

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
ERIC PRUNEAU

ALGORITHMES DE POURSUITE ET ANALYSE
TEMPS-FRÉQUENCE DE SIGNAUX DOPPLER

AOÛT 2003

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Belkacem Abdous, codirecteur de mémoire
Département de médecine sociale et préventive,
Université Laval.

M. Alain Chalifour
Département de mathématiques et informatique,
Université du Québec à Trois-Rivières.

M. Mhamed Mesfioui
Département de mathématiques et informatique,
Université du Québec à Trois-Rivières.

*À Chantal
La femme de ma vie*

Résumé

Dans le domaine des radars à effet "Doppler", certaines sources d'informations formant les signaux analysés sont extrêmement importantes. Il faut donc s'assurer de disposer d'une méthode efficace et précise pouvant extraire les caractéristiques souhaitées. De plus, comme la quantité de données à traiter est très imposante, il est primordial que l'algorithme de calcul utilisé soit rapide. Depuis plusieurs années, la solution à ce problème est la transformée rapide de Fourier. La méthode est effectivement rapide et, dans la majorité des cas, efficace si bien utilisée. Cependant nous verrons qu'au niveau de la précision, il y a encore un certain manque à gagner.

Le manque possible de précision de la transformée de Fourier à fenêtre est dû à un problème de flexibilité au niveau de la taille d'analyse. Ce paramètre que nous appelons "taille de la fenêtre" ne peut pas être modifié à l'intérieur d'une même analyse. Ce problème forme la base de la problématique de ce travail. Une solution pour contrer ce manque d'adaptativité est un algorithme appelé poursuite adaptative ("Matching pursuit") [16]. Nous pensons que dans bien des cas il peut combler le manque à gagner de la transformée de Fourier à fenêtre .

Étant donné que notre étude porte sur un domaine d'application bien précis, les signaux étudiés présentent des particularités communes qui font que dans son état actuel, la poursuite adaptative s'est révélée comme n'étant pas la solution idéale. Nous avons donc étudié la possibilité d'utiliser la poursuite adaptative chirpée [2], [17], [18], un algorithme dérivant du premier, mais qui semble mieux adapté à nos signaux.

Finalement, comme le logiciel est voué à des fins commerciales, il est extrêmement important qu'il soit performant. Nous proposons donc des modifications à l'algorithme de base de la poursuite adaptative pour atteindre

ce but et ainsi bénéficier d'une solution rapide et adaptée au domaine d'application.

Abstract

When dealing with "Doppler effect" radar, the frequency information of the processed signals is extremely important. It is thus necessary to have an effective method. Moreover, the quantity of data to process is huge, so our algorithm must be fast. Since several years, the solution to this problem was the windowed Fourier transform ¹. The transform is indeed fast and (in most cases) effective if properly used.

However, the windowed Fourier transform suffer of a flexibility problem. On other hand, the size of the window cannot be changed in one analysis. It is the main problem of this work. A solution to this weakness is the matching pursuit algorithm [16]. We think that in most of the cases, it can help to eliminate the weaknesses of the windowed Fourier transform.

As we work in a specific domain, all the processed signals do have some common characteristics. This characteristics make the matching pursuit (in is actual state) a nonmarketable solution to our problem. We then study the possibility of using the chirped matching pursuit [2], [17], [18], this algorithm seems to be better adapted to the characteristics of our signals.

Finally, as the software must be fast to be marketable, we introduce a modification to accelerate the processing time needed by the matching pursuit. These modifications will also make the matching pursuit better adapted to our signals characteristics.

¹It is also called short time Fourier transform

Remerciement

J'aimerais premièrement remercier le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie (CRSNG) du Canada et l'entreprise Infinition de Trois-Rivières pour l'appui financier qu'ils m'ont procuré grâce au programme de bourses de cycles supérieurs à incidence industrielle (ESII). Cette occasion rêvée de pouvoir appliquer mes travaux à des problèmes vécus par Infinition n'a fait que stimuler mon désir de développer une technique performante et viable commercialement.

Lorsqu'on postule pour une bourse de cette importance, le nombre de documents administratifs est souvent élevé et complexe. C'est pourquoi je désire remercier le service juridique de l'UQTR ainsi que Mme Chantal Lemieux du décanat des études supérieures à l'université du Québec à Trois-Rivières. Elle a toujours été présente et efficace dans mes démarches administratives auprès du CRSNG.

Bien que le programme de bourses soit très intéressant, il ne m'aurait jamais été possible d'appliquer sans la connaissance de l'entreprise Infinition. Je remercie particulièrement mon directeur de recherche, le professeur Belkacem Abdous, qui par un heureux hasard m'a mis en contact avec la compagnie. Il est clair que sans son aide, je ne serais jamais entré en contact avec les dirigeants d'Infinition. Il a aussi hérité de la rude tâche d'effectuer la première lecture de ce mémoire et d'y apporter son expérience au niveau de la rédaction scientifique.

Tout particulièrement, je remercie monsieur Stephan Boucher, architecte de système senior chez Infinition. Ses judicieux conseils au niveau programmation jumelé à son expérience des systèmes radars m'ont orienté sur la voie de la réussite. Les nombreuses heures passées en sa compagnie m'ont fait découvrir la vie en entreprise et des difficultés qui s'y rattachent. Je

voudrais aussi souligner la contribution de Ben Alyson, un programmeur de cette même compagnie qui, une fois l'algorithme terminé, m'a aidé à intégrer celui-ci dans le logiciel TestCenter©. Nul doute que cela a fait de moi un travailleur beaucoup plus efficace sur le marché du travail.

J'ai une reconnaissance sans limites envers mes parents qui ont fait de moi l'homme que je suis. J'ai eu la chance de naître auprès d'une famille qui m'a encouragé et donné le goût de la réussite.

Finalement, ma vie ne serait pas ce qu'elle est sans la présence de ma conjointe Chantal St-Pierre, qui au moment d'écrire ses lignes, est enceinte de notre premier enfant. Depuis le baccalauréat, sa présence m'a toujours donné la force (et surtout l'orgueil) de me surpasser afin d'obtenir du succès dans mes études.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciement	iv
1 Introduction	2
2 Traitement du signal	4
2.1 Types de signaux	4
2.2 Ondes	5
2.2.1 Famille d'ondes	5
2.2.2 Caractéristiques des ondes	6
2.2.3 Spectre électromagnétique	6
2.3 L'effet Doppler	8
2.4 Analyse temps-fréquence	9
2.5 Théorème de l'échantillonnage	11
3 Transformée de Fourier	14
3.1 Équations	14
3.2 Résolution dans le domaine des fréquences	15
3.3 Représentation graphique	16
3.4 Largeur de bande	17
3.5 Localisation temporelle	18
3.6 Transformée de Fourier à fenêtre	19
3.6.1 Motivation	19
3.6.2 Équations	20
3.6.3 Localisation des fréquences dans le temps	21

3.7	Avantages	22
4	Problématique	25
4.1	Choix de la fenêtre	25
4.2	Choix de la taille d'analyse	25
4.3	Résumé de la problématique	27
5	Poursuite adaptative	30
5.1	Dictionnaire	30
5.1.1	Dictionnaire complexe	31
5.1.2	Dictionnaire réel	32
5.1.3	Échantillonnage du dictionnaire	33
5.2	Principe général	33
5.3	Algorithme général	35
5.4	Algorithme détaillé	36
5.4.1	Calcul des produits scalaires avec les atomes complexes	36
5.4.2	Sélection du meilleur atome complexe	38
5.4.3	Passage à l'atome réel	38
5.4.4	Mise à jour du résidu	39
5.4.5	Condition d'arrêt	40
5.5	Poursuite de "Ridge"	41
5.6	Exemple	43
5.7	Problèmes rencontrés	44
6	Transformée de fourier multi-échelle	46
6.1	Effet de la fenêtre	47
6.1.1	Taille de la fenêtre	47
6.1.2	Réponse en fréquence d'une fenêtre	47
6.2	Augmentation des performances	48
6.2.1	Détermination des paramètres d'analyse	48
6.2.2	Dictionnaire des maximums	50
6.2.3	Mise à jour	52
6.3	Algorithme final	54
7	Résultats	55
7.1	Cas simple	55
7.2	Accélération rapide	55
7.3	Fréquences dans un même voisinage	60

7.4	Incertitude entre deux échelles	66
A	Installation radar	70
	 Installation radar	70
A.1	Organigramme	70
A.2	Le déclencheur	70
A.3	La boîte de jonction	70
A.4	L'antenne	71
A.5	La carte d'acquisition	71
A.6	Le logiciel	72
	Références	73

Table des figures

2.1	Spectre électromagnétique. On peut remarquer qu'il n'y a un chevauchement entre certaines ondes voisines.	7
2.2	(a) Représentation temporel d'un signal. Entre chaque point, il y a un espace de Δt_{signal} . (b) Représentation temps-fréquences. Il y a un espace de Δt_{spect} entre chaque mesure.	10
2.3	Stratégie employée pour produire une analyse temps-fréquence. Chaque ligne représente la portion du signal à utiliser pour faire une analyse. Le temps entre le centre de deux lignes adjacentes est $\frac{D}{\Delta t_{spect}}$. La longueur de la ligne est spécifiée par l'utilisateur, elle peut donc contenir des données ayant servi lors d'analyses précédentes.	11
2.4	On remarque facilement l'effet "d'aliasing" sur le signal en pointillés. Son équation est $s_t = \cos(2\pi f4)$ alors que l'équation du signal représenté par une ligne pleine est $s_t = \cos(2\pi f2)$. Le deuxième signal a donc une fréquence de 5 et est bien représenté.	13
3.1	Représentation en fréquence du signal $s_t = 2\cos(2\pi t50) + \cos(2\pi t150) + bruit$ où $t = 0, 1, \dots, 511$	17
3.2	Transformée de Fourier d'un signal ayant une fréquence 10.7	18
3.3	(a) Signal ayant 2 fréquences séparées dans le temps. b) Signal ayant 2 fréquences présentes à tout moment dans le signal.	19
3.4	Représentation de la fenêtre de Hanning	22
3.5	Un signal lissé par la fenêtre de Hanning	23
4.1	Signal comportant une fréquence variant rapidement et deux fréquences près l'une de l'autre et ne variant pas.	27

4.2	Transformée de Fourier du signal 4.1 avec une échelle de 256. Nous voyons que la fréquence 0.75 a bien été détectée, mais il manque de résolution pour séparer les fréquences 3.75 et 3.77.	28
4.3	Les fréquences 3.75 et 3.77 ont bien été détectées à l'échelle 4096, mais la largeur de bande de la composante variant rapidement est très grande.	28
4.4	Zoom sur les deux fréquences rapprochées de la figure 4.3 . . .	29
5.1	Représentation de deux atomes réels. Le premier (ligne continue) est construit avec les paramètres $\gamma = (s = 4096, u = 2048, \xi = \frac{50\pi}{4096})$, $\theta = \pi$ et l'autre (ligne pointillé) a les mêmes paramètres sauf que la phase est de $\frac{\pi}{2}$	32
5.2	Signal stationnaire ayant une fréquence de 20 cycles par seconde.	38
5.3	(a) Signal résultant d'une soustraction point à point de l'atome $g_{(\gamma_k, \theta_k)} = (N, N/2, \frac{20-2\pi}{N}, 0)$ avec le signal 5.4.3). (b) Même atome que (a) sauf pour la phase qui est 0.3.	39
5.4	La fréquence de départ est 6 cycles secondes et elle va en augmentant tout au long de la durée de vie du signal. Il n'existe pas d'atome appartenant à \mathcal{D} pouvant bien représenter cette structure.	41
6.1	Représentation graphique de la réponse en fréquence de la fenêtre rectangulaire.	49
6.2	Représentation graphique de la réponse en fréquence de fenêtre Hanning.	50
6.3	Représentation graphique de la réponse en fréquence de la fenêtre Kaiser-Bessel.	51
6.4	La largeur de bande de l'exemple du haut est beaucoup plus grande que celle du bas qui est un cas idéal (de largeur 1 pour la fenêtre rectangulaire).	52
6.5	Les points composant cette fréquence vont de 12 à 22. L'astérisque est l'atome optimal.	53
7.1	Signal généré par l'application TestCenter©.	56
7.2	Signal généré par l'application TestCenter©.	57
7.3	On remarque les deux parties du signal correspondant respectivement au temps passé à l'intérieur du tube du canon (avant 0.00425 sec. et ensuite, la sortie de la bouche.	58

7.4	Signal avec une forte accélération analysé avec la transformée de Fourier et une petite taille d'échelle.	59
7.5	Signal analysé avec la transformée multi-échelle.	60
7.6	Signal analysé avec la transformée de Fourier et une échelle de 512	61
7.7	Zoom sur les fléchettes analysées avec la transformée multi-échelle	62
7.8	Analyse avec la transformée de Fourier et une taille de 4096. On remarque le flou dans l'accélération.	63
7.9	Zoom sur les fléchettes analysées avec la transformée de Fourier et une échelle de 4096	64
7.10	Zoom sur les fléchettes analysées avec la transformée de Fourier et une échelle de 512	65
7.11	Ce signal provient d'un plomb tiré à l'aide d'un fusil à air comprimé et ce sur une distance de moins de deux mètres.	66
7.12	Ce signal provient d'un plomb tiré à l'aide d'un fusil à air comprimé et ce sur une distance de moins de deux mètres. Il est analysé avec la transformée de Fourier et une fenêtre de 256	67

Chapitre 1

Introduction

Les signaux sont omniprésents et sans nous en rendre vraiment compte, nous sommes constamment bombardés par ceux-ci. Que ce soit visuel ou auditif, notre cerveau nous permet d'analyser leurs significations. Ceux qui nous intéressent ici sont par contre invisibles, inaudibles et générés artificiellement. Le processus est généralement très simple, il faut une antenne pour émettre l'onde et un capteur pour la capter (voir A.4). Une fois le résultat capté, le processus d'analyse peut commencer. Le traitement peut être aussi simple que de compter le temps entre l'émission et la réception. Dans ce cas l'onde sert simplement en guise de signal disant quand effectuer une action. Dans la plupart des cas, l'onde reçue aura été transformée entre l'envoi et la réception. Il faut alors pouvoir discerner les changements subits à l'aide de techniques de traitement du signal.

Le but de ce travail est de développer une technique d'analyse de signaux micro-ondes plus performante que celles actuellement disponible sur le marché. Nous nous intéressons plus particulièrement aux fréquences (harmoniques) des signaux acquis. Évidemment, ce champ d'application est dominé outrageusement par la très célèbre transformée de Fourier. Nous ne proposons pas une technique d'analyse révolutionnaire, mais plutôt une méthode automatique de choisir les différents paramètres d'analyse de la transformée de Fourier à fenêtres. Le choix de ces derniers peut s'avérer difficile et laisse peu de marge de manœuvre à l'utilisateur. De plus, l'obtention d'un résultat fiable exige aussi une bonne compréhension du domaine. Le second objectif consiste donc à simplifier la tâche aux utilisateurs du logiciel afin d'éliminer le facteur d'erreur humaine, lequel peut fausser l'interprétation des résultats.

Ce mémoire comporte deux grandes parties. Les chapitres 2 et 3 présentent une introduction à plusieurs concepts de traitement du signal, lesquels seront très utiles pour la bonne compréhension de la problématique et de la solution proposée. Dans un premier temps, une introduction au traitement du signal et aux techniques générales employées est présentée, notamment l'effet Doppler et le principe d'analyse temps-fréquence. Au chapitre suivant, la célèbre transformée de Fourier est introduite. Le but n'est pas de détailler ce sujet en profondeur car il existe d'innombrables ouvrages spécialisés sur ce sujet [5, 4, 6]. Nous nous contenterons essentiellement de présenter les concepts utilisés dans ce travail.

La deuxième partie, soit les chapitres 5 et 6 portent sur les solutions envisagées qui conduiront à la réalisation de notre objectif, c'est-à-dire la conception d'une méthode d'analyse temps-fréquence efficace et commercia- lisable. Le chapitre 5 quant à lui introduit la poursuite adaptative de Mallat et Zhang [16]. Cette technique comporte certains désavantages, dont le plus contraignant est sa lenteur qui l'empêche d'être viable commercialement. De plus son efficacité sur nos signaux est discutable. À partir de cette technique, nous avons développé une méthode qui est présentée au chapitre 6. Bien que cette technique dérive de la poursuite adaptative, nous lui donnons le nom de transformé de Fourier multi-échelle.

Entre ces deux parties s'insère au chapitre 4 la problématique de ce travail. Ce point mérite une explication plus approfondie et c'est pourquoi il fait l'objet d'un chapitre.

Finalement, avant de passer à la conclusion, nous présentons au chapitre 7 des résultats obtenus à partir de signaux réels et les comparons avec la transformée de Fourier. Nous pourrons alors conclure en soulignant que ce travail fut un succès qui s'intégrera dans le logiciel de la compagnie Infinition : TestCenter®.

Chapitre 2

Traitement du signal

Le traitement du signal est un champ d'étude très vaste. Comme il est impensable de faire un tour complet de ce domaine, certains points de base seront présentés dans ce chapitre. Ils ont tous une pertinence en regard de ce travail, sans pour autant faire l'objet d'une étude approfondie.

2.1 Types de signaux

Le traitement des signaux peut se faire en deux modes : analogue et digital. Les signaux analogues sont communément appelés signaux continus et les digitaux sont appelés discrets. En général, la plupart des signaux captés sont en premier lieu sous une forme analogue. Par la suite, ils peuvent être convertis en format digital.

Le matériel utilisé pour ce travail capte seulement des signaux continus. Cependant les traitements effectués au niveau logiciel doivent être fait en mode discret ; il y a donc un processus de conversion. Cela ne veut pourtant pas dire qu'il n'y a pas de traitement en format continu. Ces derniers sont exécutés au niveau matériel par des circuits électriques spécialisés. Un exemple simple est le filtrage des basses fréquences par un filtre placé dans une boîte de jonction. Ces harmoniques représentent dans notre cas soit une information non pertinente ou du bruit.

L'information analogue se rend à l'ordinateur par le biais d'un carte d'acquisition dont la tâche principale est d'effectuer l'échantillonnage du signal¹.

¹La conversion s'effectue grâce à un module A/D (analog to digital).

C'est cet échantillon qui est traité par le logiciel. La majeure partie des traitements, en particulier ceux développés dans le cadre de ce mémoire, sont donc fait au niveau logiciel. Ce type de traitement est par contre beaucoup plus lent que leur homologues en continu qui eux sont ultra rapides, mais coûtent définitivement moins cher. Pour ce mémoire, la totalité de la programmation s'est effectuée au niveau logiciel.

Les signaux peuvent aussi être réels ou complexes. Définissons un signal réel par :

$$s(t) = f(t)$$

où $f(t)$ est une fonction réelle. Les signaux captés, peu importe leur type, sont toujours sous une forme réelle. Par contre, il peut être avantageux de définir un signal complexe qui provient d'un signal réel. Définissons donc un signal complexe à partir de $s(t)$ en lui ajoutant une partie imaginaire $g(t)$ par :

$$z(t) = s(t) + ig(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$$

où $A(t) = \sqrt{s(t)^2 + g(t)^2}$ et $\varphi(t) = \arctan \frac{s(t)}{g(t)}$. Le signal complexe est donc simplement le signal réel auquel on a ajouté une partie complexe. Deux méthodes existent pour ajouter cette partie imaginaire : la méthode du signal analytique et la méthode de quadrature [15]. Pour ce travail, uniquement des signaux réels ont été utilisés, c'est donc pourquoi nous ne nous attarderons pas plus sur le sujet. Par contre, la technique développée pourra être appliquée aux deux types de signaux.

2.2 Ondes

2.2.1 Famille d'ondes

Il y a deux grandes familles d'ondes, les ondes mécaniques et électromagnétiques. Les premières ont besoin d'un support matériel pour se propager. Citons par exemple l'onde aperçue lorsqu'un caillou est jeté à l'eau. Ce type d'onde n'est pas utilisé dans ce travail, nous travaillerons donc avec des ondes électromagnétiques. L'avantage est que les ondes électromagnétiques peuvent se déplacer dans le vide à la vitesse de la lumière. Cette vitesse de déplacement est essentielle en analyse balistique où les projectiles se déplacent très rapidement et souvent sur de grandes distances.

2.2.2 Caractéristiques des ondes

Une caractéristique importante des ondes que nous analysons est leur mouvement oscillatoire. Il est théoriquement possible de décrire leur comportement par une somme de fonctions sinus et cosinus comme avec les séries de Fourier [6].

Les ondes ont une caractéristique importante : la période. La période (notée T) est le temps que met une particule pour décrire un cycle complet. D'une manière plus formelle, c'est le temps que met la particule pour partir du point t et se rendre au point $t + T$, tel que $s(t) = s(t + T)$.

Plus importante encore pour ce travail est la notion de fréquence². La fréquence est l'inverse de la période, en d'autres mots ; le nombre d'oscillations d'une particule par unité de temps (généralement la seconde).

$$\xi = \frac{1}{T}.$$

La fréquence s'exprime en hertz, du nom du physicien allemand Heinrich Hertz (1857-1894), qui fut le premier à démontrer de façon concluante l'existence des ondes électromagnétiques.

2.2.3 Spectre électromagnétique

Il existe différentes catégories d'ondes électromagnétiques. On les regroupent selon la fréquence et la longueur d'onde. Le tableau 2.1 présente les différents types. Pour ce travail, nous utilisons des micro-ondes, alors nous ne nous attarderons pas sur les autres types.

Les micro-ondes ont une longueur d'onde comprise entre 1 millimètre et 30 centimètres. La longueur d'onde est la distance entre deux points consécutifs d'une onde qui se comportent de façon identique³. Il est très facile de produire des micro-ondes, car tout comme les ondes radio, elles sont produites à l'aide d'un dispositif électronique alors que les ondes gamma par exemple, sont émises par des noyaux radioactifs durant certaines réactions nucléaires. Les ondes produites par le radar de la compagnie Infinition à une fréquence de

²Nous noterons la fréquence avec la lettre ξ

³Par exemple, la distance entre deux creux adjacents ou deux crêtes adjacentes

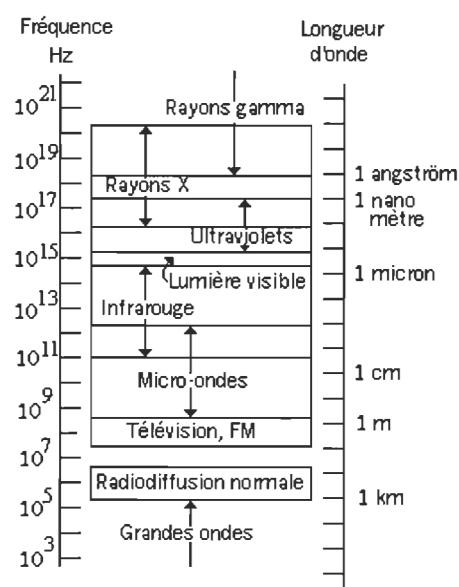


FIG. 2.1 – Spectre électromagnétique. On peut remarquer qu'il n'y a un chevauchement entre certaines ondes voisines.

35 giga Hertz, ce qui est très élevé comparativement aux fours micro-ondes que nous utilisons qui eux ont une fréquence de 2450 mega Hertz.

2.3 L'effet Doppler

L'effet Doppler⁴ se manifeste lorsqu'il y a un mouvement relatif entre une source (dans notre cas un projectile) et un observateur (l'antenne du radar). Ce phénomène est commun à toutes les ondes (sonores, lumineuses, micro-ondes ...). Par exemple, si une personne se tient près d'une piste de course, le son d'un véhicule roulant à grande vitesse semble plus aigu au fur et à mesure que le véhicule se rapproche. Cela est dû au fait que la fréquence du signal sonore augmente.

Il existe plusieurs variations de la formule de l'effet Doppler. Sans trop détaillé, disons simplement que le changement de fréquence sera proportionnel à la vitesse de l'object divisé par la vitesse de l'onde, soit :

$$\text{variation}_{\text{fréquence}} = \frac{\text{vitesse}_{\text{object}}}{\text{vitesse}_{\text{onde}}}$$

où la vitesse de l'onde est égale à 2.99792×10^8 m/s, soit la vitesse de la lumière puisque les micro-ondes sont des ondes électromagnétiques.

Il est alors possible de calculer précisément la vitesse d'un objet par sa variation de fréquence. Maintenant, comment faire pour savoir si l'objet se déplace vers l'antenne ou s'il s'en éloigne ? La réponse est simple, si la fréquence trouvée est positive, l'object s'éloigne et si la fréquence est négative, alors l'object se rapproche.⁵ Avec des signaux réels par contre, les fréquences positives et négatives sont identiques. Il est alors impossible de connaître la direction du déplacement. Ceci n'est pas très grave, puisque les radars sont généralement utilisés pour calculer certaines mesures sur des tirs de projectiles contrôlés. Les utilisateurs savent donc à priori la direction vers laquelle l'object se déplace.

⁴Du nom du physicien autrichien Christian Johann Doppler (1803-1853)

⁵Ceci est une convention, mais en réalité cela dépend de la façon dont le signal complexe a été obtenu.

2.4 Analyse temps-fréquence

Lorsque qu'une méthode d'analyse de fréquences d'un signal tel la transformée de Fourier est utilisée, il est généralement impossible de savoir dans quelle portion du signal se trouvent les fréquences cibles. L'analyse temps-fréquence pour sa part doit évidemment se servir de l'analyse des fréquences, mais d'une façon pouvant nous permettre de situer les harmoniques dans le temps.

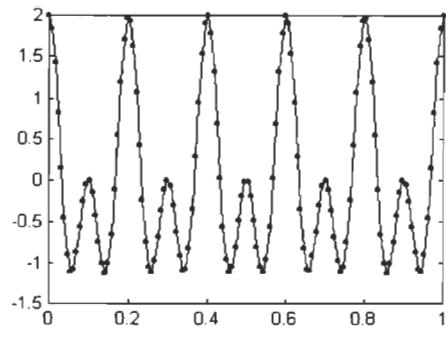
Les composantes en fréquences des signaux nous servent à calculer la vitesse d'objets se déplaçant dans le faisceau du radar. Mais ces objets se déplacent dans le temps et il est primordial de savoir précisément à quelle vitesse se déplaçait l'objet à un instant donné. Évidemment le milieu de travail est discret, alors il y aura nécessairement un intervalle de temps entre chaque donnée échantillonnée du signal. Cet intervalle de temps que nous nommerons Δt_{signal} est constant et est défini en fonction des caractéristiques de la carte d'acquisition du système.

Le temps entre chaque mesure de vitesse ne peut donc pas être plus petit que Δt_{signal} . Généralement, le temps écoulé entre chaque mesure sera beaucoup plus grand que Δt_{signal} . Nous noterons Δt_{spect} le temps entre deux mesures (fig. 2.2).

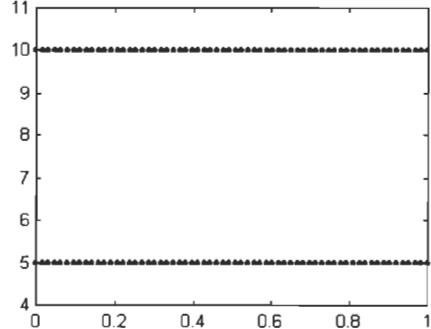
Donc le graphique temps-fréquence aura $\frac{D}{\Delta t_{spect}}$ mesures où D est la durée du signal. Ces mesures sont le résultat d'une analyse de fréquence et peuvent donc comprendre plusieurs fréquences. En supposant qu'à la mesure i , il y ait n_i harmoniques, le nombre de points de notre graphique sera

$$\sum_{i=1}^{D/\Delta t_{spect}} n_i.$$

Le problème de l'analyse temps-fréquences est de calculer ces harmoniques aux moments voulus. On voudra avoir des mesures de vitesse à chaque multiple de Δt_{spect} . La stratégie couramment employée pour accomplir cette tâche est de faire plusieurs analyses en fréquences sur une petite portion du signal centré aux moments voulus (fig. 2.3). C'est la méthode pour effectuer ces analyses qui forme l'intérêt premier de ce travail, traditionnellement elles



(a)



(b)

FIG. 2.2 – (a) Représentation temporel d'un signal. Entre chaque point, il y a un espace de Δt_{signal} . (b) Représentation temps-fréquences. Il y a un espace de Δt_{spect} entre chaque mesure.

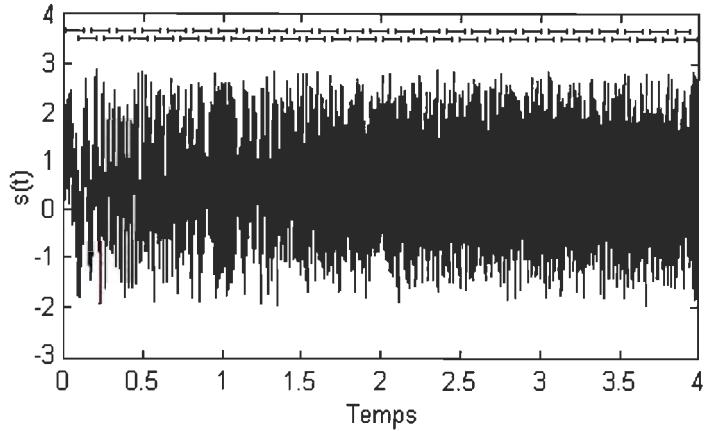


FIG. 2.3 – Stratégie employée pour produire une analyse temps-fréquence. Chaque ligne représente la portion du signal à utiliser pour faire une analyse. Le temps entre le centre de deux lignes adjacentes est $\frac{D}{\Delta t_{spect}}$. La longueur de la ligne est spécifiée par l'utilisateur, elle peut donc contenir des données ayant servi lors d'analyses précédentes.

sont effectuées à l'aide de la transformée de Fourier à fenêtre ; laquelle sera traitée au chapitre 3.

2.5 Théorème de l'échantillonnage

Le pas d'échantillonnage Δt_{signal} choisi comme espacement entre chaque données est critique⁶. D'une part, il faut avoir un nombre suffisant de données afin que les calculs soient valides et d'autre part, il est inutile et inefficace d'en avoir trop puisque cela peut consommer beaucoup de mémoire et ralentir les calculs. Le théorème de l'échantillonnage nous permet de connaître la fréquence d'échantillonnage minimum acceptable pour un signal.

Si une fonction continue $s(t)$, échantillonnée à un intervalle Δ a comme propriété que $S(\omega) = 0 \forall |\omega| \geq f_c$, alors $s(t)$ est complètement déterminée

⁶En réalité, puisqu'il est entièrement défini par la carte d'acquisition, nous devrions plutôt dire que nous choisissons la carte d'acquisition en fonction du pas d'échantillonnage désiré.

par son échantillon ; f_c est connue sous le nom de fréquence de Nyquist et est égale à $\frac{1}{2\Delta}$. De plus,

$$s(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \frac{\sin[2\pi f_c(t - n\Delta)]}{\pi(t - n\Delta)}$$

C'est donc dire qu'il faut un minimum de deux points par cycle. Donc, si un signal a une fréquence de 200 cycles par seconde, alors il faut au minimum 400 points *pour chaque seconde* de signal. Si plus d'une fréquence se retrouve dans le signal, alors on se réfère à la plus élevée.

Ce théorème s'applique bien si la fréquence la plus élevée du signal est connue à priori. En pratique, nous ne connaissons pas cette fréquence et celle ci est différente pour tous les signaux. Il faut donc s'assurer d'avoir une carte d'acquisition ayant une fréquence d'échantillonnage qui sera toujours supérieure aux besoins. Dans notre cas, puisque nous analysons des vitesses de projectiles, nous avons la plupart du temps une idée de l'ordre de grandeur des vitesses qui seront atteintes pour les différents types de projectiles. Il est donc possible de choisir assez facilement une carte d'acquisition qui conviendra pour nos signaux.

Maintenant, qu'arrive t-il si la fréquence d'échantillonnage est trop petite ? C'est à dire qu'une ou plusieurs harmoniques dépassent la fréquence de Nyquist. Ces fréquences se retrouveront faussement interprétées comme étant des harmoniques plus petites que Nyquist. Ce phénomène est connue sous le nom d'*aliasing*. On remarque à la figure 2.4 que le signal en pointillé a une fréquence beaucoup plus petite (environ 1) que celle qu'il aurait dû avoir, soit 44.

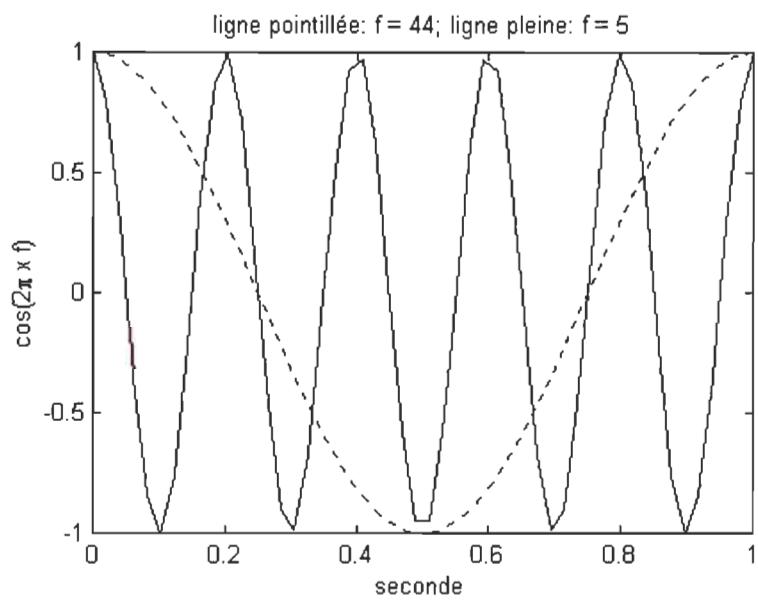


FIG. 2.4 – On remarque facilement l'effet "d'aliasing" sur le signal en pointillés. Son équation est $s_t = \cos(2\pi f 44)$ alors que l'équation du signal représenté par une ligne pleine est $s_t = \cos(2\pi f 2)$. Le deuxième signal a donc une fréquence de 5 et est bien représenté.

Chapitre 3

Transformée de Fourier

La première représentation d'un signal qui s'offre à nous (et certainement la plus intuitive) est la représentation temporelle. Cependant, il n'est pas toujours très utile de travailler avec cette dernière. C'est pourquoi l'utilisation de méthodes mathématiques qui ont pour objectif de transformer le signal vers un autre domaine est nécessaire. L'analyse en sera alors plus aisée. La deuxième représentation prédominante est celle du domaine des fréquences. Avec cette forme, il est possible d'identifier les harmoniques prédominantes du spectre obtenu pour ensuite calculer les vitesses qui leur sont rattachées. Le moyen utilisé pour passer d'un domaine à l'autre est la très célèbre transformée de Fourier.

3.1 Équations

Essentiellement, l'idée de la transformée de Fourier est de décomposer un signal $s(t)$ en une somme (ou intégrale dans le cas continu) de signaux simples, chacun ayant une fréquence ω unique

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.1)$$

Les ondes complexes $e^{i\omega t}$ ont une contribution au signal relative à $S(\omega)$. Ces coefficients sont d'une importance majeure, nous pouvons les obtenir au moyen de la transformée de Fourier :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.2)$$

Fait important à remarquer, l'équation 3.1¹ permet de passer du domaine des fréquences au domaine temporel, tandis que 3.2 effectue l'inverse. Il est à noter que dans le cas d'un signal discret (ce qui est toujours notre cas) on utilise la transformée discrète en remplaçant tout simplement l'intégrale de 3.1 et 3.2 par une sommation.

Quelques remarques importantes s'imposent à ce stade. Tout d'abord, il est établi que nous analyserons toujours un signal purement réel. Dans ce cas, les $S(\omega)$ seront complexes. Pour évaluer leurs contributions il faut alors comparer leur modules². Une autre propriété fondamentale de (3.2) est qu'étant donné la périodicité de la fonction cosinus et sinus, les modules de la partie positive seront symétriques par rapport à ceux de la partie négative lorsque le signal est purement réel³. Nous avons aussi la même symétrie lorsque le signal est purement complexe. Finalement, si le signal est complexe (mais non purement complexe), alors il n'y a plus de symétrie. Comme nous travaillons toujours avec des signaux purement réels, il est pratique d'afficher uniquement la partie positive lors de représentation graphique.

3.2 Résolution dans le domaine des fréquences

De toute évidence on ne peut calculer l'équation (3.2) pour toutes les valeurs possibles de ω , puisque ce nombre est infini. Il est donc normal de discréteriser ce paramètre.

Supposons que nous avons N valeurs échantillonées s_t d'un signal continu $s(t)$;

$$s_t \equiv t\Delta_{signal}, \quad t = 0, 1, \dots, N - 1,$$

où le pas temporel d'échantillonnage est Δ_{signal} . La transformée de Fourier sera calculée pour les valeurs de ω vérifiant

$$\omega_t = \frac{t}{N\Delta_{signal}}, \quad (3.3)$$

¹Cette équation est appelée la transformée inverse de Fourier

²Module de $a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}$

³La partie positive réfère aux éléments partant de 1 à $\frac{N}{2} - 1$ et la partie négative de $\frac{N}{2} + 1$ à N

où $t = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$, la première moitié étant évidemment la partie négative. Avec N points il est donc possible de produire uniquement N valeurs de $S(\omega)$. Par contre, on remarque que (3.3) produit $N+1$ valeurs, mais il faut tenir compte de la périodicité de la fonction exponentielle complexe qui fait en sorte que $-\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}$ sont égales, ce qui donne donc N valeurs. Il est alors évident que plus N sera grand plus la résolution en fréquence sera petite. Le calcul sera plus précis au niveau de la fréquence, mais prendra aussi plus de temps, puisque la somme (3.2) exigera plus de points s_t et donc plus de $S(\omega)$ à calculer. Le temps de calcul, bien qu'il ne soit pas le seul, est un facteur très important dans le choix de la taille du signal.

L'échantillonnage du spectre de fréquence (3.3) n'est pas toujours constant pour un N donné, puisqu'il dépend aussi de Δ_{signal} . Dans ce travail, 3.3 est normalisé dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, qui est une façon de procéder assez standard. C'est à dire que pour un signal s_t taille N , nous obtiendrons toujours des fréquences ayant la forme

$$\frac{k \cdot 2\pi}{N}$$

où $k = 0, \dots, N-1$. La fréquence de Nyquist, qui est $\frac{N}{2}$, correspond alors à π . Il est beaucoup plus facile de travailler de cette façon plutôt qu'avec les indices 0 à $N-1$ ou l'équation 3.3. Par exemple, la fréquence correspondant à l'indice 2 pour un signal de 512 points est $\frac{2 \cdot 2\pi}{512} = 0.0245$. Pour avoir cette même fréquence avec 1024 points, nous devons regarder l'indice 4, puisqu'il y a deux fois plus de points dans le signal et donc deux fois plus de fréquences. À l'index 2 la fréquence est $\frac{2 \cdot 2\pi}{1024} = 0.01205$.

3.3 Représentation graphique

Puisque les coefficients $S(\omega)$ sont très importants, il est naturel de vouloir les représenter à l'aide un graphique. Or ces derniers sont complexes, il faut donc utiliser leurs modules, que nous appellerons par la suite l'amplitude spectrale ;

$$|S(\omega)| = \sqrt{\Re(S(\omega))^2 + \Im(S(\omega))^2}, \quad (3.4)$$

ou encore, le carré de 3.4

$$|S(\omega)|^2 = \Re(S(\omega))^2 + \Im(S(\omega))^2. \quad (3.5)$$

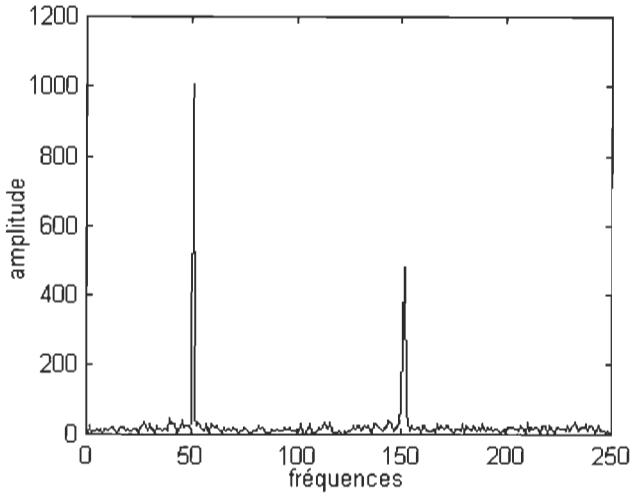


FIG. 3.1 – Représentation en fréquence du signal $s_t = 2\cos(2\pi t50) + \cos(2\pi t150) + bruit$ où $t = 0, 1, \dots, 511$

On utilise (3.5) puisque celui-ci évite le coûteux calcul de la racine carrée. L'équation (3.5) peut être très utile car elle préserve l'ordonnancement de (3.4). S'il faut comparer des amplitudes spectrales, alors aussi bien comparer leur carrés et ainsi sauver un temps de calcul non négligeable.

Cela produit donc un graphique avec en x la valeur ω et $|S(\omega)|$ en y (voir figure 3.1).

3.4 Largeur de bande

Nous définissons la largeur de bande comme étant le nombre de points à gauche et à droite d'un point de référence, normalement un maximum local du spectre des fréquences. Ce nombre n'est pas nécessairement le même des deux cotés. Donc si une fréquence f a une largeur de bande de 10, nous referons aux points compris dans l'intervalle :

$$\left[f - \frac{2\pi k_g}{N}, f + \frac{2\pi k_d}{N} \right]$$

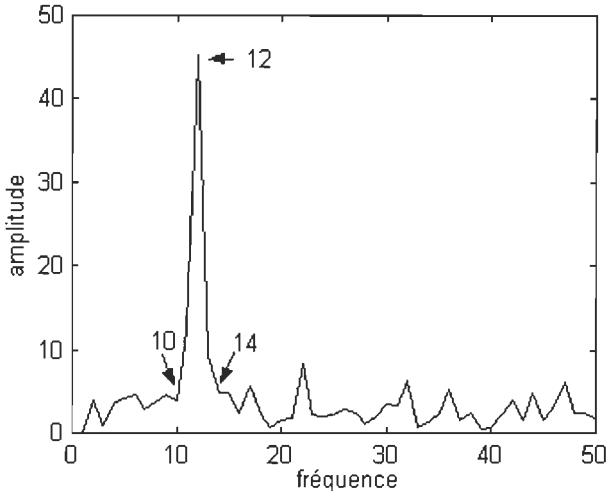


FIG. 3.2 – Transformée de Fourier d'un signal ayant une fréquence 10.7

où k_g et k_d sont le nombre de points à gauche et à droite respectivement. Par exemple, sur le graphique 3.2, la fréquence 10.7 est détectée comme étant la fréquence 12 puisqu'il y a un manque de résolution en fréquence et un bruit élevé par rapport au signal. Le pic ici a sa base aux index 10 et 14, ce qui lui donne une largeur de bande de 4.

3.5 Localisation temporelle

Bien que le calcul d'une transformée de Fourier donne une information sur les fréquences, il est impossible de savoir où exactement se trouve ces harmoniques dans le domaine temporel. Prenons par exemple, le cas d'un signal d'une durée d'une seconde donné par :

$$s_1(t) = \cos(2\pi t 10) \mathbf{1}_{0 \leq t \leq 0.5} + \cos(2\pi t 20) \mathbf{1}_{0.5 < t \leq 1}. \quad (3.6)$$

Ce dernier n'est rien de plus que deux cosinus ayant chacun une harmonique qui lui est propre. La fréquence 10 se trouve dans la première moitié et la fréquence 20 dans la seconde. Effectuer une transformée de Fourier dans l'intervalle $[0,1]$ détectera très bien les deux harmoniques, même si ces fréquences n'existent pas à tout moment dans le signal. Cette information, qui est très

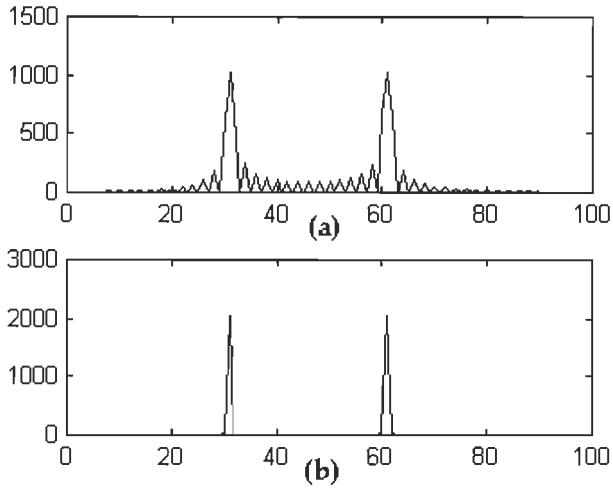


FIG. 3.3 – (a) Signal ayant 2 fréquences séparées dans le temps. b) Signal ayant 2 fréquences présentes à tout moment dans le signal.

importante pour notre problème, n'est pas présente dans la transformée de Fourier. De plus, si nous comparons avec la transformée de Fourier du signal s_2 :

$$s_2(t) = \cos(2\pi t 10) + \cos(2\pi t 20)$$

nous constatons (fig. 3.3) que les deux représentations sont similaires. La différence est qu'en (b) nous obtenons des pics d'une amplitude supérieure localisés aux même valeurs. Il y aura aussi présence de bruit dans le représentation de s_1 , dû à la transition radicale au temps $t = 0.5$.

3.6 Transformée de Fourier à fenêtre

3.6.1 Motivation

À la section 2.4, la technique utilisée pour produire une analyse temps-fréquence est exposée. Maintenant que la méthode pour effectuer chaque analyse est connue, il faut éclaircir quelques points laissés en suspend.

À la figure 2.3, il est montré que pour obtenir un graphique temps-

fréquences, la stratégie est d'effectuer plusieurs analyses centrées aux moments voulus. La localisation temporel des harmoniques obtenues sera alors automatiquement le centre de l'échantillon. Or nous venons de voir qu'il n'est pas possible de savoir où se trouve les harmoniques détectées dans le domaine temporel de l'échantillon. La question est donc de savoir si l'erreur dans le choix d'affecter les fréquences au centre peut fausser les résultats ? Sans trop y penser, nous pouvons conclure qu'il est effectivement incorrect de procéder ainsi. Par contre, il ne faut pas oublier qu'un signal comme 3.6 est un cas théorique et qu'en pratique il est impossible de retrouver un cas semblable dans notre champ d'activité .

3.6.2 Équations

Une transformée de Fourier à fenêtre⁴ est tout simplement une transformée de Fourier d'un signal auquel on a appliqué une fenêtre de lissage [10]. Cette dernière peut avoir plusieurs formes. Des plus courantes, notons :

$$Hanning : \quad w(k) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi k/N) & \text{si } 0 \leq k < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$Kaiser - Bessel : \quad w(k) = \begin{cases} 1 - 1.24 \cos(2\pi k/N) + \\ 0.244 \cos(4\pi k/N) \\ -0.00305 \cos(6\pi k/N) & \text{si } 0 \leq k < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$Flattop : \quad w(k) = \begin{cases} 1 - 1.93 \cos(2\pi k/N) + \\ 1.29 \cos(4\pi k/N) - \\ 0.388 \cos(6\pi k/N) + \\ 0.0332 \cos(8\pi k/N) & \text{si } 0 \leq k < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$Gaussienne : \quad w(k) = \begin{cases} 2^{1/4} e^{-\pi k^2} & \text{si } 0 \leq k < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

Le choix de la fenêtre est très important car celle-ci a des répercussions directes sur le spectre des fréquences. Les résultats pour un même signal

⁴En anglais on retrouve aussi bien l'appellation "windowed Fourier transform" que "short-time Fourier transform"

peuvent être très différents selon la fenêtre utilisée. Ce point sera abordé plus en détail au chapitre 6, mais pour l'instant faisons abstraction de ces propriétés. Une fois la fenêtre définie, la transformée de Fourier à fenêtre s'écrit :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^N w(t)s(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (3.11)$$

L'expression (3.11) correspond à la transformée de Fourier du signal $g(t) = w(t)s(t)$. Remarquons qu'il est aussi possible d'écrire la relation (3.11) comme suit :

$$S(\omega, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^N w(t-u)s(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (3.12)$$

avec

$$t \in [0, N], \quad w(t-u) \neq 0 \Leftrightarrow (t-u) \in [0, N_f - 1],$$

où N est la taille du signal et N_f est la taille de la fenêtre. Le signal sera donc transformé seulement dans l'intervalle $[u, u + N_f - 1]$, puisque dans l'intervalle $[0, u] \cup [u + N_f, N]$ la fenêtre rend le signal nul. La forme (3.12) est plus appropriée pour le cas où le signal est très long et qu'il faut faire plusieurs analyses sur des portions différentes. La forme (3.12) indique aussi que l'application d'une fenêtre peut être interprété comme une convolution entre le signal et la fenêtre.

Fait à remarquer, la transformée d'un signal s avec une fenêtre w peut aussi s'écrire à l'aide d'un produit scalaire. Comme la définition du produit scalaire standard pour deux fonctions a et b est

$$\langle a(t), b(t) \rangle = \int a(t)\overline{b(t)} dt$$

nous pouvons voir que l'équation (3.11) est en réalité le produit scalaire entre $w(t)s(t)$ et $\overline{e^{i\omega t}} = e^{-i\omega}$.

3.6.3 Localisation des fréquences dans le temps

Puisque la transformée à fenêtre est équivalente à une transformée de Fourier, on peut s'attendre à ce que la même conclusion sur la localisation temporelle des fréquences s'applique. En fait il est impossible de dissocier totalement la transformée à fenêtre de la conclusion faite à la section 3.5. La fenêtre permet plutôt de minimiser cet effet, bien qu'il soit toujours présent.

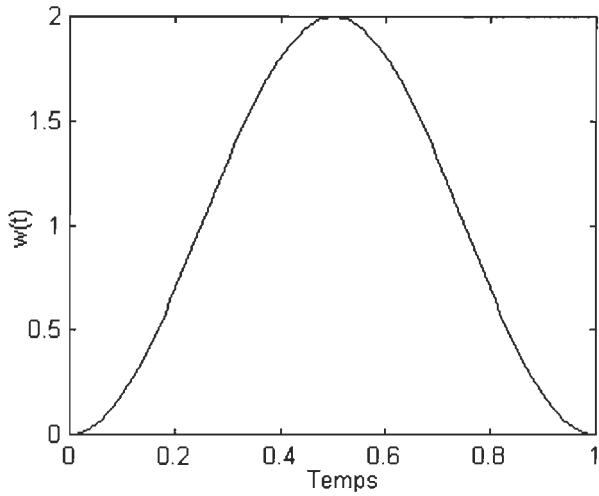


FIG. 3.4 – Représentation de la fenêtre de Hanning

La figure 3.4 présente la forme de la fenêtre d'Hanning. La majorité des fenêtres ont une caractéristique commune, elles ont leur maximum au milieu de l'intervalle ($N_f/2$) et elles décroissent au fur et à mesure que l'on s'approche de 0 ou N. Cette caractéristique donne au signal une forme tel que présenté à la figure 3.5. La fenêtre ne change pas les fréquences du signal, tout ce qui était présent dans $s(t)$ est présent dans $s(t)w(t)$ mais avec une amplitude différente. Par contre, il est facile de remarquer que les oscillations des premiers instant du signal représenté par la figure 3.5 ont une amplitude beaucoup plus faible que celles au milieu de l'intervalle. L'utilité de la fenêtre est de donner plus d'importance aux harmoniques présentes au centre de l'intervalle. Il est alors logique de s'attendre qu'en sélectionnant seulement les fréquences de grandes amplitudes, il y ait plus de chances que celles-ci proviennent du centre.

3.7 Avantages

La rapidité de la transformée de Fourier est incontestablement son plus grand avantage. En utilisant le très célèbre algorithme de la transformée

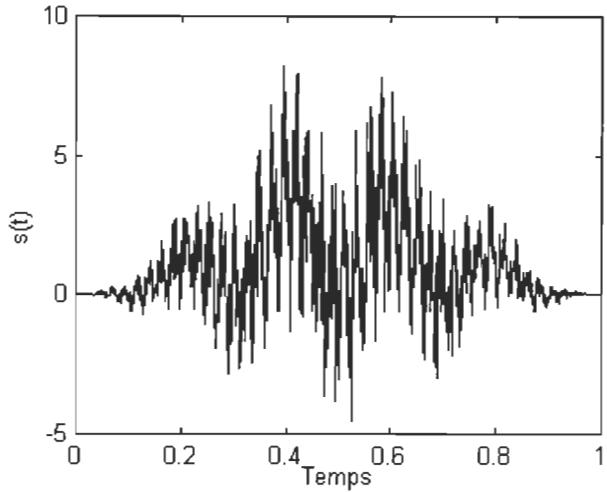


FIG. 3.5 – Un signal lissé par la fenêtre de Hanning

rapide (FFT)⁵ [13, 5], nous obtenons une méthode de résolution qui peut facilement s'utiliser avec des systèmes temps-réel, là où la vitesse est une priorité. En pratique, il n'est pas rare d'analyser des signaux ayant une durée de quelques secondes. Bien que cela peut paraître court, un signal du genre représente plusieurs centaines de milliers de données⁶. La transformée rapide nous permet alors d'obtenir de très bon temps de calculs. Selon la taille de la fenêtre et le pas d'échantillonnage, il est même possible que le temps de calcul soit plus petit que la durée du signal.

Si la FFT est si populaire, c'est aussi dû au fait qu'elle est efficace. Mais comme rien n'est parfait, son efficacité a des limites. Il arrive fréquemment que plusieurs analyses successives sur le même échantillon soient nécessaires pour avoir un résultat sans erreur.⁷. Ce point sera présenté plus en détail au prochain chapitre. L'utilisation de la FFT dans le logiciel TestCenter© se résume à tenter d'optimiser les résultats en choisissant différents paramètres,

⁵Nous utiliserons par la suite l'appellation largement utilisé FFT pour "Fast Fourier Transform"

⁶Bien entendu, cela dépend entièrement de la carte d'acquisition.

⁷Un exemple d'erreur fréquent est de détecter une seule fréquence alors qu'en réalité, il y en a plusieurs très proches l'une des autres.

dont le plus crucial est la taille de la fenêtre.

Le comportement du signal analysé facilite grandement l'analyse. En effet les signaux Doppler de notre domaine d'application ont la caractéristique d'avoir une forme sinusoïdale ne comportant pas de changements brusques, sauf en de rares cas d'exception. Une caractéristique est que les fréquences (bien qu'elles changent constamment)⁸ s'approchent de l'état stationnaire dans des portions de signal plus ou moins petites (tout dépendant de la vitesse de l'object). Il est alors bien connu que la transformée de Fourier est particulièrement performante pour des signaux stationnaires.

⁸Généralement les analyses sont effectuées sur la vitesse de projectiles n'ayant peu ou pas de moyen de propulsion autre que la poussée initiale. Donc il est normal d'avoir une constante accélération ou décélération, ce qui fait que la fréquence change constamment, mais rarement brusquement.

Chapitre 4

Problématique

Ce chapitre expose les problèmes à résoudre pour que notre algorithme puisse être considéré comme étant un succès. Le problème le plus important est sans contredit celui de la taille de l'échantillon à utiliser pour une analyse.

4.1 Choix de la fenêtre

Le premier point qui peut paraître problématique est le choix de la fenêtre. Certaines fenêtres ne répondent pas de la même façon que les autres. Certaines sont très performante pour des cas bien précis alors qu'elles peuvent aussi être extrêmement mauvaises dans d'autre cas. Nous verrons qu'il est par contre possible de choisir une fenêtre pouvant s'adapter facilement à tous nos signaux.

Présentement, l'utilisateur de TestCenter^{copyright} n'a pas la possibilité d'utiliser la fenêtre de son choix. Celle présentement utilisée à l'avantage de convenir à la plupart des signaux. Bien qu'elle ne sera jamais optimale, elle ne peut cependant pas être très mauvaise (nous détaillerons au chapitre 6). Cette stabilité est très importante pour notre algorithme.

4.2 Choix de la taille d'analyse

Si la fréquence d'un signal représente sa vitesse et que l'analyse porte sur des projectiles accélérant ou décélérant constamment, il faut s'attendre à

obtenir des fréquences variant constamment, et ce plus ou moins rapidement dans le temps. Il est par ailleurs démontré que la transformée de Fourier est optimale pour les cas où le signal est stationnaire. Donc si l'analyse porte sur un signal où l'accélération du projectile est très forte, ce dernier ne peut sûrement pas être stationnaire, du moins si la taille de la fenêtre est assez grande. Il y a donc avantage à choisir une petite taille puisque la variation entre les bornes sera plus faible. Si par contre la variation est très lente, il est beaucoup plus avantageux de choisir une grande taille de fenêtre puisque le signal sera à peu près stationnaire. L'avantage de choisir une grande taille est d'obtenir une plus grande résolution en fréquence (section 3.2).

Dû à ses effets majeurs sur le résultat, le choix de la taille est un paramètre qui devient critique. Il est présentement configurable par l'usager dans la version actuelle de TestCenter©. Cela présente un grand désavantage car bien qu'il peut être changé d'un échantillon de signal à l'autre, il demeure fixe pour le traitement d'un échantillon. Pour bien détecter des fréquences ayant une variation très rapide, il faut absolument utiliser une fenêtre de petite taille. Si dans le même signal, en plus d'une variation rapide, il y a des fréquences stables près l'une de l'autre (fig. 4.1), une fenêtre de petite taille ne possédera pas une résolution en fréquence assez grande pour séparer les harmoniques. L'unique solution est alors d'effectuer deux analyses distinctes sur la même portion du signal, la deuxième analyse ayant une taille de fenêtre plus grande. En plus de compliquer l'analyse, ceci est un handicap majeur puisqu'il vient complètement détruire la philosophie "temps-réel". C'est donc dire que pour faire du temps-réel, il faut payer le prix de ne pas obtenir l'information de manière optimale.

L'exemple de la figure 4.1 est classique. C'est surtout ce genre de signal qui pose des problèmes. Cela complique de beaucoup l'analyse puisque les utilisateurs doivent travailler avec deux représentations en fréquences différentes pour un même signal. Plusieurs problèmes surviennent aussi lors de la formation des futurs utilisateurs du logiciel TestCenter©. Ils doivent bien comprendre le phénomène pour extraire l'information qu'ils désirent.

Pour un utilisateur averti, il est possible de bien analyser les signaux, mais au prix de faire plusieurs analyses. Par contre pour des utilisateurs moins bien entraînés, la difficulté sera accrue et de plus, les possibilités d'erreurs humaines se trouvent augmentées. Ceci fait en sorte que le programme est beaucoup plus difficile à utiliser correctement et entraîne nécessairement pour

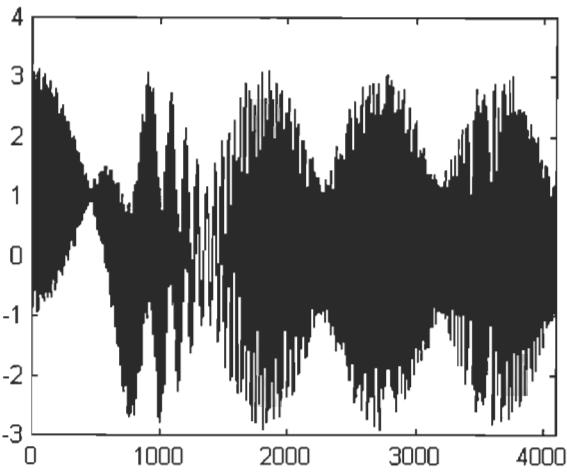


FIG. 4.1 – Signal comportant une fréquence variant rapidement et deux fréquences près l'une de l'autre et ne variant pas.

les gens d'Infinition des heures non productives dédiées au support technique.

4.3 Résumé de la problématique

Pour résumer les besoins d'Infinition, voici en quelques points les désavantages que présente l'analyse temps-fréquence par la transformée de Fourier à fenêtres :

1. difficile à utiliser dû à la spécification des paramètres ;
2. plusieurs contraintes dû à la nature des signaux. Il arrive souvent de devoir faire plusieurs analyses pour un seul signal ;
3. augmentation des possibilités d'erreurs humaines et de fausses interprétations ;
4. plusieurs paramètres à spécifier ;
5. le fait d'avoir plusieurs analyses à faire détruit le principe de temps-réel.

Nous présentons dans ce mémoire une approche qui nous permettra de résoudre ces problèmes. En voici les particularités :

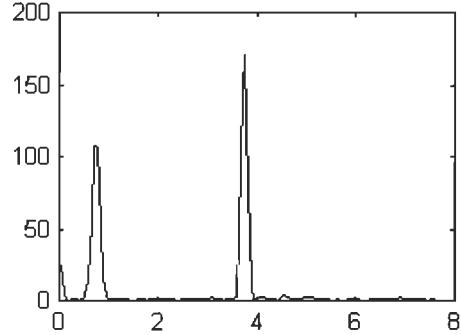


FIG. 4.2 – Transformée de Fourier du signal 4.1 avec une échelle de 256. Nous voyons que la fréquence 0.75 a bien été détectée, mais il manque de résolution pour séparer les fréquences 3.75 et 3.77.

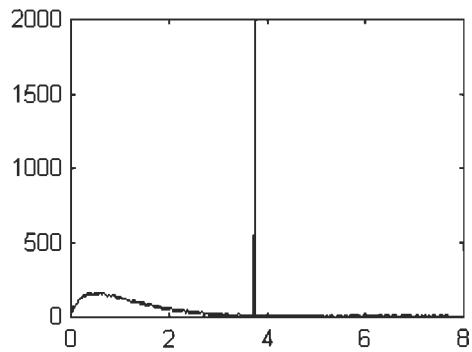


FIG. 4.3 – Les fréquences 3.75 et 3.77 ont bien été détectées à l'échelle 4096, mais la largeur de bande de la composante variant rapidement est très grande.

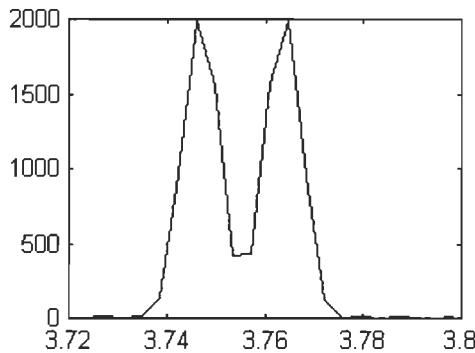


FIG. 4.4 – Zoom sur les deux fréquences rapprochées de la figure 4.3

1. facile d'utilisation ;
2. aucune contraintes ; l'algorithme s'adapte automatiquement à tous les types de signaux. *une seule analyse* ;
3. la possibilité d'erreur humaine est supprimée ;
4. un minimum de paramètres à spécifier ; c'est à dire seulement ceux qui sont absolument nécessaires ;
5. puisqu'il y a maintenant qu'une seule analyse, le principe de temps-réel peut s'appliquer à condition que l'algorithme soit plus rapide que le délai souhaité.

Bref nous proposons une méthodologie basée sur la transformée de Fourier adaptée aux signaux. Pour s'adapter, il doit y avoir une caractéristique vitale : les tailles d'analyses doivent pouvoir varier à l'intérieur d'une même analyse. Comme l'usager n'a pas de contrôle sur l'analyse, les tailles doivent être choisies automatiquement de façon à sélectionner, pour chaque harmonique, la taille optimale. La première solution proposée fut la poursuite adaptative [16] présentée au chapitre 5. Bien qu'elle semblait à première vue une solution idéale, cette approche a été modifiée pour arriver à la solution que nous nommerons : transformée de Fourier multi-échelle.

Chapitre 5

Poursuite adaptative

La technique de poursuite adaptative ou "matching pursuit" de son nom original anglais, fut publiée pour la première fois par Mallat et Zhang [16]. L'idée de la poursuite adaptative est de décomposer un signal en un développement linéaire de signaux simples. Il existe plusieurs algorithmes semblables utilisant une approximation non linéaire pour atteindre ce but [19, 12, 3]. Par ailleurs, un rapprochement peut être fait avec un algorithme du domaine des statistiques appelé "projection pursuit regression" [11] utilisé pour l'estimation de paramètres. Le choix de l'algorithme de poursuite adaptative a été fait par Infinition suite à une étude de faisabilité qui démontrait le potentiel de cette technique appliquée aux signaux traités par la compagnie.

La différence avec la transformée de Fourier est que les structures du signal sont sélectionnées à partir d'un ensemble redondant de fonctions appelé dictionnaire. Ces fonctions, que nous appellerons atomes, sont construites à partir de trois paramètres. Ce choix fait en sorte que l'éventail des formes et des tailles disponibles est beaucoup plus grand que dans le cas d'une transformée de Fourier. Il en résulte une possibilité d'adaptation très puissante.

5.1 Dictionnaire

Le dictionnaire n'est rien de plus qu'un ensemble de fonctions. Sous cet angle, un parallèle peut être fait avec les résultats obtenus à l'aide d'une transformée de Fourier qui appartiennent aussi à un ensemble. Dans ce der-

nier cas, l'ensemble des fonctions sont de la forme

$$g_\omega(t) = S(\omega)e^{i\omega t},$$

que nous appellerons la base de Fourier.

5.1.1 Dictionnaire complexe

Le dictionnaire complexe, que nous noterons \mathcal{D} se compose de tous les atomes ayant la forme suivante :

$$g_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\xi t}, \quad (5.1)$$

où $g \in L^2$ est une fonction symétrique centrée à u . Cette fonction joue le même rôle que la fenêtre de la transformée de Fourier vue à la section 3.6. Généralement, une fonction de type gaussienne est utilisée. Dans [16], on utilise 5.2 alors que dans [17], 5.3 est utilisée ; soit

$$g(t) = 2^{0.25} e^{-\pi t^2} \quad (5.2)$$

et

$$g(t) = \frac{1}{\pi^{0.25}} e^{-t^2/2}. \quad (5.3)$$

Il faut noter que le facteur multiplicatif $\frac{1}{\sqrt{s}}$ de l'équation (5.1) normalise la norme de $g(t)$ à 1, ce qui est important lorsqu'on travail avec plusieurs échelles différentes.

On notera $\gamma = (s, u, \xi)$, l'ensemble des trois paramètres de l'atome (5.1). Le paramètre s , est le paramètre d'échelle ou la taille de la portion analysé du signal. Il est clair que ce nombre est un entier variant dans l'intervalle $[1, N]$, où N est la taille du signal. L'atome sera centré au temps u du signal et ses valeurs possibles sont les mêmes que s , soit $[1, N]$. Finalement, ξ dénote la fréquence de la fonction. Il est commode de travailler avec une fréquence variant entre 0 et 2π , c'est à dire dans l'intervalle $\left[\frac{0 \cdot 2\pi}{s}, \frac{s \cdot 2\pi}{s}\right]$.

L'ajout de s et de u fait en sorte que la poursuite sera beaucoup plus flexible quant au choix de l'atome par rapport à la transformée de Fourier. Cette dernière souffrait du fait que le paramètre d'échelle s était fixé à la taille de l'analyse. Tous les atomes avaient aussi le même u qui était le centre du signal analysé.

5.1.2 Dictionnaire réel

Le dictionnaire réel, noté \mathcal{D}_θ , est lié aux atomes complexes. Il comprend toutes les fonctions de la forme

$$g_{(\gamma,\theta)}(t) = \frac{K_{(\gamma,\theta)}}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) \cos(\xi t + \theta). \quad (5.4)$$

où le facteur $\frac{K_{(\gamma,\theta)}}{\sqrt{s}}$ est calculé de façon à ce que $\| g_{(\gamma,\theta)} \| = 1$. L'atome (5.4) est tout simplement la partie réelle de 5.1 à laquelle le paramètre θ a été ajouté au cosinus. À noter que θ est appelé le paramètre de phase. La fonction étant réelle, il est possible de représenter graphiquement ce type d'atome (voir figure 5.1).

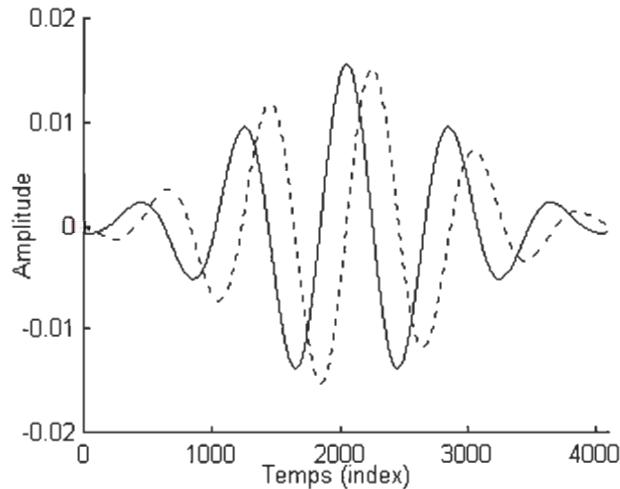


FIG. 5.1 – Représentation de deux atomes réels. Le premier (ligne continue) est construit avec les paramètres $\gamma = (s = 4096, u = 2048, \xi = \frac{50\pi}{4096}, \theta = \pi)$ et l'autre (ligne pointillée) a les mêmes paramètres sauf que la phase est de $\frac{\pi}{2}$.

La phase est très importante. Si les deux atomes de la figure 5.1 sont soustraient l'un de l'autre, il est facile de voir que le résultat ne sera pas nul et ce même si c'est deux fonctions ont la même fréquence, le même temps et la même échelle.

5.1.3 Échantillonnage du dictionnaire

Avec ce choix de paramètres, le dictionnaire peut donc contenir un très grand nombre d'atomes. Comme ce nombre sera beaucoup trop grand pour que les calculs puissent se faire dans des temps raisonnables, il est impératif d'échantillonner \mathcal{D} . Le dictionnaire résultant sera noté \mathcal{D}^+ . Ce sous-ensemble de \mathcal{D} comporte tous les atomes ayant les paramètres $\gamma = (a^j, pa^j\Delta u, \frac{k\Delta\xi}{a^j})$, avec $a = 2, \Delta u = 1/2, \Delta\xi = \pi, 0 < j < \log_2 N, 0 \leq p < N2^{-j+1}$ et $0 \leq k < 2^{j+1}$. À ceci ajoutons la base de Fourier qui est l'ensemble $(N, N/2, \frac{k\Delta\xi}{a^j})$ et la base de Dirac qui regroupe tous les atomes ayant une échelle de 1. La cardinalité de \mathcal{D}^+ est alors $O(N \log_2 N)$. Ce sous ensemble possède certaines particularités importantes énoncées dans ??.

Évidemment, en ayant un sous ensemble de \mathcal{D} , il est presque toujours certain que l'atome optimal ne sera pas choisi étant donné le nombre restreint d'éléments. Les atomes de \mathcal{D}^+ sont utilisés pour faire un premier calcul. Lorsque le meilleur est trouvé parmi \mathcal{D}^+ , il suffit de faire une seconde recherche en incluant seulement les atomes de son voisinage¹. En procédant par un algorithme de recherche d'un maximum, il est possible de trouver une bonne approximation de l'atome optimal dans \mathcal{D} .

5.2 Principe général

Le concept de la poursuite est assez simpliste. La poursuite est un algorithme vorace qui choisit à chaque itération l'atome le plus adapté à la portion de signal analysée.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, le but est d'obtenir un développement linéaire de f à partir d'un ensemble de vecteurs appartenant à \mathcal{D} , de façon à obtenir la meilleure approximation possible de ses structures de fréquences. Ceci est réalisé par des approximations successives de f en utilisant des projections orthogonales sur les éléments de \mathcal{D} . Soit $g_{\gamma_k} \in \mathcal{D}$, le vecteur f peut être décomposé dans la direction de g_{γ_k}

$$f = \langle f, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k} + Rf \quad (5.5)$$

¹Il n'y a pas de règle sur la taille du voisinage.

où $Rf = f - \langle f, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k}$ est le résidu après l'approximation de f dans la direction de g_{γ_k} . Cet atome est celui qui vérifie

$$g_{\gamma_k} = \operatorname{argmax}_{\gamma \in \mathcal{D}} |\langle f, g_\gamma \rangle| \quad (5.6)$$

Le résidu peut lui aussi être décomposé de la même façon. Cette nouvelle étape donnera un deuxième résidu qui sera encore décomposé et ainsi de suite. Nous pouvons alors écrire

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k} \quad (5.7)$$

où $Rf^0 = f$ et Rf^i est le résidu à l'itération i . En pratique, ces itérations ne peuvent pas se poursuivre indéfiniment car il faut arrêter (5.7) à un certain point, c'est-à-dire que l'on pose :

$$f = \sum_{i=0}^M \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k} + Rf^i. \quad (5.8)$$

Le résidu de la dernière itération devrait normalement (si M est assez grand) représenter le bruit du signal. Puisque cette information n'a pas d'intérêt dans notre application, l'approximation de f est donnée par :

$$f \simeq \sum_{i=0}^M \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k}. \quad (5.9)$$

L'équation de la poursuite (5.9) comporte $M+1$ itérations. Ce nombre peut varier selon le signal analysé. En général, l'algorithme se poursuit tant que le résidu n'est pas assez petit (voir section 5.4.5).

Le problème consiste à calculer ces quantités, ce qui laisse place à beaucoup d'optimisation. Si l'équation 5.9 est appliquée brutalement sur un signal comportant N données et avec le dictionnaire \mathcal{D}^+ défini auparavant, le nombre d'opérations à effectuer à chaque itération est extrêmement grand. En fait cette approche ne peut pas être envisageable lorsque la taille du signal devient moindrement grande².

²Une taille de 1024 est amplement suffisante pour affirmer que l'algorithme sera trop lent.

5.3 Algorithme général

Voici comment se déroule la poursuite.

1. *Calcul de tous les produits scalaires avec les atomes complexes*, i.e. $\langle Rf^i, g_\gamma \rangle \forall \gamma \in \mathcal{D}^+$. Ceci donne une valeur complexe pour chaque atome.
2. *Sélection du meilleur atome complexe*. L'atome optimal, défini par (5.6), est celui qui minimise le résidu. Il est équivalent de calculer

$$\operatorname{argmax}_\gamma |\langle Rf^i, g_\gamma \rangle|^2.$$

Le fait de mettre à la puissance 2 élimine le coûteux calcul de la racine carrée.

3. *Passage à l'atome réel*. Il est trivial de passer à l'atome réel puisqu'il suffit simplement d'ajouter le paramètre de phase θ_k au trois autres paramètres calculés à l'étape 2.

$$\theta_k = \tan^{-1} \frac{\Im \langle Rf^i, g_\gamma \rangle}{\Re \langle Rf^i, g_\gamma \rangle} \quad (5.10)$$

Cette formulation est proposée dans [16]. Or on a démontré dans [17] que cette façon de faire ne nous permet pas de trouver l'atome réel optimal et donne l'erreur commise. Cependant, la perte est très minime pour la plupart de atomes.

4. *Mise à jour du résidu*. Nous pourrions directement soustraire points à points l'atome réel au signal et ensuite recalculer les produits scalaires. Or cette façon n'est pas optimale au point de vue complexité algorithmique. Il existe une formule rapide pour calculer les produits scalaires qui serviront à l'itération suivante.

$$\langle Rf^{i+1}, g_\gamma \rangle = \langle Rf^i, g_\gamma \rangle - \langle Rf^i, g_{(\gamma_k, \theta_k)} \rangle \langle g_{(\gamma_k, \theta_k)}, g_{\gamma_k} \rangle \quad (5.11)$$

Cette formule utilise en autre le produit scalaire entre l'atome réel et complexe, qui est la seule quantité inconnue. Ce calcul peut ce faire à l'aide d'une formule analytique ([16]) qui rend la mise à jour négligeable ($O(1)$) dans la complexité de l'algorithme.

5. *Calculer l'énergie restante*. L'énergie présente dans un signal f peut-être obtenu par la formule

$$E = \| f \| = \sum_{i=1}^N |f_i|^2. \quad (5.12)$$

De la même façon, nous pouvons calculer l'énergie d'un atome. Il reste alors qu'à soustraire la quantité d'énergie de l'atome à l'équation (5.12). En généralisant pour une itération quelconque, l'énergie à l'étape i est définie par la relation :

$$E^i = \| f \| - \sum_{i=1}^{s_k} |\langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle|^2 \quad (5.13)$$

Afin d'exprimer l'erreur (5.13) en pourcentage, il suffit diviser cette quantité par $\| f \|$.

6. *Condition d'arrêt.* La condition d'arrêt la plus naturelle est basée sur le niveau d'énergie restant dans le signal. S'il est exprimé en pourcentage, alors il devient facile de fixer un seuil en-dessous duquel l'algorithme se termine. Par précaution, il est aussi sage d'imposer une limite sur le nombre maximum d'itérations. Cette limite est arbitraire et il n'y a pas de moyen optimal de la fixer. Par contre, une bonne connaissance a priori des signaux analysés peut fournir un bon indice.

Si la condition d'arrêt est rencontrée, on termine les itérations, sinon on retourne à 2.

5.4 Algorithme détaillé

5.4.1 Calcul des produits scalaires avec les atomes complexes

Le calcul du produit scalaire standard

$$\begin{aligned} \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle &= \sum_{j=1}^{s_i} Rf_j^i \cdot \overline{g_{\gamma_k j}} \\ &= \sum_{j=1}^{s_i} Rf_j^i \cdot (\Re g_{\gamma_k j} - \Im g_{\gamma_k j}) \\ &= \sum_{j=1}^{s_i} Rf_j^i \cdot \Re g_{\gamma_k j} - \sum_{j=1}^{s_i} Rf_j^i \cdot \Im g_{\gamma_k j} \end{aligned} \quad (5.14)$$

est la partie critique de l'algorithme. Lorsque $s_i = N$, ces deux sommes auront une complexité $O(N^2)$. Il faut aussi tenir compte que ces sommes

sont calculées pour tous les atomes de \mathcal{D}^+ . Cette solution est évidemment très lente lorsque N devient moindrement grand.

Afin de réduire la complexité du calcul, notons d'abord que l'atome complexe (5.1) peut se décomposer en deux parties ; l'exponentielle complexe et la fonction de lissage ;

$$\left[\frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) \right] \cdot [e^{i\xi t}] = w_{\gamma_k}(t) \cdot e^{i\xi t}. \quad (5.15)$$

Si on remplace (5.15) dans (5.5), alors nous obtenons que

$$\begin{aligned} f &= \langle f, w_{\gamma_k}(t) e^{i\xi t} \rangle g_{\gamma_k} + Rf, \\ &= g_{\gamma_k} \sum_{t=1}^N w_{\gamma_k}(t) f e^{i\xi t}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ce qui est, à un facteur près, l'équation (3.11) de la transformée de Fourier à fenêtres. Or, l'équation (5.16) est écrit pour l'atome g_{γ_k} avec $\gamma_k = (s_k, u_k, \xi_k)$. La transformée de Fourier donne N harmoniques correspondant à N fréquences différentes. Il se trouve que nous avons échantillonné \mathcal{D}^+ de tel façon que les fréquences soient discriminées de la même manière que la transformée de Fourier rapide. C'est donc dire qu'il est possible d'utiliser ce moyen puissant pour calculer les produits scalaires pour toutes les fréquences ξ d'une échelle et d'un temps donné.

La complexité est alors d'ordre $O(s_k \log s_k)$ pour le calcul d'un produit scalaire. En réalité, les atomes ne sont pas tous de la même taille, nous passons de l'échelle $s = 1$ à $s = N$ de manière dyadique. La complexité pour tous les atomes de \mathcal{D}^+ est donc de $\log N$ fois celle du coût d'une transformée de Fourier, soit $\log_2 N \cdot N \log_2 N$. Ce qui nous donne $O(N \log_2^2 N)$, comparativement à $O(N^2 \log_2 N)$ pour le calcul de (5.14).

5.4.2 Sélection du meilleur atome complexe

Tel qu'expliqué à la section 5.3, il suffit de parcourir tous les produits scalaires et de choisir le maximum. La complexité est donc la même que le nombre d'atome, soit $O(N \log_2 N)$.

5.4.3 Passage à l'atome réel

En prenant pour acquis la formule (5.10), le passage à l'atome réel est une simple formalité. Cependant, ce paramètre est très important puisqu'il a une répercussion directe sur la qualité de la mise à jour du résidu. Voici un exemple simple d'un signal stationnaire exempt de bruit ayant une fréquence de 20 (fig. 5.4.3). Le meilleur atome réel est $g_{(\gamma_k, \theta_k)} = (N, N/2, \frac{20 \cdot 2\pi}{N}, 0)$. La

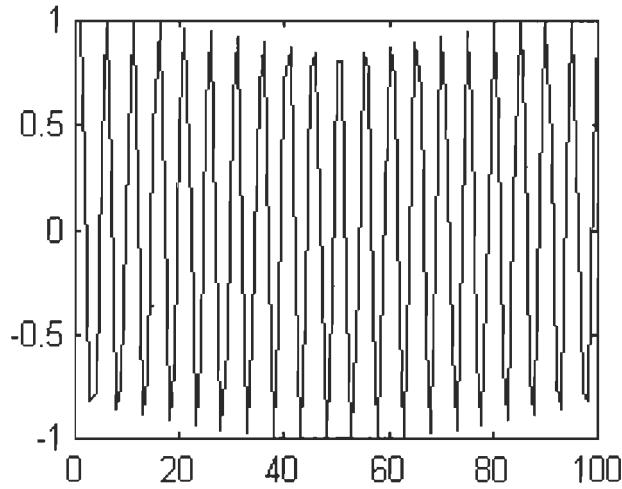


FIG. 5.2 – Signal stationnaire ayant une fréquence de 20 cycles par seconde.

figure 5.4.3 montre le signal obtenu en soustrayant point à point le meilleur atome (a) et un atome ayant une petite différence au niveau du paramètre de phase (b).

Il apparaît évident que le paramètre de phase doit être précis, sinon le signal ne s'annulera pas correctement. Dans les cas où l'erreur serait plus grande, la soustraction résulterait d'un ajout de bruit au signal plutôt qu'une annulation de la fréquence visée.

5.4.4 Mise à jour du résidu

La mise à jour du résidu peut devenir aussi complexe que le calcul initial des produits scalaires si nous ne disposons pas de la formule (5.11). Cette

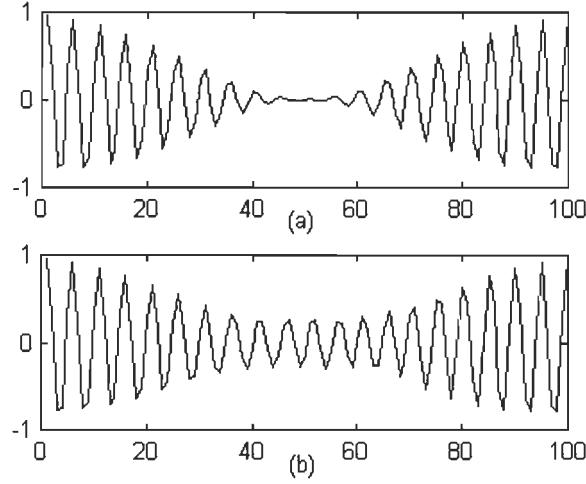


FIG. 5.3 – (a) Signal résultant d'une soustraction point à point de l'atome $g_{(\gamma_k, \theta_k)} = (N, N/2, \frac{20 \cdot 2\pi}{N}, 0)$ avec le signal 5.4.3). (b) Même atome que (a) sauf pour la phase qui est 0.3.

dernière permet de faire le calcul rapidement. À partir de l'équation (5.5) et en généralisant pour une itération quelconque, nous avons que ;

$$R^{i+1}f = R^i f - \langle R^i f, g_{(\gamma_k, \theta_k)} \rangle g_{(\gamma_k, \theta_k)}.$$

Trouver le produit scalaire (5.11) de $R^{i+1}f$ avec les g_γ se déduit alors facilement ;

$$\begin{aligned} \langle R^{i+1}f, g_\gamma \rangle &= \langle R^i f - \langle R^i f, g_{(\gamma_k, \theta_k)} \rangle g_{(\gamma_k, \theta_k)}, g_\gamma \rangle \\ &= \langle R^i f, g_\gamma \rangle - \langle \langle R^i f, g_{(\gamma_k, \theta_k)} \rangle g_{(\gamma_k, \theta_k)}, g_\gamma \rangle \\ &= \langle R^i f, g_\gamma \rangle - \langle R^i f, g_{(\gamma_k, \theta_k)} \rangle \langle g_{(\gamma_k, \theta_k)}, g_\gamma \rangle. \end{aligned}$$

Il reste un seule inconnue qui est le produit scalaire entre l'atome réel et tous les atomes complexes ([16], [17]). Comme son développement est long et fastidieux, cette formule ne sera pas présentée ici.

5.4.5 Condition d'arrêt

L'algorithme comportant un nombre indéterminé d'itérations, il faut établir un critère d'arrêt. La règle générale est de faire des itérations jusqu'à ce que le résidu soit assez petit pour que les structures valables contenues dans le signal aient été extraites. Bref, il doit ne rester que le bruit, qui peut provenir de différentes sources externes.

La méthode présentée à la section 5.3 donne bien le résultat escompté. Le problème est que ce calcul est coûteux puisque nous devons faire à chaque itération une somme dépendant de la taille de l'atome. Bien que la condition d'arrêt soit importante, il n'est pas souhaitable de passer beaucoup de temps à calculer cette quantité.

Puisque g_{γ_k} est orthogonal à Rf et que $\| g_{\gamma_k} \| = 1$, nous avons ;

$$\begin{aligned}\| Rf^i \|^2 &= \| \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k} + Rf^{i+1} \|^2 \\ &= \| \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle g_{\gamma_k} \|^2 + \| Rf^{i+1} \|^2 \\ &= | \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle |^2 \| g_{\gamma_k} \|^2 + \| Rf^{i+1} \|^2 \\ &= | \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle |^2 + \| Rf^{i+1} \|^2.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Pour calculer l'énergie restante à l'itération m , la formule suivante est utilisée ;

$$E_m = \| f \|^2 - \sum_{i=1}^m | \langle Rf^i, g_{\gamma_k} \rangle |^2 \quad (5.18)$$

La formule (5.18) nous permet de calculer l'énergie restante avec une seule soustraction en $O(1)$ puisque le produit scalaire requis est déjà calculé.

5.5 Poursuite de "Ridge"

Un fait très important à remarquer dans la théorie présentée jusqu'ici, c'est que tous les atomes de \mathcal{D} ont une fréquence constante. Ce sont donc tous des signaux stationnaires alors qu'en pratique ce n'est jamais le cas dans notre application. Ceci est un problème non négligeable lorsque les harmoniques des signaux analysés augmentent ou diminuent rapidement à

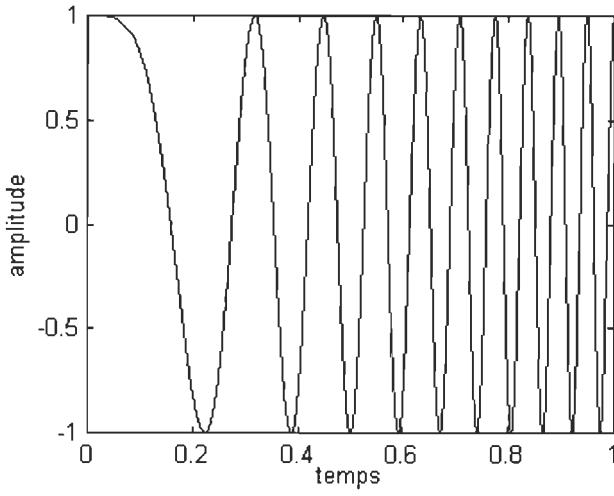


FIG. 5.4 – La fréquence de départ est 6 cycles secondes et elle va en augmentant tout au long de la durée de vie du signal. Il n'existe pas d'atome appartenant à \mathcal{D} pouvant bien représenter cette structure.

l'intérieur de la fenêtre d'analyse. Il est alors impossible de trouver un seul atome pour décrire une de ces structures (fig. 5.5).

Ce point peut devenir un problème important, surtout avec les signaux obtenus à l'aide d'un radar à effet Doppler où les fréquences augmentent et/ou diminuent constamment. La solution est d'ajouter un quatrième paramètre (appelé le paramètre de chirp) à γ . Ce problème a d'abord été étudié dans [14] qui propose des atomes chirpés, mais [1, 2] à été le premier à suggérer d'utiliser l'algorithme de la poursuite adaptative avec ces atomes. Ensuite, [17, 18] propose une méthode rapide pour le calcul de la poursuite. Ces atomes sont regroupés dans le dictionnaire que l'on note \mathcal{D}^+ . Définissons ;

$$\gamma_c = (s, u, \xi, c)$$

où c est le paramètre de chirp. Gribonval ([18]) propose l'échantillonnage du paramètre c par $c = la^{-2j}\Delta c$, où l est un nombre naturel³. L'équation de

³a j sont définis de la même manière que lors de la définition de γ

l'atome devient

$$g_{\gamma_c} = \frac{1}{\sqrt{s}} g \left(\frac{t-u}{s} \right) e^{i(\xi(t-u)+\frac{c}{2}(t-u)^2)}. \quad (5.19)$$

Avec la discréétisation proposé par [18] pour le paramètre c , le nombre d'atomes passe de $O(N \log_2 N)$ pour \mathcal{D}^+ à $O(N^2)$ pour \mathcal{D}_c^+ . Cet ajout vient donc complexifier la poursuite d'un facteur très important si la méthode décrite à la section 5.4 est utilisée.

Pour alléger l'algorithme et par le fait même réduire les temps de calculs, l'algorithme rapide de Gribonval propose une méthode simple pour obtenir le paramètre c sans devoir calculer tous les produits scalaires entre le signal et les atomes de \mathcal{D}_c^+ . En réalité, les produits scalaires sont calculés avec les atomes de \mathcal{D}^+ et suite à la sélection du meilleur atome complexe, le paramètre c est obtenu à l'aide d'une approximation en $O(1)$. Ceci n'ajoute donc pas de complexité à la poursuite.

Même si cette technique semble, à première vue, bien adaptée à nos signaux, elle n'a cependant jamais été testée. Dû à la représentation graphique que le logiciel TestCenter© utilise, l'ajout de ce paramètre n'aurait pas permis d'ajouter quelque information visuelle que ce soit. Les seules informations qui sont vraiment utilisées sont la fréquence et le temps (puisque la localisation est toujours le centre). L'utilité du paramètre de chirp réside principalement dans la mise à jour des produits scalaires, laquelle sera alors plus précise. Comme cette solution est arrivée tardivement dans notre processus de développement, seulement quelques tests de faisabilité ont été effectués. Nous n'avons pas jugé utile de poursuivre avec l'algorithme de poursuite tel qu'il est présenté puisque nous nous étions déjà engagé sur une autre voie.

5.6 Exemple

Les résultats qui suivent ont été obtenus grâce à un programme nommé "Guimauve" [9], qui est en réalité une interface graphique utilisant en grande partie les algorithmes du logiciel "LastWave" [7]. Le code source pour ces deux logiciels est disponible sur internet. Un signal théorique fut construit de manière à ce que différentes fréquences de durées variables soient présentes à des moments différents. Nous avons dans ce signal de 4096 points, 5 structures prédominantes ainsi que du bruit. Ces structures sont :

- une Dirac centrée à $t = 75$;
- un cosinus de fréquence 0.2071, s'étalant entre 100 et 450 ;
- un cosinus de fréquence 0.9204, s'étalant entre 500 et 2500 ;
- un cosinus de fréquence 0.9281, s'étalant entre 1000 et 2000 ;
- un cosinus de fréquence 3.1032, s'étalant entre 2000 et 3000 ;
- un signal ayant une fréquence augmentant constamment entre 3585 et 4096.

Le programme trouve adéquatement les structures du signal, mais trouve aussi beaucoup trop de structures inutiles. Voici le résumé des résultats obtenus :

- L'impulsion de Dirac est le 42ième atome trouvé au temps $t = 74$.
- D'autres Dirac sont aussi trouvées aux positions 500, 998 et 3584. À ces positions, correspondent des transitions brusques dans les structures du signal. Idéalement, il serait souhaité de les ignorer.
- L'atome de fréquence 0.2071 est trouvé trois fois avec des γ de : ($s = 512, t = 256, \xi = 0.207156$), (256, 384, 0.207024) et (128, 128, 0.204517).
- Pour les deux structures à 0.9204 et 0.9281, il y a pas moins de 19 atomes différent parmi les 50 premiers, dont 6 parmi les 10 premiers.
- Il y a 11 atomes détectés à une fréquence étant près de 3.1032. Les γ des trois premiers sont : (2048, 3072, 3.103196), (2048, 2048, 3.1035) et (1024, 2560, 3.10311).

On remarque qu'il y a trop d'information dans le résultat de la poursuite. De plus les atomes sont redondants, c'est-à-dire que plusieurs atomes semblables représentant en réalité une seule structure sont choisis. Le défi revient donc à traiter ces résultats pour n'en retirer que ce qui est utile, ce qui n'est pas toujours évident. Il est clair, à la lumière de cet exemple, que la technique de la poursuite adaptative ne convient pas à nos besoins.

5.7 Problèmes rencontrés

Il y a deux problèmes principaux qui ont été déterminant dans la décision de transformer l'algorithme de la poursuite adaptative. Le premier est la difficulté d'obtenir une mise à jour efficace et le deuxième est la rapidité d'exécution de l'algorithme.

Il est signalé à la section 5.4.3 que le paramètre de phase était un facteur

important de la réussite d'une mise à jour. La figure présentée montre bien que même si l'erreur dans ce paramètre est très petite, il est impossible d'annuler complètement la fréquence présente. Il nous a donc été impossible de réussir une mise à jour efficace. Deux raisons principales peuvent expliquer cet échec.

1. La recherche de l'atome optimal était limité au domaine \mathcal{D}^+ . Normalement, un raffinement dans \mathcal{D} doit être fait, mais le temps nécessaire était jugé beaucoup trop grand. Avec un raffinement, il aurait été impossible de développer un algorithme rencontrant nos critères au niveau de la rapidité.
2. Les harmoniques n'étaient pas constantes. C'est à dire que les fréquences augmentent ou diminuent progressivement tout au long de la durée de vie du signal.

L'autre problème est aussi important que le premier. La vitesse d'exécution est critique pour un logiciel à but commercial. Les temps obtenus avant le changement de méthodologie étaient beaucoup trop lents. La mise à jour demandait un grand nombre d'opérations, alors nous devions trouver un moyen plus efficace d'effectuer cette étape.

Nous avons conclue que l'algorithme recherché devrait posséder les caractéristiques suivante :

- il possède un dictionnaire qui permettant de choisir parmi des échelles différentes ;
- puisque la localisation de l'atome à l'intérieur d'une analyse n'est pas très important, tous les atomes choisis devraient être affectés au milieu de l'intervalle ;
- la mise à jour du dictionnaire doit être très simple et très rapide ;
- il doit y avoir un critère d'arrêt qui renseigne sur l'importance des atomes choisis. Si cette importance est très petite, alors l'atome peut être considéré comme étant du bruit et alors arrêter les itérations.

À partir de ces critères, nous avons développé l'algorithme présenté au chapitre suivant : la transformée de Fourier multi-échelle.

Chapitre 6

Transformée de fourier multi-échelle

Dans ce chapitre, nous présentons notre alternative à la poursuite adaptative. Pour des raisons évidentes, il est clair qu'il est impossible de développer un produit commercialement viable pour Infinition en suivant la théorie de la poursuite adaptative rigoureusement. Certaines modifications importantes doivent donc être apportées pour en arriver au produit final.

Évidemment, pour des raisons de concurrence impliquant d'autres entreprises, il est impossible de décrire dans cet ouvrage la technique dans ses moindres détails. Les grandes lignes y sont présentées, mais les détails techniques quant à l'implantation se trouvent dans [8], un document interne d'Infinition.

Ce chapitre présente des notions importantes qui sont trop souvent mises de coté par les utilisateurs de la transformée de Fourier. Afin d'utiliser optimalement cette théorie, il faut bien comprendre certains détails. Plus particulièrement, les effets de la fenêtre et de la taille d'analyse sont étudiés en profondeur dans les deux prochaines sections. Une fois la théorie expliquée, nous discuterons de l'augmentation des performance (au niveau de la complexité algorithmique), pour en conclure avec l'algorithme final.

6.1 Effet de la fenêtre

La fenêtre utilisée par la poursuite adaptative a une forme gaussienne. Ce choix n'est pas sans rapport avec certaines propriétés optimales. Mais encore plus, cette fenêtre permet de dériver une formule rapide du calcul des produits scalaires entre deux atomes. Avec le nouvel algorithme, les effets bénéfiques de cette fenêtre s'estompent car la formule de mise à jour ne s'applique plus. Il apparaît normal d'explorer ce que d'autres fenêtres peuvent offrir à cet égard.

6.1.1 Taille de la fenêtre

La taille de la fenêtre est un paramètre très sensible. Dans la version de TestCenter® utilisant la transformée de Fourier, ce paramètre est configurable au choix de l'utilisateur. La poursuite adaptative permet de faciliter le travail des usagers car c'est l'algorithme qui choisit de façon automatique la valeur optimale de chaque fréquence. Il est évident que cette propriété doit être conservée avec le nouvel algorithme.

Nous avons discuté de l'effet de cette taille sur le résultat et des problèmes qui s'y rattachent au chapitre 4. La figure 4.1 démontre de façon éloquente les problèmes reliés à ce paramètre. Cet effet est invariant face au type de fenêtres, il est plutôt une conséquence de la transformée de Fourier. Le choix de la fenêtre ne devrait pas influencer les tailles optimales d'analyses des harmoniques du signal.

6.1.2 Réponse en fréquence d'une fenêtre

Nous allons étudier dans cette section l'effet d'un type de fenêtre sur le résultat de la transformée de Fourier. Certaines fenêtres peuvent être optimales dans des cas bien précis mais peuvent aussi être extrêmement mauvaises pour un signal ayant des propriétés différentes. Nous devons utiliser une fenêtre qui donne des bons résultats avec tous les signaux typiques d'un radar à effet Doppler.

Il est facile d'imaginer l'effet d'une fenêtre sur la représentation du signal dans le domaine temporel. L'amplitude du signal sera moins forte aux extrêmes et plus forte vers le centre. Il n'est cependant pas évident de dire quel

en sera l'effet sur le spectre de fréquences. La convolution de la fenêtre avec le signal tel que présenté par (3.12), correspond à la multiplication (complexe) du spectre de fréquence du signal (c'est à dire sa transformée de Fourier sans la fenêtre) par la réponse en fréquence de la fenêtre. Voyons comment nous obtenons cette fonction.

La réponse en fréquence de la fenêtre est simplement la transformée de Fourier de celle-ci. Donc il faut analyser les spectres des fenêtres seules pour trouver de quelle façon elles affecteront l'analyse. Normalement, la transformée d'un fenêtre se traduit par un pic dominant accompagné de plusieurs pics de moindre importance à ses cotés (voir figures 6.1, 6.2, 6.3) Le facteur le plus important dans notre cas, est la largeur de bande à 3db et 60db. La largeur de bande à 3db nous donne l'efficacité de la fenêtre dans le meilleur cas et celle à 60db dans le pire cas. Pour la fenêtre rectangulaire, nous constatons que dans le meilleur cas la largeur de bande sera d'environ $1/\delta f$, ce qui revient à multiplier le spectre du signal par une Dirac. Les fréquences dans le spectre seront alors très bien définies. Par contre, dans le pire des cas, la largeur de bande à 60db est de 665. Alors on s'imagine facilement ce qui arrivera au spectre du signal, les pics de fréquences seront tellement larges que la plupart d'entre eux se fusionneront. Un exemple très simple est présenté à la figure 6.4. Un signal avec une fréquence de 30 cycles secondes est analysé et comparé avec un signal de 30.3 cycles seconde.

6.2 Augmentation des performances

La performance de l'algorithme est un défi majeur qu'il est impératif de résoudre pour des raisons évidentes. Avec l'algorithme de poursuite, il est évident que l'objectif de rapidité fixé était hors de notre portée. Des refontes majeures doivent donc être envisagées.

6.2.1 Détermination des paramètres d'analyse

Une des premières hypothèses de ce travail est que les fréquences trouvées à l'intérieur de la fenêtre d'analyse sont affectées au temps central. Nous avons donc décidé de limiter le paramètre de localisation temporel à une

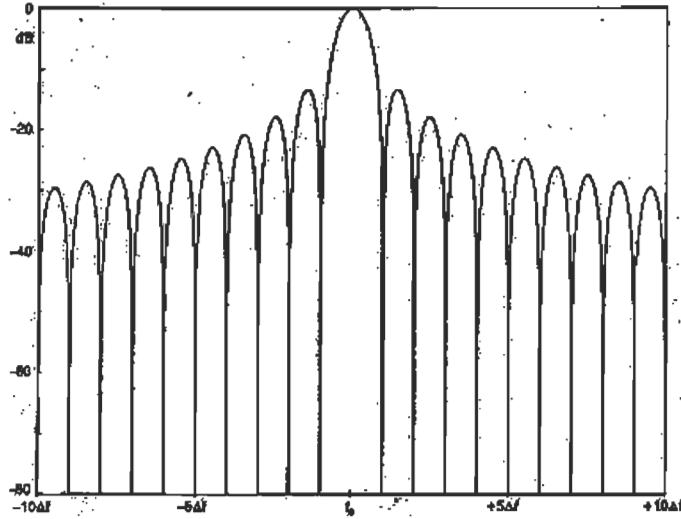


FIG. 6.1 – Représentation graphique de la réponse en fréquence de la fenêtre rectangulaire.

valeur unique, soit le centre; pour chaque γ du dictionnaire \mathcal{D}^+ , $u = N/2$. Le nombre d'atome du dictionnaire passe donc de $O(N \log_2 N)$ à $\sum_{i=0}^{\log_2 N} 2^i = 2N - 1$ ce qui permet d'accélérer considérablement les calculs.

Le paramètre d'échelle passe de 1 à N de manière dyadique. Grâce à la nature de nos signaux, nous pouvons sans trop de problèmes affirmer que les très petites échelles sont des cas quasi-impossible. Par expérience, les gens d'Infinition ont limités le paramètre d'échelle (configurable par l'utilisateur) dans la version avec transformée de Fourier à des valeurs entre 64 et 8192, toujours de manière dyadique puisque le calcul de la transformée de Fourier est optimal pour ces tailles. La taille 64 a donc été adoptée comme borne inférieure et 4096 comme borne supérieure. Le calcul à 8192 est rarement utilisé et serait beaucoup plus long, déjà qu'il est très lent avec la simple transformée de Fourier. Le nombre d'atome est alors réduit de 63 ($2^*32 - 1$) pour s'établir à $\sum_{i=6}^{\log_2 N} 2^i = 2N - 64$.

Le paramètre de fréquence ξ peut lui aussi faire objet d'une optimisation. Puisque seulement des signaux purement réels sont utilisés, les fréquences positives et négatives sont symétriques. Il est alors inutile de s'intéresser aux

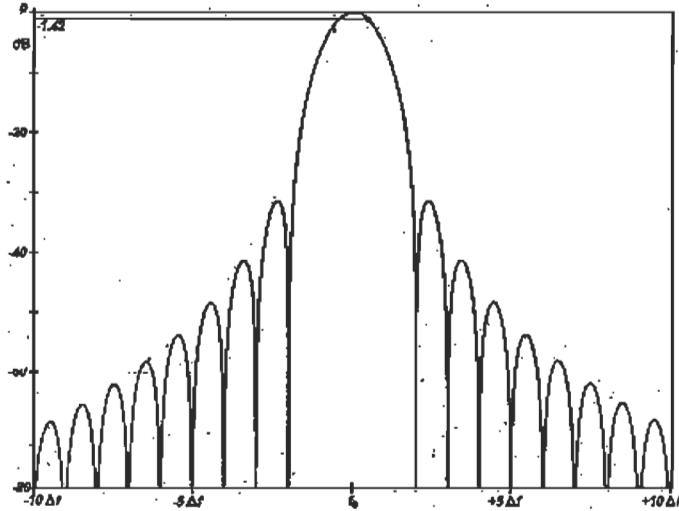


FIG. 6.2 – Représentation graphique de la réponse en fréquence de fenêtre Hanning.

harmoniques négatives, ce qui diminue de moitié le nombre d'atomes. Nous avons donc ;

$$\frac{2N - 64}{2} = N - 32 = 4064$$

atomes, comparativement à $N \log_2 N = 49152$, une réduction de 92%.

6.2.2 Dictionnaire des maximums

Bien que le dictionnaire construit soit réduit par rapport à \mathcal{D}^+ , il reste néanmoins que pour un signal donné, la majorité des atomes du dictionnaire sont invalides, au sens qu'ils représentent du bruit. Il y aurait donc avantage à filtrer les mauvais atomes après le calcul des produits scalaires pour ensuite poursuivre l'algorithme sur un ensemble très réduits d'atomes, ce qui rendrait la sélection de l'atome et la mise à jour beaucoup plus optimal.

Gribonval [17] utilise un moyen très simple pour construire un dictionnaire de maximums. Après le calcul de tous les produits scalaires, un seuil α est

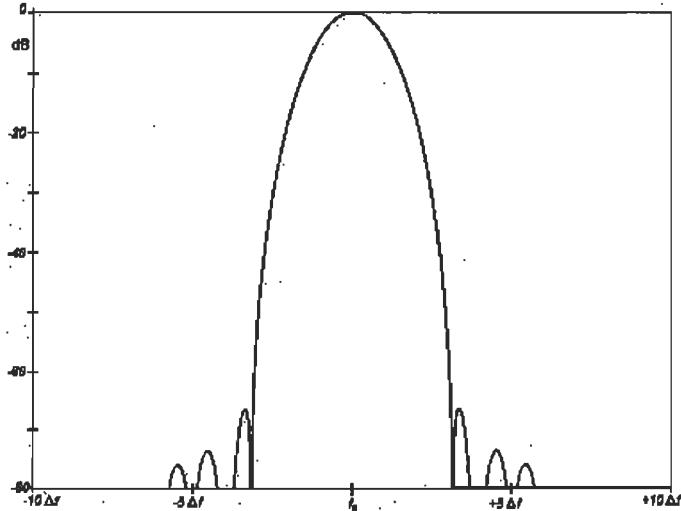


FIG. 6.3 – Représentation graphique de la réponse en fréquence de la fenêtre Kaiser-Bessel.

déterminé et tous les atomes vérifiant

$$|\langle Rf^i, g_\gamma \rangle| > \alpha,$$

sont sélectionnée. Ce seuil est choisi afin que la taille du dictionnaire des maximums (que nous appellerons \mathcal{D}^{MAX}) soit de $\sqrt{N \log_2 N}$. La poursuite est alors effectuée dans \mathcal{D}^{MAX} jusqu'à la rencontre d'un critère d'arrêt basé sur l'énergie ou jusqu'à ce que le dictionnaire soit vide. Dans ce cas, si l'énergie est encore trop importante, un nouveau dictionnaire est construit et ce principe se répète jusqu'à ce que l'énergie soit suffisamment petite.

Notre approche est légèrement différente. Nous utilisons la réponse en fréquence de notre fenêtre pour détecter les maximums de \mathcal{D}^+ . Ce qui est intéressant dans cette approche, est que seul les atomes pouvant représenter des choix potentiels sont pré-sélectionnés avant la phase de poursuite. Un résumé détaillé de la technique se trouve dans [8]. Avec cette nouvelle façon, nous avons dans \mathcal{D}^{MAX} au plus $15 \log_2 N = 180$ atomes et nous sommes certains de ne pas à avoir à reconstruire un dictionnaire s'il s'épuise, puisque dans ce cas la poursuite se termine.

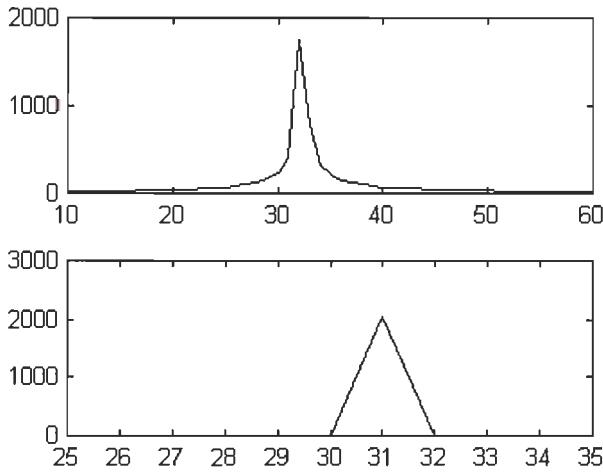


FIG. 6.4 – La largeur de bande de l'exemple du haut est beaucoup plus grande que celle du bas qui est un cas idéal (de largeur 1 pour la fenêtre rectangulaire).

6.2.3 Mise à jour

La mise à jour est une opération assez coûteuse qui mérite plus d'attention. Chaque harmonique choisie est représentée par un groupe de points dans le domaine fréquentiel (fig. 6.2.3). Pour l'harmonique de la figure 6.2.3, il est possible de regrouper dix points comme faisant partie de la même fréquence (la largeur de bande est alors 10). En supposant que l'atome représenté par l'astérisque soit choisi, l'algorithme de la poursuite aurait mis à jour les dix points formant le pic inutilement puisque nous devons nous attendre à ce qu'ils soient tous annulés. De plus, ce processus se fait pour toutes les échelles ; donc autant de mises à jour inutiles, car dans notre cas, dès qu'une fréquence est sélectionnée, nous ne voulons pas qu'elle puisse être prise ultérieurement à une échelle ou temps différent.

Pour éviter ces mises à jour, le moyen le plus simple est d'éliminer du dictionnaire tous les atomes formant le pic. Comme nous ne voulons pas choisir une même fréquence plusieurs fois dans une même analyse, il faut donc enlever tous ceux y étant reliés dans les échelles précédentes et suivantes.

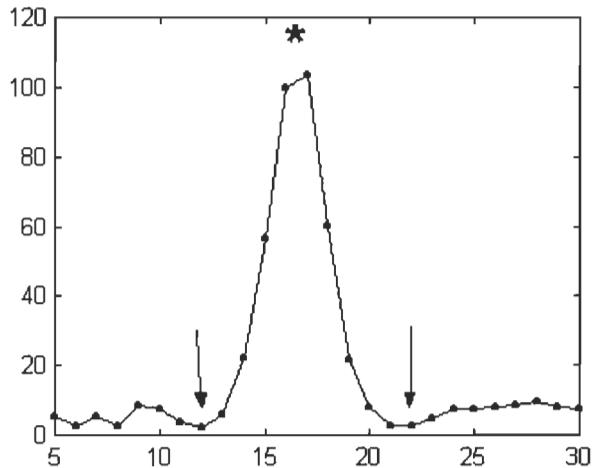


FIG. 6.5 – Les points composant cette fréquence vont de 12 à 22. L’astérisque est l’atome optimal.

Que faire des atomes non reliés à celui choisi ? Pourquoi faire une mise à jour qui ne les altéreront pas, ou presque pas ? La réponse la plus simple est de ne rien faire. Nous pouvons dire alors que le processus de mise à jour n’existe plus, du moins dans la forme présentée au chapitre précédent. Le processus de mise à jour du dictionnaire se résume simplement à enlever du dictionnaire les atomes reliés à celui choisi.

Cette façon de faire n'est certes pas théoriquement très esthétique, mais elle a le mérite d'être extrêmement rapide, voire négligeable en complexité. Il est certain que pour les atomes éloignés (en fréquence) de l'optimal, le fait de ne pas effectuer de mise à jour ne les affectent pas vraiment, puisque de toute façon ils n'y auraient pratiquement pas eu de changement. Le problème pourrait se situer pour les atomes proches de l'optimal et surtout, ceux faisant partie du pic détecté comme étant le maximum global. La question qui est normale de se poser à ce stade est : pourrait-il y avoir plusieurs fréquences à même le pic maximal ? Si un cas tel celui présenté à la figure 4.1 se produit, de quelle façon notre choix influencera les résultats ?

Ce cas n'est pas rare lorsque nous analysons un projectile qui, pour une

raison ou une autre, se sépare en plusieurs parties plus petites à un certain moment de sa course. Il faut alors détecter les bonnes fréquences et ne pas annuler bêtement l'information valide. Si nous choisissons l'harmonique à une échelle autre que la maximale, alors nous risquons d'enlever du dictionnaire les fréquences réellement valides situées aux échelles supérieures. Pour ne pas faire d'erreur, il faut s'assurer que ce sont les échelles supérieures qui seront sélectionnées avant tout. L'énergie présente dans les pics des basses échelles est normalement élevée, puisque le pic renferme plusieurs harmoniques, alors il faut trouver un moyen pour ne pas choisir ces fréquences erronées. Heureusement, nous avons prévu un moyen pour rejeter les fréquences tel celles de la figure (4.1) et ce, à la création du dictionnaire [8]. Cet étape est appelée le raffinement du dictionnaire des maximums. Comme nous sommes alors certains de choisir des fréquences valides, il n'y a pas de problèmes à les éliminer, tout simplement.

6.3 Algorithme final

L'algorithme se présente comme suit.

1. Construction du dictionnaire \mathcal{D}^+ .
2. Construction du dictionnaire des maximums \mathcal{D}^{MAX} .
3. Raffinement des maximums.
4. Calcul de l'énergie.
5. Recherche du meilleur atome.
6. Élimination de l'atome choisi ainsi que tous ceux lui sont reliés.
7. Mise à jour de l'énergie.

Les étapes 5 à 7 font partie d'une boucle itérative tant que l'énergie est assez élevée ou que le nombre maximum d'atomes soit atteint. Chacune de ces étapes est expliquée en détail au niveau algorithmique dans [8]. Dans le prochain chapitre, les avantages et désavantages de la technique sont exposés à l'aide d'exemples.

Chapitre 7

Résultats

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats obtenus par le logiciel TestCenter© au moyen des deux techniques, c'est-à-dire avec la transformée de Fourier ainsi qu'avec notre algorithme.

7.1 Cas simple

Ce signal fut généré par l'application TestCenter© au moyen de son générateur de signal. Ce signal ne provient donc pas de données réelles acquises d'un radar. Il simule un object ayant une vitesse qui décroît lentement. Il est possible d'analyser ce signal avec la transformée de Fourier en utilisant n'importe quelle échelle et ne pas voir de différence au niveau visuel (fig. 7.1). Par contre, il est certain que plus l'échelle sera grande, meilleure sera la résolution.

Puisque la vitesse est à peu près constante sur de court laps de temps, le meilleur choix est d'effectuer une analyse en utilisant de plus grandes tailles de fenêtres. Il faut donc s'attendre à retrouver une courbe composée d'atomes provenant des échelles supérieures (fig. 7.2).

7.2 Accélération rapide

Dans le cas d'un obus d'artillerie, certains utilisateurs désirent mesurer l'accélération du projectile à l'intérieur du tube du canon, là où le projectile

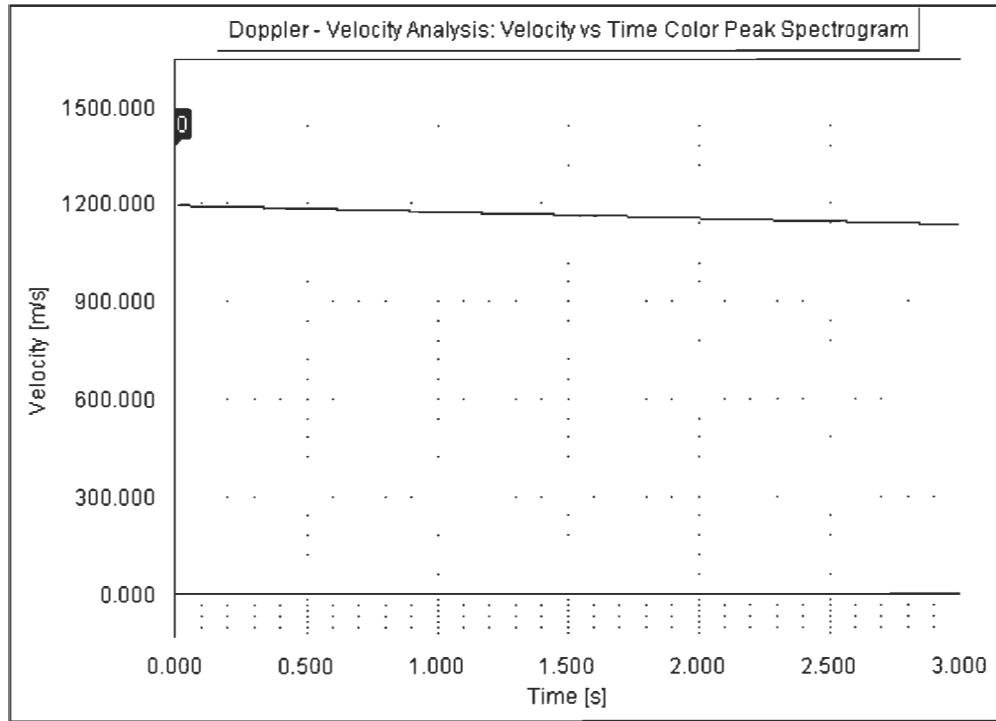


FIG. 7.1 – Signal généré par l’application TestCenter®.

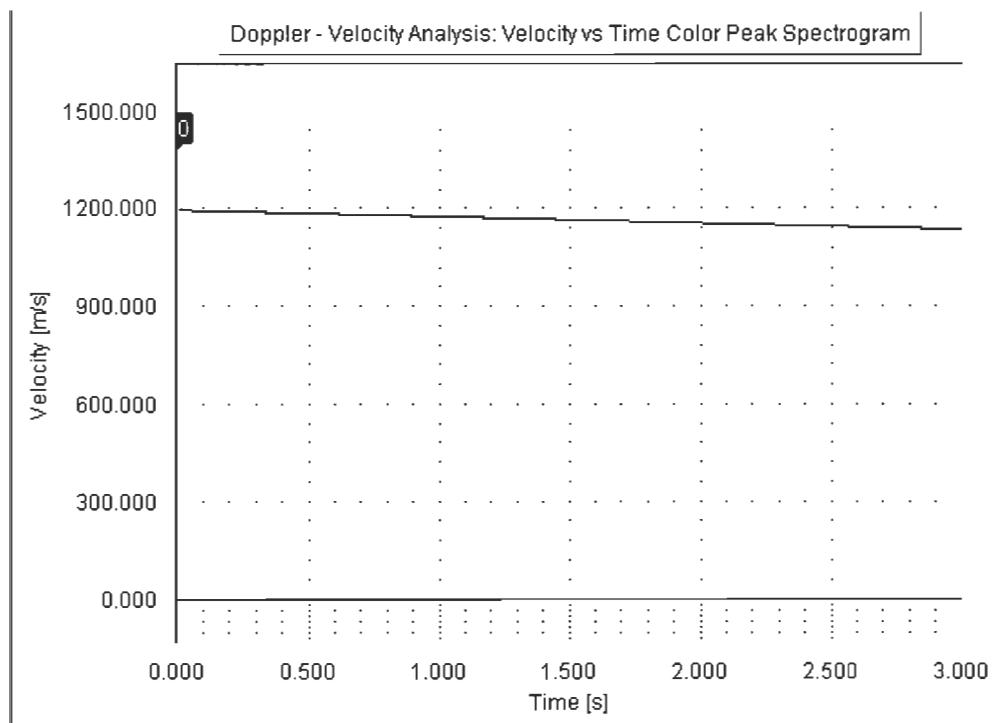


FIG. 7.2 – Signal généré par l’application TestCenter®.

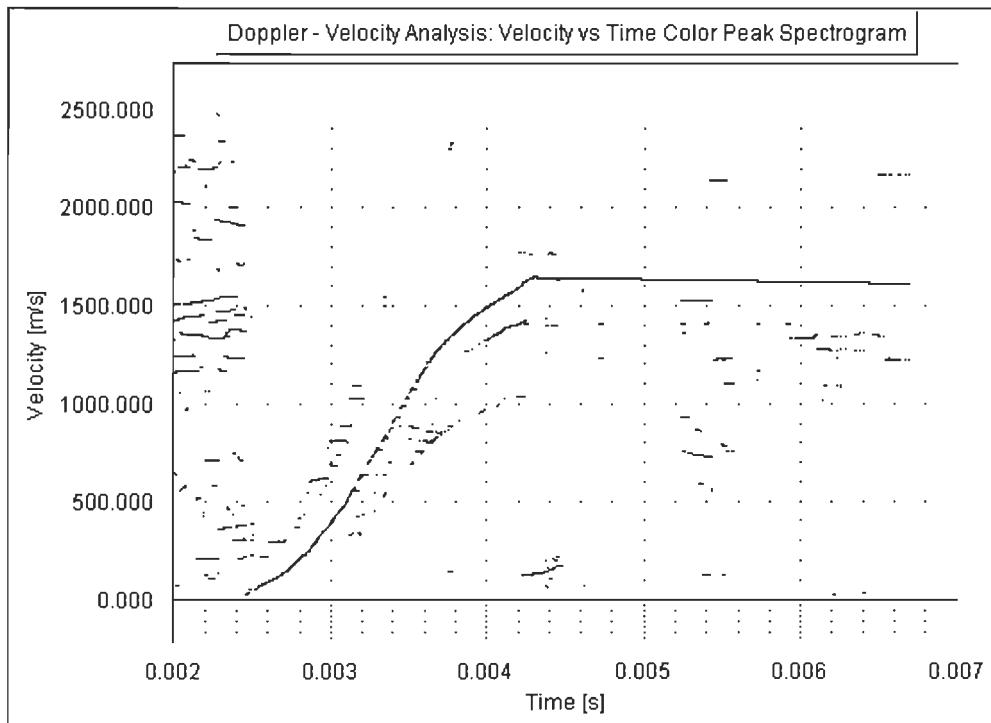


FIG. 7.3 – On remarque les deux parties du signal correspondant respectivement au temps passé à l'intérieur du tube du canon (avant 0.00425 sec. et ensuite, la sortie de la bouche.

accélère le plus rapidement. Peu de temps après sa sortie de la bouche du canon, la vitesse du projectile se stabilise pour décroître lentement. Il est donc normal d'analyser la première partie du signal avec une très petite taille et la deuxième avec une échelle plus grande. La figure 7.3 représente ce type de signal analysé par notre algorithme.

Avec la transformée de Fourier, on doit absolument mettre une petite taille d'échelle, car les grandes fenêtres sont inutiles pour la première partie du signal (fig. 7.4). Bien que cela n'est pas visible sur le graphique, le prix à payer est de se contenter d'une résolution en fréquences moindre qu'il est possible d'obtenir avec de grandes fenêtres.

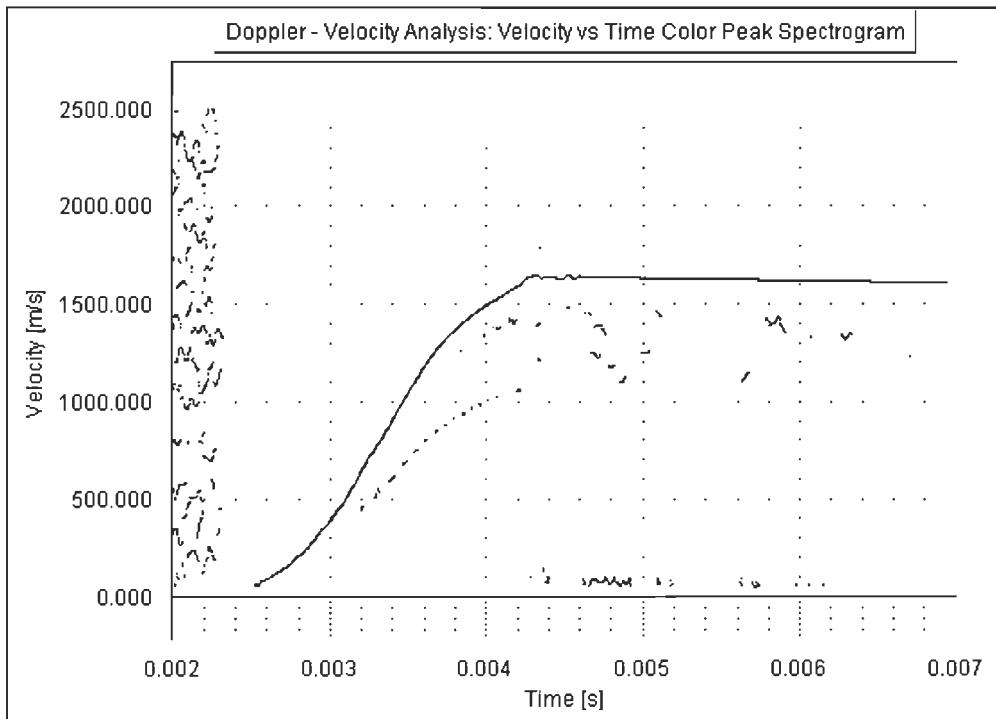


FIG. 7.4 – Signal avec une forte accélération analysé avec la transformée de Fourier et une petite taille d'échelle.

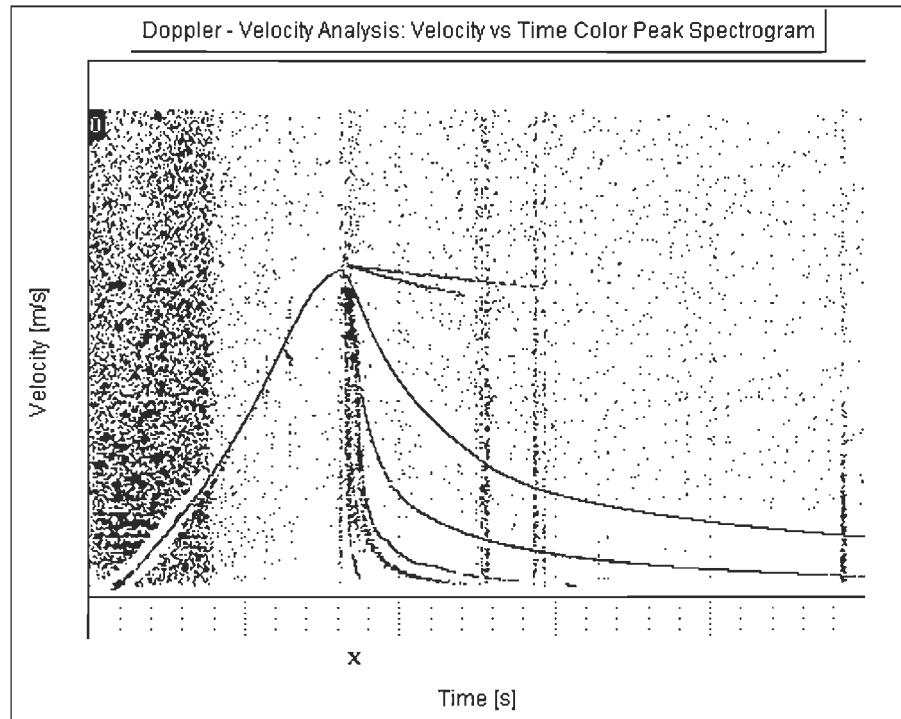


FIG. 7.5 – Signal analysé avec la transformée multi-échelle.

7.3 Fréquences dans un même voisinage

Le prochain exemple est un cas très particulier et probablement idéal pour démontrer l'intérêt de la technique. À partir du moment x^1 , le projectile explose en propulsant certaines parties à des vitesses semblables alors que les débris tombent au sol tout en ayant une décélération notable. Ce cas est très difficile à analyser avec la transformée de Fourier.

¹Pour des raisons de confidentialité, les échelles de temps et de vitesse ont dû être enlevées.

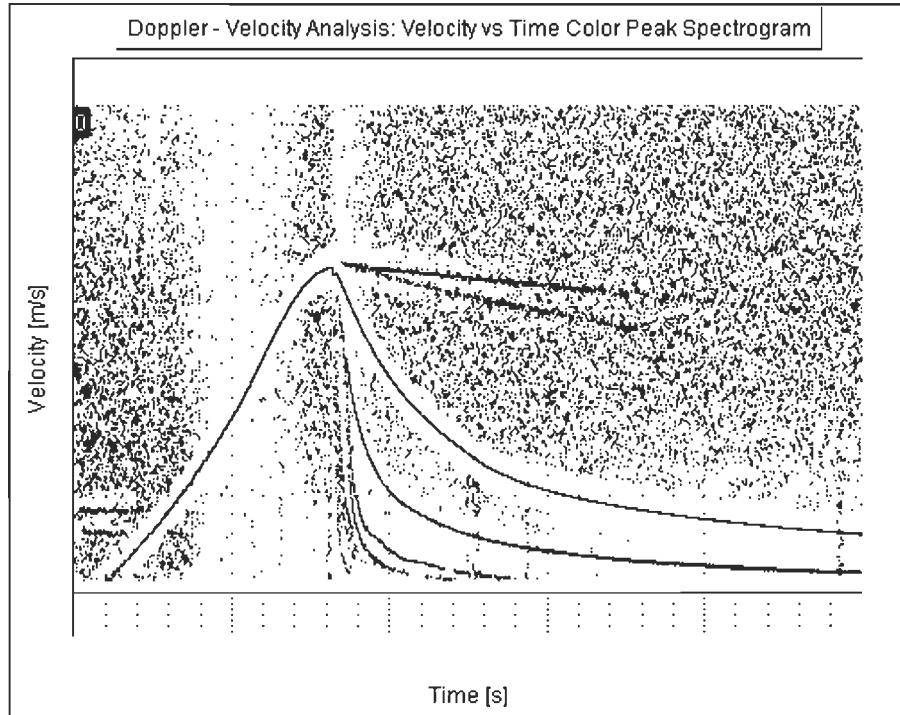


FIG. 7.6 – Signal analysé avec la transformée de Fourier et une échelle de 512

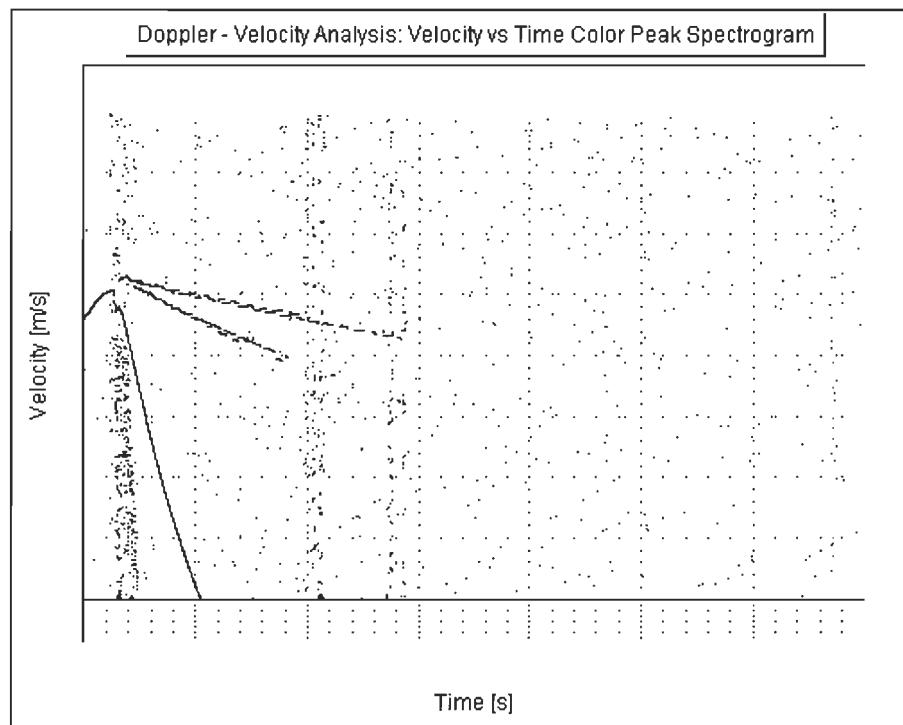


FIG. 7.7 – Zoom sur les fléchettes analysées avec la transformée multi-échelle

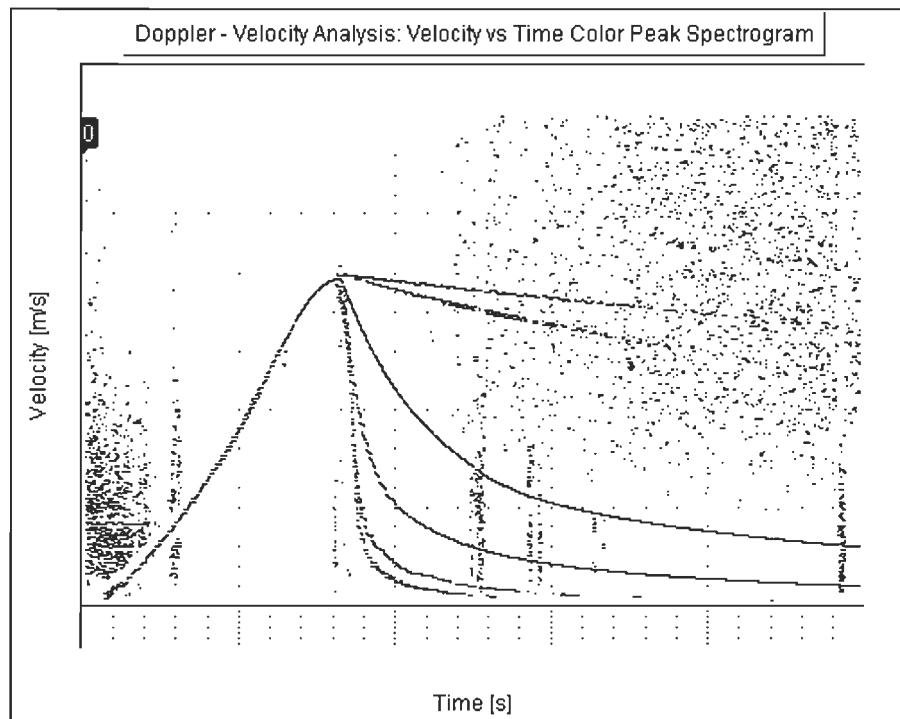


FIG. 7.8 – Analyse avec la transformée de Fourier et une taille de 4096. On remarque le flou dans l'accélération.

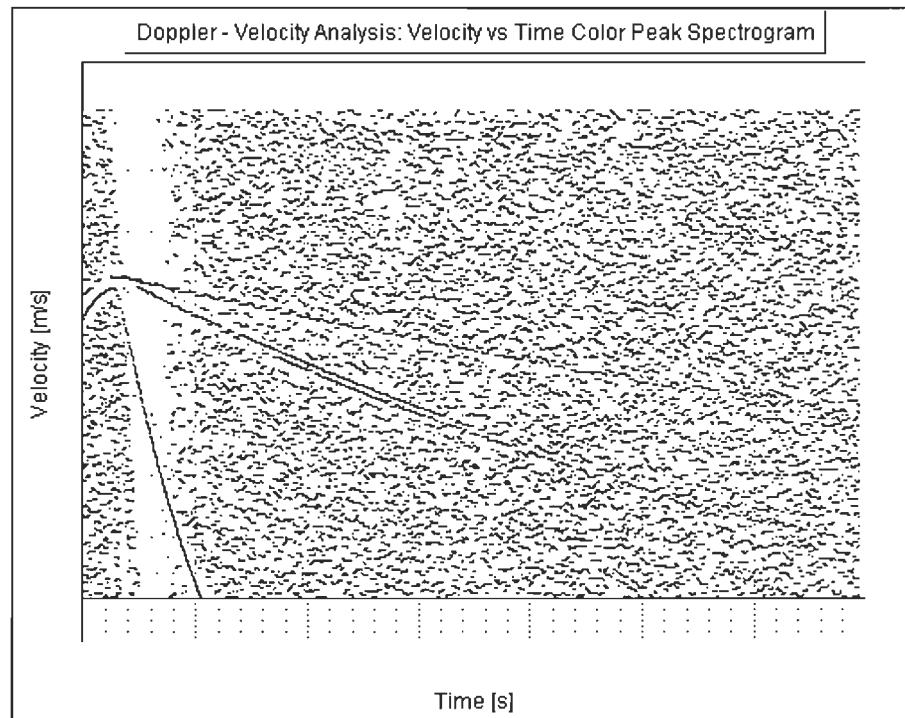


FIG. 7.9 – Zoom sur les fléchettes analysées avec la transformée de Fourier et une échelle de 4096

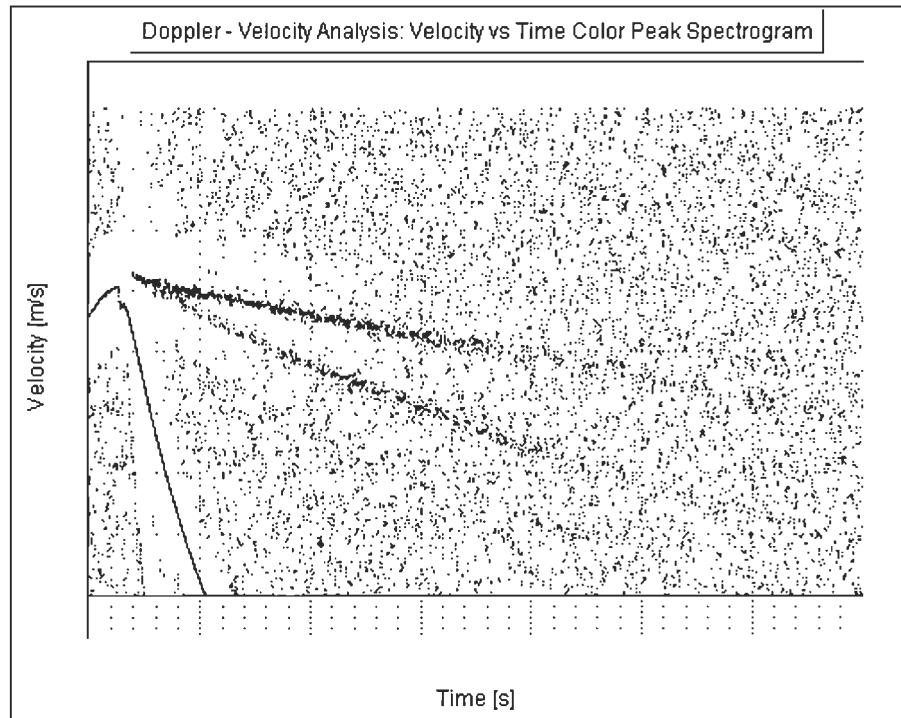


FIG. 7.10 – Zoom sur les fléchettes analysées avec la transformée de Fourier et une échelle de 512

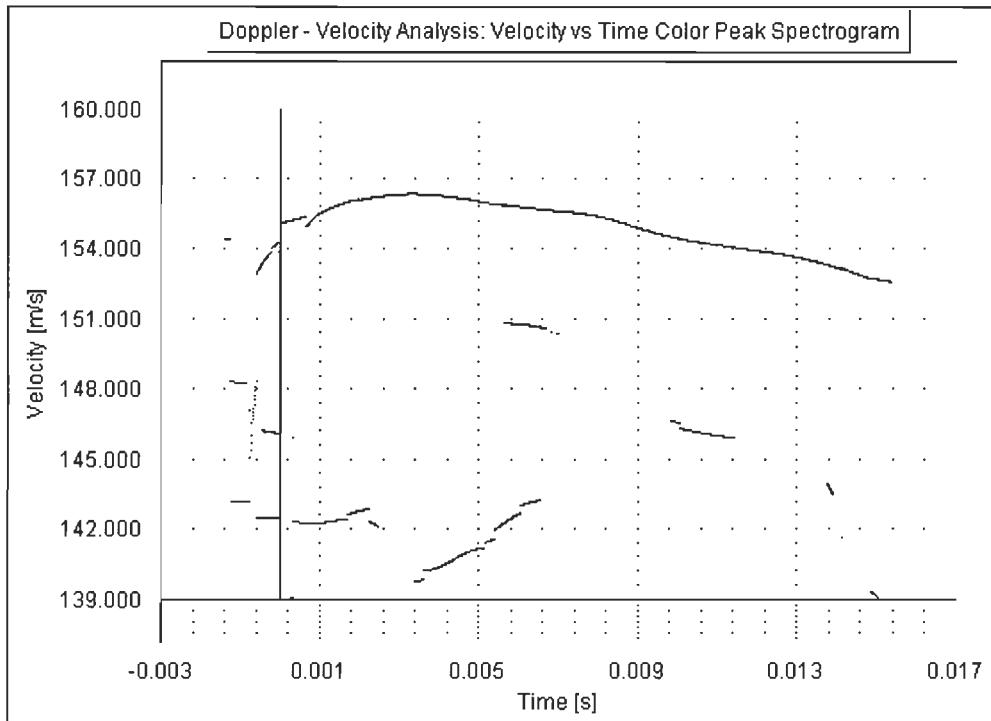


FIG. 7.11 – Ce signal provient d'un plomb tiré à l'aide d'un fusil à air comprimé et ce sur une distance de moins de deux mètres.

7.4 Incertitude entre deux échelles

Il arrive parfois que deux échelles différentes (mais consécutives), donnent de bons résultats pour un même signal. Le critère de sélection 5.6 peut conduire à la sélection d'une échelle s pour une portion de signal, changer pour une échelle voisine ($2s$ ou $s/2$) pendant un certain temps et revenir à la valeur originale. Nous pouvons observer à la figure 7.11 un tel cas.

Il est certain qu'avec la transformée de Fourier, ce cas ne peut pas arriver car une seule échelle est utilisée. Le résultat sera alors de meilleure qualité (fig 7.12). Il n'est évidemment pas souhaitable d'analyser ce signal avec notre technique dans son état actuel. Il serait par contre possible d'atténuer ce phénomène avec une fenêtre plus adaptée et en changeant certains paramètres

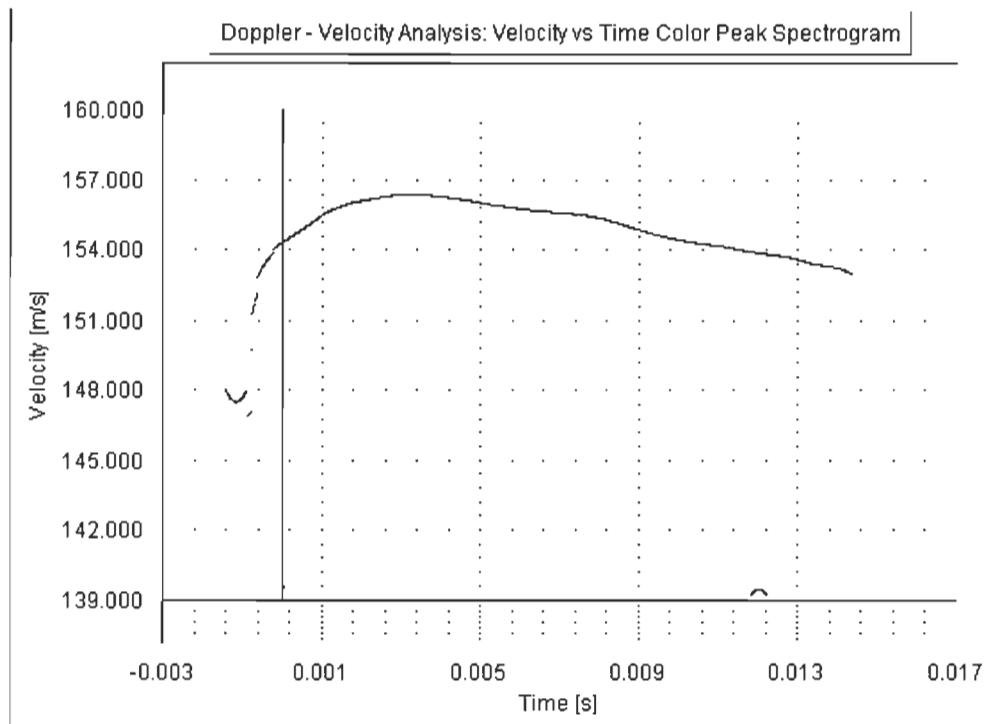


FIG. 7.12 – Ce signal provient d'un plomb tiré à l'aide d'un fusil à air comprimé et ce sur une distance de moins de deux mètres. Il est analysé avec la transformée de Fourier et une fenêtre de 256

dans l'algorithme. Or l'idée de la technique est d'être automatique et donc de ne pas laissé de choix à l'utilisateur.

Conclusion

La problématique de ce travail est née d'un problème réel en entreprise. Les objectifs sont novateurs puisqu'il n'existe pas, à notre connaissance, aucun équivalent au niveau commercial. Au niveau de la recherche, certains algorithmes ont le mérite de fournir des résultats semblables, mais avec une lenteur telle qu'ils ne sont pas viables commercialement. Les résultats obtenus quant à la vitesse de calcul sont, considérant la qualité des analyses produites, très acceptables.

Le défi majeur était de produire des analyses temps-fréquences de qualité supérieures à celles produites par la transformée de Fourier et ce, dans un délai relativement court. La transformée de Fourier a par contre le mérite d'être très performante lorsqu'elle est utilisée à bon escient. Le problème est qu'il faut souvent plusieurs analyses pour trouver la totalité de l'information pertinente pour un problème donné. Les algorithmes de poursuite existants peuvent être interprétés comme des recettes pour combiner des transformées de Fourier et obtenir des résultats d'une qualité supérieure en une seule analyse. Notre problématique se résumait à trouver un moyen de combiner avantageusement (en rapidité et en qualité) les résultats des transformées de Fourier à différentes échelles pour présenter à l'usager des données plus faciles à obtenir et à interpréter.

La première étape fut de tenter de reproduire l'algorithme de la poursuite adaptative. Le principe est simple, piger dans un dictionnaire d'atomes pour extraire ceux qui représentent le mieux les différentes structures du signal. Beaucoup d'efforts ont été mis pour obtenir de bon résultats, mais nous en sommes venus à la conclusion qu'il serait impossible d'obtenir des analyses de qualité tout en ayant un temps de calcul acceptable. Les efforts ont donc été mis sur plusieurs parties de l'algorithme pour les adapter à nos problèmes et surtout à réduire la complexité algorithmique.

La méthodologie présenté au chapitre 6 et expliquée en détail dans [8] a donc été développée. On retrouve l'idée de base de la poursuite, soit un algorithme itératif choisissant tour à tour des atomes de différentes résolutions dans le domaine des fréquences et du temps. L'objectif de produire un résultat de qualité supérieur peut être considéré comme atteint. Nous avons présenté au chapitre 7 des exemples de cas réels où la transformée de Fourier à fenêtre ne peut pas fournir des résultats optimaux en une seule analyse.

Par ailleurs, il est clair que la technique n'est pas encore parfaite comme le démontre l'exemple 7.4. Pour traiter correctement ces cas, plusieurs tests et de petites modifications s'avèrent encore nécessaires. Néanmoins, analyser ce type de signal avec notre technique est quelque peu futile puisque ce cas est très facile et la transformée de Fourier est tout de même plus rapide. Notre technique peut être vue comme complémentaire à la transformée de Fourier. Elle peut fournir des indices à l'utilisateur sur les paramètres de la transformée de Fourier à utiliser pour avoir de bons résultats. Il faut alors conclure que la coexistence des deux techniques dans TestCenter[©] est inévitable, chacune ayant ses forces et ses faiblesses.

Annexe A

Installation radar

A.1 Organigramme

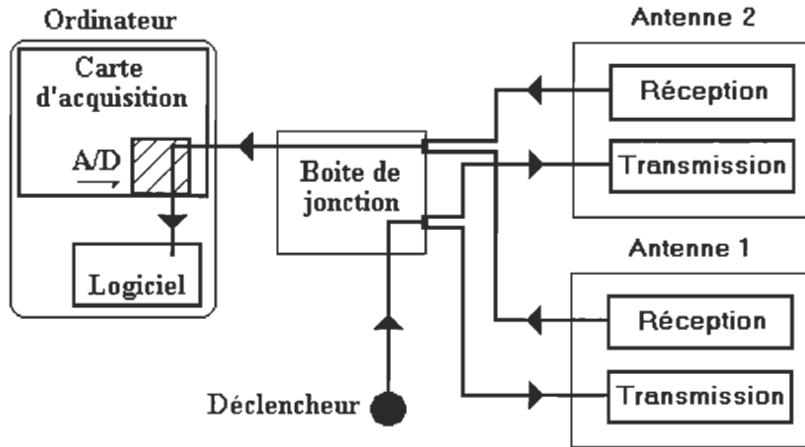
Le graphique A.1 nous montre comment sont reliés les différentes composantes de l'installation radar. Chacune est présentée un peu plus en détail dans les sections suivantes.

A.2 Le déclencheur

Le déclencheur est essentiellement un microphone, lequel fournit un signal de départ de l'enregistrement. Par exemple, si une pièce d'artillerie tire un obus, le bruit de l'explosion atteindra le déclencheur qui enverra le signal de départ à la boîte de jonction. Le déclencheur est donc un moyen automatique de reconnaître le début d'un signal.

A.3 La boîte de jonction

La boîte de jonction, comme son nom l'indique, sert de point de jonction aux composantes du système. Lorsqu'elle reçoit le signal de départ du déclencheur, elle commence à faire parvenir à la carte d'acquisition le signal capté. Ce signal sera auparavant filtré à l'intérieur de la boîte pour enlever des structures particulières correspondant à du bruit. Nous pouvons voir sur la figure A.1 qu'il peut y avoir deux antennes, donc deux signaux distincts enregistrés. La boîte de jonction prend ces signaux et les fusionne pour faire



parvenir un seul signal à la carte d'acquisition. Évidemment, nous pouvons facilement extraire les données appartenant à une antenne donnée au niveau logiciel, afin d'analyser séparément chaque signal.

A.4 L'antenne

L'antenne (généralement appelé radar) se compose principalement du module de transmission et de réception. Lorsque cette dernière est en marche, elle émet un signal grâce au transmetteur. Ces ondes vont éventuellement toucher un objet et revenir avec une fréquence qui se trouvera décalée (l'effet Doppler). C'est le travail du récepteur de capter le signal entrant. La différence du signal entrant et sortant est alors envoyé vers la boîte de jonction.

A.5 La carte d'acquisition

La carte d'acquisition est intégrée à un ordinateur. Sa fonction principale est de recevoir le signal analogique de la boîte de jonction et de le convertir en un signal digital. Cette opération est effectuée par un convertisseur A/D ("analog to digital"). Une fois la conversion terminée, ces données peuvent être acheminées vers le logiciel TestCenter© qui les analyseras.

A.6 Le logiciel

Le logiciel TestCenter[©] effectue différentes analyses selon le choix de l'utilisateur. La fonction qui nous intéresse le plus est l'analyse temps-fréquences du signal. Il y a donc possibilité de savoir la vitesse d'un objet à différents moments. À partir de ces données, d'autres analyses sont possibles, dont :

- analyse d'accélération ;
- analyse d'accélération à la sortie ;
- vitesse maximale ;
- temps de combustion (pour les projectiles auto propulsé) ;
- temps d'envol à une certaine distance ;
- ration signal/bruit à une certaine distance ;
- prédiction de trajectoire ;
- estimation de coefficients aérobalistiques.

Bibliographie

- [1] Bultan A. *A four-parameter atomic decomposition and the related time-frequency distribution.* PhD thesis, Middle East Technical University, December 1995.
- [2] Bultan A. A four-parameters atomic decomposition of chirplet. *IEEE trans. on signal processing*, 47(3) :731–745, March 1999.
- [3] DeVore R. A. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, pages 51–150, 1998.
- [4] Papoulis A. *The Fourier integral and its applications.* McGraw-Hill Inc., New-York, 1962.
- [5] E.O. Brigham. *The Fast Fourier Transform.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1974.
- [6] Henry P. Dym H., Mckean. *Fourier series and integrals.* Academic Press, New York, 1972.
- [7] Bacri E. Logiciel lastwave, <http://www.cmap.polytechnique.fr/bacry/lastwave>, (consulté le 24 février 2003).
- [8] Pruneau E. A new pursuit method for doppler signal analysis. *Infiniton Inc. internal publication*, December 2002.
- [9] Brachere F. Logiciel guimauve, <http://webast.ast.obs-mip.fr/people/fbracher/index.html>, (consulté le 4 mai 2003).
- [10] Harris F.J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, 66(1) :51–83, January 1978.
- [11] Stuetzle W. Friedman J.H. Projection pursuit regression. *Journal of American Statistical Association*, 76 :817–823, 1981.
- [12] Davis G. *Adaptative Nonlinear approximations.* PhD thesis, New-York University, September 1994.

- [13] Press William H. *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*. Cambridge university press, New York, 1992.
- [14] Jones D. L. Kwok H. K. Improved fm demodulation in a fading environment. *Proc. IEEE conf. Time-Freq. and Time-scale Anal. (TFTS'96)*, pages 9–12, June 1996.
- [15] Cohen L. *Time-Frequency analysis*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliff, New Jersey, 1995.
- [16] Zhang Z. Mallat S. Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *IEEE trans. on signal processing*, 41(12) :3397–3415, December 1993.
- [17] Gribonval R. *Approximations non-linéaires pour l'anayse de signaux sonores*. PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, Septembre 1999.
- [18] Gribonval R. Fast ridge pursuit with a multiscale dictionary of gaussian chirps. *IEEE trans on signal processing*, 49(5) :994–1001, May 2001.
- [19] Mallat S. *A wavelet tour of signal processing*. Academic press, New York, 1998.