *Val* assigne une paire $<e, h>$ à une constante propositionnelle alors elle assigne à cette constante toutes les paires $<e, h_1>$ telles que $h_1 \in H_e$.

Il est intéressant de remarquer que Belnap a utilisé la condition positive et la condition négative pour définir un connecteur signifiant « il arrive que A » (*it so happens that A* »[195]) :

(*Happ : A*) : $<e, h> \models$ Happ : A ssi :

(ii) pour tous $h_1 \in \Pi_e(h)$, $<e, h_1> \models A$

(iii) il existe au moins une $h_2 \in H_{(e)}$ où $<e, h_2> \not\models A$

Compte tenu de l'équivalence entre $\Pi_e(h)$ et $Choix^{\alpha}_{e}(h)$, il est clair que le connecteur *Happ* est « le *dstit* [...] sans agents. »[196] Ceci montre bien que les connecteurs *stits* ne

[195] *Idem*, 34

[196] « The semantic is patterned after the *dstit* of Belnap *et al.* 2001, but without an agent. » *Idem*.

représentent que le rôle joué par les possibilités objectives des agents à un événement ponctuel.

3.1 Axiomatisation?

Belnap n'a pas encore proposé d'axiomatisation pour le *dstit* dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Il est cependant intéressant d'examiner si l'axiomatisation que Xu a proposée pour le *dstit* dans le modèle du temps ramifié est encore correcte. Pour ce faire, il faut ajouter les relation d'identité entre agent,= , interprétées comme suit :

(*Identité entre agent*) <e, h> $\models \alpha_1 = \alpha_2$ ssi $Val(\alpha_1) = Val(\alpha_2)$

Au moyen de cette relation, on peut définir par abréviation le connecteur et $diff(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ de Xu :

(*Agents distincts*) $diff(\alpha_1, \ldots \alpha_n) =_{df} \neg (\alpha_1 = \alpha_2) \& \neg (\alpha_2 = \alpha_3) \& \ldots \& \neg (\alpha_{n-1} = \alpha_n)$

Dans ce modèle, on peut également définir [α *cstit* : A] comme suit : [α *cstit* : A] $=_{df}$ [α *dstit* A] v □ A.

(A_d1) □ (A → B) → (□ A → □ B), □ A → A, ◊A → □ ◊A.

Ce groupe d'axiome reste valide. Les quantifications sur H_e impliquées dans l'évaluation de □ A sont essentiellement les mêmes que celles impliquées sur H_m

(A_d2) [α *cstit* : (A → B)] → ([α *cstit* : A] → [α *cstit* : B]), [α *cstit* : A] → A, ¬ [α *cstit :* A] → [α *cstit* : ¬ [α *cstit :* A]].

La relation d'équivalence pour le choix que j'ai défini dans la section 2.1 étant une relation d'équivalence, il est clair que [α *cstit* : (A → B)] → ([α *cstit* : A] → [α *cstit* : B]) et [α *cstit* : A] → A restent valides. La validité de ¬ [α *cstit :* A] → [α *cstit* : ¬ [α *cstit :* A]] se montre facilement. Si ¬ [α *cstit :* A] dans une paire <e, h> alors il existe une paire <e, h_1> telle que $h_1 \equiv_e^\alpha h$ où A est fausse. Par conséquent, pour toute paire <e, h_2> telle que $h_2 \equiv_e^\alpha h$, il existe un $h_1 \equiv_e^\alpha h_2$ où A est fausse : [α *cstit* : ¬ [α *cstit :* A]].

(A_d3) [α *dstit* : A] → ¬ □ A

La validité de cet axiome est elle aussi évidente, par la condition négative du *dstit* qui ne change pas dans le modèle de l'espace-temps ramifié.

(A_d4) $\alpha = \alpha$, $\alpha = \beta \rightarrow \beta = \alpha$, $(\alpha = \beta \& \beta = \gamma) \rightarrow \alpha = \gamma$

Comme les agents sont des ensembles d'événements ponctuels et que la relation d'identité entre ensembles est symétrique, réflexive et transitive, il est clair que ces trois axiomes sont valides.

(A_d6_k) ($diff(\beta_0, \ldots\beta_k)$ & $\Diamond[\beta_0$ *cstit* : $B_0]$ & … $\Diamond[\beta_k$ *cstit* : $B_k]$) $\rightarrow$ $\Diamond([\beta_0$ *cstit* : $B_0]$ & … $[\beta_k$ *cstit* : $B_k]$) pour k pour $k \leq 1$.

J'ai remarqué, dans la section 2.4, que l'indépendance des agents, dans sa version adéquate pour le temps ramifié, est toujours respectée dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Cette condition ne semble cependant pas assez générale pour caractériser l'indépendance des agents dans ce modèle. L'axiome est néanmoins valide, comme on pouvait s'y attendre.

Si $<e, h> \models \Diamond[\beta_0$ *cstit* : $B_0]$ & … $\Diamond[\beta_k$ *cstit* : $B_k]$ alors $e \in \beta_0$, et … $e \in \beta_k$. Comme $<e, h> \models diff(\beta_0, \ldots\beta_k)$, par le postulat *un agent par point de choix* que j'ai énoncé dans la section 1.2.4, il faut que $Choix_e^{\beta_0} = \ldots = Choix_e^{\beta_k} = \{H_e\}$. Par conséquent, pour chaque agent β_i et chaque formule B_i ($0 \leq i \leq k$), on a que dans chaque histoire h_1 de H_e, $<e, h> \models [\beta_i$ *cstit* : $B_i]$.

(A_d7_n) ($\Diamond[\alpha$ *cstit* : $A_1]$ & $\Diamond(\neg A_1$ & $[\alpha$ *cstit* : $A_2])$ & …& $\Diamond(\neg A_1$ & … & $\neg A_{n-1}$ & $[\alpha$ *cstit* : $A_n]))$ $\rightarrow A_1 \vee \ldots \vee A_n$.

La preuve de validité de cet axiome reste la même que celle donnée dans *Facing the Future* [440].

4. Conclusion:

Dans ce chapitre, j'ai examiné les propositions de Belnap pour l'introduction des concepts d'agent et de choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Tout comme dans le modèle du temps ramifié, les agents sont introduits au moyen d'un ensemble primitif, *Agents*, dont les éléments sont des agents. Il y a cependant une différence fondamentale entre les agents dans *Notre_Monde* et ceux dans NMR : alors que les premiers ne sont pas caractérisés les seconds sont des ensembles d'événements ponctuels. J'ai relevé quatre aspects du concept d'agents qui peuvent être rendus explicites grâce à cette caractérisation : leur caractère fini dans le temps, le fait que seulement certains ensembles d'événements ponctuels sont des agents, qu'ils ont une étendue spatiale et enfin que leur vie forme un arbre de possibilité. Aucun de ces aspects n'était exprimable dans le modèle du temps ramifié.

Le concept de choix est essentiellement celui de possibilité immédiate défini à la fin du chapitre précédent. Nous avons vu que Belnap préfère tout de même l'introduire comme un concept distinct, de sorte qu'il puisse être modifié si des développements théoriques le demandent. J'ai examiné la possibilité de définir une relation d'équivalence pour le choix et nous avons remarqué que *pas de choix entre les histoires indivisées* est satisfait par $P_{ETR}11.1$. Le modèle de l'espace-temps ramifié nous permet de distinguer l'influence qu'exerce un agent sur lui-même, sur les autres agents et sur son environnement. J'ai tenté d'imposer des contraintes à la relation d'équivalence pour le choix pour qu'elle exprime les possibilités pour tous les cours possibles de vie d'un agent plutôt qu'à un point de sa vie. J'ai enfin noté que le postulat d'indépendance des agents est satisfait dans NMR pour un point, mais qu'il en faudrait une nouvelle formulation qui s'applique à des ensembles de points. À ce jour, une telle formulation n'a pas été proposée.

En somme, la théorie des agents et du choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié profite des capacités expressives de ce modèle. Tout comme dans le modèle du temps ramifié, le concept de choix dans le modèle de l'espace-temps n'a pas de composantes intentionnelles. Les interprétations contre-intuitives de ce concept, comme l'exemple du dé (chap.3), peuvent cependant être refusées en stipulant que les dés ne sont pas des agents. Alors que cette manœuvre théorique ne pouvait pas être faite dans le modèle du temps ramifié, elle peut l'être dans le modèle de l'espace-temps ramifié.

CONCLUSION

Comme je l'ai annoncé en introduction, j'ai procédé à une étude de la théorie de l'agent et du choix élaborée Belnap et co. dans leurs modèles du temps et de l'espace-temps ramifiés. Il ressort de cette étude que cette théorie sert à représenter les possibilités *objectives* des agents, et seulement ceci. Comme je l'ai répété à plusieurs reprises, la théorie de Belnap et co. ne traite pas des composantes intentionnelles de l'action. J'ai soutenu cette idée à travers quatre chapitres. Les deux premiers ont porté sur les concepts d'agent et de choix dans le modèle du temps ramifié. Les deux derniers sur ces mêmes concepts dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Rappelons mes conclusions générales.

La thèse métaphysique la plus importante dans l'entreprise théorique de Belnap et co. est celle de l'indéterminisme objectif. Comme leur conception de l'action suppose que les agents ont des possibilités qu'ils peuvent réaliser, ils supposent du même coup que notre monde contient des possibilités objectives. Ces possibilités sont *dans le monde* et pas simplement *dans la tête* des agents. En d'autres termes, Belnap et co. présupposent que l'indéterminisme ne dépend pas de nos représentations du monde.

Dans le premier chapitre, j'ai présenté le modèle du temps ramifié qui sert d'arrière-plan philosophique et formel au développement des concepts d'agent et de choix. J'ai montré que ce modèle est compatible avec l'indéterminisme objectif qu'endossent Belnap et co.. Ce modèle se construit à partir d'un ensemble arborescent de moments. Les moments sont des états possibles, instantanés et complets du monde. L'ensemble des moments, appelé *Notre_Monde*, est ordonné par la relation « est antérieur à ». Les suites maximales de moments dans *Notre_Monde* représentent des cours possibles de l'histoire du monde ou, pour faire plus court, des *histoires*. Une suite maximale est une suite qui n'est contenue dans aucune suite plus grande. Comme *Notre_Monde* est un ensemble arborescent, dont la représentation graphique prend la forme d'un arbre, il contient plusieurs histoires. Les moments indéterministes sont situés aux embranchements dans *Notre_Monde*, c'est-à-dire là où deux histoires se divisent.

L'utilisation du modèle du temps ramifié comme représentation de l'indéterminisme comporte son lot de présupposés. Un des plus importants est probablement la simultanéité globale des moments. J'ai en effet mentionné que les moments sont des états complets de l'univers, c'est-à-dire qu'ils englobent tout ce qui existe, *à un instant*. Tout ce qu'ils contiennent est, en quelques sortes, « à la même heure ». Cette notion d'instantanéité globale, ou de temps absolu, a pourtant été évacuée par la théorie de la relativité. On peut donc considérer que le modèle du temps ramifié est inadéquat d'un point de vue relativiste. C'est pour cette raison que Belnap a développé le modèle de l'espace-temps ramifié. Pourquoi, alors, travailler dans le modèle du temps ramifié ? Parce qu'il offre une représentation simple de l'indéterminisme qui ouvre la porte à une analyse somme toute assez riche du concept de possibilité objective (et de choix).

C'est dans le deuxième chapitre que j'ai présenté la théorie de l'agent et du choix dans le modèle du temps ramifié. L'idée principale de Belnap et co. est que les agents sont des individus ayant une influence limitée mais néanmoins déterminante sur le monde. Ils exercent cette influence en réalisant l'une ou l'autre de leurs possibilités objectives.

Le concept de choix représente ces possibilités, et seulement ceci. En effet, les choix possibles d'un agent à un moment dans le modèle du temps ramifié sont des ensembles de futurs possibles à ce moment. Comme ces futurs possibles sont complètement objectifs, les possibilités des agents le sont aussi.

De plus, Belnap et co. postulent qu'il n'y a *pas de choix entre les histoires indivisées*. Ce postulat stipule que les agents ne peuvent pas choisir maintenant entre des possibilités qui ne leur seront ouvertes que plus tard. J'ai soutenu qu'il faudrait abandonner l'idée qu'il n'y a pas de choix entre les histoires indivisées si le concept de choix était lié à une quelconque décision intentionnelle des agents. Lorsqu'un agent planifie ses action, il choisit vraisemblablement ce qu'il fera plus tard. Le fait que Belnap et co. adoptent ce postulat me semble être un signe clair que leur concept de choix ne représente que les possibilités objectives des agents.

J'ai présenté l'exemple d'un lancé de dé pour montrer que le concept de choix semble pouvoir s'appliquer à des individus ne prenant pas de réelles décisions. Plus généralement, cet exemple constitue un autre argument en faveur de la thèse selon laquelle le concept de choix, chez Belnap et co., n'est pas un concept de décision au sens intentionnel du terme. Il montre également que la représentation des possibilités objectives n'est pas suffisante pour rendre compte de la liberté des agents. Tout au plus, si les agents sont libres, il semble qu'il faille supposer l'existence de possibilités objectives. Le contraire n'est pas vrai. Supposer l'existence de possibilités objectives n'implique pas qu'il existe des agents libres. Dans ce contexte, il semble que la théorie de Belnap et co. ne permet pas d'éclairer l'épineux problème de la liberté humaine.

Enfin, j'ai montré que l'interprétation du connecteur d'action *stit* au moyen des concepts d'agent et de choix renforce cette lecture « objectiviste » de la théorie de Belnap et co. Pour le concept d'agent, cette lecture se distance de celle de Belnap et co. Je crois avoir montré que, dans le modèle du temps ramifié, tous les individus ayant des possibilités objectives sont des agents. Ceci inclut tous les individus impliqués dans des processus aléatoires. Belnap et co. semblent rejeter cette lecture en supposant que les agents sont des agents au sens intuitif du terme. J'ai tenté de montrer que cette supposition n'a pas de fondement dans leur théorie, à tous le moins dans le modèle du temps ramifié. Les agents sont définis, au niveau philosophique, comme des individus ayant des possibilités objectives. J'ai montré qu'avoir des possibilités objectives n'est pas suffisant pour être considéré comme des agents au sens intuitif du terme. Dire que les agents sont des individus ayant des stratégies n'est pas suffisant non plus parce qu'une stratégie est vue comme une suite de possibilités objectives. Nous avons vu que le postulat *d'indépendance des agents* semble distinguer les agents des particules élémentaires. J'ai cependant soutenu que le postulat d'indépendance des agents *présuppose* que les particules élémentaires ne sont pas des agent et donc qu'il ne peut pas servir à *fonder* la supposition de Belnap et co.. Qui plus est, même si *indépendance des agents* permettait de fonder cette supposition, il le ferait d'une manière très faible : il y a beaucoup d'individus qui ne sont ni des particules élémentaires ni des agents.

Le deuxième chapitre m'a donc permis d'exposer la lecture philosophique des concepts d'agents et de choix chez Belnap et co. qui me semble la plus adéquate. Elle découle directement de l'interprétation du modèle du temps ramifié. Le concept de possibilité objective hérite d'une autre caractéristique de ce modèle : le caractère global des moments. J'ai en effet montré que ce concept ne permet pas d'exprimer l'indépendance d'un individu relativement à un événement qui lui est contemporain, et ce, justement parce le concept de choix représente les possibilités d'un agent relativement à tout ce qui se passe à un certain moment. Pour échapper à cette contrainte, il faut passer au modèle de l'espace-temps ramifié, que j'ai examiné au troisième chapitre.

Le modèle de l'espace-temps ramifié est un modèle relativiste de l'indéterminisme. Tout comme dans le modèle du temps ramifié, notre monde relativiste (NMR) contient donc plusieurs histoires incompatibles. Les concepts de moment et d'instant y sont cependant laissés de côté au profit des événements ponctuels. Les événements ponctuels sont, en quelque sorte, des unités d'espace-temps. Ils sont donc locaux plutôt que globaux. Tout comme les moments, les événements ponctuels sont ordonnés par la relation « est antérieur à ». Vu leur caractère local, deux événements ponctuels peuvent faire partie d'une même histoire sans pour autant être antérieur ou postérieurs l'un à l'autre, ce qui était impossible pour les moments. De telles paires d'événements ponctuels sont contemporains. J'ai montré que chaque événement ponctuel délimite une zone de points qui lui sont contemporains ; la zone hors des cônes de lumière de cet événement. À l'intérieur de cette zone, certains points sont antérieurs ou postérieurs entre eux. Il n'y a pas de présent absolu dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Les points sont contemporains *relativement* à d'autres.

Le caractère relativiste des événements ponctuels rend le modèle de l'espace-temps ramifié plus adéquat. Ce modèle permet également de représenter des caractéristiques des agents et de leurs choix qui étaient implicites dans le modèle du temps ramifié. On peut notamment y représenter le fait qu'un événement ponctuel est indépendant vis à vis d'un autre événement contemporain, et ce, grâce au concept de possibilité objective. Les possibilités objectives sont présentées, au troisième chapitre, sans référence explicite aux agents. Nous avons cependant vu dans le chapitre suivant que les possibilités objectives à un point ne sont rien d'autres que les possibilités d'un agent si ce point fait partie de la vie de cet agent.

Belnap semble avoir choisit de distinguer, dans la syntaxe de la logique de l'espace-temps ramifié, les proposition *dépendantes* des propositions *indépendantes* des événements ponctuels. Cette distinction permet de rendre compte du fait que certaines propositions sont *globalement* vraies, tout comme certaines propositions sont *éternellement* vraies dans le modèle du temps ramifié. Dans la logique du temps ramifié, ceci ne justifie cependant pas la distinction syntaxique qu'envisage Belnap. J'ai proposé une sémantique différente de la sienne, qui me semble capturer ses intuitions sans utiliser deux types primitifs de propositions. Cette sémantique fut étendue, dans le quatrième chapitre, au connecteur *stit*.

C'est dans ce dernier chapitre que se trouve l'ébauche d'une théorie des agents et du choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Alors que le concept de choix y reste sensiblement le même que dans le modèle du temps ramifié, le concept d'agent y est caractérisé beaucoup plus explicitement.

Dans le modèle du temps ramifié, les agents étaient des individus, au sens classique, et pas nécessairement des personnes. Dans le modèle de l'espace-temps ramifié, on peut représenter leur vie par des *ensembles arborescents d'événements ponctuels*. Ces ensembles sont arborescents parce que les agents ont des possibilités objectives et peuvent donc « vivre leur vie » de plusieurs manières différentes.

Bien qu'à chaque agent correspond un sous-ensemble de NMR, Belnap choisit tout ce même d'utiliser un ensemble primitif d'agent. Ce choix théorique permet, selon moi, de représenter plus explicitement la supposition que les agents sont des personnes.

J'ai montré que les contraintes qu'impose Belnap aux vies des agents sont assez souples pour tolérer des vies d'agents « déconnectées », c'est-à-dire des cours incompatibles de la vie d'un même agent n'ayant pas d'origine commune. J'ai également montré que le modèle admet des cas où la vie d'un agent s'arrête sans qu'aucun événement ponctuel ne corresponde à sa mort. J'ai proposé un postulat qui exclu de tels arrêts étranges de vie. J'ai enfin proposé deux définitions de l'ensemble des histoires dont la vie d'un agent fait partie. J'ai montré qu'elles sont équivalentes sous l'hypothèse qu'il n'y a pas d'arrêt étrange de vie.

Tout comme dans le modèle du temps ramifié, la théorie du choix dans le modèle de l'espace-temps ramifié représente les possibilités objectives des agents. La différence fondamentale entre les deux analyses est que la seconde identifie le choix aux possibilités objectives à un événement ponctuel. Dans le modèle du temps ramifié, il était nécessaire de distinguer choix possible d'un agent et possibilité à un moment pour rendre compte du fait que les agents ont une influence limitée sur leur monde. Le caractère global des moments rendait peu plausible le fait qu'un agent puisse déterminer tout ce qui se passe dans l'univers à un instant. Comme les événements ponctuels sont locaux, Belnap postule qu'ils ne sont occupés, au plus, que par un agent. Dans ce contexte, il est évident que les options d'un agent à un point ne sont rien d'autre que les possibilités à ce point.

Le fait qu'un agent puisse être indépendant relativement à des événements qui lui sont contemporains n'exclu pas qu'il puisse « subir » les conséquences de ces événements auxquels il ne participe pas activement. J'ai proposé une définition de la relation d'indivision entre histoires qui est sensible aux événements pour lesquels un agent est passif. Cette relation est simplement un renforcement de la relation d'indivision de Belnap. Elle lui est complémentaire.

Le dernier chapitre se termine par un bref examen du langage formel de la logique du connecteur *stit* interprétée dans le modèle de l'espace-temps ramifié. On y remarque que le connecteur d'action a les mêmes conditions de vérité qu'un connecteur signifiant « il advient que… » (*it happens that...*), à l'exception du fait que le *stit* requiert que l'événement ponctuel où il est évalué fasse partie de la vie d'un agent. Cette similarité renforce, selon moi, l'idée que le concept de choix utilisé dans cette théorie ne représente que les possibilités objectives des agents.

En fait, je crois avoir montré que cette interprétation vaut pour les deux concepts de choix que j'ai étudié. Le fait que l'on puisse caractériser plus précisément les agents dans le modèle de l'espace-temps ramifié ne change rien à cette conclusion. Doit-on reprocher à la théorie de ne pas représenter l'action de manière plus étoffée, par exemple en traitant du concept de possibilité subjective (les possibilités que l'agent *croit* avoir) ? Je ne crois pas que ce reproche soit fondé. Belnap et co. ont élaboré une théorie rigoureuse des possibilités objectives et ne prétendent pas proposer une définition exhaustive du concept d'action. Comme le remarque Stephen Wölfl, « si quelqu'un déplore l'absence d'un aspect <de l'action> dans la théorie, il est invité à l'enrichir »[197].

On peut cependant faire valoir qu'il n'aurait pas été très complexe d'intégrer une partition supplémentaire, analogue à $Choix^{\alpha}_{m}$, représentant les possibilités subjectives des agents. L'examen de la partition d'indiscernabilité d'Alberto Zanardo nous à même permis d'effleurer un tel ajout. De plus, il semble que des modèles arborescents combinant les possibilités objectives et les possibilités subjectives (les représentations

---

[197] « if someone misses a feature in the approach, he or she may feel invited to contribute it » provient de : http://ndpr.icaap.org/content/archives/2002/8/wolfl-belnap.html, le 29/10/2003

extensives de jeux avec information incomplète) existent et sont étudiés en théorie des jeux au moins depuis von Neumann et Morgenstern (voir l'annexe à ce mémoire). Ainsi, une partie du chemin vers un enrichissement de la théorie de Belnap et co. est déjà parcouru.

D'autres contributions à la théorie se font cependant attendre à court terme, notamment dans le modèle de l'espace-temps ramifié. Il sera entre autre intéressant d'examiner comment les différentes applications de la théorie des *stits* dans le modèle du temps ramifié peuvent s'intégrer au modèle de l'espace-temps ramifié. Je pense notamment à la théorie des stratégies et à celle des obligations.

Nous avons donc encore beaucoup de pain sur la planche. La théorie élaborée jusqu'à aujourd'hui reste cependant une base solide sur laquelle je crois que les recherches en logique de l'action pourront se développer encore longtemps.

ANNEXE 1

1. Bref historique de la notion de Choix :

1.1 Les précurseurs (1); Von Neumann et Morgenstern :

L'idée que les possibilités des agents soient des ensembles de cours des choses encore possibles à un moment se trouvait déjà chez Von Neumann et Morgenstern[198]. De plus, la portion de leur formalisme qui encode ce fait présente des similarités avec la partition $Choix^{\alpha}_{m}$: « L'information incarnée dans α_k découle de celle incarnée dans α_{k-1} en y ajoutant le résultat du choix au coup M_k. »[199] Comme $Choix^{\alpha}_{m}$, α_k est une *partition* de toutes les séquences de coups formant une partie encore possible au coup M_k, où $k = 1 \ldots \nu$ pour ν le nombre maximal de coups dans une partie. Les séquences de coups sont analogues aux histoires dans la mesure où chacune d'elles représentent un cours complet d'une partie[200]. Le nombre maximal de coups, et le coup initial, sont bien entendu des postulats absents de *Notre_Monde*.

La représentation extensive d'un jeu proposée par Von Neumann et Morgenstern utilise un ensemble arborescent dont chaque point d'embranchement représente un coup. Malgré le fait qu'ils soient représentés par des objets mathématiques analogues, les concepts de coup et de moment ne sont pas toujours équivalents. Un coup est « la totalité des choix disponibles à <un joueur> à un point de décision. »[201] Deux coups sont identiques s'ils sont constitués 1) des mêmes alternatives, 2) pour le même joueur et 3) s'ils sont situés au même « point de décision » dans une partie. La caractéristique (3) est aussi une caractéristique des moments : « en théorie des jeux, nous considérons deux coups différents s'ils ont des histoires passées différentes » [*idem* :41]. On reconnaît ici l'irrépétabilité (chapitre 1, T1.3) des moments.

Alors que plusieurs agents peuvent agir au même moment, la condition (2) suppose qu'il n'y a qu'un joueur actif par coup. Cette condition est explicitement énoncée

---

[198] Von Neumann et Morgenstern, *A Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton UP, 194

[199] « The information embodied in α_{k+1} obtains from that one embodied in α_k bu adding to it the outcome of the choice connected with the move M_k » *Idem* : 71

[200] *Idem* : 50-51

[201] « [...] the totality of choices available to <a player> at the decision point constitutes a *move*. », Luce and Raiffa, *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey*, Dover, 1957 : 39

par Luce et Raiffa.[202] Ceci a pour conséquence qu'à un coup, les possibilités immédiates sont celles du joueur. Dans les termes de la théorie des *stits*, $\Pi_m = Choix^{\alpha}_{m}$.

Notons que la définition d'un coup n'exclut pas que deux coups puissent être joués au même moment. Dans ce cas, il y a distinction entre les alternatives d'un joueur et les résultats des différents coups simultanés.

Comme la fonction $Choix^{\alpha}_{m}$, la partition α_k est indépendante de ce que les agents croient ou savent. L'information est représentée chez Von Neumann et Morgenstern par une fonction associant à chaque agent et à chaque coup M_k le choix qui fut actuel dans un certain nombre de coups précédents. Notons que le choix actuel est quant à lui dépendant de l'information que possède l'agent[203]. On peut également considérer que les alternatives α_k sont objectives dans la mesure où elles sont données par les règles du jeu.

Von Neumann et Morgenstern distinguent explicitement les individus impliqués dans des processus aléatoires et les agents. Pour les premiers, des probabilités sont attribuées à chacune de leurs alternatives. Leur « choix » actuels dépendent seulement de ces probabilités. Pour les agents, on attribue plutôt une partition représentant leur information. De cette partition et de leurs alternatives dépendent leurs choix actuels. Malgré cette distinction, des possibilités (alternatives) sont attribuées aux deux types d'individus. Ceci va dans le sens de la remarque d'Isaac Levi, citée dans le chapitre 2. La partition α_k représente, comme la partition $Choix^{\alpha}_{m}$, les possibilités objectives d'un individu, même s'il n'est pas en mesure de délibérer ou de prendre une décision.

1.2 À la suite de Von Neumann; Åqvist : [1974] et [1978] :

Åqvist[204] a utilisé la représentation extensive d'un jeu comme modèle d'une logique de l'action. Il y a explicitement représenté les possibilités d'un agent à un coup. Le modèle d'Åqvist garde le postulat « un joueur par coup ». De plus, les alternatives sont données par les règles du jeu. On retrouve donc chez Åqvist essentiellement la même représentation des possibilités que chez Von Neumann et Morgenstern. En particulier, il n'est pas nécessaire, dans ce modèle, de distinguer les possibilités d'un joueur des

[202] *Idem* : 38
[203] Voir Von Neumann et Morgenstern, 1944, axiome 10 :1 :c

possibilités immédiates à un moment.

Dans son article de 1978[205], Åqvist a généralisé son approche à un modèle arborescent du temps infini et dense (plutôt que fini et discret dans le cas d'un arbre de jeu). Ce changement de perspective théorique implique, entre autres, la substitution du concept de coup par le concept de moment et donc la possibilité de considérer plusieurs individus agissant simultanément. Le texte de 1978 n'exploite cependant pas cette possibilité. La notion d'alternative y reste donc équivalente à la notion de possibilité immédiate.

1.3 Les précurseurs (2); Chellas [1969] :

Brian Chellas[206] est considéré comme le premier à avoir développé une sémantique modale pour un connecteur d'action, le Δ, qui signifie « faire en sorte que », comme le *stit*. Cette sémantique fut tout d'abord énoncée au moyen d'un ensemble de mondes possibles et d'une relation d'accessibilité[207], mais elle fut immédiatement [208] transposée dans un modèle du temps ramifié. Un énoncé de la forme $\Delta\alpha A$ y est vrai, à un instant précis dans une histoire, si A est vrai dans toutes les histoires[209] compatibles avec l'action de α. Cette relation entre « *alternatives d'action* »[210] est proche de la relation d'équivalence pour le choix. Il y a cependant deux différences fondamentales.

Chellas ne conçoit pas sa relation comme une relation d'équivalence. Il ne la considère pas comme une relation transitive[211] : « la validité de $\Delta\alpha A \rightarrow \Delta\alpha\Delta\alpha A$ signifierait que les relations <d'alternative d'action> sont transitives. Je ne peux concevoir pourquoi cela devrait être le cas, malgré qu'une analyse de l'alternative

---

[204] Leenart Aqvist, « A New Approach to the Logical Theory of Actions and Causality », dans S. Stendul, *Logical Theory and Semantic Analysis*, D. Reidel, 1974

[205] Leenart Aqvist, « An analysis of Action Sentences based on a " Tree" system of Modal Tense Logic », dans C. Rohrer (ed.), *Paper on Tense, Aspect and verb classification*, TBL Verlag Gunter Narr, Tübingen, 1978, pp. 111-161

[206] Brian Chellas, *The Logical form of Imperatives*, Penny Lane Press, 1969

[207] *Idem* : 63

[208] *Idem* : 79

[209] Les histoires, dans l'arbre qu'utilise Chellas, sont des suites discrètes d'état de choses et elles sont synchronisées.

[210] « actional alternatives », *idem* : 82

[211] Cette prise de position n'était pas explicite dans *The logical form of Imperatives* (1969).

d'action pourrait y mener »[212].

Les histoires équivalentes à h pour un moment m selon l'action de α sont les histoires compatibles avec tout ce que l'agent fait à m dans l'histoire h. Dans les termes de Chellas, les histoires « sous le contrôle »[213] de l'agent. L'idée que l'influence de l'agent est locale plutôt que globale est implicite mais bien présente ici parce qu'il y a plusieurs histoires compatibles avec ce que l'agent fait. La relation d'alternatives d'action de Chellas vise donc à formaliser la même intuition philosophique que la relation d'équivalence pour le choix. Au plan formel, il y a cependant des différences importantes.

La seule restriction imposée à cette relation est la suivante : si deux histoires sont des alternatives d'action pour α à l'instant *i* (R^{α}_{i}), alors elles sont des *alternatives historiques* ($\sim_i$). En symboles :

$(P_{Chellas})$ $h_1 R^{\alpha}_{i} h_2 \rightarrow h_1 \sim_i h2$.

En d'autres termes, pour paraphraser *pas de choix entre les histoires indivisées*, pas d'action entre les histoires non-historiquement alternatives.

Deux histoires sont historiquement alternatives à un instant *i* si elles sont conjointes dans tous les instants antérieurs à *i* (en symboles : $h_1 \sim_i h_2$ ssi $\forall i' < i\, [i' \cap h_1 = i' \cap h_2]$. Or, de cette définition de « $\sim_i$ » on a, en transposant les relations « $\equiv_m$ » et « $\perp_m$ » dans le modèle de Chellas, $h_1 \sim_{i(m+1)} h_2 \leftrightarrow (h_1 \equiv_m h_2 \vee h_1 \perp_m h_2)$. Les alternatives historiques à un moment m (à l'intersection $i' \cap h_1$) peuvent être des histoires qui sont encore indivisées à m, ou bien des histoires qui se divisent à m ou encore des histoires qui se sont divisées dans le prédécesseur immédiat de m. Ainsi, la relation d'alternative historique ne fait pas la distinction entre les histoires qui se sont divisées celles qui ne se sont pas divisées à l'instant immédiatement antérieur.

Par conséquent, la relation d'alternative d'action peut distinguer des histoires indivisées à un instant. R^{α}_{i} est donc, au plan formel, plutôt analogue à la relation d'indiscernabilité de Zanardo qu'à la relation d'équivalence au choix de Belnap et co.. Si

---

[212] « The validity of $\Delta\alpha A \rightarrow \Delta\alpha\Delta\alpha A$ would mean that the relations R^{α}_{t} are transitive. I cannot think why this should be so, althouth it may be that an analysis of instigative alternativeness would yeald this », « Time and modality in the modal logic of agency », *Studia Logica*, 1992.

[213] « under the control », *idem* : 63

on intégrait au modèle de Chellas des partitions représentant les possibilités immédiates et les possibilités d'un agent à un moment, la relation d'alternative d'action leur serait indépendante ; à moins que l'on ne *postule* certaines restrictions sur leur interaction.

1.4 Remarque sur la suite de Chellas [1969] :

Igmar Pörn[214] et Stig Kanger [215] ont étudié différentes relations d'accessibilité entre mondes possibles pour interpréter un connecteur d'action. Ces relations peuvent être considérées comme des proto-représentations des possibilités pour les raisons suivantes :

1) La relation d'alternative d'action est une relation d'équivalence chez Kanger et une relation transitive et réflexive chez Pörn.On peut donc présumer qu'elle induit une partition sur l'ensemble des mondes possibles, mais ce fait n'est pas mentionné et *a fortiori* n'est pas étudié par ces auteurs.

2) La composante temporelle n'est pas (chez Pörn) ou peu (chez Kanger) explicité.

3) Aucune condition supplémentaire du type de *pas de choix entre les histoires indivisées* ou *indépendance des agents* n'est imposée à la relation d'accessibilité.

3.3.1 Débat parallèle :

Je me dois de mentionner un ensemble de publications autour des travaux de Bergström sur le concept d'alternatives pertinentes dans le contexte d'une théorie utilitariste.Bien qu'ils fassent moins usage des formalismes, on trouve dans les travaux de Bergström une définition d'un ensemble d'alternatives qui préfigure la partition $Choix_m^\alpha$:

> L'ensemble A est un ensemble d'alternatives ssi (i) chaque membre de A est une action particulière, (ii) A a au moins deux éléments, les éléments de A sont (iii) relatifs au même agent, (iv) relatifs au même moment, (v) accomplissables, (vi) mutuellement incompatibles et (vii) conjointement exhaustifs. [216]

Il est clair que ces travaux ont eu une influence sur le développement de la partition $Choix_m^\alpha$; Michael Perloff[217] et Aqvist[218] ayant contribué au débat.

3.4.1 « Fonction choix » de Thomason et Gupta [1980] :

---

[214]Igmar Pörn, « Some Basic Concepts of Action » dans Stendul, déjà cité, 1974 et *Action Theory and Social Science : Some Formal Models*, D. Reidel, 1977

[215] Stig Kanger, « Law and Logic », *Theoria*, **38**, 1973

[216] « The set A is an *alternative-set* if, and only if, (i) every member of *A* is a particular action, (ii) *A* has at least two different members, the members of *A* are (iii) agent-identical, (iv) time-identical, (v) performable, (vi) incompatible in pairs and (vii) jointly exhaustive. », *The Alternatives and Consequences of Actions*, Almqvist et Wiksell, Stockholm, 1966 : 30

[217] Michael Perloff, « A Better Alternative », *Analysis*, **39**, 1979 : 106-108

[218] Leenart Aqvist, « Improved formulation of act-utilitarism », *Noûs*, Vol.3, 1969 : 299-323

Dans leur texte sur les conditionnels contraires au fait[219], Richmond Thomason et Anil Gupta ont proposé un modèle arborescent où ils intègrent une fonction qu'ils nomment « fonction choix » (*choice function*). Quoique homonymes, cette fonction et la fonction que j'ai présentée ont peu de choses en commun. La fonction choix de Thomason et Gupta est une fonction qui prend comme argument des moments et donne comme résultat l'histoire actuelle à ce moment. Il s'agit donc d'une fonction qui rend leur modèle actualiste plutôt qu'une fonction qui donne une partition de H_m.

1.5 La première formulation : Von Kutschera [1986] et [1993].

Franz Von Kutschera, dans « Bewirken »[220] a développé une partition représentant les alternatives d'un agent. Les similitudes entre A(s, i), la partition de Von Kutchera, et $Choix^{\alpha}_{m}$ sont si importantes qu'on peut le considérer comme le premier à avoir explicitement articulé $Choix^{\alpha}_{m}$.

Comme Von Kutschera travaille avec un ensemble discret, fini et synchronisé de moments, il peut formaliser le concept de possibilité immédiate au moyen de l'ensemble des moments *successeurs immédiats* d'un moment *m* à un instant :

« Soit $W_i := \{j : irj\}$, l'ensemble des successeurs immédiats de *i* »[221].

Dans le vocabulaire de la théorie des *stits*, en supposant que *Notre_Monde* est un ensemble discret et synchronisé, cette définition donne :

(*Possibilités immédiates Von Kutchera*) $W_m = \{m' : i_{(m')} = i_{(m+1)} \wedge m < m'\}$

Remarquons qu'à chaque $m' \in W_m$ correspond un ensemble d'histoires de $H_{(m)}$ et que $\cup H_{(m' \in Wm)} = H_{(m)}$. En outre, pour chaque $H_{(m')}$ et $H_{(m'')}$ tel que $m', m'' \in W_m$ on a $H_{(m')} \cap H_{(m'')} = \varnothing$. Par conséquent, à chaque élément de W_m correspond un sous-ensemble de $H_{(m)}$ et l'ensemble de ces sous-ensembles forme une partition qui est Π_m. Les successeurs immédiats de von Kutschera sont donc les possibilités immédiates de la théorie des *stits*, et ce, même si W_m est un ensemble de moments alors que Π_m est un ensemble d'ensembles d'histoires.

---

219 Richmond Thomason et Anil Gupta, « A theory of Conditionals in the context of Branching Time », *Philosophical Review*, 89, 1980, 65-90

220 Franz von Kutschera, « Bewirken », *Erkenntnis*, 24, 1986, 253-281. Cet article est en allemand. Je me réfère principalement à l'article [1993] où il esquisse les définitions principales de [1986].

221 « [...] the set of immediate successors of *i.* », Franz von Kutschera, « Causation », *Journal of Philosophical Logic*, 22, 1993 : 577

Dans ce contexte, « chaque agent *s* a un ensemble A(s, i) d'alternatives qui lui sont ouvertes et [...] A(s, i) est une partition de W_i. A(s, i) = {W_i} est admit. Dans ce cas, l'agent n'a pas d'alternative réelle. »[222] [*idem.*]

En définissant A(s, i) comme une partition de W_i, Von Kutschera impose implicitement la condition *pas de choix entre les histoires indivisées*. En effet, comme à chaque élément de W_i correspond un élément de Π_m, la partition A(s, i) ne peut pas distinguer deux histoires dans le même sous-ensemble de Π_m.

Notons enfin que Von Kutchera a postulé explicitement l'indépendance des agents :

(*Indépendance des agents : Von Kutschera_1993*) « $X_1 \in A(s_1, i) \wedge \ldots \wedge X_n \in A(s_n, i) \rightarrow \exists j[X_1 \cap \ldots \cap X_n = \{j\}]$ »[223].

Cette formulation est quelque peu différente de celle de Belnap et co.. Elle stipule qu'il existe au moins un successeur immédiat dans toutes les intersections de n'importe quelle possibilité des agents à un moment. La quantification existentielle joue ici le rôle de « $\neq \varnothing$ » dans *indépendance des agents*. Dans [1986] Von Kutchera donne :

(*Indépendance des agents : Von Kutschera_1993*) « $X_1 \in A(s_1, i) \wedge \ldots \wedge X_n \in A(s_n, i) \rightarrow X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \varnothing$ »[224].

On a donc chez Von Kutschera l'essentiel de la partition $Choix^{\alpha}_{m}$. Sur le plan philosophique, les possibilités d'un agent à un moment sont représentées comme l'influence qu'il peut exercer à un moment sur les possibilités immédiates compte tenu qu'il peut y avoir d'autres agents qui agissent à ce moment. Sur le plan formel, A(s, i) est une partition de W_m et, de ce fait, satisfait *pas de choix entre les histoires indivisées*. *Indépendance des agents* est, quant-à-lui postulé explicitement.

1.6 Développements parallèles contemporains à la théorie des stits :

1.6.1 Brown [1988] :

Brown a développé un opérateur modal exprimant le fait qu'un agent *peut* faire en sorte que A. Les motivations philosophiques de Brown sont très proches de celles qui ont

---

[222] « Every agent *s* has a set A(*s*, *i*) of alternatives open to him [...]. A(*s*, *i*) is a partition of W_i [...].A(*s*, *i*) = W_i is admitted. In this as the agent has no real alternatives. » *Idem.*

[223] *Idem*

[224] 1986 : 268

guidé l'élaboration de la fonction *Choix* :

> « Lorsque je dis que je peux faire en sorte que *A* est vrai, je peux être compris comme signifiant qu'il y a une action qui m'est ouverte assurant que *A* est vrai. Mais la performance de cette action n'a pas besoin de (et ne devrait pas) déterminer absolument chaque détail du prochain état de chose. »[225]

Il existe cependant une différence philosophique fondamentale entre l'approche de Brown et celle de Belnap : les composantes temporelle et la relativisation à un agent sont implicites.

Le connecteur de Brown est interprété à partir d'un ensemble de mondes possibles et d'une relation d'accessibilité (que Brown nomme « relation de pertinence »). La relation n'associe pas des mondes un à un mais associe à chaque monde un *ensemble* de mondes possibles. Il s'agit d'une relation de l'ensemble des mondes vers la première puissance de cet ensemble. L'idée est donc, comme pour la fonction $Choix^{\alpha}_{m}$(h), d'associer à chaque monde un ensemble qui représente une possibilité. La différence principale entre la formalisation de Brown et celle de Belnap et co. est qu'aucune condition n'est imposée aux éléments de $\wp W$ qui peuvent être associés à un monde possible. En particulier, ces ensembles n'ont pas à former une partition. De plus, il n'y a pas d'ensemble d'agents dans le modèle de Brown. Ces différences au niveau de la théorie des modèles ont des répercussions importantes au niveau de la théorie axiomatique.

La plus importante est que les deux connecteurs principaux de son langage, P_P et P_N[226], ne sont pas définissables dans les termes du connecteur $\Diamond_C$ que j'ai défini dans la section précédente. On peut cependant transférer le modèle de Brown dans le modèle du temps ramifié en utilisant des histoires là où Brown utilise des mondes possibles et en ne retenant que les ensembles de $\wp W$ correspondant à la partition $Choix^{\alpha}_{m}$. Pour simplifier une première analyse, on peut supposer que l'ensemble *Agents* ne contient qu'un seul élément. Une complexification exigera cependant d'introduire un nombre arbitraire

---

[225] « When I say that I can bring it about that A is true, I can be understood to mean that there is an action open to me, the exectution of which would assure that A would be trus. But performing such an action need not (and should not) be understood to determine absolutely every detail of the ensuiing state of affairs. » Mark Brown, « On the Logic of Ability », *Journal of Philosophical Logic*, 17, 1988 : 4

[226] Je n'ai pas pu reproduire la notation de Brown parce que le caractère qu'il utilise n'est pas disponible dans mon traitement de texte. Son connecteur est un losange (le connecteur de possibilité habituelle) contenant un carré (le connecteur de nécessité). J'ai remplacé ce symbole par P_N. De même, N_p représente son connecteur carré (symbole de nécessité) contenant un losange (possibilité).

d'agents. Une fois ces transformations du modèle opérées, les équivalences suivantes sont vérifiées :

B1) $\Box \Diamond_C A \leftrightarrow N_pA$;

B2) $\Diamond \Box_C A \leftrightarrow P_NA$;

B3) $\Box \Box_c A \leftrightarrow N_NA$;

B4) $\Diamond\Diamond_C A \leftrightarrow P_pA$.

On voit donc que les connecteurs de Brown sont définissables en termes de combinaisons du connecteur $\Diamond_c$ avec le connecteur de possibilité historique habituel, $\Diamond$. C'est P_N qui signifie, selon Brown, « je peux faire... » (*I can do*) alors que P_P signifie « je pourrais faire » (*I might do*). Il en a proposé l'axiomatisation suivante pour un langage propositionnel contenant les connecteurs de vérité classiques en plus de P_P et P_N.

(PC1) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(PC2) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(PC3) $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$

(CP_P) $\vdash P_P (A \vee B) \rightarrow (P_P A \vee P_P B)$

(V) $\vdash P_N (A \vee B) \rightarrow (P_NA \vee P_NB)$

(W) $\vdash P_pA \rightarrow (N_NB \rightarrow P_NB)$

En plus du modus ponens, trois règles d'inférences s'appliquent :

(RMP_P) de $\vdash A \rightarrow B$ inférer $\vdash P_pA \rightarrow P_PB$

(RMP_N) de $\vdash A \rightarrow B$ inférer $\vdash P_NA \rightarrow P_NB$

(RNN_N) de $\vdash A$ inférer $\vdash N_NA$

Cette axiomatisation est correcte et complète. Remarquons que les axiomes CP_P et V ainsi que les règles RMP_P et RMP_N, sont identiques sauf pour leurs connecteurs modaux respectifs. Ce dédoublement est une conséquence du fait que P_N et P_P ne sont pas interdéfinissables dans le langage qu'utilise Brown.

Comme, au moyen de $\Diamond_c$ et de $\Diamond$, on peut définir le P_N et le P_P, ont peut espérer que le langage de Brown constitue un fragment d'un langage propositionel interprété dans le modèle du temps ramifié contenant les deux premiers connecteurs. Ce langage contiendra les deux formules suivantes, sous forme d'axiomes ou de théorèmes.

$\vdash \Diamond (A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

$\vdash \Diamond_C(A \vee B) \rightarrow (\Diamond_C A \vee \Diamond_c)$

On dérive aisément de ces deux formules les équivalents de CP et V en termes de $\Diamond_c$ et $\Diamond$.

$\vdash \Diamond \Diamond_c(A \vee B) \rightarrow (\Diamond\Diamond_c A \vee \Diamond\Diamond_c B)$

$\vdash \Diamond \Box_c(A \vee B) \rightarrow (\Diamond \Box_c A \vee \Diamond \Box_c B)$

L'exploration systématique des propriétés mathématiques d'un tel langage reste à faire. Notons que la relation entre les connecteurs de Brown et le *stit* est étudiée par Horty[227].

1.6.2 Vanderveken [2002] :

Daniel Vanderveken[228] a développé une logique de l'action intentionnelle qui se base sur le concept de tentative. Il utilise un modèle arborescent et synchronisé du temps. Sa notion de possibilité objective pour un agent est équivalente à celle de Von Kutchera [1986] et [1993][229]. Il définit en effet une relation d'équivalence ($Action_m^\alpha$) entre ce qu'il nomme les moments *alternatifs* à un moment m. Parmi tous les moments situés au même instant, les moments alternatifs sont ceux qui partagent la même suite de moments antérieurs. Il s'agit donc essentiellement de l'ensemble W_i de von Kutchera.Comme A(s, i), $Action_m^\alpha$ est une relation d'équivalence qui induit aussi une partition des moments alternatifs et qui, par conséquent, satisfait *pas de choix entre les histoires indivisées*. Les moments alternatifs équivalents selon la cette relation sont compatibles avec tout ce que l'agent fait au moment m. Vanderveken postule lui aussi l'indépendance des agents.

Notons qu'il utilise une autre relation d'équivalence sur les moments alternatifs, $Attempt_m^\alpha$, qui regroupe les moments compatibles, *selon l'agent*, avec tout ce qu'il tente à m. Cette relation d'équivalence selon les tentatives joue, en quelque sorte, le rôle de représentation des possibilités subjectives des agents. Elle permet à Vanderveken d'exprimer certaines caractéristiques particulières aux possibilités subjectives, par exemple qu'un agent peut croire qu'il peut faire des choses impossibles à un moment ou qu'il ne tente pas de faire des choses qu'il sait être impossibles.

---

[227] John Horty, *Agency and Deontic Logic*, Oxford UP, 2001 : 22-24

[228] Daniel Vanderveken, « Attemp and Action Generation », *Cahiers d'Épistémologie*, 2003-02, 2002.

[229] Vanderveken, contrairement à Von Kutschera, ne postule pas que les histoires forment des suites discrètes de moments. Cette différence se manifeste dans la définition des moments alternatifs (ou de l'ensemble W_m).

1.6.3 Aqvist [2002] :

Lennart Aqvist[230] a reformulé sa logique de l'action de [1974] dans des modèles finis T x W et arborescents synchronisés. La notion d'alternative de [1974] y disparaît au profit de l'introduction de constantes pour des actes de bases.

---

[230] Leenart Aqvist, « Old Foundations for the Logic of Agency and Action », *Studia Logica*, 72, 2002 : 313-338

ANNEXE 2

Modèle modifié pour preuve de Zanardo :

Soit L_0 un langage propositionnel contenant les connecteurs temporels et modaux suivants : F, P et $\Diamond$. L_0^+ est L_0 auquel on ajoute $\Diamond_C$.

Le modèle à deux agents qui est utilisé pour prouver l'inexprimabilité de $\Diamond_C$:

Soit un nombre infini d'histoires, h_o, h_1, ..., h^*, h^*_1, h^*_2, ...qui sont chacune une copie des rationnels[231]. Soit ξ un nombre irrationnel positif. Pour x un nombre rationnel quelconque, x_i, x^* et x^*_i sont des copies de x sur h_i, h^*et h^*_i avec les restriction suivantes.

Pour toute paire d'histoire h_i, h_j :

Si $x \leq 0$ alors $x_i = x_j = x^*_i = x^*_j = x^*$;

Si $0 < x < \xi$ alors $x_0 \neq x_i = x_j \neq x^*_i = x^*_j \neq x^* = x^*_1$ (pour i et j $\neq 1$);

Si $\xi \leq x$ alors $x_i \neq x_j \neq x^*_i \neq x^*_j \neq x^*$.

Ce qui nous donne $\Pi_0 = \{\{h_0\}, \{h_1, h2, \ldots\}, \{h^*, h^*_1\}, \{h^*_2, \ldots\}\}$

Soit *Agents* = $\{\alpha, \beta\}$ et :

$Choix_0^{\alpha} = \{\{h_0, h^*, h^*_1\}, \{h_1, h_2, \ldots., h^*_2, \ldots\}\}$

$Choix_0^{\beta} = \{\{h_0, h_1, h_2\}, \{h^*, h^*_1, h^*_2, \ldots\}\}$

Évaluation V : Pour p_k une variable propositionnelle où k est un nombre naturel.

(1) Pour tout $k > 0$ $V(p_k)$ est toutes les paires $\langle x, h \rangle$

(2) $V(p_0) = \{\langle x, h^* \rangle : x > -\xi\} \cup \{\langle x, h^*_i \rangle : x > \xi/2^i\} \cup \{\langle x, h_i \rangle : x > \xi/2^i\}$

Avec ces évaluations, on a que :

$\langle 0, h^*_1 \rangle \in V(\Diamond_{c\alpha} Gp_0)$

$\langle 0, h_1 \rangle \notin V(\Diamond_{c\alpha} Gp_0)$

$\langle 0, h^*_1 \rangle \in V(\Diamond_{c\beta} Gp_0)$

$\langle 0, h_1 \rangle \notin V(\Diamond_{c\beta} Gp_0)$

Proposition de Zanardo : Pour chaque formule α de L_0, $\langle 0, h_1 \rangle \in V(\alpha)$ ssi $\langle 0, h^*_1 \rangle \in V(\alpha)$.

La preuve de cette proposition reste inchangée dans le modèle modifié ci-dessus.

Corollaire : Le connecteur $\Diamond_c$ n'est pas exprimable dans L_0.

---

231 Cette exigence est purement technique. Elle sert à valider un cas particulier dans à l'induction sur le nombre de connecteur dans α qui conduit à la preuve de la *proposition de Zanardo*.

Commentaire :

Pour construire ce modèle modifié il suffit de sous-partitionner H_m de sorte qu'on ait suffisamment de possibilités objectives pour satisfaire l'indépendance des agents. La seule contrainte imposée par la preuve sur cette partition est que h* et h^*_1 demeurent indivisées à 0. Il est par conséquent clair qu'on pourra construire un modèle quelque soit le nombre d'éléments dans *Agents*, sauf pour un ensemble *Agents* infini où tous les éléments ont un choix non-trivial à 0 et où H_0 est fini.

BIBLIOGRAPHIE

Åqvist, Leenart, « Improved Formulation of Act-Utilitarism », *Noûs*, Vol.3, 1969 : 299-323

Åqvist, Leenart, « A New Approach to the Logical Theory of Actions and Causality », dans S. Stendul, *Logical Theory and Semantic Analysis*, D. Reidel, 1974

Åqvist, Leenart, « An Analysis of Action Sentences Based on a "Tree" System of Modal Tense Logic », dans C. Rohrer (ed.), *Paper on Tense, Aspect and Verb Classification*, TBL Verlag gunter Narr, 1978 : 111-161

Åqvist, Leenart , « The Logic of Historical Necessity as Founded in Two-Dimensional Modal Tense Logic », *Journal of Philosophical Logic*, **28**, 1999

Åqvist, Leenart, « Old Foundations for the Logic of Agency and Action », *Studia Logica*, 72, 2002

Belnap, Nuel « Seeing To it That: A Canonical Form for Agentives », *Theoria* **54**, 1988, réimprimé et corrigé [1990] dans KYBURG et al. (eds.), *Knowledge Representation and Defeasible Reasoning*, Ed. Kluwer Academic Publishers, Pays-Bas

Belnap, Nuel , « Backward and Forward Branching in the Modal Logic of Agency » dans *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. LI, No.4, 1991

Belnap, Nuel, « Branching Space-Time », *Synthese*, vol. 92, 1992, pp. 385-434

Belnap, Nuel, « The Way of The Agent », dans *Studia Logica*, No.51, Ed. Kluwer Academic Publishers, Pays-Bas, 1992b

Belnap, Nuel, « EPR-like "Funny-Business" in the Theory of Branching Space-Times », dans T. Placek and J. Butterfield (eds.), *Non-Locality and Modality*, Kluwer 2002. La version que j'ai utilisée provient de http://www.pitt.edu/~belnap/papers.html. (2002a)

Belnap, Nuel, « A Theory of Causation : *Causae Cansantes* (Originating Causes) as Inus Conditions in Branching Space-Times », manuscrit téléchargé de http://www.pitt.edu/~belnap/papers.html le 15/02/2003(2002b)

Belnap, Nuel, « Branching Space-Time : Postprint January 2003 », téléchargé de http://www.pitt.edu/~belnap/papers.html le 25/02/2003

Belnap, Nuel, « No-Common-Cause EPR-like Funny Business in Branching Space-Times », *Philosophical Studies* 114(3) : 199-221; Juin 2003b.

Belnap, Nuel, « Agents and Agency in Branching Space-Times », *sous presse* dans

Vanderveken (ed.), *Logic, Thought and Action*, Kluwer

Belnap, Nuel, Perloff, Michael, Xu, Ming, *Facing the Future*, Oxford UP, 2001

van Benthem, Johan, *The Logic of Time : 2nd edition*, 1991

Bergström, *The Alternatives and Consequences of Actions*, Almqvist et Wiksell, Stockholm, 1966

Burgess, John, « Logic and Time », *The Journal of Symbolic Logic*, Vol.44, No.4 (Dec. 1979)

Bicchieri C., et Green, Mitchel, «Symmetry Arguments for Cooperation in the Prisoner's Dilemma », dans Ghita Hölmström-Hintikka et Raimo Tuomela (eds.), *Contemporary Action Theory, Vol.2: Social Action*, Kluwer, 1997

Brown, Mark, « On the Logic of Ability », *Journal of Philosophical Logic*, **17**, 1988

Carnap, Rudolf, *Introduction to symbolic logic and its applications*, trad. William H. Meyer et John Wilkinson, Dover, 1958

Chellas, Brian, *The Logical Form of Imperatives*, Perry Lane Press, 1969

Chellas, Brian, « Time and Modality in the Modal Logic of Agency », *Studia Logica*, No. 51, 1992

Davidson, Donald, « The Logical Form of Action Sentences », dans Rescher (ed.), *The Logic of Decision and Action*: 81-95

Di Maio, Maria Concetta et Zanardo, Alberto, « Synchronized Histories in Prior-Thomason Representation of Branching Time », 1996

Gamut, L. T. F., *Logic, Language and Meaning: Vol. 2 Intensional Logic and Logical Grammar*, University of Chicago Press, 1991

Goldblatt, « Diodorean Modality in Minkowski Spacetime », *Studia Logica*, 39, 1980

Gupta, Anil, *The Logic of Common Nouns*, Yale UP, 1980

Hajnicz, Elzabieta, « Some Considerations on Branching Areas of Time », *Journal of Logic, Language and Information*, **8**, 1999

Horty, John, *Agency and Deontic Logic*, Oxford UP, 2001

Horty, John et Belnap, Nuel, « The Deliberative *Stit*: A Study of Action, Omission, Ability and Obligation », *Journal of Philosophical Logic*, No.24, 1995

Kanger, Stig, « Law and Logic », *Theoria*, **38**, 1973

Kripke, Saul, *Naming and Necessity*, Harvard UP : 1971

Von Kutchera, Franz, « Bewirken », *Erkenntnis*, **24**, 1986, 253-281

Von Kutchera, Franz, « Causation », *Journal of Philosophical Logic*, **22**

Von Kutchera, Franz, « T x W completeness », *Journal of Philosophical Logic*, 26(3), 1997: 241-250

Levi, Isaac, *Hard Choices*, Cambridge UP, Cambridge, 1986

Lewis, David, *On the plurality of worlds*, Basil Blackwell, 1986

Luce and Raiffa, *Games and Decisions : Introduction and Critical Survey*, Dover, 1957

Machildon, Louis, « Le modèle de l'univers de Storrs McCall », *Philosophiques*, Vol.22, No.2, 1995

McCall, Storrs, « Choice Tree », dans J. M. Dunn et A. Gupta, *Truth or Consequences*, Kluwer, 1990

McCall, Storrs, *A Model of the Universe. Space-Time, Probability and Decision*, Clarendon Press, Oxford, 1994

Kluwer Academic Publisher, 1990

McTaggart, J. Ellis, « The Unreality of Time », *Mind*, vol.17 no.68, 1908

Myerson, Roger B., *Game Theory : Analysis of Conflict*, Harvard UP, 1997

Müller, Thomas, « Branching Space-Time as a Semantics for Modal Talk in Quantum Mechanics », *International Journal of Theoretical Physics, à paraître*, Les citations proviennent d'une pré-publication de ce texte téléchargée de http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00000509/ le 31/08/03

Von Neumann et Morgenstern, *A Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton UP, 1944

Øhstrøm, Peter et Hasle, Per V., *Temporal Logic : From Ancients Ideas to Artificial Intelligence*, Kluwer, 1995

Perloff, Michael, « A Better Alternative », *Analysis*, **39**, 1979

Placek, Tomasz, « Branching for a Transient Time », dans H. Eilstein (ed.) *A Collection of Polish Works on Philosophical Problems of Time and Spacetime*, Kluwer, 2002

Pinter, Charles C., *Set Theory*, Addison-Wesley , 1971

Pörn, Igmar, « Some Basic Concepts of Action » dans S. Stendul, *Logical Theory and Semantic Analysis*, D. Reidel, 1974

Pörn, Igmar, *Action Theory and Social Science : Some Formal Models*, D. Reidel, 1974

Prior, Arthur, *Past, Present and Future*, Oxford UP, 1967

Segerberg, K., « Getting Started : Beginnings in the Logic of Action », *Studia Logica*, Vol.51, no.3-4, 1992

Skyrms, « EPR : Lessons for Metaphysics », dans French, Uehling et Wettstein, *Midwest Studies in Philosophy, Vol. IX, Causation and Causal Theory*, University of Minnesota Press, 1984

Shehtman, « Modal Logic on the Real Plane » *Studia Logica*, 42, 1983

Thomason, Richmond, « Combination of Tense and Modality », dans Gabbay, D., Guenthner, G., (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol.2, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984

Thomason, Richmond et Gupta, Anil, « A theory of Conditionals in the context of Branching Time », *Philosophical Review*, **89**, 1980

Ming Xu, « Busy Choice Sequences, Refraining Formulas and Modalities », *Studia Logica*, **54**, 267-301, 1995

Vanderveken, Daniel, « Attemp and Action Generation », *Cahiers d'épistémologie*, 2003-02, 2003

Wölfl, Stepen, compte-rendu de Belnap et co. 2001, *Notre Dame Philosophical Review*, 2002.08.02, http://ndpr.icaap.org/content/archives/2002/8/wolfl-belnap.html

Zanardo, Alberto, « Branching-Time Logic with Quantification over Branches : the Point of view of Modal Logic », *Journal of Symbolic Logic*, Vol.61 (1), 1996

Zanardo, Alberto, « Undivided and Indistinguishable Histories in Branching-Time Logics », *Journal of Logic, Langage and Information*, 7, 1998