

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
WILLIAM TRUDEL

SOLUTIONS INVARIANTES DES ÉQUATIONS DE CHAPLYGIN ET
BORN-INFELD EN $(2+1)$ DIMENSIONS OBTENUES PAR LA
MÉTHODE DE RÉDUCTIONS PAR SYMÉTRIE

AOÛT 2025

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire, de cette thèse ou de cet essai a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire, de sa thèse ou de son essai.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire, cette thèse ou cet essai. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire, de cette thèse et de son essai requiert son autorisation.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode de réduction par symétries afin de trouver des solutions aux équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions. De plus, nous avons utilisé cette même technique pour étudier les versions en $(2 + 1)$ dimensions (c'est-à-dire 2 dimensions spatiales et 1 dimension temporelle) de ces mêmes équations, et obtenu de nouveaux résultats. Les équations de Chaplygin et de Born-Infeld sont des équations qui découlent de l'action de Nambu-Goto, mais qui diffèrent dans la paramétrisation choisie au niveau de l'action de Nambu-Goto; la paramétrisation selon le cône de lumière nous donne les équations de Chaplygin, alors qu'une paramétrisation cartésienne nous donne les équations de Born-Infeld. Il existe également différentes versions de ces équations, selon le contexte du problème (nous étudierons 2 versions de chacune des équations). Via la réduction par symétries, nous obtiendrons un certain nombre de champs de vecteurs, qui nous permettront ensuite d'obtenir des équations réduites pour chacun de ces champs de vecteurs, qui seront résolues (par différentes techniques) pour obtenir les solutions particulières de ces équations. Nous étudierons finalement le lien entre les solutions particulières obtenues pour les équations de Chaplygin et celles des équations de Born-Infeld, via une technique proposée par le professeur Roman Jackiw.

Avant-propos

Tout d'abord, je tiens à remercier grandement mon directeur de recherche, le professeur Alfred Michel Grundland. Son soutien et son aide à l'élaboration de ce mémoire ont été d'une importance capitale dans la réalisation de celui-ci. Je suis également reconnaissant du soutien financier qui m'a été offert via sa subvention de recherche du CRSNG tout au long de mon parcours.

Je remercie les professeurs Pierre Bénard (Département de biochimie, chimie, physique et science forensique - UQTR) et Pierre-Olivier Parisé (Département de mathématiques et d'informatique - UQTR) d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie également tous les professeurs et intervenants du département de mathématiques et d'informatique que j'ai rencontrés lors de mon parcours à la maîtrise; leur appui a été crucial dans ma réussite.

Finalement, je tiens à remercier grandement mes parents et ma famille pour leur soutien tout au long de l'élaboration de ce mémoire, sans qui ce travail aurait été impossible.

Table des matières

Résumé	ii
Avant-propos	iii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	vii
1 Introduction	1
1.1 Plan du mémoire	1
2 Concepts fondamentaux	4
2.1 Équations d'Euler-Lagrange	4
2.2 Théorème de Noether	5
2.3 Modèle du gaz de Chaplygin	7
2.3.1 Dérivation des équations du gaz de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions	7
2.4 Modèle de Born-Infeld	10
2.5 Réduction en termes des invariants de Riemann	12
2.5.1 Réduction des équations de Chaplygin en termes des invariants de Riemann	12
2.5.2 Réduction des équations de Born-Infeld en termes des invariants de Riemann	14
2.6 Équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(2+1)$ dimensions	14
3 Symétries des équations différentielles	16
3.1 Symétries ponctuelles et champ de vecteurs en $(1+1)$ dimensions	16
3.2 Symétries ponctuelles et champ de vecteurs en $(2+1)$ dimensions	18
3.3 Exemple de symétries	19
4 Symétries des équations du gaz de Chaplygin	25
4.1 Équation de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions	25
4.1.1 Cas $\lambda = 0$	36

4.1.2	Cas $\lambda \neq 0$	43
4.2	Équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions	47
4.3	Équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)	57
5	Solutions invariantes des équations de Chaplygin	59
5.1	Équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions	59
5.2	Équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions	63
5.3	Équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)	66
6	Symétries des équations de Born-Infeld	69
6.1	Équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions	69
6.2	Équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions	71
6.3	Équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions (selon les vari- ables de départ)	72
7	Solutions invariantes des équations de Born-Infeld	73
7.1	Équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions	73
7.2	Méthode alternative : Solution générale de l'équation de Born- Infeld en $(1+1)$ dimensions obtenue par la méthode d'hodographe (onde double)	76
7.3	Équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions	87
7.4	Équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions (selon les vari- ables de départ)	90
8	Lien entre les solutions non-relativiste et relativiste (lien entre le modèle de Chaplygin et de Born-Infeld)	93
8.1	Passage du modèle de Chaplygin à celui de Born-Infeld	93
8.2	Passage du modèle de Born-Infeld et de Chaplygin	93
8.3	Exemples	94
8.3.1	Exemple 1.	94
8.3.2	Exemple 2.	94

9	Utilisation des logiciels	96
10	Conclusion	98
	Bibliographie	100
	Annexes	102
A	Propriété de Painlevé	102
A.1	Notions de base et définitions	102
A.2	Introduction à l'analyse de Painlevé	107
A.3	Technique du test de Painlevé	107
A.4	Technique de Painlevé-Bäcklund	109
A.5	Transformations homographiques. Invariants élémentaires. . .	110
A.6	Les 2 transformations universelles.	111
A.7	Propriétés	111
A.8	Un exemple des 2 transformations	112
A.9	Méthode de résolution des équations invariantes	113
A.10	Exemple de solution analytique	115
B	Transformation de Legendre	116
B.1	Théorie	116
B.2	Exemple	117

Liste des tableaux

3.1	Relations de commutation des champs de vecteurs pour l'équation de la chaleur	24
4.1	Relations de commutation des générateurs de symétries de l'équation de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions pour le cas $\lambda = 0$	42
4.2	Relations de commutation des générateurs de symétries de l'équation de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions pour le cas $\lambda \neq 0$	46
4.3	Relations de commutation des champs de vecteurs des équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions	56
5.1	Équations réduites pour les équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions	61
5.2	Solutions particulières des équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions	62
5.3	Équations réduites des équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions	64
5.4	Solutions particulières des équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions	65
5.5	Équations réduites de l'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)	67
5.6	Solutions particulières de l'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)	68
7.1	Équations réduites de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions	74
7.2	Solutions particulières de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions	75
7.3	Équations réduites de l'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions	88
7.4	Solutions particulières de l'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions	89
7.5	Équations réduites des équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions (selon les variables de départ)	91

7.6	Solutions particulières des équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions (selon les variables de départ)	92
-----	---	----

1 Introduction

La mécanique quantique et la relativité générale ont joué un rôle fondamental dans la compréhension de l'Univers depuis qu'elles ont été popularisées au XXe siècle. Ces deux théories permettent, chacune à leur façon, de comprendre et modéliser des situations que la mécanique classique ne peut gérer. Ainsi, plusieurs scientifiques ont tenté de trouver une façon de fusionner ces deux théories en une seule afin d'avoir une seule théorie générale permettant d'expliquer tous les phénomènes qui surviennent dans l'Univers. L'une de ces tentatives d'unification des deux théories, et l'une des plus documentées et étudiées, est la théorie des cordes. Cette théorie suggère que chaque particule subatomique est composée d'une «corde» qui, selon son mode de vibration, formera une différente particule. L'un des concepts les plus utilisés dans cette théorie est l'action de Nambu-Goto. Elle désigne l'action décrivant les mouvements d'une corde. L'action de Nambu-Goto peut être paramétrée de différentes manières, ce qui permet d'obtenir à la fois les équations de Chaplygin et de Born-Infeld, tout dépendant du paramétrage choisi. Ainsi, en paramétrant selon le cône de lumière, on obtient l'action du gaz de Chaplygin, alors qu'en utilisant un paramétrage cartésien, on obtient l'action de Born-Infeld. Ce paramétrage, et en particulier la transformation les unissant, ont été énoncées et analysées par R. Jackiw [5]. Les objectifs principaux de ce mémoire sont à la fois de trouver la solution générale des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions, mais aussi de trouver plusieurs solutions particulières en $(2+1)$ dimensions des équations de Chaplygin et de Born-Infeld. Pour ce faire, on utilise plusieurs méthodes mathématiques permettant d'y parvenir, soit, entre autres, la méthode de réductions par symétries, la méthode des caractéristiques généralisée et des invariants de Riemann, la méthode d'hodographe et la transformation de Legendre.

1.1 Plan du mémoire

Dans le chapitre 2, on fait un rappel de certains concepts fondamentaux à propos de la mécanique des fluides et des équations de Chaplygin et de Born-

Infeld. On utilise les équations d'Euler-Lagrange et le théorème de Noether pour trouver les symétries de Lie des équations de Chaplygin et de Born-Infeld.

Le chapitre 3 présente la théorie au niveau des symétries ponctuelles des équations différentielles, qui est utile pour trouver les prolongations des champs de vecteurs ainsi que les coefficients qui y sont rattachés. Cette théorie permet, à terme, de trouver les solutions des équations de Chaplygin et de Born-Infeld.

Le chapitre 4 présente les symétries des équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ et en $(2 + 1)$ dimensions. Les calculs menant aux résultats présentés pour les équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions ont d'ailleurs déjà été obtenus par A. Hariton, tandis que les résultats en $(2 + 1)$ dimensions sont de nouveaux résultats obtenus dans ce mémoire.

Le chapitre 5 présente les solutions des équations de Chaplygin qui étaient étudiées dans la section précédente. On trouve ces solutions via les invariants et orbites des champs de vecteurs indépendants liés à chacune des équations, en trouvant les solutions des équations réduites obtenues pour chaque sous-algèbre de Lie.

Le chapitre 6 présente les symétries des équations de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions et en $(2 + 1)$ dimensions. La partie unidimensionnelle a été effectuée dans [1], alors que la partie bidimensionnelle constitue de nouveaux résultats obtenus dans ce mémoire.

Le chapitre 7 présente les solutions des équations de Born-Infeld qui étaient étudiées dans la section précédente. Tout comme dans la cinquième section, on trouve ces solutions via les invariants et orbites des champs de vecteurs indépendants liés à chacune des équations, et en trouvant les solutions des équations réduites qui en découlent.

Le chapitre 8 présente un lien entre les solutions non-relativiste et relativiste obtenues via les équations de Chaplygin et de Born-Infeld respectivement. On fait un résumé des travaux de R. Jackiw énoncés dans la section 4.4 (page 39) de son ouvrage «Lectures on Fluid Dynamics»[5]. On utilise ensuite cette théorie pour trouver des liens entre les deux modèles (relativiste et non-relativiste) à

partir des solutions invariantes trouvées dans les sections 6 et 8.

Le chapitre 9 donne un aperçu des logiciels de calcul symbolique utilisés pour trouver les équations différentielles ordinaires réduites associées aux champs de vecteurs des équations de Chaplygin et de Born-Infeld, ainsi que pour trouver leurs solutions.

Le chapitre 10, la conclusion, présente un résumé des nouveaux résultats et les futures recherches pouvant être faites dans ce domaine.

En appendice, on présente la théorie au niveau de la propriété de Painlevé, qui est cruciale dans la vérification de l'existence de solutions invariantes pour les équations réduites des champs de vecteurs reliés aux équations de Chaplygin et de Born-Infeld. On fait aussi un résumé sommaire à propos de la transformation de Legendre, qui a été utilisée pour calculer certaines solutions particulières.

2 Concepts fondamentaux

Dans cette section, on fait un rappel des concepts importants permettant de comprendre et effectuer les calculs des sections suivantes. On débute en dérivant les équations d'Euler-Lagrange. On poursuit en discutant du théorème de Noether, qui introduit le concept de symétrie et leur relation avec les charges conservées.

2.1 Équations d'Euler-Lagrange

Prenons un système de N particules. Le principe de moindre action dit que le système doit évoluer en faisant en sorte que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

soit toujours stationnaire. Ainsi, si on a une trajectoire $q(t)$, une variation de celle-ci

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$$

ne fera pas varier l'action ($\delta S = 0$). Ce principe est aussi exprimé via les *équations d'Euler-Lagrange* :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.2)$$

Ce sont les équations du mouvement du système.

On veut utiliser ce principe pour étudier la mécanique des fluides. Ainsi, puisque la mécanique des fluides est une théorie locale des champs, on réécrit les équations d'Euler-Lagrange en utilisant la *densité Lagrangienne* $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$, où $\phi^i(\mathbf{r}, t)$ sont des champs et $\partial_\mu \phi^i$ sont leurs dérivées. L'action S et les équations d'Euler-Lagrange deviennent donc

$$S = \int \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) d^3x dt \quad (2.3)$$

et

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} = 0. \quad (2.4)$$

2.2 Théorème de Noether

On appelle *symétrie* une transformation sur les champs $\phi^i(\mathbf{r}, t)$ de la forme

$$\phi^i(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi_\epsilon^i(\mathbf{r}, t) = \phi^i(\mathbf{r}, t) + \epsilon \Delta \phi^i(\mathbf{r}, t) \quad (2.5)$$

qui laisse invariante les équations d'Euler-Lagrange (2.4).

On veut maintenant trouver la variation de densité lagrangienne entraînée par cette transformation. Celle-ci sera notée $\epsilon \Delta \mathcal{L}$, et son expression est

$$\epsilon \Delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} (\epsilon \Delta \phi^i) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \partial_\mu (\epsilon \Delta \phi^i) \quad (2.6)$$

Cette expression est retrouvée en assumant qu'une transformation de type «symétrie» (2.5) ne change pas l'action. Ainsi, l'action étant définie comme l'intégrale de la densité lagrangienne (2.3), on assume que

$$\int \mathcal{L}(\phi_\epsilon^i, \partial_\mu \phi_\epsilon^i) d^3x dt - \int \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) d^3x dt = 0.$$

En utilisant le théorème de la divergence en 4 dimensions, on peut combiner ces intégrales, ce qui donnera

$$\int \left[[\mathcal{L}(\phi_\epsilon^i, \partial_\mu \phi_\epsilon^i) - \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)] + \epsilon \partial_\mu (\mathcal{L}(\phi_\epsilon^i, \partial_\mu \phi_\epsilon^i) \Delta \phi^i) \right] d^3x dt = 0.$$

La différence entre les densités lagrangiennes sera donc donnée par

$$\epsilon \Delta \mathcal{L} = \int [\mathcal{L}(\phi_\epsilon^i, \partial_\mu \phi_\epsilon^i) - \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i) d^3x dt] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} (\epsilon \Delta \phi^i) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \partial_\mu (\epsilon \Delta \phi^i).$$

Cette expression peut être réarrangée :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} (\varepsilon \Delta \phi^i) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \partial_\mu (\varepsilon \Delta \phi^i) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} (\varepsilon \Delta \phi^i) + \left[\varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \Delta \phi^i \right) - (\varepsilon \Delta \phi^i) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \\
&= \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \Delta \phi^i \right) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} (\varepsilon \Delta \phi^i) - (\varepsilon \Delta \phi^i) \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right] \\
&= \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \Delta \phi^i \right) + (\varepsilon \Delta \phi^i) \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) \right]}_{=0 \text{ selon (2.4)}} \\
&= \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \Delta \phi^i \right).
\end{aligned}$$

On retrouve donc l'équation (2.6). Ainsi, on peut écrire la variation de densité lagrangienne comme étant

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \varepsilon \partial_\mu J^\mu, \quad (2.7)$$

pour une quantité J^μ , $\mu = 0, 1, \dots, N$.

2.3 Modèle du gaz de Chaplygin

Le modèle du gaz de Chaplygin a été introduit par Sergey Chaplygin en 1904 [7]. Le modèle décrit un univers rempli de gaz de Chaplygin, représenté par l'équation d'état

$$P = -\frac{A}{\rho}, \quad (2.8)$$

où P est la pression, ρ est la densité, et A est une constante positive. Au départ, cette équation se voulait une approximation modélisant la portance sur l'aile d'un avion (le premier vol en avion ayant été effectué l'année précédente par les frères Wright). Cependant, on a trouvé plusieurs autres utilités à cette équation, notamment en cosmologie. En effet, on l'utilise aujourd'hui pour faire des modèles d'expansion de l'Univers et de représentation de l'énergie sombre [10].

2.3.1 Dérivation des équations du gaz de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions

Les équations du gaz de Chaplygin seront basées sur deux équations connues en mécanique des fluides : l'équation de continuité et l'équation d'Euler (via les équations d'Euler-Lagrange). Elles sont définies comme étant, respectivement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.9)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (2.10)$$

On va maintenant s'intéresser à un exemple portant sur le gaz de Chaplygin, dont la pression a la forme

$$P(\rho) = -\frac{2\lambda}{m\rho}, \quad \lambda \geq 0. \quad (2.11)$$

Cette équation est la même que l'équation (2.8), mais où la constante A a été séparée en différentes constantes.

On étudiera ce gaz en n dimensions et avec une vorticité nulle ($\omega_{ij} = 0$). Le Lagrangien du système [3] est trouvé en considérant tout d'abord un système à N particules libres sans interactions, dont le Lagrangien est

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2(t), \quad (2.12)$$

donc simplement l'énergie cinétique, où m est la masse et v la vitesse pour la i^{eme} particule. Puisqu'on a une distribution de matière continue, cette expression peut s'écrire

$$L_0 = \int \left(\frac{1}{2} m \rho v^2 \right) dr. \quad (2.13)$$

En ajoutant la contrainte que l'équation de continuité (2.9) doit être respectée, on trouve

$$L_0 = \int \left(\frac{1}{2} m \rho v^2 + \theta (\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) \right) dr. \quad (2.14)$$

où θ est un multiplicateur de Lagrange et $\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Lorsqu'on fait varier la vitesse de $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}$, le Lagrangien variera de

$$\delta L_0 = \int (m \rho \mathbf{v} - \rho \nabla \theta) \cdot \delta \mathbf{v} dr. \quad (2.15)$$

Ainsi, sachant que la variation du Lagrangien L_0 sera nulle ($\delta L_0 = 0$), on trouve que

$$\begin{aligned} 0 &= \int (m \rho \mathbf{v} - \rho \nabla \theta) \cdot \delta \mathbf{v} dr \\ 0 &= m \rho \mathbf{v} - \rho \nabla \theta \\ \mathbf{v} &= \frac{\vec{\nabla} \theta}{m} \end{aligned} \quad (2.16)$$

On peut ainsi substituer ce résultat dans le Lagrangien (2.14), d'où on obtient

$$\begin{aligned}
L_0 &= \int dr \left(\frac{1}{2} m \rho v^2 + \theta (\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v})) \right) \\
&= \int dr \left(\frac{1}{2} m \rho \frac{(\vec{\nabla} \theta)^2}{m^2} + \theta \dot{\rho} + \theta \vec{\nabla} \cdot \frac{\rho \vec{\nabla} \theta}{m} \right) \\
&= \int dr \left(\theta \dot{\rho} + \frac{\rho (\vec{\nabla} \theta)^2}{2m} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\rho \theta \vec{\nabla} \theta}{m} - \frac{\rho (\vec{\nabla} \theta)^2}{m} \right).
\end{aligned}$$

Le troisième terme de l'intégrale sera nul, et deux d'entre eux s'additionnent, ce qui donne finalement

$$L_0 = \int dr \left(\theta \dot{\rho} - \frac{\rho (\vec{\nabla} \theta)^2}{2m} \right). \quad (2.17)$$

Ici, on a seulement la partie du Lagrangien obtenu à partir de l'énergie cinétique. Pour avoir le Lagrangien complet, il faut soustraire le terme d'énergie potentielle $\left(V(\rho) = \frac{\lambda}{\rho} \right)$ [5] à L_0 :

$$L = \int dr \left(\theta \dot{\rho} - \frac{\rho (\vec{\nabla} \theta)^2}{2m} - \frac{\lambda}{\rho} \right). \quad (2.18)$$

On peut d'ailleurs, maintenant que l'on connaît la vitesse $\mathbf{v}$ à partir de l'équation (2.16), réécrire l'équation de continuité (2.9) et l'équation d'Euler en termes de ρ et θ . L'équation de continuité devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\vec{\nabla} \theta}{m} \right) &= 0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{m} \left(\nabla \rho \cdot \vec{\nabla} \theta + \rho \nabla^2 \theta \right) &= 0,
\end{aligned} \quad (2.19)$$

alors que, en utilisant l'équation (2.2) (où le Lagrangien est celui de l'équation

(2.18) et la coordonnée q_i est ρ), l'équation d'Euler (2.10) devient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{d\theta}{dt} - \left(-\frac{(\nabla\theta)^2}{2m} + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{(\nabla\theta)^2}{2m} &= \frac{\lambda}{\rho^2}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Les équations (2.19) et (2.20) formeront ce qu'on appelle les *équations du gaz de Chaplygin*. En $(1+1)$ dimensions, ces équations prendront la forme

$$\begin{cases} \rho_t + \frac{1}{m} (\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx}) = 0 \\ \theta_t + \frac{1}{2m} (\theta_x)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2}. \end{cases}\tag{2.21}$$

2.4 Modèle de Born-Infeld

Le modèle de Born-Infeld a été discuté pour la première fois en 1934 par Max Born et Leopold Infeld, dans leur article «Foundations of the New Field Theory»[8]. L'idée de départ de ce modèle était de modifier le lagrangien obtenu dans le modèle électromagnétique de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (E^2 - B^2)\tag{2.22}$$

où $F^{\mu\nu}$ est le tenseur de Faraday (la dérivée extérieure du quadrivecteur potentiel), E est le champ électrique et B est le champ magnétique. Dans cette définition du lagrangien de Maxwell, on remarque qu'il y a une singularité lorsque prend en compte le champ électrique dû à une charge ponctuelle. En effet, par la loi de Coulomb, à la position de la charge ponctuelle, le champ électrique tend vers l'infini ($E \rightarrow \infty$). Pour éviter ce problème, Born et Infeld

ont proposé que le lagrangien prenne plutôt la forme

$$\mathcal{L} = b^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2}} \right) \quad (2.23)$$

où b est une grande constante arbitraire qui représente la valeur limite supérieure que pourrait prendre le champ électrique. Il est intéressant de remarquer que cette modification est analogue au remplacement de $\frac{mv^2}{2}$ par $mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$ en relativité restreinte.

La théorie n'a pas été développée davantage dans le milieu du XXe siècle, jusqu'à ce qu'en 1985, quand E.S. Fradkin et A.A. Tseytlin ont trouvé que le lagrangien proposé par Born-Infeld coïncidait avec le lagrangien pour l'action d'un champ de vecteurs jumelé à la corde ouverte virtuelle de Bose [9]. C'est ainsi que l'action de Born-Infeld a trouvé son utilité dans la théorie des cordes.

L'équation de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions, obtenues via les équations d'Euler-Lagrange, prend la forme suivante

$$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0. \quad (2.24)$$

Des exemples de l'équation de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions ont été étudiés dans [5] et [1] par la méthode des invariants de Riemann.

Le Hamiltonien pour l'équation de Born-Infeld est donné par [5]

$$H = \int \left(\sqrt{\rho^2 c^2 + a^2} \sqrt{c^2 + p^2} \right) dx. \quad (2.25)$$

où a est un nombre réel.

2.5 Réduction en termes des invariants de Riemann

On voit aussi que les équations de Chaplygin et de Born-Infeld peuvent toutes deux être réduites en termes des invariants de Riemann. On traitera les deux cas séparément.

2.5.1 Réduction des équations de Chaplygin en termes des invariants de Riemann

Dans les calculs suivants, on fera intervenir le moment relativiste, donné par

$$p = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.26)$$

Les invariants de Riemann sont ici donnés par

$$R^\pm = p \pm \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho}, \quad (2.27)$$

$$\dot{R}^\pm = -R^\mp \partial_x R^\pm \quad (2.28)$$

Selon [5], les équations du gaz de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions peuvent être réécrites, en utilisant le moment relativiste p , comme étant

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p\rho) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

En développant ces équations, on obtient

$$\begin{cases} \rho_t + p_x \rho + p \rho_x = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} p_t + p p_x + \frac{2\lambda}{\rho^3} \rho_x = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Utilisons maintenant les invariants de Riemann pour réécrire ces équations

$$\begin{cases} R_+ := p + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} \\ R_- := p - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\quad (2.33)$$

Calculons $(R_+)_t$ (en utilisant (2.30) et (2.31)) :

$$\begin{aligned} (R_+)_t &= p_t - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho^2} \rho_t \\ &= -pp_x - \frac{2\lambda}{\rho^3} \rho_x - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho^2} (-p_x \rho - p \rho_x) \\ &= -pp_x - \frac{2\lambda}{\rho^3} \rho_x + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} p_x + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho^2} p \rho_x. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $-R_- (R_+)_x$:

$$\begin{aligned} -R_- (R_+)_x &= - \left(p - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} \right) \left(p_x - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho^2} \rho_x \right) \\ &= -pp_x - \frac{2\lambda}{\rho^2} p \rho_x - \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} p_x - \frac{2\lambda}{\rho^3} \rho_x \\ &= -pp_x - \frac{2\lambda}{\rho^3} \rho_x + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho} p_x + \frac{\sqrt{2\lambda}}{\rho^2} p \rho_x. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que

$$(R_+)_t + R_- (R_+)_x = 0. \quad (2.34)$$

Par le même genre de calcul, on trouve que

$$(R_-)_t + R_+ (R_-)_x = 0, \quad (2.35)$$

ce qui est un système de type hydrodynamique en termes des invariants de Riemann.

Ainsi, en utilisant les équations de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions, on a

pu trouver leur équivalent en fonction des invariants de Riemann (2.27).

2.5.2 Réduction des équations de Born-Infeld en termes des invariants de Riemann

Par le même principe, on peut trouver l'équivalent de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions selon les invariants de Riemann. On trouve alors qu'avec la transformation (trouvée dans [5], énoncée dans [2])

$$R^\pm = \pm \frac{(1 + (\phi_x)^2 - (\phi_t)^2)^{1/2}}{1 + (\phi_x)^2} + \frac{\phi_x \phi_t}{1 + (\phi_x)^2}, \quad (2.36)$$

on trouve que l'équation (6.1)

$$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0$$

devient alors

$$R_t^+ - R^- R_x^+ = 0, \quad R_t^- - R^+ R_x^- = 0, \quad (2.37)$$

qui est un système de type hydrodynamique en termes des invariants de Riemann. Dans les deux cas (Chaplygin et Born-Infeld), on obtient une onde double.

2.6 Équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions

L'un des nouveaux résultats obtenus dans cette maîtrise sont les symétries des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions. Ces équations prendront 4 formes différentes : 2 pour les équations de Chaplygin, et 2 pour les équations de Born-Infeld. Ces équations ont, tout comme leurs équivalents en $(1 + 1)$ dimensions, été obtenues par les équations d'Euler-Lagrange (2.2) et (2.4). Voici les 4 formes qui seront étudiées :

Les équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y + \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) = 0, \\ \theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0. \end{array} \right. \quad (2.38)$$

L'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ) :

$$\theta_{tt} + 2 (\theta_x \theta_{xt} + \theta_y \theta_{yt} + \theta_x \theta_y \theta_{xy}) - 2\theta_t (\theta_{xx} + \theta_{yy}) - \theta_y^2 \theta_{xx} - \theta_x^2 \theta_{yy} = 0. \quad (2.39)$$

L'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions :

$$(1 - \theta_t^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} + (1 - \theta_t^2 + \theta_x^2) \theta_{yy} + 2 [\theta_x \theta_t \theta_{xt} + \theta_y \theta_t \theta_{yt} - \theta_x \theta_y \theta_{xy}] - (1 + \theta_x^2 + \theta_y^2) \theta_{tt} = 0. \quad (2.40)$$

Les équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions (selon les variables de départ*) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + (\rho^2 c^2 + a^2) [(c^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} + (c^2 + \theta_x^2) \theta_{yy}] \\ + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2) (\rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y) = 0, \\ \theta_t \sqrt{\rho^2 c^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2} = 0. \end{array} \right. \quad (2.41)$$

*voir équations (10) et (11) de [1]

3 Symétries des équations différentielles

Dans cette section, on introduit la méthode permettant de trouver les symétries d'un système d'équations différentielles (en $(1+1)$ et $(2+1)$ dimensions). Les concepts élémentaires et certaines dérivations de cette section sont tirées du livre de P.J. Olver [6].

3.1 Symétries ponctuelles et champ de vecteurs en $(1+1)$ dimensions

Pour commencer, on aura besoin de la forme du champ de vecteurs en $(1+1)$ dimensions. On a la forme suivante

$$\vec{v} = \xi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (3.1)$$

De l'article «Symmetry and Explicit Solutions of Partial Differential Equations»[15], aussi d'Olver, on obtient la théorie suivante pour les prolongations et leurs coefficients pour des symétries ponctuelles, qui permettent ensuite de trouver leurs équivalents en $(1+1)$ et $(2+1)$ dimensions.

Théorème 2.1. La n^e prolongation d'un champ de vecteurs est donnée par

$$pr^{(n)}\vec{v} = \vec{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{|J| \leq n} \phi_{\alpha}^J[u] \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^J}, \quad (3.2)$$

où les coefficients ϕ_{α}^J de cette prolongation sont donnés par l'expression

$$\phi_{\alpha}^J = D_J \left(\phi_{\alpha} - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^{\alpha}. \quad (3.3)$$

L'opération D_i est définie comme étant

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l,J} u_{J_i}^l \frac{\partial}{\partial u_{J_i}^l}, \quad \text{où } J_i = (j_1, \dots, j_{i-1}, j_i + 1, j_{i+1}, \dots, j_n). \quad (3.4)$$

Théorème 2.2. Soit G un groupe agissant localement sur $X \times U$ par

$$\tilde{x}_i = X^i(x, u, g), \quad \tilde{u}^j(x, u, g),$$

où $g \in G$. Soit un système d'équations différentielles $\Delta(x, u, u_J)$. L'action de G préserve les solutions de $\Delta = 0$ si et seulement si

$$[pr^{(k)}(\alpha)](\Delta) = 0 \quad \text{quand } \Delta = 0, \quad \forall \alpha. \quad (3.5)$$

Ainsi, on trouve, pour le cas en $(1+1)$ dimensions, que la seconde prolongation est

$$\begin{aligned} pr^{(2)}(\vec{v}) &= \vec{v} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{|J| \leq 2} \phi_\alpha^J[u] \frac{\partial}{\partial u_\alpha^J} \\ &= \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi \frac{\partial}{\partial \rho} + \phi^x \frac{\partial}{\partial \theta_x} \\ &\quad + \phi^t \frac{\partial}{\partial \theta_t} + \psi^x \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \psi^t \frac{\partial}{\partial \rho_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial \theta_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial \theta_{xt}} \\ &\quad + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial \theta_{tt}} + \psi^{xx} \frac{\partial}{\partial \rho_{xx}} + \psi^{xt} \frac{\partial}{\partial \rho_{xt}} + \psi^{tt} \frac{\partial}{\partial \rho_{tt}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où les différents indices représentent

$$\begin{aligned} x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad u^1 = \theta, \quad u^2 = \rho, \quad \phi_1^J = \phi^J, \quad \phi_2^J = \psi^J, \\ J = (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2). \end{aligned}$$

3.2 Symétries ponctuelles et champ de vecteurs en $(2+1)$ dimensions

Dans le cas d'équations en $(2+1)$ dimensions (x, y, t) , le champ de vecteurs prendra la forme

$$\begin{aligned}\vec{v} = & \xi(x, y, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial x} + \zeta(x, y, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial y} + \tau(x, y, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial t} \\ & + \phi(x, y, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi(x, y, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Pour ces équations, qui sont toutes d'ordre 2, la 2e prolongation prendra la forme

$$\begin{aligned}pr^{(2)}(\vec{v}) = & \vec{v} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{|J| \leq 2} \phi_{\alpha}^J[u] \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^J} \\ = & \xi \frac{\partial}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi \frac{\partial}{\partial \rho} \\ & + \phi^x \frac{\partial}{\partial \theta_x} + \phi^y \frac{\partial}{\partial \theta_y} + \phi^t \frac{\partial}{\partial \theta_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial \theta_{xx}} + \phi^{yy} \frac{\partial}{\partial \theta_{yy}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial \theta_{tt}} \\ & + \phi^{xy} \frac{\partial}{\partial \theta_{xy}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial \theta_{xt}} + \phi^{yt} \frac{\partial}{\partial \theta_{yt}} + \psi^x \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \psi^y \frac{\partial}{\partial \rho_y} + \psi^t \frac{\partial}{\partial \rho_t} \\ & + \psi^{xx} \frac{\partial}{\partial \rho_{xx}} + \psi^{yy} \frac{\partial}{\partial \rho_{yy}} + \psi^{tt} \frac{\partial}{\partial \rho_{tt}} + \psi^{xy} \frac{\partial}{\partial \rho_{xy}} + \psi^{xt} \frac{\partial}{\partial \rho_{xt}} + \psi^{yt} \frac{\partial}{\partial \rho_{yt}}\end{aligned}$$

où les différents indices représentent

$$\begin{aligned}x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = t, \quad u^1 = \theta, \quad u^2 = \rho, \quad \phi_1^J = \phi^J, \quad \phi_2^J = \psi^J \\ J = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 2, 0), \\ (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1).\end{aligned}$$

On trouve les symétries pour chacune des équations en $(2+1)$ dimensions dans les prochaines sections, associées à l'équation (3.7), et en utilisant le critère de symétrie (3.5).

3.3 Exemple de symétries

On présente maintenant un exemple d'équation dont on trouve les symétries. Celui-ci porte sur l'équation de la chaleur en $(1 + 1)$ dimensions.

L'équation de la chaleur en $(1 + 1)$ dimensions est donnée par

$$u_t = u_{xx} \quad (3.8)$$

On réécrit l'équation sous la forme

$$\Delta := u_t - u_{xx} = 0. \quad (3.9)$$

Le champ de vecteurs est donné par

$$v = \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \phi(x, t, u)\partial_u$$

La deuxième prolongation de ce champ de vecteurs pour l'équation (3.9) est énoncé comme suit

$$\begin{aligned} [pr^{(2)}(v)](\Delta) &= [pr^{(2)}(v)](u_t - u_{xx}) \\ &= \phi^t - \phi^{xx} = 0 \end{aligned}$$

où $pr^{(2)}(\alpha) = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \phi\partial_u + \phi^x\partial_{u_x} + \phi^t\partial_{u_t} + \phi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \phi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \phi^{tt}\partial_{u_{tt}}$. Ainsi, $\phi^t - \phi^{xx} = 0$ quand $u_t - u_{xx} = 0$, où

$$\begin{aligned} \phi^t &= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 \\ &= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u (u_{xx})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{xx} &= D^2(\phi - u_x \xi - u_{xx} \tau) + u_{xxx} \xi + u_{xxt} \tau \\ &= D^2(\phi - u_x \xi - u_{xx} \tau) + u_{xxx} \xi + u_{xxxx} \tau \end{aligned}$$

En développant et soustrayant, on obtient

$$\begin{aligned}
\phi^t - \phi^{xx} = & \phi^t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 \\
& - \left[\phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_{xx} + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) (u_x)^2 \right. \\
& - 2\tau_{xu} u_x u_{xx} - \xi_{uu} (u_x)^3 - \tau_{uu} (u_x)^2 - 2\tau_u u_x u_{xxx} \\
& \left. + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xxx} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 \right] = 0
\end{aligned}$$

Trouvons maintenant les équations déterminantes en trouvant les coefficients de chaque dérivée de u par rapport à x :

$$1 : \quad \phi^t - \phi_{xx} = 0 \quad (3.10a)$$

$$u_x : \quad -\xi_t - 2\phi_{xu} + \xi_{xx} = 0 \quad (3.10b)$$

$$u_{xx} : \quad \phi_u - \tau_t + \tau_{xx} - \phi_u + 2\xi_x = 0 \quad (3.10c)$$

$$u_x u_{xx} : \quad -\xi_u + 2\tau_{xu} + 3\xi_u = 0 \quad (3.10d)$$

$$u_{xx}^2 : \quad -\tau_u + \tau_u = 0 \quad (3.10e)$$

$$u_x^2 : \quad -\phi_{uu} + 2\xi_{xu} = 0 \quad (3.10f)$$

$$u_x^3 : \quad \xi_{uu} = 0 \quad (3.10g)$$

$$u_x^2 u_{xx} : \quad \tau_{uu} = 0 \quad (3.10h)$$

$$u_x u_{xxx} : \quad \tau_u = 0 \quad (3.10i)$$

$$u_{xxx} : \quad \tau_x = 0 \quad (3.10j)$$

Des équations (3.10e), (3.10h), (3.10i) et (3.10j), on trouve

$$\tau_u = 0, \quad \tau_x = 0 \implies \tau = \tau(t). \quad (3.11)$$

L'équation (3.10d) devient donc

$$-2\xi_u = 0 \implies \xi_u = 0 \implies \xi = \xi(x, t). \quad (3.12)$$

L'équation (3.10c) devient

$$-\tau_t + 2\xi_x = 0 \implies \xi_{xx} = 0. \quad (3.13)$$

Les équations (3.10b), (3.10f) et (3.10g) deviennent

$$\begin{aligned} \xi_{uu} = 0, \quad -\phi_{uu} + 2\xi_{xu} = 0 &\implies \phi_{uu} = 0 \\ &\implies \phi = \alpha(x, t)u + \beta(x, t) \\ &\implies \phi_{xu} = \alpha_x \end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} -\xi_t - 2\phi_{xu} + \xi_{xx} &= 0 \\ \implies -\xi_t - 2\alpha_x &= 0 \\ \implies \xi_t &= -2\alpha_x \end{aligned}$$

L'équation (3.10a) devient

$$\begin{aligned} \phi_t - \phi_{xx} = 0 &\implies \alpha_t u + \beta_t - \alpha_{xx} u - \beta_{xx} = 0 \\ \implies \begin{cases} u : & \alpha_t = \alpha_{xx} \\ 1 : & \beta_t = \beta_{xx} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

On a donc $\alpha_{xxx} = 0 \implies \alpha_{xt} = 0 \implies \xi_{tt} = 0$.

Le champ de vecteurs est donc

$$v = \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \phi(x, t, u)\partial_u$$

où

$$\begin{cases} \xi(x, t, u) = c_1 + c_4 x + c_5 t + c_6 x t & (3.15) \\ \tau(x, t, u) = c_2 + c_7 t + c_8 t^2 & (3.16) \\ \phi(x, t, u) = \alpha(x, t)u + \beta(x, t) & (3.17) \end{cases}$$

$$\text{Ici, } c_4 = \xi_x, \quad c_5 = \xi_t, \quad c_6 = \xi_{xt}, \quad c_7 = \tau_t, \quad c_8 = \frac{1}{2}\tau_{tt}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\xi_x &= \tau_t \\ \implies 2c_4 &= c_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\xi_{xt} &= \tau_{tt} \\ \implies 2c_6 &= 2c_8 \\ \implies c_6 &= c_8 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\alpha(x, t) = \left(c_3 + \alpha_x x + \alpha_t t + \frac{1}{2}\alpha_{xx}x^2 \right) \quad (3.18)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \phi_{xu} \\ \implies 2\phi_{xu} &= -\xi_t \\ \implies \phi_{xu} &= \frac{-1}{2}\xi_t = \frac{-1}{2}c_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_t u + \beta_t &= \alpha_{xx}u + \beta_{xx} \\ \implies \alpha_t &= \alpha_{xx} \quad \implies \alpha_t = \phi_{xxu} \\ \implies \phi_{xu} &= \frac{-1}{2}\xi_t \\ \implies \phi_{xxu} &= \frac{-1}{2}\xi_{xt} = \frac{-1}{2}c_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_{xx} &= \frac{1}{2}\phi_{xxu} \\ \frac{1}{2}\phi_{xxu} &= \frac{-1}{4}\xi_{xt} = \frac{-1}{4}c_6 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \xi(x, t, u) = c_1 + c_4x + c_5t + c_6xt & (3.19) \\ \tau(x, t, u) = c_2 + 2c_4t + c_6t^2 & (3.20) \\ \phi(x, t, u) = \left(c_3 - \frac{1}{2}c_5x - \frac{1}{2}c_6t - \frac{1}{4}c_6x^2\right)u + \beta(x, t) & (3.21) \end{cases}$$

Posons

$$\frac{1}{2}c_5 = c_9 \implies c_5 = 2c_9, \quad \frac{1}{4}c_6 = c_{10} \implies c_6 = 4c_{10}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \xi(x, t, u) = c_1 + c_4x + 2c_9t + 4c_{10}xt & (3.22) \\ \tau(x, t, u) = c_2 + 2c_4t + 4c_{10}t^2 & (3.23) \\ \phi(x, t, u) = (c_3 - c_9x - c_{10}t - c_{10}x^2)u + \beta(x, t). & (3.24) \end{cases}$$

On sait aussi, de (3.14), que

$$\beta_t = \beta_{xx}, \quad (3.25)$$

donc que β respecte l'équation de la chaleur. En posant une des constantes c_1, c_2, c_3, c_4, c_9 et c_{10} égale à 1, pendant que les autres sont toutes nulles, on obtient alors les champs de vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \partial_x, \\ \vec{v}_2 &= \partial_t, \\ \vec{v}_3 &= u\partial_u, \\ \vec{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t, \\ \vec{v}_9 &= 2t\partial_x - xu\partial_u, \\ \vec{v}_{10} &= 4xt\partial_x + 4t^2\partial_t - (2t + x^2)u\partial_u \end{aligned}$$

et la sous-algèbre de dimensions infinie

$$\vec{v}_\beta = \beta(x, t)\partial_u \quad \text{où } \beta_t = \beta_{xx}.$$

Les relations de commutation entre ces différents champs de vecteurs sont

Table 3.1: Relations de commutation des champs de vecteurs pour l'équation de la chaleur

	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_9$	$\vec{v}_{10}$	$\vec{v}_\beta$
$\vec{v}_1$	0	0	0	$\vec{v}_1$	$-\vec{v}_3$	$2\vec{v}_9$	$\vec{v}_{\beta_x}$
$\vec{v}_2$	0	0	0	$2\vec{v}_2$	$2\vec{v}_1$	$4\vec{v}_4 - 2\vec{v}_3$	$\vec{v}_{\beta_t}$
$\vec{v}_3$	0	0	0	0	0	0	$-\vec{v}_\beta$
$\vec{v}_4$	$-\vec{v}_1$	$-2\vec{v}_2$	0	0	$\vec{v}_9$	$2\vec{v}_{10}$	$\vec{v}_{\beta'}$
$\vec{v}_9$	$\vec{v}_3$	$-2\vec{v}_1$	0	$-\vec{v}_9$	0	0	$\vec{v}_{\beta''}$
$\vec{v}_{10}$	$-2\vec{v}_9$	$2\vec{v}_3 - 4\vec{v}_4$	0	$2\vec{v}_{10}$	0	0	$\vec{v}_{\beta'''}$
$\vec{v}_\beta$	$-\vec{v}_{\beta_x}$	$-\vec{v}_{\beta_t}$	$\vec{v}_\beta$	$-\vec{v}_{\beta'}$	$-\vec{v}_{\beta''}$	$-\vec{v}_{\beta'''}$	0

4 Symétries des équations du gaz de Chaplygin

Dans cette section, on étudie les équations de Chaplygin en $(1+1)$ et $(2+1)$ dimensions. On utilise la méthode des symétries des équations différentielles présentée à la section précédente afin de trouver les solutions de ces équations. On débute avec l'équation de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions, plus simple, afin de bien comprendre la méthode, pour ensuite se tourner vers les deux versions des équations de Chaplygin à l'étude ici, soit la version sous forme de système d'équations différentielles et la version avec élimination de ρ .

4.1 Équation de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions

Nous allons maintenant trouver les générateurs de symétries correspondant aux équations du mouvement du gaz de Chaplygin (2.21). Cette étude est faite en une dimension spatiale x et une dimension temporelle t . Les variables dépendantes sont donc $\theta = \theta(x, t)$ et $\rho = \rho(x, t)$. Les équations (2.21) avaient été définies comme étant

$$\rho_t + \frac{1}{m} (\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\theta_t + \frac{1}{2m} (\theta_x)^2 = \frac{\lambda}{\rho^2} \quad (4.2)$$

On a un champ de vecteurs $\vec{v}$ qui prend la forme décrite par (3.1) :

$$\vec{v} = \xi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (4.3)$$

Sachant que l'ordre maximal du système (4.1),(4.2) est 2, alors on cherche la seconde prolongation du champ de vecteurs (4.3), qui sera (voir (3.6))

$$\begin{aligned}
pr^{(2)}(\vec{v}) &= \vec{v} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{|J| \leq 2} \phi_\alpha^J[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \\
&= \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi \frac{\partial}{\partial \rho} + \phi^x \frac{\partial}{\partial \theta_x} \\
&\quad + \phi^t \frac{\partial}{\partial \theta_t} + \psi^x \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \psi^t \frac{\partial}{\partial \rho_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial \theta_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial \theta_{xt}} \\
&\quad + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial \theta_{tt}} + \psi^{xx} \frac{\partial}{\partial \rho_{xx}} + \psi^{xt} \frac{\partial}{\partial \rho_{xt}} + \psi^{tt} \frac{\partial}{\partial \rho_{tt}}, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

où les différents indices représentent

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= t \\
u^1 &= \theta \\
u^2 &= \rho \\
\phi_1^J &= \phi^J \\
\phi_2^J &= \psi^J \\
J &= (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2).
\end{aligned}$$

Selon (3.5), le champ de vecteurs $\vec{v}$ est un générateur infinitésimal de symétries de Δ si

$$[pr^{(2)}(\vec{v})](\Delta_1) = 0, \quad [pr^{(2)}(\vec{v})](\Delta_2) = 0 \tag{4.5}$$

quand

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_1 = \rho_t + \frac{1}{m} (\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx}) \\
0 &= \Delta_2 = \theta_t + \frac{1}{2m} (\theta_x)^2 - \frac{\lambda}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir des équations (4.5), et en utilisant l'expression pour la prolongation (4.4), les contraintes sont données par

$$\frac{\psi\theta_{xx}}{m} + \frac{\phi^x\rho_x}{m} + \frac{\psi^x\theta_x}{m} + \psi^t + \frac{\phi^{xx}\rho}{m} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{2\psi\lambda}{\rho^3} + \frac{\phi^x\theta_x}{m} + \phi^t = 0 \quad (4.7)$$

On veut maintenant trouver les expressions pour les fonctions $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \psi^x$ et ψ^t présentes dans les contraintes (4.6) et (4.7). En utilisant l'expression pour les coefficients (3.3), on trouve, pour ϕ^x (donc $J = x$ et $\alpha = 1$, car $\phi_1^J = \phi^J$)

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x \left(\phi - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^1 \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{x,i}^1 \\ \phi^x &= D_x \left(\phi - \sum_{i=1}^p \xi^i \theta_i \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i \theta_{x,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^x &= \phi_x + (\phi_\theta - \xi_x) \theta_x - \tau_x \theta_t - \xi_\theta (\theta_x)^2 \\ &\quad - \tau_\theta \theta_x \theta_t + \phi_\rho \rho_x - \xi_\rho \rho_x \theta_x - \tau_\rho \rho_x \theta_t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

De manière analogue, on peut trouver les expressions pour les autres coefficients, qui sont

$$\begin{aligned}\phi^t = & \phi_t - \xi_t \theta_x + (\phi_\theta - \tau_t) \theta_t - \tau_\theta (\theta_t)^2 \\ & - \xi_\theta \theta_x \theta_t + \phi_\rho \rho_t - \xi_\rho \rho_t \theta_x - \tau_\rho \rho_t \theta_t ,\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\phi^{xx} = & \phi_{xx} + (2\phi_{\theta x} - \xi_{xx}) \theta_x - \tau_{xx} \theta_t + (\phi_{\theta\theta} - 2\xi_{\theta x}) (\theta_x)^2 \\ & - 2\tau_{\theta x} \theta_x \theta_t + 2\phi_{\rho x} \rho_x + 2(\phi_{\theta\rho} - \xi_{\rho x}) \theta_x \rho_x - 2\tau_{\rho x} \theta_t \rho_x \\ & - \xi_{\theta\theta} (\theta_x)^3 - \tau_{\theta\theta} (\theta_x)^2 \theta_t - 2\xi_{\theta\rho} (\theta_x)^2 \rho_x - 2\tau_{\theta\rho} \theta_x \theta_t \rho_x \\ & + \phi_{\rho\rho} (\rho_x)^2 - \xi_{\rho\rho} \theta_x (\rho_x)^2 - \tau_{\rho\rho} \theta_t (\rho_x)^2 + (\phi_\theta - 2\xi_x) \theta_{xx} \\ & - 2\tau_x \theta_{xt} - 3\xi_\theta \theta_x \theta_{xx} - \tau_\theta \theta_t \theta_{xx} - 2\tau_\theta \theta_x \theta_{xt} - 2\xi_\rho \rho_x \theta_{xx} \\ & - 2\tau_\rho \rho_x \theta_{xt} + \phi_\rho \rho_{xx} - \xi_\rho \theta_x \rho_{xx} - \tau_\rho \theta_t \rho_{xx} ,\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\psi^x = & \psi_x + (\psi_\rho - \xi_x) \rho_x - \tau_x \rho_t - \xi_\rho (\rho_x)^2 \\ & - \tau_\rho \rho_x \rho_t + \psi_\theta \theta_x - \xi_\theta \theta_x \rho_x - \tau_\theta \theta_x \rho_t ,\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\psi^t = & \psi_t - \xi_t \rho_x + (\psi_\rho - \tau_t) \rho_t - \tau_\rho (\rho_t)^2 \\ & - \xi_\rho \rho_x \rho_t + \psi_\theta \theta_t - \xi_\theta \theta_t \rho_x - \tau_\theta \theta_t \rho_t ,\end{aligned}\tag{4.12}$$

Maintenant que toutes les fonctions présentes dans les contraintes (4.6) et (4.7) ont été calculées, on peut directement les remplacer. En prenant la contrainte

(4.7), plus simple[†], on obtient alors

$$\begin{aligned}
& \frac{2\psi\lambda}{\rho^3} + \frac{\phi^x\theta_x}{m} + \phi^t = 0 \\
\Rightarrow & \frac{2\psi\lambda}{\rho^3} + \frac{1}{m} \left(\phi_x + (\phi_\theta - \xi_x)\theta_x - \tau_x\theta_t - \xi_\theta(\theta_x)^2 - \tau_\theta\theta_x\theta_t + \phi_\rho\rho_x - \xi_\rho\rho_x\theta_x \right. \\
& \quad \left. - \tau_\rho\rho_x\theta_t \right) \theta_x + \left(\phi_t - \xi_t\theta_x + (\phi_\theta - \tau_t)\theta_t - \tau_\theta(\theta_t)^2 - \xi_\theta\theta_x\theta_t + \phi_\rho\rho_t - \xi_\rho\rho_t\theta_x \right. \\
& \quad \left. - \tau_\rho\rho_t\theta_t \right) = 0
\end{aligned}$$

Aussi, pour simplifier le problème, on veut que les coefficients de cette équation ne soient que des dérivées par rapport à une seule variable, x . Ainsi, les dérivées de ρ et θ par rapport à t sont remplacées, via les équations (4.1) et (4.2), par

$$\begin{aligned}
\rho_t &= -\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \\
\theta_t &= -\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \frac{2\psi\lambda}{\rho^3} + \frac{1}{m} \left[\phi_x + (\phi_\theta - \xi_x)\theta_x - \tau_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) - \xi_\theta(\theta_x)^2 \right. \\
& \quad \left. - \tau_\theta\theta_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) + \phi_\rho\rho_x - \xi_\rho\rho_x\theta_x \right. \\
& \quad \left. - \tau_\rho\rho_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right] \theta_x + \left[\phi_t - \xi_t\theta_x + (\phi_\theta - \tau_t) \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \tau_\theta \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right)^2 - \xi_\theta\theta_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \phi_\rho \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) - \xi_\rho \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) \theta_x \right. \\
& \quad \left. - \tau_\rho \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right] = 0 \tag{4.13}
\end{aligned}$$

[†]Puisque cette contrainte contient moins de termes, on arrive plus facilement à trouver la dépendance en x , t , θ et ρ des fonctions ξ , τ , ϕ et ψ , ce qui aide à simplifier les coefficients de la contrainte (4.6), qui sont beaucoup plus nombreux.

Ainsi, l'équation (4.13) est le développement complet de la contrainte (4.7). Après simplifications, on a alors 8 coefficients pour les 8 monômes différents dans cette équation : $(\theta_x)^2\theta_{xx}$, $\theta_x\theta_{xx}$, $(\theta_x)^4$, θ_{xx} , $(\theta_x)^3$, $(\theta_x)^2$, θ_x et 1. Ces coefficients sont :

$$(\theta_x)^2\theta_{xx} : -\frac{\rho\tau_\rho}{2m^2} = 0 \quad (4.14a)$$

$$\theta_x\theta_{xx} : \frac{\xi_\rho\rho}{m} = 0 \quad (4.14b)$$

$$\theta_{xx} : \frac{-\phi_\rho\rho}{m} + \frac{\tau_\rho\lambda}{m\rho} = 0 \quad (4.14c)$$

$$(\theta_x)^4 : \frac{\tau_\theta}{4m^2} = 0 \quad (4.14d)$$

$$(\theta_x)^3 : \frac{\tau_x}{2m^2} - \frac{\xi_\theta}{2m} = 0 \quad (4.14e)$$

$$(\theta_x)^2 : \frac{-\xi_x}{m} + \frac{\tau_t}{2m} + \frac{\phi_\theta}{2m} = 0 \quad (4.14f)$$

$$\theta_x : \frac{\phi_x}{m} - \frac{\tau_x\lambda}{m\rho^2} - \xi_t - \frac{\xi_\theta\lambda}{\rho^2} = 0 \quad (4.14g)$$

$$1 : \frac{2\psi\lambda}{\rho^3} + \phi_t + \frac{(\phi_\theta - \tau_t)\lambda}{\rho^2} - \frac{\tau_\theta\lambda^2}{\rho^4} = 0. \quad (4.14h)$$

L'objectif est maintenant de trouver des expressions pour ξ , τ , ϕ et ψ , et par le fait même, leur dépendance (ou non) en x , t , θ et ρ , par le biais des équations (4.14a) à (4.14h).

Via les équations (4.14a) et (4.14d), on voit que $\tau_\rho = 0$ et $\tau_\theta = 0$. Ainsi, τ est indépendant de ρ et θ , et donc

$$\tau = \tau(x, t) \quad (4.15)$$

L'équation (4.14b) nous montre que $\xi_\rho = 0$, et donc que $\xi = \xi(x, t, \theta)$. On voit aussi, via l'équation (4.14e), que $\xi_\theta = \frac{\tau_x}{m}$. On peut donc affirmer que

$$\xi = \frac{\tau_x}{m}\theta + \alpha(x, t), \quad (4.16)$$

où $\alpha(x, t)$ est une fonction dépendant de x et t .

L'équation (4.14c) donne $\phi_\rho = 0$ (car $\tau_\rho = 0$), et donc que $\phi = \phi(x, t, \theta)$. De plus, via l'équation (4.14f), et en se servant de (4.16), on a

$$\phi_\theta = 2\xi_x - \tau_t = \frac{2\tau_{xx}}{m}\theta + 2\alpha_x - \tau_t$$

En intégrant, on obtient

$$\phi = \frac{\tau_{xx}}{m}\theta^2 + 2\alpha_x\theta - \tau_t\theta + \beta(x, t) \quad (4.17)$$

Regardons maintenant la contrainte (4.6). En remplaçant ϕ^x , ϕ^{xx} , ψ^x et ψ^t par leurs expressions trouvées en (4.8), (4.10), (4.11) et (4.12), ainsi que ρ_t et

θ_t par leurs expressions découlant de (4.1) et (4.2), on obtient alors

$$\begin{aligned}
& \frac{\psi\theta_{xx}}{m} + \frac{1}{m} \left[\phi_x + (\phi_\theta - \xi_x)\theta_x - \tau_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) - \xi_\theta(\theta_x)^2 \right. \\
& \quad \left. - \tau_\theta\theta_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) + \phi_\rho\rho_x - \xi_\rho\rho_x\theta_x - \tau_\rho\rho_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right] \rho_x \\
& \quad + \frac{1}{m} \left[\psi_x + (\psi_\rho - \xi_x)\rho_x - \tau_x \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) - \xi_\rho(\rho_x)^2 \right. \\
& \quad \left. - \tau_\rho\rho_x \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) + \psi_\theta\theta_x - \xi_\theta\theta_x\rho_x - \tau_\theta\theta_x \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) \right] \theta_x \\
& \quad + \psi_t - \xi_t\rho_x + (\psi_\rho - \tau_t) \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) - \tau_\rho \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right)^2 \\
& \quad - \xi_\rho\rho_x \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) + \psi_\theta \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \\
& \quad - \xi_\theta \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \rho_x - \tau_\theta \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \left(-\frac{1}{m}(\rho_x\theta_x + \rho\theta_{xx}) \right) \\
& \quad + \frac{1}{m} \left[\phi_{xx} + (2\phi_{\theta x} - \xi_{xx})\theta_x - \tau_{xx} \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) + (\phi_{\theta\theta} - 2\xi_{\theta x})(\theta_x)^2 \right. \\
& \quad \left. - 2\tau_{\theta x}\theta_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) + 2\phi_{\rho x}\rho_x + 2(\phi_{\theta\rho} - \xi_{\rho x})\theta_x\rho_x \right. \\
& \quad \left. - 2\tau_{\rho x} \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \rho_x - \xi_{\theta\theta}(\theta_x)^3 - \tau_{\theta\theta}(\theta_x)^2 \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - 2\xi_{\theta\rho}(\theta_x)^2\rho_x - 2\tau_{\theta\rho}\theta_x \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \rho_x + \phi_{\rho\rho}(\rho_x)^2 - \xi_{\rho\rho}\theta_x(\rho_x)^2 \right. \\
& \quad \left. - \tau_{\rho\rho} \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) (\rho_x)^2 + (\phi_\theta - 2\xi_x)\theta_{xx} - 2\tau_x \left(-\frac{1}{m}\theta_x\theta_{xx} - 2\frac{\lambda}{\rho^3}\rho_x \right) \right. \\
& \quad \left. - 3\xi_\theta\theta_x\theta_{xx} - \tau_\theta \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \theta_{xx} - 2\tau_\theta\theta_x \left(-\frac{1}{m}\theta_x\theta_{xx} - 2\frac{\lambda}{\rho^3}\rho_x \right) \right. \\
& \quad \left. - 2\xi_\rho\rho_x\theta_{xx} - 2\tau_\rho\rho_x \left(-\frac{1}{m}\theta_x\theta_{xx} - 2\frac{\lambda}{\rho^3}\rho_x \right) + \phi_\rho\rho_{xx} - \xi_\rho\theta_x\rho_{xx} \right. \\
& \quad \left. - \tau_\rho \left(-\frac{1}{2m}(\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \rho_{xx} \right] \rho = 0 \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Cependant, grâce aux équations (4.15), (4.16) et (4.17), on peut simplifier grandement cette équation. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{\psi\theta_{xx}}{m} + \frac{1}{m} \left[\phi_x + (\phi_\theta - \xi_x) \theta_x - \tau_x \left(-\frac{1}{2m} (\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) - \xi_\theta (\theta_x)^2 \right] \rho_x \\
& + \frac{1}{m} \left[\psi_x + (\psi_\rho - \xi_x) \rho_x - \tau_x \left(-\frac{1}{m} (\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx}) \right) + \psi_\theta \theta_x - \xi_\theta \theta_x \rho_x \right] \theta_x \\
& + \psi_t - \xi_t \rho_x + (\psi_\rho - \tau_t) \left(-\frac{1}{m} (\rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx}) \right) + \psi_\theta \left(-\frac{1}{2m} (\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \\
& - \xi_\theta \left(-\frac{1}{2m} (\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \rho_x + \frac{1}{m} \left[\phi_{xx} + (2\phi_{\theta x} - \xi_{xx}) \theta_x \right. \\
& \left. - \tau_{xx} \left(-\frac{1}{2m} (\theta_x)^2 + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) + (\phi_{\theta\theta} - 2\xi_{\theta x}) (\theta_x)^2 - \xi_{\theta\theta} (\theta_x)^3 \right. \\
& \left. + (\phi_\theta - 2\xi_x) \theta_{xx} - 2\tau_x \left(-\frac{1}{m} (\theta_x \theta_{xx}) - 2\frac{\lambda}{\rho^3} \rho_x \right) - 3\xi_\theta \theta_x \theta_{xx} \right] \rho = 0 \quad (4.19)
\end{aligned}$$

On a ici 9 monômes différents, composés de θ_x , θ_{xx} , ρ_x et de combinaisons de

ceux-ci. Les coefficients de ces monômes sont:

$$\theta_x \theta_{xx} : \frac{3\tau_x \rho}{m^2} - \frac{3\xi_\theta \rho}{m} = 0 \quad (4.20a)$$

$$\theta_{xx} : \frac{\psi}{m} - \frac{(\psi_\rho - \tau_t)\rho}{m} + \frac{(\phi_\theta - 2\xi_x)\rho}{m} = 0 \quad (4.20b)$$

$$(\theta_x)^3 : \frac{-\xi_{\theta\theta}\rho}{m} = 0 \quad (4.20c)$$

$$(\theta_x)^2 : \frac{\psi_\theta}{2m} + \frac{\tau_{xx}\rho}{2m^2} + \frac{(\phi_{\theta\theta} - 2\xi_{\theta x})\rho}{m} = 0 \quad (4.20d)$$

$$\theta_x : \frac{\psi_x}{m} + \frac{(2\phi_{\theta x} - \xi_{xx})\rho}{m} = 0 \quad (4.20e)$$

$$(\theta_x)^2 \rho_x : \frac{3\tau_x}{2m^2} - \frac{3\xi_\theta}{2m} = 0 \quad (4.20f)$$

$$\theta_x \rho_x : \frac{(\phi_\theta - 2\xi_x + \tau_t)}{m} = 0 \quad (4.20g)$$

$$\rho_x : \frac{\phi_x}{m} - \xi_t - \frac{\xi_\theta \lambda}{\rho^2} + \frac{3\tau_x \lambda}{m\rho^2} = 0 \quad (4.20h)$$

$$1 : \psi_t + \frac{\psi_\theta \lambda}{\rho^2} + \frac{\phi_{xx}\rho}{m} - \frac{\tau_{xx}\lambda}{m\rho} = 0 \quad (4.20i)$$

On voit que parmi ces équations, quelques-unes sont équivalentes. L'équation (4.20a) est équivalente à (4.20f) et (4.14e), qui donne

$$\tau_x = m\xi_\theta.$$

L'équation (4.20g) est identique à (4.14f), qui donne

$$\phi_\theta - 2\xi_x + \tau_t = 0$$

On peut d'ailleurs utiliser cette équation pour simplifier l'équation (4.20b), qui donne alors

$$\psi - \rho\psi_\rho = 0$$

Des conclusions supplémentaires peuvent être faites grâce à cette équation, car puisque

$$\psi = \rho\psi_\rho,$$

en dérivant par rapport à ρ , on obtient

$$\begin{aligned}\psi_\rho &= \psi_\rho + \rho\psi_{\rho\rho} \\ \rho\psi_{\rho\rho} &= 0 \\ \psi_{\rho\rho} &= 0.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Ainsi, ψ_ρ n'a aucune dépendance en ρ , et donc on peut réécrire

$$\psi = \chi(x, t, \theta)\rho\tag{4.22}$$

L'équation (4.20c) donne $\xi_{\theta\theta}\rho = 0$, ce que l'équation (4.16) démontrait déjà.

L'équation (4.20d) comprend certains termes qui s'annulent, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\psi_\theta}{2m} + \frac{\tau_{xx}\rho}{2m^2} + \frac{(\phi_{\theta\theta} - 2\xi_{\theta x})\rho}{m} &= 0 \\ \frac{\psi_\theta}{2} + \frac{\tau_{xx}\rho}{2m} + \left(\frac{2\tau_{xx}}{m} - 2\frac{\tau_{xx}}{m}\right)\rho &= 0 \\ \frac{\psi_\theta}{2} + \frac{\tau_{xx}\rho}{2m} &= 0 \\ \psi_\theta &= -\frac{\tau_{xx}\rho}{m}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Grâce à l'équation (4.23), on peut préciser l'équation (4.22), qui devient

$$\psi = \left(-\frac{\tau_{xx}\theta}{m} + \eta(x, t)\right)\rho.\tag{4.24}$$

L'équation (4.20e) peut être réécrite comme étant

$$\left(\frac{2}{m}\tau_{xxx}\right)\theta + (3\alpha_{xx} - 2\tau_{xt} + \eta_x) = 0.$$

Ainsi, on a

$$\tau_{xxx} = 0,\tag{4.25}$$

$$3\alpha_{xx} - 2\tau_{xt} + \eta_x = 0.\tag{4.26}$$

On trouve que

$$\tau(x, t) = \frac{1}{2}\gamma(t)x^2 + \delta(t)x + \epsilon(t). \quad (4.27)$$

Donc (4.26) devient

$$\begin{aligned} 3\alpha_{xx} - 2\tau_{xt} + \eta_x &= 0 \\ 3\alpha_{xx} + \eta_x &= 2\tau_{xt} \\ 3\alpha_{xx} + \eta_x &= 2\gamma_t x + 2\delta_t \end{aligned} \quad (4.28)$$

On obtient donc 4 conditions à satisfaire, (4.14g), (4.14h), (4.20i) et (4.28) :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_x}{m} - \frac{\tau_x \lambda}{m\rho^2} - \xi_t - \frac{\xi_\theta \lambda}{\rho^2} &= 0, \\ \frac{2\psi\lambda}{\rho^3} + \phi_t + \frac{(\phi_\theta - \tau_t)\lambda}{\rho^2} - \frac{\tau_\theta \lambda^2}{\rho^4} &= 0, \\ \psi_t + \frac{\psi_\theta \lambda}{\rho^2} + \frac{\phi_{xx}\rho}{m} - \frac{\tau_{xx}\lambda}{m\rho} &= 0, \\ 3\alpha_{xx} + \eta_x &= 2\gamma_t x + 2\delta_t \end{aligned}$$

On doit satisfaire ces conditions pour 2 cas différents, $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$. Prenons les deux cas séparément.

4.1.1 Cas $\lambda = 0$

Pour le cas $\lambda = 0$, on obtient les conditions

$$\frac{\phi_x}{m} - \xi_t = 0, \quad (A)$$

$$\phi_t = 0, \quad (B)$$

$$\psi_t + \frac{\phi_{xx}\rho}{m} = 0, \quad (C)$$

$$3\alpha_{xx} + \eta_x = 2\gamma_t x + 2\delta_t \quad (D)$$

De (B), (4.17) et (4.27), on obtient

$$\frac{1}{m}\gamma_t\theta^2 + \left(2\alpha_{xt} - \frac{1}{2}\gamma_{tt}x^2 - \delta_{tt}x - \epsilon_{tt}\right)\theta + \beta_t = 0.$$

Puisqu'on a un polynôme, chaque terme devra être égal à 0. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma_t &= 0 \\ 2\alpha_{xt} - \frac{1}{2}\gamma_{tt}x^2 - \delta_{tt}x - \epsilon_{tt} &= 0 \\ \beta_t &= 0\end{aligned}$$

Après simplification, on a

$$\begin{aligned}\gamma &= C \\ 2\alpha_{xt} &= \delta_{tt}x + \epsilon_{tt} \\ \beta &= \beta(x)\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{4}\delta_t x^2 + \frac{1}{2}\epsilon_t x + \sigma(x) + \mu(t).$$

Ensuite, utilisant les définitions de ϕ et ξ pour l'équation (A), on obtient

$$\left(\frac{2\sigma_{xx} - \delta_t}{m}\right)\theta + \frac{\beta_x}{m} - \frac{1}{4}\delta_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\epsilon_{tt}x - \mu_t = 0$$

On trouve donc à la fois que

$$\begin{aligned}2\sigma_{xx} - \delta_t &= 0 \\ \frac{\beta_x}{m} - \frac{1}{4}\delta_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\epsilon_{tt}x - \mu_t &= 0\end{aligned}$$

Commençons par la deuxième égalité. On obtient

$$\frac{\beta_x}{m} = \frac{1}{4}\delta_{tt}x^2 + \frac{1}{2}\epsilon_{tt}x + \mu_t$$

Puisque $\beta = \beta(x)$ et que $\delta = \delta(t)$, $\epsilon = \epsilon(t)$ et $\mu = \mu(t)$, on trouve que δ , ϵ et μ sont tous des polynômes en t :

$$\begin{aligned}\delta(t) &= Dt^2 + Pt + U, \\ \epsilon(t) &= Et^2 + Lt + V, \\ \mu(t) &= Wt + Y.\end{aligned}$$

En utilisant ces expressions, on peut réécrire $\beta(x)$ en remplaçant les valeurs ci-dessus et en intégrant

$$\beta(x) = \frac{m}{6}Dx^3 + \frac{m}{2}Ex^2 + mWx + Z. \quad (4.29)$$

En prenant la première égalité, on a

$$2\sigma_{xx} - \delta_t = 0$$

En se servant la valeur de $\delta(t)$ trouvée ci-dessus, on obtient

$$2\sigma_{xx} = 2Dt + P$$

Cependant, sachant que $\sigma = \sigma(x)$, alors $D = 0$. On obtient alors, après intégration

$$\sigma(x) = \frac{1}{4}Px^2 + Rx + S.$$

Poursuivons avec l'équation (D)

$$3\alpha_{xx} + \eta_x = 2\gamma_t x + 2\delta_t$$

En y remplaçant α et sachant que $\gamma = \gamma_t$, on trouve

$$2\eta_x = \delta_t - 6\sigma_{xx},$$

et sachant que $2\sigma_{xx} = \delta_t$,

$$2\eta_x = -4\sigma_{xx}$$

ce qui implique que

$$\eta_x = -2 \left(\frac{1}{2} P \right) = -P.$$

Donc

$$\eta(x, t) = -Px + \Omega(t).$$

Pour la dernière équation à traiter, l'équation (C), on obtient donc, après avoir remplacé les variables nécessaires

$$\eta_t + E = 0$$

Donc, on trouve que

$$\Omega_t = -E$$

$$\Omega(t) = -Et + F.$$

Maintenant, on peut exprimer les fonctions ξ , τ , ϕ et ψ avec les constantes (générateurs) qui ont été trouvées pour définir les différentes fonctions α , β ,

$\eta, \sigma, \delta, \gamma, \epsilon, \mu$ et Ω . On obtient

$$\begin{aligned}\xi(x, t, \theta) &= \frac{1}{m} (Cx + Pt + U) \theta + \frac{1}{2} Px^2 + Ext + \frac{1}{2} Lx + Rx + S + Wt + Y \\ \tau(x, t) &= \frac{1}{2} Cx^2 + Pxt + Ux + Et^2 + Lt + V \\ \phi(x, \theta) &= \frac{C}{m} \theta^2 + (Px + 2R)\theta + \frac{m}{2} Ex^2 + mWx + Z \\ \psi(x, t, \theta, \rho) &= - \left(\frac{C\theta}{m} + Px + Et - F \right) \rho\end{aligned}$$

Trouvons maintenant les symétries du cas $\lambda = 0$, à partir des générateurs $C, E, F, P, L, R, U, W, Z, S$ et V . Pour trouver les symétries [15], on doit poser chaque générateur égal à 0 sauf un, qu'on pose égal à 1, et les remplacer successivement dans (4.3) pour obtenir

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{m} x \theta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{m} \theta \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ E &= xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{m}{2} x^2 \frac{\partial}{\partial \theta} - t \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ F &= \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ P &= \left(\frac{1}{m} t \theta + \frac{1}{2} x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + xt \frac{\partial}{\partial t} + x \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - x \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \\ L &= \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}, \\ R &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ U &= \frac{1}{m} \theta \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, \\ W &= t \frac{\partial}{\partial x} + mx \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ S &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ V &= \frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

On peut ensuite trouver les relations de commutation de ces symétries, qu'on consigne dans la table 4.1 ci-dessous

Table 4.1: Relations de commutation des générateurs de symétries de l'équation de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions pour le cas $\lambda = 0$

	C	E	U	P	L	R	F	W	Z	S	V
C	0	0	0	0	0	$-2C$	0	$-P$	$\frac{1}{m}(F-R)$	$-U$	0
E	0	0	$-P$	0	$-E$	0	0	0	0	$-W$	$-2L+F$
U	0	P	0	C	$\frac{1}{2}U$	$-U$	0	$\frac{1}{2}R-L$	$-\frac{1}{m}S$	$-V$	0
P	0	0	$-C$	0	$-\frac{1}{2}P$	$-P$	0	$-E$	$-\frac{1}{m}W$	$F-L-\frac{1}{2}R$	$-U$
L	0	E	$-\frac{1}{2}U$	$\frac{1}{2}P$	0	0	0	$\frac{1}{2}W$	0	$-\frac{1}{2}S$	$-V$
R	$2C$	0	U	P	0	0	0	$-W$	$-2Z$	$-S$	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
W	P	0	$L-\frac{1}{2}R$	E	$-\frac{1}{2}W$	W	0	0	0	$-mZ$	$-S$
Z	$\frac{1}{m}(R-F)$	0	$\frac{1}{m}S$	$\frac{1}{m}W$	0	$2Z$	0	0	0	0	0
S	U	W	V	$L+\frac{1}{2}R-F$	$\frac{1}{2}S$	S	0	mZ	0	0	0
V	0	$2L-F$	0	U	V	0	0	S	0	0	0

4.1.2 Cas $\lambda \neq 0$

Pour le cas $\lambda \neq 0$, on obtient les conditions

$$\frac{\phi_x}{m} - \xi_t - \xi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{\lambda}{m\rho^2} \tau_x = 0, \quad (\text{E})$$

$$\phi_t + \phi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \tau_t \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{2\lambda\psi}{\rho^3} = 0, \quad (\text{F})$$

$$\psi_t + \frac{\phi_{xx}\rho}{m} + \psi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{\lambda}{m\rho} \tau_{xx} = 0, \quad (\text{G})$$

$$3\alpha_{xx} + \eta_x = 2\gamma_t x + 2\delta_t \quad (\text{H})$$

En utilisant les définitions pour ϕ (4.17), ψ (4.24) et τ (4.27), on obtient de l'équation (F)

$$\frac{1}{m} \gamma_t \theta^2 + \left(2\alpha_{xt} - \frac{1}{2} \gamma_{tt} x^2 - \delta_{tt} x - \epsilon_{tt} \right) \theta + \beta_t + \frac{\lambda}{\rho^2} (2\alpha_x - \gamma_t x^2 - 2\delta_t x - 2\epsilon_t + 2\eta) = 0. \quad (4.30)$$

Comme dans le cas précédent, on trouve

$$\begin{aligned} \gamma &= C \\ 2\alpha_{xt} &= \delta_{tt} x + \epsilon_{tt} \\ \beta &= \beta(x) \end{aligned}$$

On a aussi

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{4} \delta_t x^2 + \frac{1}{2} \epsilon_t x + \sigma(x) + \mu(t).$$

Cependant, contrairement au cas précédent, on a aussi la condition

$$2\alpha_x - \gamma_t x^2 - 2\delta_t x - 2\epsilon_t + 2\eta = 0. \quad (4.31)$$

L'équation (E) devient

$$\frac{1}{m}(2\sigma_{xx} - \delta_t)\theta + \left(\frac{1}{m}\beta_x - \frac{1}{4}\delta_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\epsilon_{ttt}x - \mu_t\right) + \frac{\lambda}{m\rho^2}(-2Cx - 2\delta) = 0. \quad (4.32)$$

Tout comme le cas précédent, on a

$$\delta(t) = Pt + U, \quad (4.33)$$

$$\epsilon(t) = Et^2 + Lt + V, \quad (4.34)$$

$$\mu(t) = Wt + Y, \quad (4.35)$$

$$\beta(x) = \frac{m}{2}Ex^2 + mWx + Z, \quad (4.36)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{4}Px^2 + Rx + S. \quad (4.37)$$

Selon l'équation (4.32), on a aussi la condition supplémentaire qui provient du dernier terme, qui est

$$Cx + \delta = 0$$

Ceci implique que $Cx = -Pt - U$, et donc, puisqu'il n'y a pas de coefficient de x du côté droit, et qu'il n'y a pas de coefficient de t ni de coefficient constant du côté gauche, on trouve que

$$C = 0, \quad P = 0, \quad U = 0.$$

Ainsi, on trouve également que

$$\delta(t) = 0,$$

$$\gamma(t) = 0,$$

$$\alpha(x, t) = Ext + \left(\frac{1}{2}L + R\right)x + Wt + S + Y.$$

De l'équation (H), et des déductions ci-dessus, on trouve

$$\eta = \eta(t) \quad (4.38)$$

De la condition (4.31), on trouve

$$\eta(t) = Et + \left(\frac{1}{2}L - R\right). \quad (4.39)$$

Finalement, de l'équation (G), on trouve

$$E = 0.$$

Selon toutes les définitions trouvées jusqu'ici, on trouve les fonctions coefficients

$$\xi(x, t) = \left(\frac{1}{2}L + R\right)x + Wt + S + Y, \quad (4.40)$$

$$\tau(t) = Lt + V, \quad (4.41)$$

$$\phi(x, \theta) = 2R\theta + mWx + Z, \quad (4.42)$$

$$\psi(\rho) = \left(\frac{1}{2}L - R\right)\rho. \quad (4.43)$$

Les symétries infinitésimales sont

$$L' = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho},$$

$$R' = x \frac{\partial}{\partial x} + 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho},$$

$$W = t \frac{\partial}{\partial x} + mx \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$S = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$V = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Les relations de commutation du cas $\lambda \neq 0$ sont donc

Table 4.2: Relations de commutation des générateurs de symétries de l'équation de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions pour le cas $\lambda \neq 0$

	L'	R'	W	Z	S	V
L'	0	0	W	0	$-S$	$-2V$
R'	0	0	$-W$	$-2V$	$-S$	0
W	$-W$	W	0	0	$-mZ$	$-S$
Z	0	$2Z$	0	0	0	0
S	S	S	mZ	0	0	0
V	$2V$	0	S	0	0	0

4.2 Équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions

Maintenant, on utilise la même méthode pour trouver les solutions des équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions. Il faut donc redéfinir le champ de vecteurs (voir l'équation (3.7)) et trouver les coefficients de la 2e prolongation en $(2 + 1)$ dimensions. Cependant, on verra que ces coefficients sont très longs et compliqués, donc on ne détaillera pas la démarche complète pour trouver les solutions.

Les équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions sont énoncées comme suit :

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y + \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) = 0 \\ \theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

On a alors

$$0 = \Delta_1 = \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y + \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) \quad (4.45)$$

$$0 = \Delta_2 = \theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} \quad (4.46)$$

On obtient alors les conditions

$$0 = \psi^t + \phi^x \rho_x + \psi^x \theta_x + \phi^y \rho_y + \psi^y \theta_y + \psi (\theta_{xx} + \theta_{yy}) + \rho (\phi^{xx} + \phi^{yy}) \quad (4.47)$$

$$0 = \phi^t + \phi^x \theta_x + \phi^y \theta_y + 2\lambda \psi \rho^{-3}. \quad (4.48)$$

Ainsi, on a besoin des expressions pour les fonctions $\phi^x, \phi^y, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{yy}, \psi^x, \psi^y, \psi^t$. Celles-ci seront trouvées à partir des équations (3.3) et (3.4).

Voici deux exemples :

$$\begin{aligned} \phi^y &= D_y \left(\phi - \sum_{i=1}^p \xi^i \theta_i \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i \theta_{y,i} \\ \phi^y &= \phi_y - \xi_y \theta_x + (\phi_\theta - \zeta_y) \theta_y - \tau_y \theta_t + \phi_\rho \rho_y - \xi_\theta \theta_x \theta_y - \\ &\quad \zeta_\theta (\theta_y)^2 - \tau_\theta \theta_y \theta_t - \xi_\rho \rho_y \theta_x - \zeta_\rho \rho_y \theta_y - \tau_\rho \rho_y \theta_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^y &= \psi_y - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^p \xi^i \rho_i + \sum_{l,J} u_{J_y}^l \frac{\partial}{\partial u_J^l} \psi - \sum_{l,J} u_{J_y}^l \frac{\partial}{\partial u_J^l} \sum_{i=1}^p \xi^i \rho_i + \sum_{i=1}^p \xi^i \rho_{J,i} \\
\psi^y &= \psi_y - \xi_y \rho_x + (\psi_\rho - \zeta_y) \rho_y - \tau_y \rho_t + \psi_\theta \theta_y - \xi_\theta \theta_y \rho_x \\
&\quad - \zeta_\theta \theta_y \rho_y - \tau_\theta \theta_y \rho_t - \xi_\rho \rho_x \rho_y - \zeta_\rho (\rho_y)^2 - \tau_\rho \rho_y \rho_t
\end{aligned}$$

Voici tous les coefficients de degré 1 en $(2+1)$ dimensions

$$\begin{aligned}
\phi^x &= \phi_x + (\phi_\theta - \xi_x) \theta_x - \zeta_x \theta_y - \tau_x \theta_t + \phi_\rho \rho_x - \xi_\theta (\theta_x)^2 \\
&\quad - \zeta_\theta \theta_x \theta_y - \tau_\theta \theta_x \theta_t - \xi_\rho \rho_x \theta_x - \zeta_\rho \rho_x \theta_y - \tau_\rho \rho_x \theta_t, \\
\phi^y &= \phi_y + (\phi_\theta - \zeta_y) \theta_y - \xi_y \theta_x - \tau_y \theta_t + \phi_\rho \rho_y - \xi_\theta \theta_x \theta_y \\
&\quad - \zeta_\theta (\theta_y)^2 - \tau_\theta \theta_y \theta_t - \xi_\rho \rho_y \theta_x - \zeta_\rho \rho_y \theta_y - \tau_\rho \rho_y \theta_t, \\
\phi^t &= \phi_t + (\phi_\theta - \tau_t) \theta_t - \xi_t \theta_x - \zeta_t \theta_y + \phi_\rho \rho_t - \xi_\theta \theta_x \theta_t \\
&\quad - \zeta_\theta \theta_y \theta_t - \tau_\theta (\theta_t)^2 - \xi_\rho \rho_t \theta_x - \zeta_\rho \rho_t \theta_y - \tau_\rho \rho_t \theta_t, \\
\psi^x &= \psi_x + (\psi_\rho - \xi_x) \rho_x - \zeta_x \rho_y - \tau_x \rho_t + \psi_\theta \theta_x - \xi_\theta \theta_x \rho_x \\
&\quad - \zeta_\theta \theta_x \rho_y - \tau_\theta \theta_x \rho_t - \xi_\rho (\rho_x)^2 - \zeta_\rho \rho_x \rho_y - \tau_\rho \rho_x \rho_t \\
\psi^y &= \psi_y + (\psi_\rho - \zeta_y) \rho_y - \xi_y \rho_x - \tau_y \rho_t + \psi_\theta \theta_y - \xi_\theta \theta_y \rho_x \\
&\quad - \zeta_\theta \theta_y \rho_y - \tau_\theta \theta_y \rho_t - \xi_\rho \rho_x \rho_y - \zeta_\rho (\rho_y)^2 - \tau_\rho \rho_y \rho_t \\
\psi^t &= \psi_t + (\psi_\rho - \tau_t) \rho_t - \xi_t \rho_x - \zeta_t \rho_y + \psi_\theta \theta_t - \xi_\theta \theta_t \rho_x \\
&\quad - \zeta_\theta \theta_t \rho_y - \tau_\theta \theta_t \rho_t - \xi_\rho \rho_x \rho_t - \zeta_\rho \rho_y \rho_t - \tau_\rho (\rho_t)^2.
\end{aligned}$$

Les coefficients de degré 2 sont trop longs et difficiles à énoncer pour être présentés ici. On présente donc directement le résultat obtenu.

On a donc la seconde condition (4.48)

$$\begin{aligned}
0 &= \phi^t + \phi^x \theta_x + \phi^y \theta_y + 2\lambda\psi\rho^{-3} \\
\implies 0 &= \phi_t + (\phi_\theta - \tau_t) \theta_t - \xi_t \theta_x - \zeta_t \theta_y + \phi_\rho \rho_t - \xi_\theta \theta_x \theta_t - \zeta_\theta \theta_y \theta_t - \tau_\theta (\theta_t)^2 \\
&\quad - \xi_\rho \rho_t \theta_x - \zeta_\rho \rho_t \theta_y - \tau_\rho \rho_t \theta_t + \left[\phi_x + (\phi_\theta - \xi_x) \theta_x - \zeta_x \theta_y - \tau_x \theta_t + \phi_\rho \rho_x \right. \\
&\quad \left. - \xi_\theta (\theta_x)^2 - \zeta_\theta \theta_x \theta_y - \tau_\theta \theta_x \theta_t - \xi_\rho \rho_x \theta_x - \zeta_\rho \rho_x \theta_y - \tau_\rho \rho_x \theta_t \right] \theta_x \\
&\quad + \left[\phi_y + (\phi_\theta - \zeta_y) \theta_y - \xi_y \theta_x - \tau_y \theta_t + \phi_\rho \rho_y - \xi_\theta \theta_x \theta_y - \zeta_\theta (\theta_y)^2 \right. \\
&\quad \left. - \tau_\theta \theta_y \theta_t - \xi_\rho \rho_y \theta_x - \zeta_\rho \rho_y \theta_y - \tau_\rho \rho_y \theta_t \right] \theta_y + 2\lambda\psi\rho^{-3}
\end{aligned}$$

Remplaçons les dérivées par rapport à t , ρ_t et θ_t , par leurs valeurs données par les équations (4.44) :

$$\begin{cases} \rho_t = -\rho_x \theta_x - \rho_y \theta_y - \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) \\ \theta_t = -\frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \phi_t + (\phi_\theta - \tau_t) \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) - \xi_t \theta_x - \zeta_t \theta_y + \phi_\rho \left(-\rho_x \theta_x - \rho_y \theta_y \right. \\
& \left. - \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) \right) - \xi_\theta \theta_x \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) - \zeta_\theta \theta_y \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \\
& - \tau_\theta \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right)^2 - \xi_\rho (-\rho_x \theta_x - \rho_y \theta_y - \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy})) \theta_x \\
& - \zeta_\rho (-\rho_x \theta_x - \rho_y \theta_y - \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy})) \theta_y \\
& - \tau_\rho (-\rho_x \theta_x - \rho_y \theta_y - \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy})) \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \\
& + \left[\phi_x + (\phi_\theta - \xi_x) \theta_x - \zeta_x \theta_y - \tau_x \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) + \phi_\rho \rho_x - \xi_\theta (\theta_x)^2 \right. \\
& - \zeta_\theta \theta_x \theta_y - \tau_\theta \theta_x \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) - \xi_\rho \rho_x \theta_x - \zeta_\rho \rho_x \theta_y \\
& \left. - \tau_\rho \rho_x \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right] \theta_x + \left[\phi_y + (\phi_\theta - \zeta_y) \theta_y - \xi_y \theta_x \right. \\
& - \tau_y \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) + \phi_\rho \rho_y - \xi_\theta \theta_x \theta_y - \zeta_\theta (\theta_y)^2 \\
& - \tau_\theta \theta_y \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) - \xi_\rho \rho_y \theta_x - \zeta_\rho \rho_y \theta_y \\
& \left. - \tau_\rho \rho_y \left(\frac{-1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \right] \theta_y + 2\lambda\psi\rho^{-3}
\end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned}
0 = & \left(\phi_t + \frac{\lambda}{\rho^2} \phi_\theta - \frac{\lambda}{\rho^2} \tau_t - \tau_\theta \frac{\lambda^2}{\rho^4} + 2\lambda\psi\rho^{-3} \right) + \left(\phi_x - \xi_t - \xi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \tau_x \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \theta_x \\
& + \left(\phi_y - \zeta_t - \zeta_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \tau_y \frac{\lambda}{\rho^2} \right) \theta_y + (\zeta_x + \xi_y) \theta_x \theta_y + \frac{1}{2} (\phi_\theta + \tau_t + 2\xi_x) \theta_x^2 \\
& + \frac{1}{2} (\tau_t + \phi_\theta + 2\zeta_y) \theta_y^2 - \frac{1}{2} (\xi_\theta - \tau_x) \theta_x^3 - \frac{1}{2} (\xi_\theta - \tau_x) \theta_x \theta_y^2 \\
& - \frac{1}{2} (\zeta_\theta - \tau_y) \theta_x^2 \theta_y - \frac{1}{2} (\zeta_\theta - \tau_y) \theta_y^3 + \left(\tau_\rho \frac{\lambda}{\rho} - \phi_\rho \rho \right) \theta_{xx} + \left(\tau_\rho \frac{\lambda}{\rho} - \phi_\rho \rho \right) \theta_{yy} \\
& + \xi_\rho \rho \theta_x \theta_{xx} + \xi_\rho \rho \theta_x \theta_{yy} + \zeta_\rho \rho \theta_y \theta_{xx} + \zeta_\rho \rho \theta_y \theta_{yy} - \frac{1}{2} \tau_\rho \rho \theta_x^2 \theta_{xx} - \frac{1}{2} \tau_\rho \rho \theta_x^2 \theta_{yy} \\
& - \frac{1}{2} \tau_\rho \rho \theta_y^2 \theta_{xx} - \frac{1}{2} \tau_\rho \rho \theta_y^2 \theta_{yy} + \frac{1}{4} \tau_\theta \theta_x^4 + \frac{1}{2} \tau_\theta \theta_x^2 \theta_y^2 + \frac{1}{4} \tau_\theta \theta_y^4
\end{aligned}$$

On a ainsi 23 coefficients pour les 23 monômes de cette équation :

$$1 : \quad \phi_t + \frac{\lambda}{\rho^2} \phi_\theta - \frac{\lambda}{\rho^2} \tau_t - \tau_\theta \frac{\lambda^2}{\rho^4} + 2\lambda\psi\rho^{-3} = 0 \quad (4.49a)$$

$$\theta_x : \quad \phi_x - \xi_t - \xi_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \tau_x \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \quad (4.49b)$$

$$\theta_y : \quad \phi_y - \zeta_t - \zeta_\theta \frac{\lambda}{\rho^2} - \tau_y \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \quad (4.49c)$$

$$\theta_x \theta_y : \quad \zeta_x + \xi_y = 0 \quad (4.49d)$$

$$\theta_x^2 : \quad \frac{1}{2} (\phi_\theta + \tau_t + 2\xi_x) = 0 \quad (4.49e)$$

$$\theta_y^2 : \quad \frac{1}{2} (\tau_t + \phi_\theta + 2\zeta_y) = 0 \quad (4.49f)$$

$$\theta_x^3 : \quad -\frac{1}{2} (\xi_\theta - \tau_x) = 0 \quad (4.49g)$$

$$\theta_x \theta_y^2 : \quad -\frac{1}{2} (\xi_\theta - \tau_x) = 0 \quad (4.49h)$$

$$\theta_x^2 \theta_y : \quad -\frac{1}{2} (\zeta_\theta - \tau_y) = 0 \quad (4.49i)$$

$$\theta_y^3 : \quad -\frac{1}{2} (\zeta_\theta - \tau_y) = 0 \quad (4.49j)$$

$$\theta_{xx} : \quad \tau_\rho \frac{\lambda}{\rho} - \phi_\rho \rho = 0 \quad (4.49k)$$

$$\theta_{yy} : \quad \tau_\rho \frac{\lambda}{\rho} - \phi_\rho \rho = 0 \quad (4.49l)$$

$$\theta_x \theta_{xx} : \quad \xi_\rho \rho = 0 \quad (4.49m)$$

$$\theta_x \theta_{yy} : \quad \xi_\rho \rho = 0 \quad (4.49n)$$

$$\theta_y \theta_{xx} : \quad \zeta_\rho \rho = 0 \quad (4.49o)$$

$$\theta_y \theta_{yy} : \quad \zeta_\rho \rho = 0 \quad (4.49p)$$

$$\theta_x^2 \theta_{xx} : \quad -\frac{1}{2} \tau_\rho \rho = 0 \quad (4.49q)$$

$$\theta_x^2 \theta_{yy} : \quad -\frac{1}{2} \tau_\rho \rho = 0 \quad (4.49r)$$

$$\theta_y^2 \theta_{xx} : \quad -\frac{1}{2} \tau_\rho \rho = 0 \quad (4.49s)$$

$$\theta_y^2 \theta_{yy} : \quad -\frac{1}{2} \tau_\rho \rho = 0 \quad (4.49t)$$

$$\theta_x^4 : \quad \frac{1}{4} \tau_\theta = 0 \quad (4.49u)$$

$$\theta_x^2 \theta_y^2 : \quad \frac{1}{2} \tau_\theta = 0 \quad (4.49v)$$

$$\theta_y^4 : \quad \frac{1}{4} \tau_\theta = 0 \quad (4.49w)$$

Plusieurs de ces équations sont redondantes. En effet, les équations (4.49g) et (4.49h) donnent toutes deux

$$\xi_\theta = \tau_x. \quad (4.50)$$

Les équations (4.49i) et (4.49j) donnent

$$\zeta_\theta = \tau_y. \quad (4.51)$$

Les équations (4.49k) et (4.49l) donnent

$$\tau_\rho \lambda = \phi_\rho \rho^2. \quad (4.52)$$

Les équations (4.49m) et (4.49n) donnent

$$\xi_\rho = 0. \quad (4.53)$$

Les équations (4.49o) et (4.49p) donnent

$$\zeta_\rho = 0. \quad (4.54)$$

Les équations (4.49q), (4.49r), (4.49s) et (4.49t) donnent

$$\tau_\rho = 0. \quad (4.55)$$

Les équations (4.49u), (4.49v) et (4.49w) donnent

$$\tau_\theta = 0. \quad (4.56)$$

On peut d'ailleurs simplifier l'équation (4.52) grâce à (4.55), ce qui donne

$$\phi_\rho = 0. \quad (4.57)$$

Les équations (4.49e) et (4.49f) donnent respectivement

$$\phi_\theta + \tau_t + 2\xi_x = 0 \quad (4.58)$$

et

$$\phi_\theta + \tau_t + 2\zeta_y = 0. \quad (4.59)$$

L'équation (4.49d) donne

$$\zeta_x = -\xi_y \quad (4.60)$$

Grâce aux équations ci-dessus, on peut simplifier les équations (4.49b) et (4.49c), qui donnent

$$\phi_x - \xi_t - 2\tau_x \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \quad (4.61)$$

et

$$\phi_y - \zeta_t - 2\tau_y \frac{\lambda}{\rho^2} = 0. \quad (4.62)$$

Finalement, pour l'équation (4.49a), on obtient

$$\phi_t + (\phi_\theta - \tau_t) \frac{\lambda}{\rho^2} + 2\psi \frac{\lambda}{\rho^3} = 0. \quad (4.63)$$

Ainsi, on peut débiter à poser la forme pour ξ , ζ , τ , ϕ et ψ .

Pour τ , on a la forme

$$\tau = \tau(x, y, t). \quad (4.64)$$

Pour ξ , on a

$$\xi = \tau_x \theta + \alpha(x, y, t). \quad (4.65)$$

Pour ζ , on a

$$\zeta = \tau_y \theta + \beta(x, y, t). \quad (4.66)$$

Au lieu de présenter les calculs pour l'autre condition, qui seraient très longs et similaires aux calculs faits dans le cas en $(1 + 1)$ dimensions, on présente directement les champs de vecteurs obtenus par tous ces calculs, qui sont les

suivants :

$$\vec{v}_1 = \partial_x,$$

$$\vec{v}_2 = \partial_y,$$

$$\vec{v}_3 = \partial_t,$$

$$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_\theta,$$

$$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_\theta,$$

$$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + \theta\partial_\theta,$$

$$\vec{v}_7 = t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho,$$

$$\vec{v}_8 = y\partial_x - x\partial_y,$$

$$\vec{v}_9 = \partial_\theta.$$

On peut, comme pour la situation en $(1+1)$ dimensions, trouver les relations de commutation entre les champs de vecteurs en $(2+1)$ dimensions. On trouve alors le tableau suivant :

Table 4.3: Relations de commutation des champs de vecteurs des équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions

	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_5$	$\vec{v}_6$	$\vec{v}_7$	$\vec{v}_8$	$\vec{v}_9$
$\vec{v}_1$	0	0	0	$\vec{v}_9$	0	$\vec{v}_1$	0	$-\vec{v}_2$	0
$\vec{v}_2$	0	0	0	0	$\vec{v}_9$	$\vec{v}_2$	0	$\vec{v}_1$	0
$\vec{v}_3$	0	0	0	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_3$	0	0
$\vec{v}_4$	$-\vec{v}_9$	0	$-\vec{v}_1$	0	0	0	$-\vec{v}_4$	$-\vec{v}_5$	0
$\vec{v}_5$	0	$-\vec{v}_9$	$-\vec{v}_2$	0	0	0	$-\vec{v}_5$	$\vec{v}_4$	0
$\vec{v}_6$	$-\vec{v}_1$	$-\vec{v}_2$	$-\vec{v}_3$	0	0	0	0	0	$-\vec{v}_9$
$\vec{v}_7$	0	0	$-\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_5$	0	0	0	$\vec{v}_9$
$\vec{v}_8$	$\vec{v}_2$	$-\vec{v}_1$	0	$\vec{v}_5$	$-\vec{v}_4$	0	0	0	0
$\vec{v}_9$	0	0	0	0	0	$\vec{v}_9$	$-\vec{v}_9$	0	0

On peut aussi classer les sous-algèbres selon leur catégorie de scission («splitting») :

$$\begin{aligned}
\text{«Splitting»: } a_0 &= \{0\}, \\
a_1 &= \{\vec{v}_5\}, \\
a_2 &= \{\vec{v}_7\}, \\
a_3 &= \{\vec{v}_8 + a\vec{v}_7\} \quad a \in \mathbb{R}, \\
a_4 &= \{\vec{v}_9 + a\vec{v}_8 + b\vec{v}_7\} \quad a, b \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{«Non Splitting»: } a_5 &= \{\vec{v}_7 + \vec{v}_5\}, \\
a_6 &= \{\vec{v}_7 + \vec{v}_6\}, \\
a_7 &= \{\vec{v}_8 + a\vec{v}_7 + \vec{v}_5\} \quad a \in \mathbb{R}, \\
a_8 &= \{\vec{v}_8 + a\vec{v}_7 + \vec{v}_6\} \quad a \in \mathbb{R}, \\
a_9 &= \{\vec{v}_9 + a\vec{v}_8 + b\vec{v}_7 + \vec{v}_5\} \quad a, b \in \mathbb{R} \\
a_{10} &= \{\vec{v}_9 + a\vec{v}_8 + b\vec{v}_7 + \vec{v}_6\} \quad a, b \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

4.3 Équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)

L'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ) est énoncée comme suit :

$$\theta_{tt} + 2(\theta_x\theta_{xt} + \theta_y\theta_{yt} + \theta_x\theta_y\theta_{xy}) - 2\theta_t(\theta_{xx} + \theta_{yy}) - \theta_y^2\theta_{xx} - \theta_x^2\theta_{yy} = 0. \quad (4.67)$$

On a alors

$$0 = \Delta = \theta_{tt} + 2(\theta_x\theta_{xt} + \theta_y\theta_{yt} + \theta_x\theta_y\theta_{xy}) - 2\theta_t(\theta_{xx} + \theta_{yy}) - \theta_y^2\theta_{xx} - \theta_x^2\theta_{yy} \quad (4.68)$$

Pour la 2e prolongation, on obtient alors

$$\begin{aligned}
0 = & 2\phi^x (\theta_{xt} + \theta_y \theta_{xy}) - 2\phi^x \theta_x \theta_{yy} + 2\phi^y (\theta_{yt} + \theta_x \theta_{xy}) - 2\phi^y \theta_y \theta_{xx} - 2\phi^t (\theta_{xx} + \theta_{yy}) \\
& - 2\theta_t \phi^{xx} - \theta_y^2 \phi^{xx} - 2\theta_t \phi^{yy} - \theta_x^2 \phi^{yy} + \phi^{tt} + 2\theta_x \theta_y \phi^{xy} + 2\theta_x \phi^{xt} + 2\theta_y \phi^{yt}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Ainsi, on aurait besoin des expressions pour les fonctions ϕ^x , ϕ^y , ϕ^t , ϕ^{xx} , ϕ^{yy} , ϕ^{tt} , ϕ^{xy} , ϕ^{xt} et ϕ^{yt} . Cependant, tout comme dans la sous-section précédente, on donnera directement les solutions dans le tableau de la section suivante. À titre informatif, les champs de vecteurs obtenus pour l'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ) sont

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \partial_x, \\
\vec{v}_2 &= \partial_y, \\
\vec{v}_3 &= \partial_t, \\
\vec{v}_4 &= t\partial_x + x\partial_\theta, \\
\vec{v}_5 &= t\partial_y + y\partial_\theta, \\
\vec{v}_6 &= x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t, \\
\vec{v}_7 &= x\partial_x + y\partial_y + 2\theta\partial_\theta, \\
\vec{v}_8 &= \theta\partial_x + x\partial_t, \\
\vec{v}_9 &= \theta\partial_y + y\partial_t, \\
\vec{v}_{10} &= y\partial_x - x\partial_y, \\
\vec{v}_{11} &= \partial_\theta.
\end{aligned}$$

5 Solutions invariantes des équations de Chaplygin

Dans cette section, on présente la démarche permettant de trouver les solutions des équations de Chaplygin. On trouvera les champs de vecteurs de chacune des équations qui permettent ensuite de déterminer les invariants, les orbites et les équations réduites pour chacun des champs de vecteurs. Résoudre les équations réduites permet ensuite de trouver les solutions de équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ et $(2 + 1)$ dimensions.

5.1 Équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions

Les équations du gaz de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions sont données par

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = 0, \\ \theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x)^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

où θ et ρ sont des fonctions de x et t ($\theta = \theta(x, t)$, $\rho = \rho(x, t)$). Le calcul des champs de vecteurs indépendants pour ces équations a été fait via le logiciel Macsyma par Willy Hereman. On trouve les champs de vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \partial_x, \\ \vec{v}_2 &= \partial_t, \\ \vec{v}_3 &= t\partial_x + x\partial_\theta, \\ \vec{v}_4 &= x\partial_x + t\partial_t + \theta\partial_\theta, \\ \vec{v}_5 &= t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho, \\ \vec{v}_6 &= \partial_\theta. \end{aligned}$$

Ces champs de vecteurs peuvent ensuite être utilisés pour trouver les invariants reliés à chacun d'entre eux. Une fois les invariants trouvés, on en déduit les orbites, qui sont simplement les variables dépendantes présentes dans les invariants en fonction des variables indépendantes présentes dans les invari-

ants. Ces orbites sont ensuite remplacées dans les équations initiales, ce qui permet de trouver les équations réduites du champ de vecteurs correspondant. Ce sont ces équations réduites qui sont ensuite résolues et qui donnent les solutions pour chaque champ de vecteurs des équations initiales. Faisons un exemple de ce type de calcul.

Prenons le champ de vecteurs $\vec{v}_1 = \partial_x$. Ce champ de vecteurs a comme invariants $\{t, \theta, \rho\}$. Ainsi, les orbites seront les variables dépendantes présentes dans les invariants (θ et ρ) en fonction des variables indépendantes présentes dans les invariants (ici seulement t). Donc les orbites de ce champ de vecteurs seront $\{\theta = \theta(t), \rho = \rho(t)\}$. En remplaçant ensuite ces orbites dans les équations initiales, on trouve que toutes les dérivées de θ et ρ en fonction de x seront nulles. Ainsi, on a les équation réduites

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = 0 \\ \theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x)^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \rho_t = 0 \\ \theta_t - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$$

En effectuant ces calculs pour chacun des 5 champs de vecteurs ayant une réduction (le champ de vecteurs $\vec{v}_6 = \partial_\theta$ n'ayant pas de réduction), on trouve les résultats consignés dans le tableau suivant

Table 5.1: Équations réduites pour les équations de Chaplygin en $(1+1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Invariants	Orbites	Équations réduites
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\{t, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(t), \rho = \rho(t)\}$	$\begin{cases} \rho_t = 0 \\ \theta_t - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_2 = \partial_t$	$\{x, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(x), \rho = \rho(x)\}$	$\begin{cases} \rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = 0 \\ \frac{1}{2} \theta_x^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_3 = t\partial_x + x\partial_\theta$	$\{t, x^2 - 2t\theta, \rho\}$	$\left\{ \theta = \frac{F(t) + x^2}{2t}, \rho = \rho(t) \right\}$	$\begin{cases} \rho_t + \frac{1}{t} \rho = 0 \\ \frac{1}{2t} F_t - \frac{1}{2t^2} F - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_4 = x\partial_x + t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$\left\{ \xi := \frac{x}{t}, \frac{\theta}{t}, \rho \right\}$	$\{\theta = tF(\xi), \rho = \rho(\xi)\}$	$\begin{cases} F - \xi F_\xi + \frac{1}{2} F_\xi^2 - \frac{\lambda}{R^2} = 0 \\ -\xi R_\xi + R_\xi F_\xi + R F_{\xi\xi} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_5 = t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho$	$\left\{ x, t\theta, \frac{1}{t}\rho \right\}$	$\left\{ \theta = \frac{1}{t} F(x), \rho = tR(x) \right\}$	$\begin{cases} R + R_x F_x + R F_{xx} = 0 \\ \frac{1}{2} F_x^2 - F - \frac{\lambda}{R^2} = 0 \end{cases}$

On trouve ainsi les solutions pour chaque champ de vecteurs. Ces solutions seront énoncées dans le tableau suivant.

Table 5.2: Solutions particulières des équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Équations réduites	Solutions particulières
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\begin{cases} \rho_t = 0 \\ \theta_t - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = A \\ \theta(x, t) = \frac{\lambda t}{A^2} \end{cases}$
$\vec{v}_2 = \partial_t$	$\begin{cases} \rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = 0 \\ \frac{1}{2} \theta_x^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Identiquement satisfait} \\ \rho(x) = \pm \frac{1}{\theta_x} \sqrt{2\lambda} \end{cases}$
$\vec{v}_3 = t\partial_x + x\partial_\theta$	$\begin{cases} \rho_t + \frac{1}{t}\rho = 0 \\ \frac{1}{2t}F_t - \frac{1}{2t^2}F - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \rho(t) = \frac{C}{t} \\ F(t) = \frac{2\lambda t^4}{3C} + C_1 t \end{cases}$
$\vec{v}_4 = x\partial_x + t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$\begin{cases} F - \xi F_\xi + \frac{1}{2}F_\xi^2 - \frac{\lambda}{R^2} = 0 \\ -\xi R_\xi + R_\xi F_\xi + R F_{\xi\xi} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} R(\xi) = \sqrt{\frac{\lambda}{F - \xi F_\xi + \frac{1}{2}F_\xi^2}} \\ F = \frac{\xi^2}{2} \end{cases}$
$\vec{v}_5 = t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho$	$\begin{cases} R + R_x F_x + R F_{xx} = 0 \\ \frac{1}{2}F_x^2 - F - \frac{\lambda}{R^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} F(x) = \frac{2}{c_1} \sinh \left[\pm \frac{\sqrt{c_1}}{2} (x + c_2) \right]^2 \\ R(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{1}{2}F_x^2 - F}} \end{cases}$

5.2 Équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions

Les équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions sont données par

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y + \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) = 0, \\ \theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Les champs de vecteurs indépendants pour ces équations sont donnés par

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \partial_x, \\ \vec{v}_2 &= \partial_y, \\ \vec{v}_3 &= \partial_t, \\ \vec{v}_4 &= t\partial_x + x\partial_\theta, \\ \vec{v}_5 &= t\partial_y + y\partial_\theta, \\ \vec{v}_6 &= x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + \theta\partial_\theta, \\ \vec{v}_7 &= t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho, \\ \vec{v}_8 &= y\partial_x - x\partial_y, \\ \vec{v}_9 &= \partial_\theta. \end{aligned}$$

De la même façon que pour les équations de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions (et pour toutes les autres équations qui suivront), on a le champ de vecteurs sans réductions $\vec{v}_9 = \partial_\theta$. On n'énoncera pas ce champ de vecteurs dans les tableaux subséquents.

Table 5.3: Équations réduites des équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Invariants	Orbites	Équations réduites
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\{y, t, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(y, t), \rho = \rho(y, t)\}$	$\begin{cases} \rho_t + \rho_y \theta_y + \rho \theta_{yy} = 0 \\ \theta_t + \frac{\theta_y^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$\{x, t, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(x, t), \rho = \rho(x, t)\}$	$\begin{cases} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = 0 \\ \theta_t + \frac{\theta_x^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$\{x, y, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(x, y), \rho = \rho(x, y)\}$	$\begin{cases} \rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y + \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) = 0 \\ \frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_\theta$	$\{y, t, 2t\theta - x^2, \rho\}$	$\left\{ \theta = \frac{F(y, t) + x^2}{2t}, \rho = \rho(y, t) \right\}$	$\begin{cases} 2t\rho_t + \rho_y F_y + 2\rho + \rho F_{yy} = 0 \\ \frac{1}{2t} F_t - \frac{F_y^2}{2t^2} + \frac{8t^2}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_\theta$	$\{x, t, 2t\theta - y^2, \rho\}$	$\left\{ \theta = \frac{F(x, t) + y^2}{2t}, \rho = \rho(x, t) \right\}$	$\begin{cases} 2t\rho_t + \rho_x F_x + 2\rho + \rho F_{xx} = 0 \\ 4tF_t - 4F + F_x^2 - \frac{8t^2\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$\left\{ \xi := \frac{x}{t}, \eta := \frac{y}{t}, \frac{\theta}{t}, \rho \right\}$	$\{\theta = tF(\xi, \eta), \rho = \rho(\xi, \eta)\}$	$\begin{cases} -\xi\rho_\xi - \eta\rho_\eta + \rho_\xi F_\xi + \rho_\eta F_\eta + \rho F_{\xi\xi} + \rho F_{\eta\eta} = 0 \\ F - \xi F_\xi - \eta F_\eta + \frac{1}{2} (F_\xi^2 + F_\eta^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_7 = t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho$	$\left\{ x, y, t\theta, \frac{1}{t} \right\}$	$\left\{ \theta = \frac{1}{t} F(x, y), \rho = tR(x, y) \right\}$	$\begin{cases} R + R_x F_x + R_y F_y + R (F_{xx} + F_{yy}) = 0 \\ -\frac{1}{2} (F_x^2 + F_y^2) + F + \frac{\lambda}{R^2} = 0 \end{cases}$
$\vec{v}_8 = y\partial_x - x\partial_y$	$\{\xi := x^2 + y^2, t, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(\xi, t), \rho = \rho(\xi, t)\}$	$\begin{cases} \rho_t + 4\xi\rho_\xi\theta_\xi + 4\rho(\theta_\xi + \xi\theta_{\xi\xi}) = 0 \\ \theta_t + 2\xi\theta_\xi^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$

Table 5.4: Solutions particulières des équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Équations réduites	Solutions particulières
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\begin{cases} \rho_t + \rho_x \theta_y + \rho \theta_{yy} = 0 \\ \theta_t + \frac{\theta_y^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \rho(y, t) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\theta_t + \frac{\theta_y^2}{2}}} \\ \rho(y, t) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\theta_t}} \left(1 - \frac{\theta_y^2}{4\theta_t} + \frac{3}{8} \left(\frac{\theta_y^2}{2\theta_t} \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{\theta_y^2}{2\theta_t} \right)^3 + \frac{35}{128} \left(\frac{\theta_y^2}{2\theta_t} \right)^4 - \dots \right) \\ \theta(y, t) = A(y) + tB(y) \end{cases}$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$\begin{cases} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho \theta_{xx} = 0 \\ \theta_t + \frac{\theta_x^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \rho(x, t) = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\theta_t + \frac{\theta_x^2}{2}}} \\ \theta(x, t) = A(x) + tB(x) \end{cases}$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$\begin{cases} \rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y + \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) = 0 \\ \frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(x, y) = Ae^{c_1 x + c_2 y} \\ \rho(x, y) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\theta_x^2 + \theta_y^2}} \end{cases}$
$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_\theta$	$\begin{cases} \rho_t + \rho_y F_y + \frac{1}{t} \rho + \rho F_{yy} = 0 \\ F_t + \frac{F_y^2}{2} - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(x, y, t) = \alpha y + c_0 t^2 - \frac{\alpha}{2} t + c_1 + \frac{x^2}{t} \\ \rho(t) = \frac{\varepsilon \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2c_0 t}} \end{cases}$
$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_\theta$	$\begin{cases} \rho_t + \rho_x F_x + \frac{1}{t} \rho + \rho F_{xx} = 0 \\ F_t + \frac{1}{2} F_x^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(x, y, t) = \alpha x + c_0 t^2 - \frac{\alpha}{2} t + c_1 + \frac{y^2}{t} \\ \rho(t) = \frac{\varepsilon \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2c_0 t}} \end{cases}$
$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$\begin{cases} -\xi \rho_\xi - \eta \rho_\eta + \rho_\xi F_\xi + \rho_\eta F_\eta + \rho F_{\xi\xi} + \rho F_{\eta\eta} = 0 \\ F - \xi F_\xi - \eta F_\eta + \frac{1}{2} (F_\xi^2 + F_\eta^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(x, y, t) = \frac{(x+y)^2}{6t} + \frac{c_0 t^2}{x+y} \\ \rho(x, y, t) = \frac{\varepsilon \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\frac{2}{3} c_0 - \frac{x+y}{6t^2} + \frac{2c_0 t}{x+y} - \frac{9t}{(x+y)^3} - \frac{c_0^2 t^3}{(x+y)^3}}} \end{cases}$
$\vec{v}_7 = t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho$	$\begin{cases} R + R_x F_x + R_y F_y + R (F_{xx} + F_{yy}) = 0 \\ -\frac{1}{2} (F_x^2 + F_y^2) + F + \frac{\lambda}{R^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(x, y, t) = -\frac{2t}{\varepsilon \sqrt{\lambda t}} \\ \rho(x, y, t) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$
$\vec{v}_8 = y\partial_x - x\partial_y$	$\begin{cases} \rho_t + 4\xi \rho_\xi \theta_\xi + 4\rho (\theta_\xi + \xi \theta_{\xi\xi}) = 0 \\ \theta_t + 2\xi \theta_\xi^2 - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(x, y, t) = A(t) (x^2 + y^2) + B(t) \\ \rho(x, y, t) = \frac{\varepsilon \sqrt{\lambda}}{\sqrt{(A_t + 7A^2) (x^2 + y^2) + B_t}} \end{cases}$

La solution invariante associée au champ de vecteurs $\vec{v}_7$ représente une onde non-stationnaire centrée double de rang 2. Cette solution est une solution exacte et nouvelle.

5.3 Équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)

Après avoir éliminé ρ des équations de Chaplygin en $(2+1)$ dimensions (5.2), on obtient l'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions avec élimination de ρ :

$$\theta_{tt} + 2(\theta_x\theta_{xt} + \theta_y\theta_{yt} + \theta_x\theta_y\theta_{xy}) - 2\theta_t(\theta_{xx} + \theta_{yy}) - \theta_y^2\theta_{xx} - \theta_x^2\theta_{yy} = 0. \quad (5.3)$$

On obtient les champs de vecteurs suivants

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \partial_x, \\ \vec{v}_2 &= \partial_y, \\ \vec{v}_3 &= \partial_t, \\ \vec{v}_4 &= t\partial_x + x\partial_\theta, \\ \vec{v}_5 &= t\partial_y + y\partial_\theta, \\ \vec{v}_6 &= x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t, \\ \vec{v}_7 &= x\partial_x + y\partial_y + 2\theta\partial_\theta, \\ \vec{v}_8 &= \theta\partial_x + x\partial_t, \\ \vec{v}_9 &= \theta\partial_y + y\partial_t, \\ \vec{v}_{10} &= y\partial_x - x\partial_y, \\ \vec{v}_{11} &= \partial_\theta. \end{aligned}$$

Les équations réduites et les solutions pour ces champs de vecteurs sont consignées dans les tables 5.5 et 5.6 (respectivement) ci-dessous

Table 5.5: Équations réduites de l'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)

Champ de vecteurs	Invariants	Orbites	Équations réduites
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\{y, t, \theta\}$	$\{\theta = \theta(y, t)\}$	$\theta_{tt} + 2\theta_y\theta_{yt} - 2\theta_t\theta_{yy} = 0$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$\{x, t, \theta\}$	$\{\theta = \theta(x, t)\}$	$\theta_{tt} + 2\theta_x\theta_{xt} - 2\theta_t\theta_{xx} = 0$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$\{x, y, \theta\}$	$\{\theta = \theta(x, y)\}$	$2\theta_x\theta_y\theta_{xy} - \theta_x^2\theta_{xx} - \theta_y^2\theta_{yy} = 0$
$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_\theta$	$\{y, t, 2t\theta - x^2\}$	$\left\{\theta = \frac{F(y, t) + x^2}{2t}\right\}$	$\frac{1}{2}t^2F_{tt} - 2tF_t + 2F + \frac{1}{2}tF_yF_{yt} - \frac{3}{4}F_y^2 - \frac{1}{2}tF_tF_{yy} + \frac{1}{2}FF_{yy} = 0$
$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_\theta$	$\{x, t, 2t\theta - y^2\}$	$\left\{\theta = \frac{F(x, t) + y^2}{2t}\right\}$	$\frac{1}{2}t^2F_{tt} - 2tF_t + 2F + \frac{1}{2}tF_xF_{xt} - \frac{3}{4}F_x^2 - \frac{1}{2}tF_tF_{xx} + \frac{1}{2}FF_{xx} = 0$
$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t$	$\left\{\xi := \frac{x^2}{t}, \eta := \frac{y^2}{t}, \theta\right\}$	$\{\theta = \theta(\xi, \eta)\}$	$\xi^2\theta_{\xi\xi} + \eta^2\theta_{\eta\eta} + 2\xi\theta_\xi + 2\eta\theta_\eta$ $-8\xi\eta(\theta_\xi\theta_{\xi\eta} + \theta_\eta\theta_{\eta\xi} - \theta_\xi\theta_{\eta\eta} - \theta_\eta\theta_{\xi\xi} + 2\theta_{\xi\xi}\theta_\eta^2 + 2\theta_\eta^2\theta_{\eta\eta})$ $-4(\xi\theta_\xi^2 + \eta\theta_\eta^2) + 4(\xi + \eta)\theta_\xi\theta_\eta - 8(\xi\theta_\xi^2\theta_\eta + \eta\theta_\eta^2\theta_\xi) = 0$
$\vec{v}_7 = x\partial_x + y\partial_y + 2\theta\partial_\theta$	$\left\{\xi := \frac{x}{t}, t, \frac{\theta}{x^2}\right\}$	$\{\theta = x^2F(\xi, t)\}$	$F_{tt} + 4FF_t + 4\xi FF_{\xi t} - 4\xi F_\xi F_t$ $+ \xi^2 F_\xi F_{\xi t} + 2\xi^4 F_\xi F_{\xi t} + 6\xi^4 F F_x t^2$ $+ 2\xi^5 F F_\xi F_{\xi\xi} - 2\xi^4 F_t F_{\xi\xi} - 4\xi^3 F_\xi F_t$ $- 8\xi^3 F^2 F_\xi - 4\xi^4 F^2 F_{\xi\xi} = 0$
$\vec{v}_8 = \theta\partial_x + x\partial_t$	$\{y, 2\theta t - x^2, \theta\}$	$\{\theta = F(2\theta t - x^2)\}$	Implicite
$\vec{v}_9 = \theta\partial_y + y\partial_t$	$\{x, 2\theta t - y^2, \theta\}$	$\{\theta = F(2\theta t - y^2)\}$	Implicite
$\vec{v}_{10} = y\partial_x - x\partial_y$	$\{\xi = x^2 + y^2, t, \theta\}$	$\{\theta = \theta(\xi, t)\}$	$\theta_{tt} + 8\xi\theta_\xi\theta_{\xi t} - 8\theta_\xi\theta_t - 8\xi\theta_t\theta_{\xi\xi} - 8\xi\theta_\xi^3 = 0$

Table 5.6: Solutions particulières de l'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ)

Champ de vecteurs	Équations réduites	Solutions particulières
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\theta_{tt} + 2\theta_y\theta_{yt} - 2\theta_t\theta_{yy} = 0$	$\theta(y, t) = A(y) + tB(y)$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$\theta_{tt} + 2\theta_x\theta_{xt} - 2\theta_t\theta_{xx} = 0$	$\theta(x, t) = A(x) + tB(x)$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$2\theta_x\theta_y\theta_{xy} - \theta_y^2\theta_{xx} - \theta_x^2\theta_{yy} = 0$	$\theta = Ae^{c_1x+c_2y}$
$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_\theta$	$F_{tt} + 2F_yF_{yt} - \frac{2}{t}F_t - 2F_tF_{yy} - \frac{1}{t}F_y^2 = 0$	$F = ay - \frac{a^2}{2}t$
$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_\theta$	$F_{tt} + 2F_xF_{xt} - \frac{2}{t}F_t - 2F_tF_{xx} - \frac{1}{t}F_x^2 = 0$	$F = ax - \frac{a^2}{2}t$
$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + 2t\partial_t$	$\xi^2\theta_{\xi\xi} + \eta^2\theta_{\eta\eta} + 2\xi\theta_\xi + 2\eta\theta_\eta$ $-8\xi\eta(\theta_\xi\theta_{\xi\eta} + \theta_\eta\theta_{\xi\eta} - \theta_\xi\theta_{\eta\eta} - \theta_\eta\theta_{\xi\xi} + 2\theta_{\xi\xi}\theta_\eta^2 + 2\theta_\xi^2\theta_{\eta\eta})$ $-4(\xi\theta_\xi^2 + \eta\theta_\eta^2) + 4(\xi + \eta)\theta_\xi\theta_\eta - 8(\xi\theta_\xi^2\theta_\eta + \eta\theta_\xi\theta_\eta^2) = 0$	$\theta = \frac{\varepsilon}{2}\xi + \frac{\varepsilon}{2}\eta, \quad \varepsilon = \pm 1$
$\vec{v}_7 = x\partial_x + y\partial_y + 2\theta\partial_\theta$	$F_{tt} + 4FF_t + 4\xi FF_{\xi t} - 4\xi F_\xi F_t$ $+ \xi^2 F_\xi F_{\xi t} + 2\xi^4 F_\xi F_{\xi t} + 6\xi^4 FF_\xi^2$ $+ 2\xi^5 FF_\xi F_{\xi\xi} - 2\xi^4 F_t F_{\xi\xi} - 4\xi^3 F_\xi F_t$ $- 8\xi^3 F^2 F_\xi - 4\xi^4 F^2 F_{\xi\xi} = 0$	$F = \frac{-9}{32}t - \frac{3}{4}\xi$
$\vec{v}_8 = y\partial_x - x\partial_y$	$\theta_{tt} + 8\xi\theta_\xi\theta_{\xi t} - 8\theta_\xi\theta_t - 8\xi\theta_t\theta_{\xi\xi} - 8\xi\theta_\xi^3 = 0$	$\theta(\xi, t) = At \pm 2\text{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{-A\xi}{2}}\right)$

6 Symétries des équations de Born-Infeld

Étudions maintenant les équations de Born-Infeld. Comme on a vu précédemment, celles-ci sont liées aux équations de Chaplygin via leur «ancêtre commun», l'action de Nambu-Goto. D'ailleurs, on verra le lien mathématique entre les deux modèles dans la section 8.

De la même façon que pour les équations de Chaplygin, on débute en étudiant le cas plus simple en $(1 + 1)$ dimensions, avant de s'attaquer au cas en $(2 + 1)$ dimensions qui, comme pour la section précédente, comprend deux formes à étudier, la première étant une équation différentielle et la seconde étant un système d'équations différentielles.

6.1 Équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions

Trouvons maintenant les générateurs de symétries de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions

$$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0. \quad (6.1)$$

Il s'agit d'une équation en $(1 + 1)$ dimensions. On étudiera les équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions dans les sous-sections suivantes.

Tout comme pour les équations du gaz de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions, on a le champ de vecteurs (4.3) :

$$\vec{v} = \xi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi(x, t, \theta, \rho) \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (6.2)$$

Sachant que l'ordre maximal de l'équation (6.1) est 2, alors on cherche la

seconde prolongation du champ de vecteurs, qui sera

$$\begin{aligned}
pr^{(2)}(\vec{v}) &= \vec{v} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{|J| \leq 2} \phi_{\alpha}^J[u] \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^J} \\
&= \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \psi \frac{\partial}{\partial \rho} + \phi^x \frac{\partial}{\partial \theta_x} \\
&\quad + \phi^t \frac{\partial}{\partial \theta_t} + \psi^x \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \psi^t \frac{\partial}{\partial \rho_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial \theta_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial \theta_{xt}} \\
&\quad + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial \theta_{tt}} + \psi^{xx} \frac{\partial}{\partial \rho_{xx}} + \psi^{xt} \frac{\partial}{\partial \rho_{xt}} + \psi^{tt} \frac{\partial}{\partial \rho_{tt}},
\end{aligned}$$

où les différents indices représentent

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \\
x_2 &= t \\
u^1 &= \theta \\
u^2 &= \rho \\
\phi_1^J &= \phi^J \\
\phi_2^J &= \psi^J \\
J &= (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2).
\end{aligned}$$

Dans le cas de l'équation de Born-Infeld, on a alors, de l'équation (3.5),

$$[pr^{(2)}(\vec{v})](\Delta) = 0 \quad (6.3)$$

où

$$0 = \Delta = (1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt}. \quad (6.4)$$

Ainsi, on obtient la condition

$$2\phi^x \theta_t \theta_{xt} - 2\phi^x \theta_x \theta_{tt} - 2\phi^t \theta_t \theta_{xx} + 2\phi^t \theta_x \theta_{xt} + \phi^{xx} (1 - \theta_t^2) + 2\phi^{xt} \theta_x \theta_t - \phi^{tt} (1 + \theta_x^2) = 0 \quad (6.5)$$

6.2 Équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions

L'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions est énoncée comme suit :

$$(1 - \theta_t^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} + (1 - \theta_t^2 + \theta_x^2) \theta_{yy} + 2 [\theta_x \theta_t \theta_{xt} + \theta_y \theta_t \theta_{yt} - \theta_x \theta_y \theta_{xy}] - (1 + \theta_x^2 + \theta_y^2) \theta_{tt} = 0. \quad (6.6)$$

On a alors

$$0 = \Delta = (1 - \theta_t^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} + (1 - \theta_t^2 + \theta_x^2) \theta_{yy} + 2 [\theta_x \theta_t \theta_{xt} + \theta_y \theta_t \theta_{yt} - \theta_x \theta_y \theta_{xy}] - (1 + \theta_x^2 + \theta_y^2) \theta_{tt}. \quad (6.7)$$

Pour la 2e prolongation, on obtient alors

$$\begin{aligned} 0 = & 2\theta_x \theta_{yy} \phi^x + 2\phi^x \theta_t \theta_{xt} - 2\phi^x \theta_y \theta_{xy} - 2\theta_x \phi^x \theta_{tt} + 2\theta_y \phi^y \theta_{xx} + 2\phi^y \theta_t \theta_{yt} \\ & - \phi^y \theta_x \theta_{xy} - 2\theta_y \phi^y \theta_{tt} - 2\phi^t \theta_t \theta_{xx} - 2\phi^t \theta_t \theta_{yy} + 2\phi^t \theta_x \theta_{xt} + 2\phi^t \theta_y \theta_{yt} \\ & + (1 - \theta_t^2 + \theta_y^2) \phi^{xx} + (1 - \theta_t^2 + \theta_x^2) \phi^{yy} - (1 + \theta_x^2 + \theta_y^2) \phi^{tt} - 2\theta_x \theta_y \phi^{xy} \\ & + 2\theta_x \theta_t \phi^{xt} + 2\theta_y \theta_t \phi^{yt} \end{aligned}$$

Ainsi, on a besoin des expressions pour les fonctions $\phi^x, \phi^y, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{yy}, \phi^{tt}, \phi^{xy}, \phi^{xt}$ et ϕ^{yt} . Comme dans les sections précédentes, on n'énonce pas tous les coefficients ni les calculs complets pour des raisons d'espace, mais plutôt directement les solutions trouvées via ces calculs. Ainsi, on trouve les solutions selon leur champ de vecteurs correspondant, qui sont consignées dans le tableau de la section suivante.

6.3 Équations de Born-Infeld en $(2+1)$ dimensions (selon les variables de départ)

Les équations de Born-Infeld en $(2+1)$ dimensions (selon les variables de départ) sont énoncées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + (\rho^2 c^2 + a^2) [(c^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} + (c^2 + \theta_x^2) \theta_{yy}] \\ + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2) (\rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y) = 0 \\ \theta_t \sqrt{\rho^2 c^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_1 = & \rho_t (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ & + (\rho^2 c^2 + a^2) [(c^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} + (c^2 + \theta_x^2) \theta_{yy}] \\ & + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2) (\rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y) \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$0 = \Delta_2 = \theta_t \sqrt{\rho^2 c^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2} \quad (6.10)$$

7 Solutions invariantes des équations de Born-Infeld

7.1 Équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions

L'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions peut être donnée[‡] par l'expression

$$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0. \quad (7.1)$$

Les champs de vecteurs indépendants obtenus par Hereman via Macsyma pour cette équation sont

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \partial_x, \\ \vec{v}_2 &= \partial_t, \\ \vec{v}_3 &= \partial_\theta, \\ \vec{v}_4 &= t\partial_x + x\partial_t, \\ \vec{v}_5 &= x\partial_x + t\partial_t + \theta\partial_\theta, \\ \vec{v}_6 &= \theta\partial_t + t\partial_\theta, \\ \vec{v}_7 &= \theta\partial_x - x\partial_\theta. \end{aligned}$$

Ensuite, on trouve de ces champs de vecteurs les invariants liés à chacun d'entre eux. Ces invariants permettent de trouver les orbites du champ de vecteurs, qui une fois remplacés dans l'équation de départ, donnent une équation réduite. Ce sont les solutions de ces équations réduites qui sont intéressantes ici.

Faisons un exemple de démarche pour ce genre de calcul :

Prenons le champ de vecteurs $\vec{v}_1 = \partial_x$. Les invariants liés à ce champ de vecteurs sont $\{t, \theta\}$. Ainsi, la variable dépendante θ ne sera qu'en fonction de la variable indépendante présente dans les invariants, t . Ainsi, on trouve l'orbite de ce champ de vecteurs, soit $\theta = \theta(t)$. Finalement, on remplace cette

[‡]Il existe plusieurs versions de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions, on prend ici la plus commune (utilisée dans [1])

orbite dans l'équation de départ,

$$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0.$$

On obtient alors que toutes les dérivées de θ par rapport à x sont nulles, donc

$$\theta_{tt} = 0.$$

En appliquant cette démarche pour les 7 champs de vecteurs de l'équation de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions, on obtient le tableau suivant.

Table 7.1: Équations réduites de l'équation de Born-Infeld en $(1+1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Invariants	Orbites	Équations réduites
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\{t, \theta\}$	$\{\theta = \theta(t)\}$	$\theta_{tt} = 0$
$\vec{v}_2 = \partial_t$	$\{x, \theta\}$	$\{\theta = \theta(x)\}$	$\theta_{xx} = 0$
$\vec{v}_3 = t\partial_x + x\partial_t$	$\{\xi = x^2 - t^2, \theta\}$	$\{\theta = \theta(\xi)\}$	$\theta_\xi + \xi\theta_{\xi\xi} + 2\xi\theta_\xi^3 = 0$
$\vec{v}_4 = x\partial_x + t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$\left\{\xi := \frac{x}{t}, \frac{\theta}{t}\right\}$	$\{\theta = tF(\xi)\}$	$F_{\xi\xi}(1 - F^2 - \xi^2) = 0$
$\vec{v}_5 = \theta\partial_t + t\partial_\theta$	$\{x, \theta^2 - t^2\}$	$\left\{\theta = \varepsilon\sqrt{F(x) + t^2}\right\}$	$\varepsilon F_{xx}F - \varepsilon F_x^2 - 2\varepsilon F = 0$
$\vec{v}_6 = \theta\partial_x - x\partial_\theta$	$\{t, \theta^2 + x^2\}$	$\left\{\theta = \varepsilon\sqrt{F(t) - x^2}\right\}$	$\varepsilon F_{tt}F - \varepsilon F_t^2 + 2\varepsilon F = 0$

Finalement, on trouve les solutions de ces équations réduites, qui sont présentées dans le tableau suivant.

Table 7.2: Solutions particulières de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Équations réduites	Solutions particulières
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\theta_{tt} = 0$	$\theta(t) = At + B$
$\vec{v}_2 = \partial_t$	$\theta_{xx} = 0$	$\theta(x) = Ax + B$
$\vec{v}_3 = t\partial_x + x\partial_t$	$\theta_\xi + \xi\theta_{\xi\xi} + 2\xi\theta_\xi^3 = 0$	$\theta(\xi) = \pm \frac{2\sqrt{\xi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{c_1\xi}}{2}\right) \sqrt{4 - c_1\xi}}{\sqrt{c_1}\sqrt{\xi(-4 + c_1\xi)}}$
$\vec{v}_4 = x\partial_x + t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$F_{\xi\xi}(1 - F^2 - \xi^2) = 0$	$F(\xi) = \pm\sqrt{1 - \xi^2}, \quad F(\xi) = Ax + B$
$\vec{v}_5 = \theta\partial_t + t\partial_\theta$	$F_{xx}F - F_x^2 - 2F = 0$	$F(x) = \text{InverseFunction}\left[\pm \frac{4 \arcsin\left[\frac{\sqrt{c_1}\sqrt{\Omega 1}}{2}\right] \sqrt{\frac{-1}{4}(-4 + c_1\Omega 1)}}{\sqrt{c_1}\sqrt{-4 + c_1\Omega 1}}\right] [x + c_2]$
$\vec{v}_6 = \theta\partial_x - x\partial_\theta$	$F_{tt}F - F_t^2 + 2F = 0$	$F(t) = \frac{4}{c_1} \sinh^2\left(\pm \frac{\sqrt{c_1}}{2}(x + c_2)\right)$

*La solution pour le champ de vecteurs $\vec{v}_5$ est énoncée selon le langage logiciel de calcul symbolique Mathematica.

7.2 Méthode alternative : Solution générale de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions obtenue par la méthode d'hodographe (onde double)

L'équation de Born-Infeld est donnée par

$$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0. \quad (7.2)$$

On veut trouver la solution de cette équation. On débute en effectuant le changement de variables

$$\begin{aligned} \xi &= x - t, & \eta &= x + t \\ u &:= \theta_\xi, & v &:= \theta_\eta \end{aligned} \quad (7.3)$$

avec la condition de compatibilité

$$u_\eta - v_\xi = 0. \quad (7.4)$$

Trouvons les nouvelles valeurs pour les fonctions $\theta_x, \theta_t, \theta_{xx}, \theta_{xt}$ et θ_{tt} selon les nouvelles variables. On obtient alors

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_\xi + \theta_\eta = u + v, \\ \theta_t &= \theta_\xi \xi_t + \theta_\eta \eta_t = \theta_\eta - \theta_\xi = v - u, \\ \theta_{xx} &= u_\xi + u_\eta + v_\xi + v_\eta = u_\xi + v_\eta + 2u_\eta, \\ \theta_{xt} &= u_\eta + v_\eta - u_\xi - v_\xi = v_\eta - u_\xi, \\ \theta_{tt} &= -v_\xi + v_\eta + u_\xi - u_\eta = v_\eta + u_\xi - 2u_\eta. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Connaissant les nouvelles définitions de ces fonctions, on peut les remplacer dans (7.2). On obtient alors

$$\begin{aligned} (1 - (v - u)^2) (u_\xi + v_\eta + 2u_\eta) + 2(u + v)(v - u) (v_\eta - u_\xi) \\ - (1 + (u + v)^2) (v_\eta + u_\xi - 2u_\eta) = 0. \end{aligned}$$

En développant cette expression, on obtient

$$\begin{aligned}
& 2u_\eta + v_\eta + u_\xi + 4uvu_\eta + 2uvv_\eta + 2uvu_\xi - 2u^2u_\eta - u^2v_\eta - 2v^2u_\eta - v^2v_\eta - u^2u_\xi - v^2u_\xi \\
& + 2v^2v_\eta - 2u^2v_\eta + 2u^2u_\xi - 2v^2u_\xi + 2u_\eta - v_\eta - u_\xi + 4uvu_\eta - 2uvv_\eta - 2uvu_\xi + 2u^2u_\eta \\
& - u^2v_\eta + 2v^2u_\eta - v^2v_\eta - u^2u_\xi - v^2u_\xi = 4u_\eta + 8uvu_\eta - 4u^2v_\eta - 4v^2u_\xi
\end{aligned}$$

ce qui implique le système de premier ordre nonlinéaire

$$\begin{cases} (1 + 2uv)u_\eta - u^2v_\eta - v^2u_\xi = 0 \\ u_\eta - v_\xi = 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Effectuons maintenant une transformation d'hodographe, c'est-à-dire qu'on interchange les variables indépendantes et dépendantes (en supposant que le Jacobien $J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}$ est différent de 0). Ainsi, on pose maintenant que

$$\xi = \xi(u, v) \quad \text{et} \quad \eta = \eta(u, v) \quad (7.7)$$

On a alors que

$$\begin{aligned}
1 &= \xi_\xi = \xi_u u_\xi + \xi_v v_\xi, \\
0 &= \xi_\eta = \xi_u u_\eta + \xi_v v_\eta, \\
1 &= \eta_\eta = \eta_u u_\eta + \eta_v v_\eta, \\
0 &= \eta_\xi = \eta_u u_\xi + \eta_v v_\xi.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\eta \\ v_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résoud cette équation matricielle par la méthode de Cramer pour obtenir

$$\begin{aligned} u_\xi &= J^{-1}\eta_v, & v_\xi &= -J^{-1}\eta_u \\ u_\eta &= -J^{-1}\xi_v, & v_\eta &= J^{-1}\xi_u \end{aligned}$$

où $J := \xi_u\eta_v - \eta_u\xi_v$. Donc l'équation (7.6) devient

$$\begin{cases} (1 + 2uv)\xi_v + u^2\xi_u + v^2\eta_v = 0 & (7.8a) \\ \xi_v - \eta_u = 0 & (7.8b) \end{cases}$$

où u et v sont les variables indépendantes et ξ et η sont les variables dépendantes.

En dérivant (7.8a) par rapport à u , on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{uv} + 2v\xi_v + 2uv\xi_{uv} + 2u\xi_u + u^2\xi_{uu} + v^2\eta_{uv} \\ &= u^2\xi_{uu} + (1 + 2uv)\xi_{uv} + v^2\eta_{uv} + 2u\xi_u + 2v\xi_v \end{aligned}$$

(on remarque ici qu'il existe une symétrie entre les variables dépendantes, c'est-à-dire qu'on peut interchanger u et v), et en utilisant l'équation (7.8b), on trouve l'équation linéaire en ξ

$$u^2\xi_{uu} + (1 + 2uv)\xi_{uv} + v^2\xi_{vv} + 2u\xi_u + 2v\xi_v = 0.$$

On obtient alors une équation linéaire d'ordre 2 selon les variables indépendantes u et v . On peut résoudre cette équation via la méthode de Beltrami. Trouvons $\delta = B^2 - 4AC$ pour cette équation

$$\delta = (1 + 2uv)^2 - 4u^2v^2 = 4uv + 1$$

Considérons seulement le cas hyperbolique où

$$-\frac{1}{4} < uv.$$

Dans ce cas, l'équation caractéristique est donnée par

$$u^2v^2 - (1 + 2uv)v_u + v^2 = 0. \quad (7.9)$$

Les racines de ce polynôme sont

$$v_u = \frac{1}{2u^2} [(1 + 2uv) + \varepsilon(1 + 4uv)^{1/2}], \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Pour trouver v , effectuons le changement de variables

$$y = uv \implies \frac{dy}{du} = v + uv_u = \frac{y}{u} + uv_u.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{u} \left(\frac{dy}{du} - \frac{y}{u} \right)}_{v_u} &= \frac{(1 + 2y) + \varepsilon(1 + 4y)^{1/2}}{2u^2} \\ \implies \frac{dy}{du} &= \frac{1}{2u} [1 + 4y + \varepsilon(1 + 4y)^{1/2}] \\ \implies \frac{dy}{1 + 4y + \varepsilon(1 + 4y)^{1/2}} &= \frac{du}{2u}. \end{aligned}$$

On intègre alors des deux côtés. Pour l'intégration en y , on doit poser

$$(1 + 4y)^{1/2} = x \implies dx = \frac{2dy}{x}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{1 + 4y + \varepsilon(1 + 4y)^{1/2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2 + \varepsilon x} \\
&= \frac{1}{2} \ln |x + \varepsilon| \\
&= \frac{1}{2} \ln |(1 + 4y)^{1/2} + \varepsilon| \\
&= \frac{1}{2} \ln |(1 + 4uv)^{1/2} + \varepsilon| = \ln |u| + \ln |2c| \\
\implies \frac{(1 + 4uv)^{1/2} + \varepsilon}{u} &= 2c
\end{aligned}$$

Du livre de G. B. Whitham [17], il est introduit que la constante d'intégration du calcul précédent peut être considérée comme un invariant, pour effectuer l'intégration dans les coordonnées appropriées. On donc obtient l'invariant

$$s := \frac{1}{2u} [(1 + 4uv)^{1/2} + \varepsilon] .$$

Le facteur 2 a été ajouté pour simplifier les calculs subséquents.

Pour trouver le second invariant, résolvons l'équation caractéristique pour u :

$$u^2 - (1 + 2uv)u_v + v^2 u_v^2 = 0.$$

Cette équation a exactement la même forme que (7.9) avec u et v interchangés. La solution est donc

$$\frac{1}{v} [(1 + 4uv)^{1/2} + \varepsilon] = 2c$$

et le second invariant [17] est

$$r := \frac{1}{2v} [(1 + 4uv)^{1/2} + \varepsilon] .$$

Sans perdre de généralité, on peut alors prendre $\varepsilon = -1$ avec les invariants

correspondants, puisque le système de départ est hyperbolique.

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2u} [(1 + 4uv)^{1/2} - 1] \\ r = \frac{1}{2v} [(1 + 4uv)^{1/2} - 1] . \end{cases} \quad (7.10)$$

Pour réexprimer les équations de départ ((7.8a) et (7.8b)) en termes de s et r , il faut exprimer u et v en termes de s et r également.

Des équations (7.10), on trouve que

$$u = \frac{r}{1 - rs}, \quad v = \frac{s}{1 - rs}. \quad (7.11)$$

On souhaite maintenant réexprimer les équations (7.8a) et (7.8b)

$$\begin{cases} (1 + 2uv)\xi_v + u^2\xi_u + v^2\eta_v = 0 \end{cases} \quad (7.8a)$$

$$\begin{cases} \xi_v - \eta_u = 0 \end{cases} \quad (7.8b)$$

en termes de s et r .

On aura alors besoin des résultats suivants

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{1}{2v^2} [1 + 2uv - (1 + 4uv)^{1/2}] , \\
s^2 &= \frac{1}{2u^2} [1 + 2uv - (1 + 4uv)^{1/2}] , \\
r_v &= \frac{1 + 2uv - (1 + 4uv)^{1/2}}{2v^2(1 + 4uv)^{1/2}} , \\
s_v &= \frac{1}{(1 + 4uv)^{1/2}} , \\
r_u &= \frac{1}{(1 + 4uv)^{1/2}} , \\
s_u &= -\frac{1 + 2uv - (1 + 4uv)^{1/2}}{2u^2(1 + 4uv)^{1/2}} , \\
r_u &= s_v , \\
v^2 r_v &= u^2 s_u , \\
r_v &= -r^2 r_u , \\
s_u &= -r^2 r_u \frac{v^2}{u^2} ,
\end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}
1 + 2uv &= \frac{r^2 s^2 + 1}{(1 - rs)^2} , \\
s^2 &= \frac{r^2 v^2}{u^2} , \\
\begin{cases} \xi_v = \xi_r r_v = \xi_s s_v, & \xi_u = \xi_r r_u + \xi_s s_u, \\ \eta_v = \eta_r r_v + \eta_s s_v, & \eta_u = \eta_r r_u + \eta_s s_u, \end{cases}
\end{aligned}$$

En substituant les résultats (7.13) dans (7.8a), on obtient

$$\begin{aligned}
(1 + 2uv) (-r^2 r_u \xi_r + \xi_s r_u) + u^2 \left(\xi_r r_u - \frac{r^2 r_u v^2}{u^2} \xi_s \right) + v^2 (-r^2 r_u \eta_r + \eta_s r_u) &= 0, \\
(1 + 2uv) (\xi_s - r^2 \xi_r) + u^2 \left(\xi_r - \frac{r^2 v^2}{u^2} \xi_s \right) + v^2 (\eta_s - r^2 \eta_r) &= 0.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

En utilisant (7.13) et en les substituant dans les définitions de u et v en termes de s et r (7.11), on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{r^2 s^2 + 1}{(1 - rs)^2} (\xi_s - r^2 \xi_r) + \frac{r^2}{(1 - rs)^2} (\xi_r - s^2 \xi_s) + \frac{s^2}{(1 - rs)^2} (\eta_s - r^2 \eta_r) = 0, \\
& \implies (r^2 s^2 + 1) (\xi_s - r^2 \xi_r) + r^2 (\xi_r - s^2 \xi_s) + s^2 (\eta_s - r^2 \eta_r) = 0, \\
& \implies -r^4 s^2 \xi_r + \xi_s + s^2 (\eta_s - r^2 \eta_r) = 0, \\
& \implies -r^4 s^2 \xi_r + \xi_s + s^2 \eta_s - s^2 r^2 \eta_r = 0.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

De même, en substituant les résultats (7.13) dans (7.8b), on obtient

$$\begin{aligned}
& -r^2 r_u \xi_r + \xi_s r_u - \eta_r r_u + \frac{r^2 r_u v^2}{u^2} \eta_s = 0, \\
& \implies -r^2 \xi_r + \xi_s - \eta_r + \frac{r^2 v^2}{u^2} \eta_s = 0, \\
& \implies r^2 \xi_r + \xi_s - \eta_r + s^2 \eta_s = 0, \\
& \implies \xi_s + s^2 \eta_s = r^2 \xi_r + \eta_r
\end{aligned} \tag{7.16}$$

En substituant (7.16) dans (7.15), on trouve

$$(1 - r^2 s^2) r^2 \xi_r + (1 - r^2 s^2) \eta_r = 0$$

Ce qui implique

$$r^2 \xi_r + \eta_r = 0, \quad (1 - r^2 s^2) \neq 0. \tag{7.17}$$

Reportant (7.17) dans (7.16), on obtient

$$\xi_s + s^2 \eta_s = 0 \tag{7.18}$$

En dérivant (7.17) par rapport à s , on trouve

$$\eta_{rs} = -r^2 \xi_{rs}, \tag{7.19}$$

et en dérivant (7.18) par rapport à r , on trouve

$$\xi_{rs} + s^2 \eta_{rs} = 0. \quad (7.20)$$

Substituant (7.19) dans (7.20), on obtient

$$(1 - r^2 s^2) \xi_{rs} = 0,$$

ce qui implique

$$\xi_{rs} = 0.$$

En intégrant cette dernière équation, on trouve

$$\xi = g(r) + \int f(s) ds \quad (7.21)$$

En dérivant (7.21) par rapport à r et comparant avec (7.17), on trouve

$$\begin{aligned} \eta_r &= -r^2 g'(r) \quad \text{où} \quad g'(r) := \frac{dg}{dr} \\ \implies \eta &= h(s) - \int r^2 g'(r) dr. \end{aligned} \quad (7.22)$$

En dérivant η et ξ par rapport à s , et en utilisant (7.18), on obtient

$$s^2 h'(s) = -f(s), \quad \text{où} \quad h'(s) := \frac{dh}{ds}$$

Ainsi, les deux solutions sont (en rappelant le changement de variables du départ)

$$\begin{cases} x - t = \xi = g(r) - \int s^2 h'(s) ds \\ x + t = \eta = h(s) - \int r^2 g'(r) dr \end{cases} \quad (7.23)$$

où $g(r)$ et $h(s)$ sont des fonctions arbitraires.

Pour trouver la solution $\theta(\xi, \eta)$, on remarque que

$$\begin{aligned}
\theta_r &= \theta_\xi \xi_r + \theta_\eta \eta_r = u \xi_r + v \eta_r = \frac{r}{1-rs} \xi_r + \frac{s}{1-rs} \eta_r, \\
&= \frac{r}{1-rs} g'(r) + \frac{s}{1-rs} (-r^2 g'(r)), \\
&= \left(\frac{1}{1-rs} - \frac{rs}{1-rs} \right) r g'(r), \\
&= r g'(r),
\end{aligned}$$

et que

$$\theta_s = u \xi_s + v \eta_s = -\frac{rs^2 h'(s)}{1-rs} + \frac{sh'(s)}{1-rs} = sh'(s).$$

Par conséquent,

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} r g'(r) dr + \int_{-\infty}^{+\infty} s h'(s) ds.$$

Finalement, introduisons

$$\begin{cases} \rho := g(r), & \sigma := h(s) \\ \theta'_1(\rho) := r, & \theta'_2(\sigma) := s \end{cases} \quad (7.24)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\int r g'(r) dr &= \int \frac{d\theta_1}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} dr = \theta_1(\rho), \\
\int s h'(s) ds &= \int \frac{d\theta_2}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} ds = \theta_2(\sigma),
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\theta = \theta_1(\rho) + \theta_2(\sigma). \quad (7.25)$$

De l'équation (7.24), on a

$$\begin{cases} s^2 = \theta_2'^2(\sigma), \\ r^2 = \theta_1'^2(\rho). \end{cases}$$

En supposant que $\sigma > 0$ et que $\rho > 0$ et qu'on utilise l'identité

$$F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x F(x') dx',$$

on peut écrire que

$$\begin{cases} s^2 = \frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma} \theta_2'^2(\sigma') d\sigma', \\ r^2 = -\frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{+\infty} \theta_1'^2(\rho') d\rho'. \end{cases}$$

Les équations (7.23) deviennent alors

$$\begin{cases} x - t = \rho - \int \left\{ \frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{\sigma} \theta_2'^2(\sigma') d\sigma' \right\} \frac{d\sigma}{ds} ds = \rho - \int_{-\infty}^{\sigma} \theta_2'^2(\sigma') d\sigma', \\ x + t = \sigma + \int \left\{ \frac{d}{d\rho} \int_{\rho}^{+\infty} \theta_1'^2(\rho') d\rho' \right\} \frac{d\rho}{dr} dr = \sigma + \int_{\rho}^{+\infty} \theta_1'^2(\rho') d\rho'. \end{cases}$$

En isolant ρ et σ dans ces équations pour les substituer dans (7.25), on obtient la solution générale sous forme implicite de rang 2 de l'équation de Born-Infeld en $(1 + 1)$ dimensions, qui représente une superposition de deux ondes de Riemann (c'est-à-dire une onde double), avec le degré de liberté de 2 fonctions arbitraires θ_1 et θ_2 d'une variable.

$$\theta = \theta_1 \left(x - t + \int_{-\infty}^{\sigma} \theta_2'^2(s) ds \right) + \theta_2 \left(x + t - \int_{\rho}^{+\infty} \theta_1'^2(r) dr \right). \quad (7.26)$$

7.3 Équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions

L'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions est donnée par

$$(1 - \theta_t^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} + (1 - \theta_t^2 + \theta_x^2) \theta_{yy} + 2[\theta_x \theta_t \theta_{xt} + \theta_y \theta_t \theta_{yt} - \theta_x \theta_y \theta_{xy}] - (1 + \theta_x^2 + \theta_y^2) \theta_{tt} = 0. \quad (7.27)$$

Les champs de vecteurs indépendants pour cette équation sont

$$\vec{v}_1 = \partial_x,$$

$$\vec{v}_2 = \partial_y,$$

$$\vec{v}_3 = \partial_t,$$

$$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_t,$$

$$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_t,$$

$$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + \theta\partial_\theta,$$

$$\vec{v}_7 = \theta\partial_t + t\partial_\theta,$$

$$\vec{v}_8 = \theta\partial_x - x\partial_\theta,$$

$$\vec{v}_9 = \theta\partial_y - y\partial_\theta,$$

$$\vec{v}_{10} = y\partial_x - x\partial_y,$$

$$\vec{v}_{11} = \partial_\theta.$$

On obtient alors les invariants, orbites et équations réduites associés à ces champs de vecteurs dans le tableau suivant.

Table 7.3: Équations réduites de l'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Invariants	Orbites	Équations réduites
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\{y, t, \theta\}$	$\{\theta = \theta(y, t)\}$	$(1 - \theta_t^2) \theta_{yy} + 2\theta_y \theta_t \theta_{yt} - (1 + \theta_y^2) \theta_{tt} = 0$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$\{x, t, \theta\}$	$\{\theta = \theta(x, t)\}$	$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$\{x, y, \theta\}$	$\{\theta = \theta(x, y)\}$	$(1 + \theta_y^2) \theta_{xx} + (1 + \theta_x^2) \theta_{yy} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} = 0$
$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_t$	$\{\xi = x^2 - t^2, y, \theta\}$	$\{\theta = \theta(y, \xi)\}$	$\theta_\xi + \xi \theta_{\xi\xi} + 2\xi \theta_\xi^3 + \theta_\xi \theta_y^2 + \xi \theta_y^2 \theta_{\xi\xi} + \frac{\theta_{yy}}{4} + \xi \theta_\xi^2 \theta_{yy} - 2\xi \theta_y \theta_\xi \theta_{y\xi} = 0$
$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_t$	$\{\xi = y^2 - t^2, x, \theta\}$	$\{\theta = \theta(x, \xi)\}$	$\theta_\xi + \xi \theta_{\xi\xi} + 2\xi \theta_\xi^3 + \theta_\xi \theta_x^2 + \xi \theta_x^2 \theta_{\xi\xi} + \frac{\theta_{xx}}{4} + \xi \theta_\xi^2 \theta_{xx} - 2\xi \theta_x \theta_\xi \theta_{x\xi} = 0$
$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t$	$\left\{ \xi := \frac{x}{t}, \eta := \frac{y}{t}, \frac{\theta}{t} \right\}$	$\{\theta = tF(\xi, \eta)\}$	$(1 - (F - \xi F_\xi - \eta F_\eta)^2) (F_{\xi\xi} + F_{\eta\eta}) + F_\eta^2 F_{\xi\xi} + F_\xi^2 F_{\eta\eta}$ $+ 2[(F - \xi F_\xi - \eta F_\eta) [F_\xi (\xi F_{\xi\xi} + \eta F_{\xi\eta}) + F_\eta (\xi F_{\xi\eta} + \eta F_{\eta\eta})] - F_\xi F_\eta F_{\xi\eta}]$ $- (1 + F_\xi^2 + F_\eta^2) (\xi^2 F_{\xi\xi} + 2\xi \eta F_{\xi\eta} + \eta^2 F_{\eta\eta}) = 0$
$\vec{v}_7 = \theta\partial_t + t\partial_\theta$	$\{x, y, \theta^2 - t^2\}$	$\left\{ \theta = \varepsilon \sqrt{F(x, y) + t^2} \right\}$	$-4(F_x^2 + F_y^2) + F_y^2 F_{xx} + F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + 4F(F_{xx} + F_{yy} - 2)$
$\vec{v}_8 = \theta\partial_x - x\partial_\theta$	$\{y, t, \theta^2 + x^2\}$	$\left\{ \theta = \varepsilon \sqrt{F(y, t) - x^2} \right\}$	$-4(F_y^2 - F_t^2) - F_t^2 F_{yy} - F_y^2 F_{tt} + 2F_y F_t F_{yt} + 4F(F_{yy} - F_{tt} - 2) = 0$
$\vec{v}_9 = \theta\partial_y + y\partial_\theta$	$\{x, t, \theta^2 + y^2\}$	$\left\{ \theta = \varepsilon \sqrt{F(x, t) - y^2} \right\}$	$-4(F_x^2 - F_t^2) - F_t^2 F_{xx} - F_x^2 F_{tt} + 2F_x F_t F_{xt} + 4F(F_{xx} - F_{tt} - 2) = 0$
$\vec{v}_{10} = y\partial_x - x\partial_y$	$\{\xi = x^2 + y^2, t, \theta\}$	$\{\theta = \theta(\xi, t)\}$	$\theta_\xi - \frac{\theta_{tt}}{4} - \theta_\xi \theta_t^2 + \xi \theta_{\xi\xi} - \xi \theta_t^2 \theta_{\xi\xi} + 2\xi \theta_\xi^3 + 2\xi \theta_\xi \theta_t \theta_{\xi t} - \xi \theta_\xi^2 \theta_{tt} = 0$

Table 7.4: Solutions particulières de l'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions

Champ de vecteurs	Équations réduites	Solutions particulières
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$(1 - \theta_t^2) \theta_{yy} + 2\theta_y \theta_t \theta_{yt} - (1 + \theta_y^2) \theta_{tt} = 0$	$\theta(y, t) = A(y + t) + B(y - t)$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$(1 - \theta_t^2) \theta_{xx} + 2\theta_x \theta_t \theta_{xt} - (1 + \theta_x^2) \theta_{tt} = 0$	$\theta(x, t) = A(x + t) + B(x - t)$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$(1 + \theta_y^2) \theta_{xx} + (1 + \theta_x^2) \theta_{yy} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} = 0$	$\theta(x, y) = Ax + By$
$\vec{v}_4 = t\partial_x + x\partial_t$	$\theta_\xi + \xi\theta_{\xi\xi} + 2\xi\theta_\xi^3 + \theta_\xi\theta_y^2 + \xi\theta_y^2\theta_{\xi\xi} + \frac{\theta_{yy}}{4} + \xi\theta_\xi^2\theta_{yy} - 2\xi\theta_y\theta_\xi\theta_{y\xi} = 0$	$\theta(\xi) = \pm \frac{2\sqrt{\xi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{c_1\xi}}{2}\right) \sqrt{4 - c_1\xi}}{\sqrt{c_1}\sqrt{\xi(-4 + c_1\xi)}}$
$\vec{v}_5 = t\partial_y + y\partial_t$	$\theta_\xi + \xi\theta_{\xi\xi} + 2\xi\theta_\xi^3 + \theta_\xi\theta_x^2 + \xi\theta_x^2\theta_{\xi\xi} + \frac{\theta_{xx}}{4} + \xi\theta_\xi^2\theta_{xx} - 2\xi\theta_x\theta_\xi\theta_{x\xi} = 0$	$\theta(\xi) = \pm \frac{2\sqrt{\xi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{c_1\xi}}{2}\right) \sqrt{4 - c_1\xi}}{\sqrt{c_1}\sqrt{\xi(-4 + c_1\xi)}}$
$\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t$	$(1 - (F - \xi F_\xi - \eta F_\eta)^2) (F_{\xi\xi} + F_{\eta\eta}) + F_\eta^2 F_{\xi\xi} + F_\xi^2 F_{\eta\eta}$ $+ 2[(F - \xi F_\xi - \eta F_\eta) [F_\xi(\xi F_{\xi\xi} + \eta F_{\xi\eta}) + F_\eta(\xi F_{\xi\eta} + \eta F_{\eta\eta})] - F_\xi F_\eta F_{\xi\eta}]$ $- (1 + F_\xi^2 + F_\eta^2) (\xi^2 F_{\xi\xi} + 2\xi\eta F_{\xi\eta} + \eta^2 F_{\eta\eta}) = 0$	$F(\xi, \eta) = \xi + \eta = \frac{x + y}{t}$ $\theta(x, y) = x + y$
$\vec{v}_7 = \theta\partial_t + t\partial_\theta$	$-4(F_x^2 + F_y^2) + F_y^2 F_{xx} + F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + 4F(F_{xx} + F_{yy} - 2) = 0$	$\theta(x, y, t) = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2 + t^2}$
$\vec{v}_8 = \theta\partial_x - x\partial_\theta$	$-4(F_y^2 - F_t^2) - F_t^2 F_{yy} - F_y^2 F_{tt} + 2F_y F_t F_{yt} + 4F(F_{yy} - F_{tt} - 2) = 0$	$\theta(x, y, t) = \varepsilon\sqrt{y^2 - t^2 - x^2}$
$\vec{v}_9 = \theta\partial_y + y\partial_\theta$	$-4(F_x^2 - F_t^2) - F_t^2 F_{xx} - F_x^2 F_{tt} + 2F_x F_t F_{xt} + 4F(F_{xx} - F_{tt} - 2) = 0$	$\theta(x, y, t) = \varepsilon\sqrt{x^2 - t^2 - y^2}$
$\vec{v}_{10} = y\partial_x - x\partial_y$	$\theta_\xi - \frac{\theta_{tt}}{4} - \theta_\xi\theta_t^2 + \xi\theta_{\xi\xi} - \xi\theta_t^2\theta_{\xi\xi} + 2\xi\theta_\xi^3 + 2\xi\theta_\xi\theta_t\theta_{\xi t} - \xi\theta_\xi^2\theta_{tt} = 0$	$\theta(\xi) = \pm \frac{2\sqrt{\xi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{c_1\xi}}{2}\right) \sqrt{4 - c_1\xi}}{\sqrt{c_1}\sqrt{\xi(-4 + c_1\xi)}}$

 Les fonctions A et B sont des fonctions arbitraires.

7.4 Équations de Born-Infeld en $(2+1)$ dimensions (selon les variables de départ)

Les équations de Born-Infeld en $(2+1)$ dimensions (selon les variables de départ) sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + (\rho^2 c^2 + a^2) [(c^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} + (c^2 + \theta_x^2) \theta_{yy}] \\ + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2) (\rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y) = 0 \\ \theta_t \sqrt{\rho^2 c^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2} = 0 \end{array} \right. \quad (7.28)$$

Les champs de vecteurs indépendants pour ces équations sont

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \partial_x, \\ \vec{v}_2 &= \partial_y, \\ \vec{v}_3 &= \partial_t, \\ \vec{v}_4 &= x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + \theta\partial_\theta, \\ \vec{v}_5 &= \theta\partial_x - c^2 x\partial_\theta, \\ \vec{v}_6 &= \theta\partial_y - c^2 y\partial_\theta, \\ \vec{v}_7 &= y\partial_x - x\partial_y, \\ \vec{v}_8 &= \partial_\theta. \end{aligned}$$

Dans le tableau des solutions (table 7.6), certaines équations réduites ne possèdent pas la propriété de Painlevé, et donc ne possèdent pas de solution physique. La propriété de Painlevé est documentée dans l'appendice.

Table 7.5: Équations réduites des équations de Born-Infeld en $(2+1)$ dimensions (selon les variables de départ)

Champ de vecteurs	Invariants	Orbites	Équations réduites
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\{y, t, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(y, t), \rho = \rho(y, t)\}$	$\left\{ \begin{aligned} &\rho_t (c^2 + \theta_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ &+ (c^2 \rho^2 + a^2)^2 c^2 \theta_{yy} + c^2 \rho (c^2 + \theta_y^2) \rho_y \theta_y = 0 \\ &\theta_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_y^2} = 0 \end{aligned} \right.$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$\{x, t, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(x, t), \rho = \rho(x, t)\}$	$\left\{ \begin{aligned} &\rho_t (c^2 + \theta_x^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ &+ (c^2 \rho^2 + a^2)^2 c^2 \theta_{xx} + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2) \rho_x \theta_x = 0 \\ &\theta_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2} = 0 \end{aligned} \right.$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$\{x, y, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(x, y), \rho = \rho(x, y)\}$	$\left\{ \begin{aligned} &(c^2 \rho^2 + a^2) [(c^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} + (c^2 + \theta_x^2) \theta_{yy}] \\ &+ c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2) (\rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y) = 0 \\ &c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2} = 0 \end{aligned} \right.$
$\vec{v}_4 = x\partial_x + y\partial_y$ $+t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$\left\{ \xi := \frac{x}{t}, \eta := \frac{y}{t}, \frac{\theta}{t}, \rho \right\}$	$\{\theta = tF(\xi, \eta), \rho = \rho(\xi, \eta)\}$	$\left\{ \begin{aligned} &-(\xi \rho_\xi + \eta \rho_\eta) (c^2 + F_\xi^2 + F_\eta^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ &+ (c^2 \rho^2 + a^2) [(c^2 + F_\eta^2) F_{\xi\xi} - 2F_\xi F_\eta F_{\xi\eta} + (c^2 + F_\xi^2) F_{\eta\eta}] \\ &+ c^2 \rho (c^2 + F_\xi^2 + F_\eta^2) (\rho_\xi F_\xi + \rho_\eta F_\eta) = 0 \\ &(F - \xi F_\xi - \eta F_\eta) \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + F_\xi^2 + F_\eta^2} = 0 \end{aligned} \right.$
$\vec{v}_5 = \theta\partial_x - c^2 x\partial_\theta$	$\{y, t, \theta^2 + c^2 x^2, \rho\}$	$\left\{ \theta = \varepsilon \sqrt{F(y, t) - c^2 x^2}, \rho = \rho(y, t) \right\}$	$\left\{ \begin{aligned} &\rho_t (c^2 F + F_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ &+ (c^2 \rho^2 + a^2) \left[-\varepsilon F c^4 - \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F_y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F F_{yy} \right] \\ &+ \varepsilon c^2 \rho \rho_y F_y (c^2 F + F_y^2) = 0 \\ &\varepsilon F_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + 2c^2 \rho \sqrt{c^2 F + F_y^2} = 0 \end{aligned} \right.$
$\vec{v}_6 = \theta\partial_y - c^2 y\partial_\theta$	$\{x, t, \theta^2 + c^2 y^2, \rho\}$	$\left\{ \theta = \varepsilon \sqrt{F(x, t) - c^2 y^2}, \rho = \rho(x, t) \right\}$	$\left\{ \begin{aligned} &\rho_t (c^2 F + F_x^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ &+ (c^2 \rho^2 + a^2) \left[-\varepsilon F c^4 - \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F_x^2 + \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F F_{xx} \right] \\ &+ \varepsilon c^2 \rho \rho_x F_x (c^2 F + F_x^2) = 0 \\ &\varepsilon F_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + 2c^2 \rho \sqrt{c^2 F + F_x^2} = 0 \end{aligned} \right.$
$\vec{v}_7 = y\partial_x - x\partial_y$	$\{\xi := x^2 + y^2, t, \theta, \rho\}$	$\{\theta = \theta(\xi, t), \rho = \rho(\xi, t)\}$	$\left\{ \begin{aligned} &\rho_t (c^2 + 4\xi \theta_\xi^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ &+ 4(c^2 \rho^2 + a^2) [c^2 \theta_\xi + c^2 \xi \theta_{\xi\xi} + 2\xi \theta_\xi^3] \\ &+ 4c^2 \xi \rho \rho_\xi \theta_\xi (c^2 + 4\xi \theta_\xi^2) = 0 \\ &\theta_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + 4\xi \theta_\xi^2} = 0 \end{aligned} \right.$

Table 7.6: Solutions particulières des équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions (selon les variables de départ)

Champ de vecteurs	Équations réduites	Solutions particulières
$\vec{v}_1 = \partial_x$	$\begin{cases} \rho_t (c^2 + \theta_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + (c^2 \rho^2 + a^2) c^2 \theta_{yy} + c^2 \rho (c^2 + \theta_y^2) \rho_y \theta_y = 0 \\ \theta_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_y^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(y, t) = -c^2 t + Aay \\ \rho(y, t) = 1/A \end{cases}$
$\vec{v}_2 = \partial_y$	$\begin{cases} \rho_t (c^2 + \theta_x^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + (c^2 \rho^2 + a^2) c^2 \theta_{xx} + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2) \rho_x \theta_x = 0 \\ \theta_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta(x, t) = -c^2 t + Aax \\ \rho(x, t) = 1/A \end{cases}$
$\vec{v}_3 = \partial_t$	$\begin{cases} (c^2 \rho^2 + a^2) [(c^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} - 2\theta_x \theta_y \theta_{xy} + (c^2 + \theta_x^2) \theta_{yy}] \\ + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2) (\rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y) = 0 \\ c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \theta = Ax + By \\ \rho = 0 \text{ (non physique)} \end{cases}$
$\vec{v}_4 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t + \theta\partial_\theta$	$\begin{cases} -(\xi\rho_\xi + \eta\rho_\eta) (c^2 + F_\xi^2 + F_\eta^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + (c^2 \rho^2 + a^2) [(c^2 + F_\eta^2) F_{\xi\xi} - 2F_\xi F_\eta F_{\xi\eta} + (c^2 + F_\xi^2) F_{\eta\eta}] \\ + c^2 \rho (c^2 + F_\xi^2 + F_\eta^2) (\rho_\xi F_\xi + \rho_\eta F_\eta) = 0 \\ (F - \xi F_\xi - \eta F_\eta) \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + F_\xi^2 + F_\eta^2} = 0 \end{cases}$	Ce système d'équations ne possède pas la propriété de Painlevé
$\vec{v}_5 = \theta\partial_x - c^2 x\partial_\theta$	$\begin{cases} \rho_t (c^2 F + F_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + (c^2 \rho^2 + a^2) \left[-\varepsilon F c^4 - \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F_y^2 + \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F F_{yy} \right] \\ + \varepsilon c^2 \rho \rho_y F_y (c^2 F + F_y^2) = 0 \\ \varepsilon F_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + 2c^2 \rho \sqrt{c^2 F + F_y^2} = 0 \end{cases}$	Ce système d'équations ne possède pas la propriété de Painlevé
$\vec{v}_6 = \theta\partial_y - c^2 y\partial_\theta$	$\begin{cases} \rho_t (c^2 F + F_x^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + (c^2 \rho^2 + a^2) \left[-\varepsilon F c^4 - \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F_x^2 + \frac{1}{2} \varepsilon c^2 F F_{xx} \right] \\ + \varepsilon c^2 \rho \rho_x F_x (c^2 F + F_x^2) = 0 \\ \varepsilon F_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + 2c^2 \rho \sqrt{c^2 F + F_x^2} = 0 \end{cases}$	Ce système d'équations ne possède pas la propriété de Painlevé
$\vec{v}_7 = y\partial_x - x\partial_y$	$\begin{cases} \rho_t (c^2 + 4\xi\theta_\xi^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} \\ + 4(c^2 \rho^2 + a^2) [c^2 \theta_\xi + c^2 \xi \theta_{\xi\xi} + 2\xi \theta_\xi^3] \\ + 4c^2 \xi \rho \rho_\xi \theta_\xi (c^2 + 4\xi \theta_\xi^2) = 0 \\ \theta_t \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + 4\xi \theta_\xi^2} = 0 \end{cases}$	Ce système d'équations ne possède pas la propriété de Painlevé

8 Lien entre les solutions non-relativiste et relativiste (lien entre le modèle de Chaplygin et de Born-Infeld)

Différentes paramétrisations de l'action de Nambu-Goto donnent différentes équations. En effet, en la paramétrisant selon le cône de lumière, on obtient l'action du gaz de Chaplygin, alors qu'en la paramétrisant de manière cartésienne, on obtient l'action de Born-Infeld. Ainsi, Jackiw [5] a trouvé que puisque ces deux systèmes (et leurs solutions) proviennent tous deux de l'action de Nambu-Goto, on peut trouver un lien entre ceux-ci en changeant simplement le paramétrage.

8.1 Passage du modèle de Chaplygin à celui de Born-Infeld

Le modèle du gaz de Chaplygin produit des solutions non-relativistes $\theta_{NR}(t, \vec{r})$. Déterminons le paramètre $T(t, \vec{r})$ à partir de l'équation

$$T + \frac{1}{c^2} \theta_{NR}(T, \vec{r}) = \sqrt{2}t. \quad (8.1)$$

Ainsi, la solution relativiste est

$$\theta_R(t, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} c^2 T - \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{NR}(T, \vec{r}) = c^2 \left(\sqrt{2}T - t \right). \quad (8.2)$$

8.2 Passage du modèle de Born-Infeld et de Chaplygin

Le modèle de Born-Infeld produit des solutions relativistes $\theta_R(t, \vec{r})$. Déterminons le paramètre $\hat{T}(t, \vec{r})$ à partir de l'équation

$$\hat{T} + \frac{1}{c^2} \theta_R(\hat{T}, \vec{r}) = \sqrt{2}t. \quad (8.3)$$

Ainsi, la solution non-relativiste est

$$\theta_{NR}(t, \vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}c^2\hat{T} - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_R(\hat{T}, \vec{r}) = c^2 \left(\sqrt{2}\hat{T} - t \right). \quad (8.4)$$

8.3 Exemples

Effectuons quelques exemples de transformations de Jackiw pour passer du modèle de Chaplygin à celui de Born-Infeld et vice-versa.

8.3.1 Exemple 1.

Le champ de vecteurs $\vec{v}_7 = t\partial_t - \theta\partial_\theta + \rho\partial_\rho$ des équations de Chaplygin en $(2+1)$ dimensions a une solution $\theta_{NR}(x, y, t) = \frac{-(x^2 + y^2)}{2t}$. En utilisant (8.1), on obtient

$$\begin{aligned} T + \frac{1}{c^2} \left(\frac{-(x^2 + y^2)}{2T} \right) &= \sqrt{2}t \\ \implies T &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2}t + \varepsilon \sqrt{2t^2 + \frac{2}{c^2}(x^2 + y^2)} \right), \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

En utilisant la valeur de T ainsi trouvée dans (8.2), on trouve alors la solution qui obéit les équations de Born-Infeld (relativiste)

$$\begin{aligned} \theta_R &= c^2 \left(\sqrt{2}T - t \right) \\ \implies \theta_R(x, y, t) &= c^2 \varepsilon \sqrt{t^2 + \frac{x^2 + y^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut faire la transformation d'une solution qui obéit aux équations de Chaplygin (non-relativiste) pour qu'elle obéisse aux équations de Born-Infeld (relativiste).

8.3.2 Exemple 2.

Essayons maintenant de faire ce même genre de calcul, mais en trouvant une solution non-relativiste à l'aide d'une solution relativiste. Prenons la solution

de l'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions pour le champ de vecteurs $\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t$. La solution de l'équation réduite associée à ce champ de vecteurs est

$$\theta_R = \frac{x + y}{t}$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation (8.3), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{T} + \frac{1}{c^2} \frac{x + y}{\hat{T}} &= \sqrt{2}t \\ \implies \hat{T} &= \frac{1}{2c^2} \left(\sqrt{2c^2t} + \varepsilon \sqrt{2c^4t^2 - 4c^2(x + y)} \right), \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'équation (8.4), on peut faire la transformation

$$\begin{aligned} \theta_{NR} &= c^2 \left(\sqrt{2}\hat{T} - t \right) \\ \implies \theta_{NR} &= c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}c^2} \left(\sqrt{2c^2t} + \varepsilon \sqrt{2c^4t^2 - 4c^2(x + y)} \right) - t \right) \\ \implies \theta_{NR} &= \varepsilon \sqrt{c^4t^2 - 2c^2(x + y)}, \end{aligned}$$

ce qui donne la solution non-relativiste (Chaplygin) associée à la solution relativiste (Born-Infeld) $\theta_R = \frac{x + y}{t}$ pour le champ de vecteurs (de l'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions) $\vec{v}_6 = x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t$.

9 Utilisation des logiciels

Dans ce mémoire, on a trouvé des solutions invariantes générales ou particulières (par la méthode de réductions par symétries) pour plusieurs équations réduites ayant été obtenues à partir des champs de vecteurs des équations de Chaplygin et de Born-Infeld. Celles-ci sont présentées dans les chapitres 5 (Chaplygin) et 7 (Born-Infeld). Les équations en $(2 + 1)$ dimensions étudiées sont les suivantes :

Les équations de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y + \rho (\theta_{xx} + \theta_{yy}) = 0, \\ \theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) - \frac{\lambda}{\rho^2} = 0. \end{array} \right. \quad (9.1)$$

L'équation de Chaplygin en $(2 + 1)$ dimensions (avec élimination de ρ) :

$$\theta_{tt} + 2 (\theta_x \theta_{xt} + \theta_y \theta_{yt} + \theta_x \theta_y \theta_{xy}) - 2 \theta_t (\theta_{xx} + \theta_{yy}) - \theta_y^2 \theta_{xx} - \theta_x^2 \theta_{yy} = 0. \quad (9.2)$$

L'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions :

$$(1 - \theta_t^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} + (1 - \theta_t^2 + \theta_x^2) \theta_{yy} + 2 [\theta_x \theta_t \theta_{xt} + \theta_y \theta_t \theta_{yt} - \theta_x \theta_y \theta_{xy}] - (1 + \theta_x^2 + \theta_y^2) \theta_{tt} = 0. \quad (9.3)$$

Les équations de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions (selon les variables de départ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2)^{3/2} \sqrt{c^2 \rho^2 + a^2} + (\rho^2 c^2 + a^2) [(c^2 + \theta_y^2) \theta_{xx} - 2 \theta_x \theta_y \theta_{xy} + (c^2 + \theta_x^2) \theta_{yy}] \\ + c^2 \rho (c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2) (\rho_x \theta_x + \rho_y \theta_y) = 0, \\ \theta_t \sqrt{\rho^2 c^2 + a^2} + c^2 \rho \sqrt{c^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2} = 0. \end{array} \right. \quad (9.4)$$

Pour la vérification de plusieurs calculs de ce mémoire, y compris pour les solutions de chacune des équations réduites présentées dans les tableaux des

chapitres 5 et 7, le logiciel Mathematica a été utilisé, dans le but de résoudre les équations ordinaires. De plus, on a aussi vérifié la propriété de Painlevé de certaines de ces équations réduites via un programme élaboré par le professeur Robert Conte [12].

Il n'y a eu aucune utilisation de l'intelligence artificielle lors de l'élaboration de ce mémoire.

10 Conclusion

Les nouveaux développements introduits dans ce mémoire sont séparés en 2 parties distinctes. La première est l'étude des symétries ainsi que la résolution des équations de Chaplygin et de Born-Infeld en $(1 + 1)$ et en $(2 + 1)$ dimensions. Des résultats pour ces équations en $(1 + 1)$ dimensions avaient déjà été discutés dans la littérature, notamment pour l'équation de Chaplygin en $(1 + 1)$ dimensions [5]. Les nouveaux résultats ont été consignés dans les tableaux des sections 5 et 7. Le deuxième développement est l'application du lien entre les solutions des équations de Chaplygin et Born-Infeld. Les liens ont été formulés par Jackiw [5]. Le passage du modèle non-relativiste (Chaplygin) au modèle relativiste (Born-Infeld) a été présenté, en plus d'effectuer quelques exemples du lien les liant, et de nouveaux résultats ont été trouvés à partir des solutions invariantes (effectué dans le chapitre 8). Le passage d'une solution non-relativiste (Chaplygin) à une solution relativiste est donné par les équations (8.2) et (8.1), alors que le passage d'une solution relativiste (Born-Infeld) à une solution non-relativiste est donné par (8.4) et (8.3). Les exemples de cette transformation sont également de nouveaux résultats obtenus dans ce mémoire.

Une recherche future voulant élaborer sur le sujet des solutions invariantes des équations de Chaplygin et de Born-Infeld pourrait porter sur l'extension de la résolution proposée ici à un problème en $(3 + 1)$ dimensions, ce qui n'a encore jamais été discuté formellement (à la connaissance de l'auteur). On a vu plus tôt l'importance qu'ont les équations de Chaplygin et Born-Infeld et leurs applications à des problèmes modernes en physique, donc leur étude approfondie pourrait ouvrir de nouvelles avenues de recherche dans ce domaine. Par exemple, des avancées dans ce domaine auraient des applications, entre autres, en aéronautique, puisque ces équations ont une grande utilité en mécanique des fluides. Ces résultats ont aussi des applications importantes en physique du plasma, en particulier en physique des gluons (interactions entre les ondes et les particules), lors du calcul des d -branes. Certaines de ces applications ont d'ailleurs été documentées dans le livre de Jackiw [5], où le Lagrangien et

le Hamiltonien ont d'ailleurs été énoncés.

Une possibilité d'extension de la recherche est l'étude de la stabilité non-linéaire au sens de Lyapounov [16]. Cela est important pour tester les solutions invariantes qui sont stables. Pour faire cela, on utilise le Hamiltonien de l'équation à l'étude et on détermine le crochet de Poisson et les fonctions de Casimir.

Bibliographie

- [1] A.M. Grundland, A.J. Hariton, V. Hussin, «Group-invariant solutions of relativistic and nonrelativistic models in field theory », J. Math. Phys. **44**(7), 2874-2890, 2003.
- [2] A.M. Grundland, A.J. Hariton, « A supersymmetric version of a Gaussian irrotational compressible fluid flow », Journal of Physics A: Math. and Theor., **40** (50), 15113, 2007.
- [3] Y. Çengel & J. Cimbala, « Fluid Mechanics, fundamentals and applications », McGraw Hill, 2006.
- [4] C. Eckart, Phys. Rev. **54**, 920, 1938.
- [5] Roman Jackiw, « Lectures on Fluid Dynamics », Springer, 2002.
- [6] P. Olver, « Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [7] S. Chaplygin, «On Gas Jets», Scientific Memoirs, Moscow University Mathematic Physics, 21, 1-121, 1904.
- [8] M. Born, L. Infeld, « Foundations of the New Field Theory ». Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 144 (852): 425–451, (1934).
- [9] E. Fradkin, A. Tseytlin, « Non-linear electrodynamics from quantized strings ». Physics Letters B. 163 (1–4): 123–130, (1985).
- [10] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier. « The Chaplygin gas as a model for dark energy », arXiv:gr-qc/0403062v2, 2004.
- [11] B. Riemann, « Über die fortpflanzung ebener luftwellen von endlicher schwingungsweite göttingen abhandlung », Bd. VIII, S, vol. 43, p. 157, 1858.
- [12] R. Conte, « The Painlevé Property, One Century Later », Springer, 1999.

- [13] H. Stephani, « Differential equations, Their solution using symmetries », Cambridge University Press, 1989.
- [14] A. Polyanin, V. Zaitsev, « Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations », Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [15] P. Olver, « Symmetry and Explicit Solutions of Partial Differential Equations », Applied Numerical Mathematics 10, 307-324, 1992.
- [16] A.M. Grundland, J. De Lucas, B. Zawora, « Stability analysis of the $(1+1)$ -dimensional Nambu-Goto action gas models », J. Physics A : Math. Theor. arXiv:2503.19842, (2025).
- [17] G. B. Whitham, «Linear and Nonlinear waves», John Wiley and Sons, doi: 10.1002/9781118032954, 1999.

Annexes

A Propriété de Painlevé

A.1 Notions de base et définitions

Une équation différentielle ordinaire (EDO)

$$H(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (\text{A.1})$$

possède la propriété de Painlevé si toutes ses solutions n'ont pas de points critiques mobiles.

Définition

Un *point critique* est une singularité d'une solution autre qu'un pôle (c'est-à-dire une singularité essentielle, non-isolée, ou un point de branchement).

Un point critique *fixe* est indépendant des conditions initiales. Ainsi, un point critique *mobile* dépend des conditions initiales (donc des constantes d'intégration).

Les EDO linéaires ont toujours cette propriété, car toutes les singularités sont fixes : soit à $\pm\infty$, soit un ou des coefficients des termes de L'EDO ont des singularités. Effectuons quelques exemples à ce sujet.

Exemple 1. Est-ce que l'équation non-linéaire

$$\dot{y} = y^2$$

possède la propriété de Painlevé?

On trouve

$$y = \frac{-1}{t - t_0}$$

ce qui représente un pôle à $t = t_0$. La seule singularité est donc un pôle, donc l'équation ne possède pas de points critiques. Ainsi, l'équation possède la propriété de Painlevé.

Exemple 2. Est-ce que l'équation non-linéaire

$$\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0$$

possède la propriété de Painlevé?

On trouve

$$y = \ln |t - t_0| + y_0$$

Cette équation ne possède pas la propriété de Painlevé, car elle dépend des conditions initiales.

La motivation à trouver des équations respectant la condition de Painlevé est que celles-ci sont rares. On peut les classifier et elles sont plus faciles à résoudre.

Considérons l'équation du deuxième ordre sous la forme

$$y^{(2)} = F(y^{(1)}, y, t) \tag{A.2}$$

où F est rationnelle en $y^{(1)}$ et y et analytique en t . Cette forme a été étudiée par Picard (1887,1890), Painlevé (1893) et Gambier (1906).

Résultat : Si (A.2) a la propriété de Painlevé, alors il existe une transformation

$$y(t) = \frac{\alpha(t)u(x) + \beta(t)}{\gamma(t)u(x) + \delta(t)}, \quad x = \phi(t) \tag{A.3}$$

telle que $u(x)$ satisfait une des 56 équations standards $(P(I), \dots, P(LVI))$. Parmi eux : 44 intégrables en termes de Riccati, 6 fonctions elliptiques ou élémentaires, et 6 qui déterminent les «transcendants de Painlevé» $(P(I), \dots, P(VI))$.

$$\begin{aligned}
P(I) : \quad & y^{(2)} = 6y^2 + t \\
P(II) : \quad & y^{(2)} = 2y^3 + ty + \alpha \\
P(III) : \quad & y^{(2)} = \frac{1}{y} (y^{(1)})^2 - \frac{1}{t} y^{(1)} + \frac{1}{t} (\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y} \\
P(IV) : \quad & y^{(2)} = \frac{1}{2y} (y^{(1)})^2 + \frac{3y^3}{2} + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y} \\
P(V) : \quad & y^{(2)} = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \frac{\gamma y}{t} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1} \\
P(VI) : \quad & y^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) (y^{(1)})^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-y} \right) \frac{dy}{dt} \\
& + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \frac{\beta t}{y^2} + \frac{\gamma(t-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta t(t-1)}{(y-t)^2} \right)
\end{aligned}$$

Comment savoir si une EDO a la propriété de Painlevé?

On peut effectuer le *test de Painlevé*. Il s'agit d'un test nécessaire mais pas suffisant. Il est applicable pour l'équation

$$H(t, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (\text{A.4})$$

où H est un polynôme en $y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ et analytique en t .

Soit $t = t_0$ un point générique ($t \in \mathbb{C}$). Étudions la solution autour du point $t = t_0$:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^{k+\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Conditions.

1. $\alpha \in \mathbb{Z}^{<0} \iff t_0$ peut être un pôle.
2. $\exists n-1$ résonances (valeurs de k pour lesquelles a_k n'est pas déterminé, donc reste libre).

On a la relation de récurrence

$$P(k)a_k = f_k(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, t_0) \quad (\text{A.6})$$

On a donc une résonance quand $P(k) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Il faut $n - 1$ racines non-négatives entières.

3. Les conditions de résonance doivent être satisfaites identiquement

$$F_k(a_0, a_1, \dots, t_0) = 0.$$

Si le test est passé, on peut essayer d'intégrer.

Si

$$\alpha = -\frac{P}{q} \implies y^q = w \quad \text{test pour } w.$$

Supposons

$$\ddot{y} = F(\dot{y}, y, t)$$

F rationnelle en y et $\dot{y}$.

F analytique en t .

On transforme

$$y = \frac{\alpha(t)w(z) + \beta(t)}{\gamma(t)w(z) + \delta(t)}, \quad z = \phi(t).$$

On a une équation pour $w(z)$. Il faut que

(I)

$$\frac{d^2w}{dz^2} = L(z, w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + M(z, w) \frac{dw}{dz} + N(z, w).$$

La partie de droite de cette équation est un polynôme de second degré en $p := \frac{dw}{dz}$.

(II) $L(z, w)$ a l'une de ces 8 formes :

$$\begin{aligned}
& -\text{Pas de pôles} \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad L = 0 \end{array} \right. \\
& -\text{Un pôle} \left\{ \begin{array}{l} (ii) \quad L = \frac{1}{w} \\ (iii) \quad L = \frac{w}{m-1} \quad m \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \end{array} \right. \\
& -\text{Deux pôles} \left\{ \begin{array}{l} (iv) \quad L = \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \\ (v) \quad L = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right) \\ (vi) \quad L = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} \right) \\ (vii) \quad L = \frac{2}{3w} + 12(w-1) \end{array} \right. \\
& -\text{Trois pôles} \left\{ \begin{array}{l} (viii) \quad L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-\eta(x)} \right) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

(III) On considère chaque sous-cas séparément

$$w^{(2)} = [A(z)w + B(z)]w^{(1)} + C(z)w^3 + D(z)w^2 + E(z)w + F(z)$$

Prenons

$$w(z) = \lambda(z)w(\phi) + \mu(z)$$

équations du même type avec

$$(A, C) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0) \\ (-2, 0) \\ (-3, -1) \\ (-1, 1) \\ (0, 2) \end{array} \right. \implies P(I), \dots, P(X)$$

10 formes standards, 2 irréductibles (P(I) et P(II)).

A.2 Introduction à l'analyse de Painlevé

Soit E une ÉDP ou une ÉDO donnée.

Question : Quelle est la nature des singularités des solutions (pôles, points de branchement, singularités essentielles) et leur positions (fixées ou mobiles).

Propriété de Painlevé : Pour chaque solution, les seules singularités mobiles sont des pôles (pas de racines, exponentielles rationnelles ou logarithmes).

Test de Painlevé :

- Algorithmique
- Critère nécessaire pour la propriété de Painlevé
- Pas suffisant (ne détecte pas les singularités essentielles mobiles)

Conjecture d'intégrabilité.

Test de Painlevé vrai $\iff$ ÉDO ou ÉDP intégrable

Test de Painlevé faux $\implies$ ÉDO ou ÉDP pas intégrable

- Le test de Painlevé est un outil permettant de détecter la majorité de cas intégrables.
- Pour les equations non intégrables, c'est un outil permettant de construire de nouvelles solutions analytiques (et non des séries) qui pourraient être nouvelles.

A.3 Technique du test de Painlevé

Considérons l'ÉDP polynomiale d'ordre n

$$E(u, u_x, u_t, \dots) = 0 \tag{A.7}$$

Assumons qu'on peut développer une solution de (A.7) selon un ensemble singulier mobile m . Si $f = f(z_1, \dots, z_n)$ est une fonction méromorphe à n

variables, alors les singularités de f surviennent sur des ensembles analytiques de dimension $(2n - 2)$. Ces ensembles sont déterminés par

$$m : \quad \phi(z_1, z_n) = 0 \quad (\text{A.8})$$

où ϕ est une fonction analytique de (z_1, z_n) dans le voisinage de m .

On cherche une solution de (A.7) de la forme

$$u = \phi(x, t)^p \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t) \phi(x, t)^j, \quad p < 0 \quad (\text{A.9})$$

où ϕ et u_j sont des fonctions analytiques de (x, t) dans le voisinage de m .

En substituant (A.9) dans (A.7) on détermine les valeurs possibles de p et on définit les relations de récurrence pour u_j , $j = 0, 1, 2, \dots$

Branches : ensemble de possibilités pour (p, u_0) .

$$E = \phi(x, t)^q \sum_{j=0}^{\infty} E_j (\text{dérivées de } \phi, u_0, \dots, u_j) \phi(x, t)^j = 0. \quad (\text{A.10})$$

Réolvons $E_j = 0$ pour u_j , $j = 0, 1, 2, \dots$

$$E_j \equiv (j + 1) \phi_x \dots \phi_t \dots R(j) u_j + Q_j(u_0, \dots, u_{j-1}, \text{dérivées de } \phi) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Les $n - 1$ zéros de $R(j)$ sont nommés *résonances*.

- $R(j) \neq 0 \implies u_j = f(\text{précédent})$,
- $R(r) = 0$ et $Q(r) = 0 \implies u_r$ arbitraire ($u_{a,r}$ arbitraire)
- $R(r) = 0$ et $Q(r) \neq 0 \implies \begin{cases} \text{le test échoue (terme logarithmique),} \\ \text{condition de compatibilité } Q_r = 0. \end{cases}$

(branche de l'ÉDP (p, u_0) passe le test) $\iff$ (toutes les résonances se produisent à des entiers positifs distincts et sont compatibles)

Ainsi, u dépend de n fonctions arbitraires $\phi, \{u_{a,r}\}$.

Tests plus faibles : Moins de $n - 1$ résonances entières positives distinctes, donc les conditions de compatibilité peuvent ne pas être satisfaites.

Résultat du test de Painlevé : pour chaque branche (p, u_0) :

1. Passe le test ou non
2. ensemble de conditions de compatibilité $Q_r = 0$.

A.4 Technique de Painlevé-Bäcklund

Définissons 2 solutions $u^0, u^{(1)}$ de la même ÉDP («transformation auto-Bäcklund») par :

- Les séries (u_j) sont tronquées à $j = -p$.
- $u^{(0)} := u$ = l'expansions de Painlevé de $j = 0$ à $j = -p$.
- $u^{(1)} := u_{-p}$ = le coefficient constant de ϕ^0 .

Les équations à résoudre sont

$$E_j^{PB} := \begin{cases} E_j(\phi, u_0, \dots, u_j) = 0 & j \in [0, -p] \\ E_j(\phi, u_0, \dots, u_{-p}, 0, \dots, 0) = 0 & j \in]-p, -q] \end{cases}$$

et les deux solutions sont données par

$$\begin{aligned} E_j^{PB}(\phi, \{u_{a,r}, r \text{ résonance} \in [0, p]\}) &= 0, \quad j \in]-p, -q] \\ u^{(0)} &= f(\phi, \{u_{a,r}, r \text{ résonance} \in [0, -p]\}), \\ u^{(1)} &= g(\phi, \{u_{a,r}, r \text{ résonance} \in [0, -p]\}). \end{aligned}$$

Résultat de cette technique.

Pour chaque branche (p, u_0) , un ensemble d'au plus $p - q$ équations en fonction des dérivées de $\phi, \{u_{a,r}\}$.

Produits généralisés :

1. Si une branche passe le test de Painlevé complet, on peut chercher une paire de Lax.
2. Sinon, on résout les équations de Painlevé-Bäcklund pour ϕ et $\{u_{a,r}\}$; alors, $u^{(0)}$ et $u^{(1)}$ sont des solutions analytiques de forme fermée (pas des séries).
3. L'itération de Bäcklund entre les solutions $u^{(i)}$ de l'ÉDP

$$\begin{aligned} (u^{(i)}) &\rightarrow (\phi := \text{solution de } g(\phi) = u^{(i)}) \\ &\rightarrow (u^{(i+1)} := f(\phi)) . \end{aligned}$$

A.5 Transformations homographiques. Invariants élémentaires.

Pour des équations différentielles ordinaires, la transformation

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

conserve le type (pôle, point de branchement, singularité essentielle) et la nature (fixe, mobile) des singularités, mais change seulement leur position sur la sphère de Riemann.

Ainsi, la propriété de Painlevé reste inchangée.

Pour des équations différentielles partielles, on doit avoir la même transformation.

$$\text{Groupe } \mathcal{H} \quad \phi \rightarrow \frac{a\phi + b}{c\phi + d}$$

Invariants élémentaires :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2 &= S \quad - \quad \text{schwarzian} \\ \frac{\phi_t}{\phi_x} &= C \end{aligned}$$

La condition

$$(\phi_t)_{xxx} = (\phi_{xxx})_t$$

est $\mathcal{H}$ invariante :

$$-S_t + C_{xxx} + 2C_x S + C S_x = 0$$

A.6 Les 2 transformations universelles.

Tous les résultats d'analyse de Painlevé et Painlevé-Bäcklund (pour chaque branche) sont :

- Oui ou non.
- Ensemble de conditions de compatibilité $Q_r = 0$.
- Ensemble d'équations de Painlevé-Bäcklund.

A.7 Propriétés

Il existe 2 transformations $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ (combinaison et décalage)

- Une $(\mathcal{C})$ agissant sur l'ensemble E_j
- Une $(\mathcal{S})$ agissant sur l'ensemble u_j

telles que pour chaque ÉDP, pour chaque branche (p, u_0) , les deux ensembles (conditions de compatibilité, équations de Painlevé-Bäcklund) deviennent

invariantes sous

$$\phi \rightarrow \frac{a\phi + b}{c\phi + d}, \quad \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \quad \text{résonance-r}$$

$$Q_j = \phi_x^{j+q} E_j, \quad j \in \{\text{résonances non compatibles}\}$$

$$E_j^{PB} = \phi_x^{j+q} E_j(\phi, u_0, \dots, u_{-p}, 0, \dots, 0), \quad j = -p+1, \dots, -q$$

$$Q_j \text{ dépend de } \phi, \quad \{u_{a,r} \text{ résonance-r}\}$$

$$E_j^{PB} \text{ dépend de } \phi, \quad \{u_{a,r} \text{ résonance-r en } [0, -p]\}$$

$$\mathcal{C}(\phi_x^{j+q} E_j) = \begin{cases} \phi_x^{j+q} E_j, & j \in]-p, -q] \\ \sum_{k=-p+1}^j \left(\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x} \right)^{j-k} \frac{(-q-k)!}{(-q-j)!(j-k)!} \phi_x^{k+q} E_k & j \in]-p, -q] \end{cases}$$

$$\mathcal{S}(\phi_x^{j+p} u_j) = \phi_x^{j+p} u_j - \int_j = v_j$$

Ces deux transformations sont :

- Universelles, c'est-à-dire indépendantes des ÉDP, linéaires et invertibles.
- Uniques, transformations indépendantes du module

A.8 Un exemple des 2 transformations

$$u_t - u_{xxxxx} + 15u_x u_{xxx} - 15u_x^3 = 0$$

Branche : $(-1, -4\phi_x)$

Résonances : $-2, 1, 5, 12$

•

$$\phi_x E_2 = -120 \left(-45 - 3 \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2 + 3u_{1,x} \right) \quad \text{pas invariant}$$

$$\mathcal{C}(\phi_x E_2) = \phi_x E_2,$$

$$\mathcal{S}(u_1) = u_1 - 2 \frac{\phi_{xx}}{\phi_x} = v_1.$$

- $\mathcal{C}(\phi_x E_2) = -120(25 + 3v_{1,x})$ invariant

•

$$\phi_x^2 E_3 = -120 \left(s_x + 8s \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right) + 6 \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^3 - 6 \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right) u_{1,x} \right) \quad \text{pas invariant}$$

$$\mathcal{C}(\phi_x^2 E_3) = \phi_x^2 E_3 + 2 \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right) \phi_x E_2.$$

- $\mathcal{C}(\phi_x^2 E_3) = 120s_x$ invariant

Expression	Nombre de termes avec ϕ et u , pas s et c	Invariant
E_2	3 termes	2 termes
E_3	4 termes	1 terme

Notons que

$$\phi_x^5 E_6 \equiv \phi_x^5 \text{PDE}(u_1) \quad \text{n'est pas invariant}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\phi_x^5 E_6) &= \phi_x^5 E_6 + \left(\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x} \right) \phi_x^4 E_5 + \left(\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x} \right)^2 \phi_x^3 E_4 + \left(\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x} \right)^3 \phi_x^2 E_3 + \left(\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x} \right)^4 \phi_x E_2 \\ &= \text{PDE}(v_1) + \text{invariant}. \end{aligned}$$

A.9 Méthode de résolution des équations invariantes

Soit pour les équations de Painlevé-Bäcklund ou pour les conditions de compatibilité de Painlevé,

$$E_j(S, C \text{ et leurs dérivées}) = 0$$

doit être résolue ($j \in$ ensemble fini).

- Ajouter la relation

$$-S_t + C_{xxx} + 2C_x S + C S_x = 0$$

- Traiter S et C comme étant indépendantes
- Résoudre pour S et C (une des équations est dégénérée en une ÉDO)
- Connaissant $S(x, t)$, remonter à ϕ : L'ÉDO non-linéaire de 3e ordre pour la fonction $\phi(x, t)$ en x est

$$\frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2 = S(x, t)$$

a une solution générale de la forme

$$\phi = \frac{\alpha(t)y_1 + \beta(t)y_2}{\gamma(t)y_1 + \delta(t)y_2}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions arbitraires, et où y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de

$$y'' + \frac{S}{2}y = 0$$

- Substituer ϕ dans

$$\phi_t - C\phi_x \equiv 0$$

et résoudre pour $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$.

- Si les équations dépendent aussi de $u_{a,r}$, alors pas de propriété de Painlevé.
- Cas pratique important

$$S = \text{const.} = \frac{-k^2}{2},$$

$$C = \text{const.} = C$$

$$\phi = \frac{\alpha + \beta e^{k(x-Ct)}}{\gamma + \delta e^{k(x-Ct)}}$$

Pour une branche qui n'est pas de Painlevé, ϕ ne dépendra pas de fonctions arbitraires mais seulement de constantes arbitraires.

A.10 Exemple de solution analytique

$$u_t - u_{xxxxx} + 15u_x u_{xxx} - 15u_x^3 = 0$$

Une puissance principale $p = -1$.

Les branches $u_0 = -2\phi_x, -4\phi_x$

Branche $-4\phi_x$: résonances $= -2, 1, 5, 12$

Les résonances 1, 5, 12 sont compatibles.

$$\left\{ \begin{array}{l} u - u_1 = -4(\log(\phi))_x \\ u_1 = \text{arbitraire} = 2\frac{\phi_{xx}}{\phi_x} + v_1 \\ E_2 = -120(2S + 3v_{1,x}) \\ E_3 = -120S_x \\ E_4 = 4(-64S^2 + C + 24S_{xx} - 120Sv_{1,x} - 45v_{1,x}^2 + 155v_{1,xx}) \\ E_6 = PDE(v_1) + \frac{S}{2}E_4 + 60S^3 - 6S_x^2 + 4SS_{xx} - 2S_{xxx} - 90S^2v_{1,x} + 30S_{xx}v_{1,x} \end{array} \right.$$

La solution générale est

$$S = \text{constante} = \frac{-k^2}{2}$$

$$C = \text{constante} = k^4, \quad k \text{ arbitraire}$$

et mène à la même expression à la fois pour u et u_1

$$\frac{k^2}{3}x + \frac{5k^6}{9}t + (1 \text{ ou } 2) \tanh\left(\frac{kx}{2} + \frac{k^5t}{6} + c_1\right) + c^2 = 0$$

Ce n'est pas une solution à 1 soliton.

Quand on effectue les symétries, puis les réductions aux ÉDO, une des 4

réductions trouvées admet que sa solution est particulière.

B Transformation de Legendre

Parfois, lors du calcul des solutions de certaines équations réduites, il a été utile d'utiliser la transformation de Legendre. Faisons un bref résumé de la technique utilisée.

B.1 Théorie

La transformation de Legendre est une technique qui permet de trouver une formulation alternative pour une équation qui est autrement difficile à résoudre. En utilisant la transformation de Legendre, on peut trouver la solution de l'équation transformée, et ensuite revenir dans l'espace des variables de départ via la transformation inverse pour trouver la solution de l'équation initiale. Soit une fonction $u(x, y)$, on passe aux nouvelles variables $\omega(\xi, \eta)$ par la transformation de Legendre donnée par

$$\omega(\xi, \eta) + u(x, y) = x\xi + y\eta, \quad (\text{B.1})$$

où

$$u_x = \xi, \quad \omega_\xi = x, \quad u_y = \eta, \quad \omega_\eta = y. \quad (\text{B.2})$$

De ces deux équations, on trouve que

$$\begin{cases} u_{xx} = J\omega_{\eta\eta}, \\ u_{xy} = -J\omega_{\xi\eta}, \\ u_{yy} = J\omega_{\xi\xi}, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

où J est le Jacobien de la transformation, donné par

$$J = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = \frac{1}{\omega_{\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - (\omega_{\xi\eta})^2} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Exemple

Dans l'exemple suivant, on a une équation différentielle partielle de second ordre non-linéaire

$$(1 - (u_t)^2) u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} - (1 + (u_x)^2) u_{tt} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Il s'agit de l'équation réduite pour le champ de vecteurs $\vec{v}_2$ de l'équation de Born-Infeld en $(2 + 1)$ dimensions.

La transformation de Legendre permettra de linéariser cette équation afin de la résoudre plus facilement. On commence donc par poser l'équation

$$u(x, t) + \omega(\xi, \eta) = x\xi + t\eta \quad (\text{B.6})$$

Ce qui nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \xi, \\ u_t = \eta, \\ \omega_\xi = x, \\ \omega_\eta = t, \\ u_{xx} = J\omega_{\eta\eta}, \\ u_{xt} = -J\omega_{\xi\eta}, \\ u_{tt} = J\omega_{\xi\xi}, \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

où $J = u_{xx}u_{tt} - (u_{xt})^2 = \frac{1}{\omega_{\eta\eta}\omega_{\xi\xi} - (\omega_{\xi\eta})^2}$ En appliquant toutes ces transformations, on obtient

$$(1 - \eta^2)\omega_{\eta\eta} - 2\xi\eta\omega_{\xi\eta} - (1 + \xi^2)\omega_{\xi\xi} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Cette équation est différentielle partielle de second ordre, cette fois linéaire. On obtient donc une solution à cette équation via un logiciel de calcul, qui, une fois ramenée aux variables de départ, nous donne la solution de l'équation

(B.5), qui est

$$u(x, t) = A(x + t) + B(x - t) \tag{B.9}$$