UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
DEREK COURCHESNE

FONDEMENTS MATHÉMATIQUES DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE MULTICOMPLEXE

JUIN 2024

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Sébastien Tremblay, directeur de recherche
Département de mathématiques et d'informatique, UQTR

M. Dominic Rochon, membre du jury
Département de mathématiques et d'informatique, UQTR

M. Louis Marchildon, membre du jury
Département de chimie, biochimie et physique, UQTR

Avant-propos

Je tiens à remercier mes proches, famille et amis pour leur soutien tout au long de ces deux dernières années. L'idée initiale de ce travail provient de mon superviseur, Sébastien Tremblay, à la fois un brillant intellectuel et excellent professeur empli d'empathie pour ses élèves. Finalement, l'accomplissement de cette recherche aurait été bien difficile sans le soutien financer de l'Institut des Sciences Mathématiques (ISM) ainsi que du fonds pour la bourse Corina-Reischer de la Fondation UQTR. Merci, donc, à toutes ces personnes sur lesquelles repose le succès de ce travail, mon développement en tant que chercheur et toute contribution future à la science.

Sommaire

Dans ce mémoire sont développés plusieurs aspects mathématiques des nombres multicomplexes, tels que les modules et espaces de Hilbert, dans le but de généraliser les résultats obtenus dans le cas complexe et bicomplexe. Ce travail permettra de développer des applications, entre autres en mécanique quantique. Indépendamment de cet objectif, certaines notions fondamentales propres à cet espace de nombres sont explorées, telles que les idéaux et les permutations, pour en faire une description la plus complète possible. On termine finalement sur une discussion des possibles formes de l'équation de Schrödinger multicomplexe.

Abstract

This thesis develops several mathematical aspects of multicomplex numbers, such as moduli and Hilbert spaces, with the aim of generalizing the results of complex and bicomplex cases. This work will enable us to develop applications in quantum mechanics and other fields. Independently, certain fundamental notions specific to this number space are investigated, such as ideals and permutations, to make it the most complete description of the multicomplex number system as possible. We finally end with a discussion on the possible expressions of the multicomplex Schrödinger equation.

Table des matières

Liste des symboles

$\mathbb{M}_n$	Ensemble des nombres multicomplexes
$\mathbb{M}_n^{-1}$	Ensemble des diviseurs de zéro multicomplexes
$\mathbb{D}_n$	Ensemble des nombres multiperplexes
$\mathbb{D}_n^+$	Ensemble des nombres multiperplexes avec composantes positives
$\mathrm{i}_1, ..., \mathrm{i}_n$	Unités principales multicomplexes
$\mathbb{C}(\mathrm{i}_j)$	Sous-espace isomorphe aux complexes généré par 1 et i_j
$\mathbb{C}$	Espace des nombres complexes, posé comme équivalent à $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$
I_n	Ensemble des unités principales et composites multicomplexes
I_n^+	Ensemble des unités hyperboliques
I_n^-	Ensemble des unités imaginaires
$\dagger_1, ..., \dagger_n$	Conjugués multicomplexes
$\ddagger := \ddagger_n$	Ensemble des compositions de conjugués
$\Lambda := \Lambda_n$	Composition des conjugués simples de 1 à n
Γ_n	Produit des éléments idempotents consécutifs γ_l de $l = 2$ à $l = n$
$\Gamma_n^{\ddagger}$	Base canonique multicomplexe
ε_k	Élément de la base canonique multicomplexe
P_j	j-ième projection multicomplexe
$\lvert \cdot \rvert$	Norme complexe et de tous les sous-espaces $\mathbb{C}(\mathrm{i}_j)$
$\lVert \cdot \rVert$	Pseudo-norme multicomplexe
$\lVert \cdot \rVert_E$	Norme euclidienne
W	$\mathbb{M}_n$-module et espace de Hilbert multicomplexe
V	Sous-espace vectoriel de W des éléments avec coefficients complexes
V_k	Sous-espace vectoriel définit par $\mathrm{e}_k W$

$\lvert\psi\rangle$	Élément d'un $\mathbb{M}_n$-module ou d'un espace de Hilbert multicomplexe
$(\cdot,\cdot)$	Produit scalaire multicomplexe
$(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$	Produit scalaire complexe (hermitien)
A^*	Opérateur adjoint à A sur un espace de Hilbert multicomplexe
σ_{pq}	Permutation des indices des unités principales i_p et i_q
$\Gamma_{\alpha\to\beta}$	Produit des éléments idempotents consécutifs de $\gamma_{\alpha,\alpha+1}$ à $\gamma_{\beta-1,\beta}$
$H(t)$	Opérateur Hamiltonien
$\mathcal{U}(t,t_0)$	Opérateur d'évolution temporelle unitaire

Introduction

Au sein de son ouvrage *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*, G. Baley Price présente Corrado Segre comme le pionnier de l'étude des nombres multicomplexes. Dans un article publié en 1892 [30], Segre discute d'un ensemble infini d'algèbres en leur donnant le nom de nombres bicomplexes, nombres tricomplexes, etc. Le développement de ces algèbres est un processus itératif sur la base des nombres complexes. Un nombre bicomplexe prend la forme

$$(x_1 + \mathrm{i}_1 x_2) + \mathrm{i}_2(x_3 + \mathrm{i}_1 x_4), \quad x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}$$

avec $\mathrm{i}_1^2 = \mathrm{i}_2^2 = -1$ et $\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2 = \mathrm{i}_2\mathrm{i}_1$. On combine ensuite deux de ces nombres afin de former un nombre tricomplexe :

$$[(x_1 + \mathrm{i}_1 x_2) + \mathrm{i}_2(x_3 + \mathrm{i}_1 x_4)] + \mathrm{i}_3[(x_5 + \mathrm{i}_1 x_6) + \mathrm{i}_2(x_7 + \mathrm{i}_1 x_8)], \quad x_1, \ldots, x_8 \in \mathbb{R}$$

en introduisant l'unité i_3 avec $\mathrm{i}_3^2 = -1$ et les mêmes propriétés de commutativité. On peut procéder de cette manière jusqu'à obtenir les nombres n-complexes, pour un total de 2^n composantes réelles $x_1, \ldots, x_{2^n}$. Segre a montré que ces espaces possèdent des diviseurs de zéro et que tout nombre bicomplexe peut être écrit comme une combinaison des éléments idempotents

$$\frac{1 + \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2}{2}.$$

En 1991, G. Baley Price publie son ouvrage sur le sujet [22], au sein duquel il effectue une étude plus exhaustive de l'espace et fonctions bicomplexes, suivie d'une généralisations de ces notions aux multicomplexes (nombres n-complexes). En particulier, les algèbres multicomplexes munies de la norme euclidienne (en fonction des 2^n composantes réelles) deviennent des algèbres de Banach. Cette propriété permet l'étude des suites et séries multicomplexes, puis, par extension, celle des fonctions multicomplexes.

Depuis le début des années 2000, les développements au sujet des algèbres multicomplexes se sont accélérées par leurs applications dans l'étude des fractales [1, 23, 24, 34] et d'une approche de la mécanique quantique qui combine à la fois la structure des nombres complexes et celle des nombres hyperboliques [26, 27]. Malgré la présence de diviseurs de zéro, les multicomplexes sont une alternative intéressante aux quaternions ou autres algèbres qui généralisent les complexes par la conservation de la propriété de commutativité, et ce peu importe l'indice n choisi.

L'objectif de ce mémoire est de reprendre les développements théoriques des nombres multicomplexes à partir du travail déjà effectué jusqu'à maintenant, moderniser la notation et déterminer une représentation facilitant les manipulations algébriques des nombres multicomplexes. De cette nouvelle représentation, on effectue une étude des idéaux multicomplexes puis on généralise les résultats déjà obtenus sur les $\mathbb{M}_2$-module et les espaces de Hilbert bicomplexes dans l'article de R.G. Lavoie, L. Marchildon et D. Rochon [16]. On termine finalement par étudier l'effet des permutations d'indices des unités $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_n$ et par en appliquer les résultats sur un chapitre davantage spéculatif dédié à l'équation de Schrödinger multicomplexe.

En addition de ce mémoire, un article couvrant le même sujet, intitulé *Multicomplex Ideals, Modules and Hilbert Spaces* a été rédigé et est accessible au lien suivant : https://arxiv.org/abs/2405.04683.

Chapitre 1

Algèbre multicomplexe

Au sein de ce premier chapitre sont présentées les définitions de base et principales propriétés des nombres multicomplexes. Plusieurs résultats des premières sections sont mentionnés sans démonstration, étant déjà connus depuis un certain temps et détaillés par plusieurs sources [1, 22, 34]. Une attention particulière est portée sur le développement de la représentation canonique, déjà démontrée par A. Vajiac et M.B. Vajiac dans [33] mais cette fois en soulignant le lien avec les conjugués multicomplexes et l'aspect fondamental de cette représentation dans la théorie.

1.1 Définition

On obtient le n-ième espace multicomplexe, noté $\mathbb{M}_n$, à la suite de n complexifications des nombres réels, chacune introduisant une nouvelle unité imaginaire i_k telle que $\mathrm{i}_k^2 = -1$.

$$\mathbb{M}_n := \{\eta_1 + \mathrm{i}_n \eta_2 \mid \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}_{n-1}\}, \quad \mathbb{M}_0 := \mathbb{R}.$$

Chaque élément de l'ensemble $\{\mathrm{i}_1, \dots, \mathrm{i}_n\}$ est appelé une **unité principale**, et toute juxtaposition d'éléments distincts de cet ensemble est appelée une **unité composite** (par exemple, $\mathrm{i}_3\mathrm{i}_5\mathrm{i}_8$). La structure des nombres multicomplexes dépend fondamentalement de deux propriétés des unités principales, posées comme hypothèses :

1. $(\mathrm{i}_j\mathrm{i}_k)\mathrm{i}_l = \mathrm{i}_j(\mathrm{i}_k\mathrm{i}_l), \quad \forall j, k, l = 1, \dots, n$ (associativité des unités)
2. $\mathrm{i}_j\mathrm{i}_k = \mathrm{i}_k\mathrm{i}_j, \quad \forall j, k = 1, \dots, n.$ (commutativité des unités)

On équipe ensuite $\mathbb{M}_n$ de l'addition terme à terme et de la multiplication définie de manière naturelle (ou récursivement [22]). Il est bien connu que de cette construction on obtient une algèbre commutative avec unité et diviseurs de zéro sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (en considérant $\mathrm{i} = \mathrm{i}_1$) [1]. L'écriture standard d'un nombre multicomplexe pour les premières valeurs de n est donnée par les expressions suivantes :

$$\eta = x_1, \qquad (n = 0)$$

$$\begin{aligned} \eta &= x_1 + x_2 \mathrm{i}_1, && (n=1)\\ \eta &= x_1 + x_2 \mathrm{i}_1 + x_3 \mathrm{i}_2 + x_4 \mathrm{i}_1 \mathrm{i}_2, && (n=2)\\ \eta &= x_1 + x_2 \mathrm{i}_1 + x_3 \mathrm{i}_2 + x_4 \mathrm{i}_1 \mathrm{i}_2 + x_5 \mathrm{i}_3 + x_6 \mathrm{i}_1 \mathrm{i}_3 + x_7 \mathrm{i}_2 \mathrm{i}_3 + x_8 \mathrm{i}_1 \mathrm{i}_2 \mathrm{i}_3, && (n=3) \end{aligned}$$

où $x_1, x_2, \dots x_{2^n} \in \mathbb{R}$. On identifie habituellement $\mathbb{M}_0$ et $\mathbb{M}_1$ aux réels et aux complexes respectivement, alors que $\mathbb{M}_2$ et $\mathbb{M}_3$ sont les premiers « nouveaux » espaces issus de cette construction, aussi connus en tant qu'espaces des nombres bicomplexes et des nombres tricomplexes respectivement. Comme on peut le voir, un espace n-complexe est toujours contenu dans les espaces à entier supérieur :

$$\mathbb{M}_0 \subset \mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2 \subset \dots \subset \mathbb{M}_{n-1} \subset \mathbb{M}_n \subset \mathbb{M}_{n+1} \subset \dots$$

et l'écriture d'un élément nécessite 2^n composantes réelles au total. L'expression générale est donnée en termes de l'ensemble puissance $\mathcal{P}\big(\{1, \dots, n\}\big)$:

$$\eta = \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{P}_n} x_{\mathcal{A}} \mathrm{i}_{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{P}_n := \mathcal{P}\big(\{1, \dots, n\}\big), \qquad x_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R},$$

où l'ensemble vide dans $\mathcal{P}_n$ est associé à l'indice zéro et $\mathrm{i}_0 := 1$, le singleton $\{k\} \in \mathcal{P}_n$ est associé à l'indice k, l'ensemble $\{k, l\} \in \mathcal{P}_n$ aux indices kl tels que $\mathrm{i}_{kl} := \mathrm{i}_k \mathrm{i}_l$, etc. Cette notation est nommée la **représentation standard** d'un nombre multicomplexe, mais est peu utilisée dans les calculs ou démonstrations lorsque n est grand.

1.2 Conjugaisons

Une conjugaison complexe $\dagger_k$ est définie pour chaque unité imaginaire de la manière suivante

$$\dagger_0 := \mathrm{id} \quad \text{et} \quad \dagger_k : \mathrm{i}_k \to -\mathrm{i}_k, \quad k = 1, \dots, n$$

où $\dagger_0 := \mathrm{id}$ est l'identité et n'a aucun effet. On combine les conjugaisons avec l'opération de composition notée $\circ$.

$$\eta^{\dagger_j \circ \dagger_k} := (\eta^{\dagger_j})^{\dagger_k}, \quad \forall \eta \in \mathbb{M}_n \text{ et } j, k = 1, \dots, n.$$

De la même manière qu'il existe plusieurs notations pour une juxtaposition d'unités principales ($\mathrm{i}_{\{k,l\}} := \mathrm{i}_{kl} := \mathrm{i}_k \mathrm{i}_l$), on peut utiliser une notation plus concise pour la composition lorsque le contexte est clair :

$$\dagger_{jk} := \dagger_j \dagger_k := \dagger_j \circ \dagger_k.$$

La composition est associative et commutative puisque l'ordre dans lequel on change le signe des composantes principales n'est pas important. De plus, tout conjugué appliqué deux fois n'a aucun effet, c'est-à-dire que $\dagger_k \circ \dagger_k = \dagger_0$. Ainsi l'ensemble $\ddagger_n$ de toutes les compositions de conjugués n-complexes muni de la composition est un groupe commutatif au sein duquel chaque élément est son propre inverse. Garant-Pelletier a d'ailleurs démontré dans son mémoire l'isomorphisme de groupe entre $(\ddagger_n, \circ)$ et $(\mathbb{Z}_2^n, +_2)$ où $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ et $+_2$ est l'addition modulo deux [7].

Tout conjugué simple de même que toute composition se distribue sur l'addition et la multiplication multicomplexe. En fait, un conjugué quelconque se distribue sur tous les termes d'une expression jusqu'à atteindre l'unité principale correspondante pour modifier son signe.

Une composition importante et qui sera très utile dans les chapitres suivants est celle de tous les conjugués simples, notée Λ_n :

$$\Lambda_n := \dagger_1 \circ \dagger_2 \circ \ldots \circ \dagger_n.$$

En général on notera l'ensemble des compositions $\ddagger$ sans l'indice « n », de même que pour Λ, puisqu'il sera toujours sous-entendu que l'on discute de l'espace des nombres n-complexes, $\mathbb{M}_n$, pour un entier n quelconque.

1.3 Représentation idempotente standard

Lorsque $n \geq 2$, on peut exploiter la présence de diviseurs de zéro et d'éléments idempotents pour obtenir une base de $\mathbb{M}_n$ sur $\mathbb{M}_{n-1}$ telle que l'addition et la multiplication entre nombres multicomplexes s'effectuent composante par composante. Prenons

$$\gamma_n := \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}_{n-1}\mathrm{i}_n) \quad \text{et} \quad \gamma_n' := \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}_{n-1}\mathrm{i}_n).$$

Les éléments γ_n et γ_n' sont tous deux des diviseurs de zéro et éléments idempotents de $\mathbb{M}_n$:

$$\gamma_n \cdot \gamma_n' = 0, \quad \gamma_n^2 = \gamma_n, \quad (\gamma_n')^2 = \gamma_n'. \tag{1.1}$$

De plus, on a les relations suivantes pour le neutre multiplicatif 1 et l'unité i_n exprimés en termes de γ_n et γ_n' :

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_n + \gamma_n', \\ \mathrm{i}_n &= -\mathrm{i}_{n-1}(\gamma_n - \gamma_n'). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Soit $\eta \in \mathbb{M}_n$ un nombre multicomplexe avec composantes $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}_{n-1}$. Alors de l'équation (1.2),

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2\mathrm{i}_n \\ &= \eta_1(\gamma_n + \gamma_n') - \eta_2\mathrm{i}_{n-1}(\gamma_n - \gamma_n') \\ &= (\eta_1 - \eta_2\mathrm{i}_{n-1})\gamma_n + (\eta_1 + \eta_2\mathrm{i}_{n-1})\gamma_n'. \end{aligned}$$

Ainsi $\{\gamma_n,\ \gamma_n'\}$ forme une base de $\mathbb{M}_n$ sur $\mathbb{M}_{n-1}$. Prenons de nouveaux nombres $\eta, \zeta \in \mathbb{M}_n$ avec leurs composantes respectives η_1, η_2 et ζ_1, ζ_2 dans $\mathbb{M}_{n-1}$ relatives à cette nouvelle base. Alors de l'équation (1.1), l'addition et la multiplication entre η et ζ est effectuée composante par composante :

$$\begin{aligned} \eta + \zeta &= (\eta_1\gamma_n + \eta_2\gamma_n') + (\zeta_1\gamma_n + \zeta_2\gamma_n') = (\eta_1 + \zeta_1)\gamma_n + (\eta_2 + \zeta_2)\gamma_n', \\ \eta \cdot \zeta &= (\eta_1\gamma_n + \eta_2\gamma_n') \cdot (\zeta_1\gamma_n + \zeta_2\gamma_n') = \eta_1\zeta_1\gamma_n + \eta_2\zeta_2\gamma_n'. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Cette représentation des nombres multicomplexes est appelée la **représentation idempotente standard** et est très utile pour le cas des nombres bicomplexes ($n = 2$), mais insuffisante pour des espaces à entier supérieur.

1.4 Représentation canonique

On introduit à présent l'élément Γ_n défini comme le produit de tous les nombres idempotents consécutifs γ_l pour $2 \leq l \leq n$.

$$\Gamma_n := \gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_n = \prod_{l=2}^{n} \gamma_l, \quad n \geq 2.$$

Par définition, on a la relation récursive $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n\gamma_{n+1}$. On pose $\Gamma_n^\ddagger$ comme l'ensemble de toutes les compositions de conjugués appliquées sur l'élément Γ_n :

$$\Gamma_n^\ddagger := \{\Gamma_n^{\dagger_{j_1}\dagger_{j_2}\cdots\dagger_{j_k}} \mid 0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n\}.$$

Cet ensemble sera utilisé pour développer une nouvelle représentation idempotente pour les nombres multicomplexes, sous une notation simplifiant grandement les manipulations algébriques des nombres multicomplexes.

Proposition 1.1

Pour $n \geq 2$, l'ensemble $\Gamma_n^\ddagger$ contient 2^{n-1} éléments distincts. Si ces éléments sont notés ε_k pour $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ alors on a

$$\Gamma_{n+1}^\ddagger = \{\varepsilon_k\gamma_{n+1} \mid k = 1, \ldots, 2^{n-1}\} \cup \{\varepsilon_k\gamma'_{n+1} \mid k = 1, \ldots, 2^{n-1}\}.$$

DÉMONSTRATION. On procède par induction sur n. Dans le cas $n = 2$ on a $\Gamma_2 = \gamma_2$ et les valeurs obtenues en appliquant chaque composition de conjugués sont :

$$\Gamma_2^{\dagger_0} = \gamma_2, \quad \Gamma_2^{\dagger_1} = \gamma'_2, \quad \Gamma_2^{\dagger_2} = \gamma'_2, \quad \Gamma_2^{\dagger_1\dagger_2} = \gamma_2,$$

de sorte que $\Gamma_2^\ddagger$ contient deux éléments distincts $\{\varepsilon_1 = \gamma_2, \varepsilon_2 = \gamma'_2\}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\Gamma_3^\ddagger &:= \{\Gamma_3, \Gamma_3^{\dagger_1}, \Gamma_3^{\dagger_2}, \Gamma_3^{\dagger_3}, \Gamma_3^{\dagger_1\dagger_2}, \Gamma_3^{\dagger_1\dagger_3}, \Gamma_3^{\dagger_2\dagger_3}, \Gamma_3^{\dagger_1\dagger_2\dagger_3}\} \\
&= \{\gamma_2\gamma_3, (\gamma_2\gamma_3)^{\dagger_1}, (\gamma_2\gamma_3)^{\dagger_2}, (\gamma_2\gamma_3)^{\dagger_3}, (\gamma_2\gamma_3)^{\dagger_1\dagger_2}, (\gamma_2\gamma_3)^{\dagger_1\dagger_3}, (\gamma_2\gamma_3)^{\dagger_2\dagger_3}, (\gamma_2\gamma_3)^{\dagger_1\dagger_2\dagger_3}\} \\
&= \{\gamma_2\gamma_3, \gamma'_2\gamma_3, \gamma'_2\gamma'_3, \gamma_2\gamma'_3, \gamma_2\gamma'_3, \gamma'_2\gamma'_3, \gamma'_2\gamma_3, \gamma_2\gamma_3\} \\
&= \{\varepsilon_1\gamma_3, \varepsilon_2\gamma_3\} \cup \{\varepsilon_1\gamma'_3, \varepsilon_2\gamma'_3\}.
\end{aligned}$$

Supposons la proposition vraie dans le cas $n = m$ où m est un entier quelconque, et posons $\Gamma_m^\ddagger = \{\varepsilon_k\}_{k=1}^{2^{m-1}}$. Puisque $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m\gamma_{m+1}$ et toute composition de conjugués est distributive sur le produit, tous les éléments de $\Gamma^{\ddagger}_{m+1}$ peuvent être écrits sous la forme

$$\begin{aligned}\Gamma^{\dagger_{j_1}\cdots\dagger_{j_s}}_{m+1} &= (\Gamma_m\gamma_{m+1})^{\dagger_{j_1}\cdots\dagger_{j_s}} \quad \text{pour } 0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq m+1 \\ &= (\Gamma_m)^{\dagger_{j_1}\cdots\dagger_{j_s}}(\gamma_{m+1})^{\dagger_{j_1}\cdots\dagger_{j_s}} \\ &= \varepsilon_k\gamma_{m+1} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_k\gamma'_{m+1} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 2^{m-1}.\end{aligned}$$

Il peut facilement être vérifié que les paires d'éléments $\varepsilon_k\gamma_{n+1}$ et $\varepsilon_l\gamma_{n+1}$ de même que $\varepsilon_k\gamma'_{n+1}$ et $\varepsilon_l\gamma'_{n+1}$ sont toutes distinctes pour $k, l = 1, \ldots, 2^{n-1}$ et $k \neq l$. Il est de plus évident que $\varepsilon_k\gamma_{n+1}$ et $\varepsilon_l\gamma'_{n+1}$ sont tous distincts pour $k, l = 1, \ldots, 2^{n-1}$. De ce fait, $\Gamma^{\ddagger}_{n+1}$ possède $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ éléments. ■

Proposition 1.2

Pour $n \geq 2$ les éléments $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{2^{n-1}}$ de $\Gamma^{\ddagger}_n$ ont les propriétés suivantes :

$$(i)\ \varepsilon_k\varepsilon_l = \delta_{kl}\varepsilon_l \quad (ii)\ \varepsilon_k^{\Lambda_n} = \varepsilon_k \quad (iii)\ \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_j = 1,$$

pour $1 \leq k, l \leq 2^{n-1}$, où le symbole δ_{kl} est le delta de Kronecker et $\Lambda_n := \dagger_1 \cdots \dagger_n$ est la composition de tous les conjugués simples de $\mathbb{M}_n$.

DÉMONSTRATION. On procède par induction sur n. Pour $n = 2$ on a $\varepsilon_1 = \gamma_2$ et $\varepsilon_2 = \gamma'_2$, ainsi $\varepsilon_k\varepsilon_l = \delta_{kl}\varepsilon_l$ pour $k, l = 1, 2$. De plus, $\varepsilon_1^{\Lambda_2} = \gamma_2^{\dagger_1\dagger_2} = \gamma_2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2^{\Lambda_2} = \varepsilon_2$ et $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \gamma_2 + \gamma'_2 = 1$.

Supposons que les trois propriétés de la propositions sont valides pour $n = m$ où m est un entier quelconque. Notons $\Gamma^{\ddagger}_{m+1} = \{\tilde{\varepsilon}_j\}_{j=1}^{2^m}$ où on a posé (de la proposition 1.1),

$$\tilde{\varepsilon}_k := \varepsilon_k\gamma_{m+1} \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon}_{2^{m-1}+k} := \varepsilon_k\gamma'_{m+1},$$

pour $k = 1, \ldots, 2^{m-1}$. Les ε_k sont les 2^{m-1} éléments de l'ensemble $\Gamma^{\ddagger}_m$. Pour tout $1 \leq k, l \leq 2^{m-1}$ on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_k \cdot \tilde{\varepsilon}_l &= \varepsilon_k\gamma_{n+1} \cdot \varepsilon_l\gamma_{n+1} = \varepsilon_k\varepsilon_l\gamma_{n+1} = \delta_{kl}\varepsilon_l\gamma_{n+1} = \delta_{kl}\tilde{\varepsilon}_l, \\ \tilde{\varepsilon}_{2^{n-1}+k} \cdot \tilde{\varepsilon}_{2^{n-1}+l} &= \varepsilon_k\gamma'_{n+1} \cdot \varepsilon_l\gamma'_{n+1} = \varepsilon_k\varepsilon_l\gamma'_{n+1} = \delta_{kl}\varepsilon_l\gamma'_{n+1} = \delta_{kl}\tilde{\varepsilon}_{2^{n-1}+l}, \\ \tilde{\varepsilon}_k \cdot \tilde{\varepsilon}_{2^{n-1}+l} &= \varepsilon_k\gamma_{n+1} \cdot \varepsilon_l\gamma'_{n+1} = 0,\end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété (i). Ensuite on a

$$\tilde{\varepsilon}_k^{\Lambda_{n+1}} = (\varepsilon_k\gamma_{n+1})^{\Lambda_{n+1}} = \varepsilon_k^{\Lambda_n}\gamma_{n+1}^{\Lambda_{n+1}} = \varepsilon_k\gamma_{n+1}^{\Lambda_{n+1}} = \varepsilon_k(\gamma_{n+1})^{\dagger_n\dagger_{n+1}} = \varepsilon_k\gamma_{n+1} = \tilde{\varepsilon}_k$$

et $\tilde{\varepsilon}^{\Lambda_{n+1}}_{2^{n-1}+k} = \tilde{\varepsilon}_{2^{n-1}+k}$ par un calcul similaire, ce qui démontre (ii). Finalement,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2^n} \tilde{\varepsilon}_j &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \tilde{\varepsilon}_k + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \tilde{\varepsilon}_{2^{n-1}+k} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \gamma_{n+1} + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \gamma'_{n+1} \\ &= (\gamma_{n+1} + \gamma'_{n+1}) \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k = 1\end{aligned}$$

ce qui montre (iii). ■

Les propriétés de la précédente proposition nous assurent que les éléments distincts $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{2^{n-1}}$ de $\Gamma_n^{\ddagger}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^{n-1}} \in \mathbb{C}$, tels que $\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \varepsilon_k = 0$, alors

$$\varepsilon_j \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \varepsilon_k = 0 \Rightarrow \alpha_j \varepsilon_j = 0, \quad 1 \leq j \leq 2^{n-1}.$$

Puisque ε_j est non nul, la seule possibilité est $\alpha_j = 0$ pour toutes les valeurs de j.

Proposition 1.3

L'ensemble $\Gamma_n^{\ddagger}$ est une base de $\mathbb{M}_n$ sur $\mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION. On procède par induction sur n. Dans le cas $n = 2$, on sait que la proposition est vraie puisque $\Gamma_2^{\ddagger} = \{\gamma_2, \gamma'_2\}$ est la base pour la représentation idempotente standard de $\mathbb{M}_2$ sur $\mathbb{M}_1 = \mathbb{C}$. Supposons que la proposition est vraie pour $n = m$, c'est-à-dire que tout nombre $\zeta \in \mathbb{M}_m$ peut être écrit sous la forme $\zeta = \sum_{k=1}^{2^{m-1}} z_k \varepsilon_k,\ z_k \in \mathbb{C}$. Ici $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{2^{m-1}}$ sont les éléments distincts de $\Gamma_m^{\ddagger}$. Soit $\eta \in \mathbb{M}_{m+1}$, alors de la représentation idempotente standard on a

$$\eta = \zeta_1 \gamma_{m+1} + \zeta_2 \gamma'_{m+1}, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}_m.$$

De l'hypothèse d'induction, $\zeta_1 = \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \alpha_k \varepsilon_k$ et $\zeta_2 = \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \beta_k \varepsilon_k$ pour $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$, ce qui implique

$$\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \varepsilon_k \gamma_{n+1} + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \beta_k \varepsilon_k \gamma'_{n+1} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \tilde{\varepsilon}_k + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \beta_k \tilde{\varepsilon}_{2^n+k},$$

où, de la proposition 1.1, $\{\tilde{\varepsilon}_k\}_{k=1}^{2^m}$ est l'ensemble à 2^m éléments distincts $\Gamma_{m+1}^{\ddagger}$. La proposition 1.2 nous assure que ces éléments sont linéairement indépendants, et donc $\Gamma_{m+1}^{\ddagger}$ est une base de $\mathbb{M}_{m+1}$ sur $\mathbb{C}$. ■

Cette représentation des nombres multicomplexes est appelée la **représentation idempotente canonique**, ou simplement représentation canonique, au sein de laquelle la multiplication s'effectue composante par composante (complexe). Prenons $\eta, \zeta \in \mathbb{M}_n$ dans la représentation canonique :

$$\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \zeta = \sum_{l=1}^{2^{n-1}} \beta_l \varepsilon_l$$

où $\alpha_k, \beta_l \in \mathbb{C}$ et $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{2^{n-1}} = \Gamma_n^{\ddagger}$. Des propriétés de la proposition 1.2 on a

$$\begin{aligned} \eta \cdot \zeta &= \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \varepsilon_k\right)\left(\sum_{l=1}^{2^{n-1}} \beta_l \varepsilon_l\right) = \sum_{k,l=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \beta_l \varepsilon_k \varepsilon_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \beta_l \delta_{kl} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \alpha_k \beta_k \varepsilon_k. \end{aligned}$$

1.5 Projections

Pour tout nombre multicomplexe $\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} z_k \varepsilon_k \in \mathbb{M}_n$ écrit dans la représentation canonique, on introduit la j-ème projection multicomplexe comme la fonction $P_j : \mathbb{M}_n \to \mathbb{C}$ telle que $P_j(\eta) = z_j$. Dans les paragraphes qui suivront ainsi que les prochains chapitres, la notation caret $\hat{\jmath}$ pour les indices sera utilisée en relation avec la j-ème projection de la manière suivante :

$$\eta_{\hat{\jmath}} := P_j(\eta) \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}} \varepsilon_k.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a de la proposition 1.2 :

$$z = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} z \varepsilon_k \Rightarrow P_j(z) = z, \quad 1 \leq j \leq 2^{n-1},$$

c'est-à-dire que la projection correspond à la fonction identité lorsque l'argument est dans le sous-espace complexe $\mathbb{C} \subset \mathbb{M}_n$. L'opérateur projection est un opérateur linéaire par rapport à l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_n$:

$$P_j(\eta + \zeta) = P_j(\eta) + P_j(\zeta) \quad \text{et} \quad P_j(\eta \cdot \zeta) = P_j(\eta) \cdot P_j(\zeta).$$

De plus, un nombre multicomplexe η est un diviseur de zéro si et seulement si l'une de ses projections est nulle. En effet,

$$\eta_{\hat{\jmath}} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_j \eta = \varepsilon_j \eta_{\hat{\jmath}} = 0,$$

ce qui est vrai également lorsque $\eta \neq 0$. L'ensemble des diviseurs de zéro, noté $\mathbb{M}_n^{-1}$ est ainsi exprimé par

$$\mathbb{M}_n^{-1} = \left\{ \eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}} \varepsilon_k \;\middle|\; \eta_{\hat{j}} = 0 \text{ pour au moins un } j \right\}.$$

Pour tout $\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}} \varepsilon_k \in \mathbb{M}_n \backslash \mathbb{M}_n^{-1}$ (ensemble des éléments inversibles), l'expression de son inverse est simplement $\eta^{-1} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}}^{-1} \varepsilon_k$. Il est à noter que pour les multicomplexes, l'ensemble des diviseurs de zéro est le même que celui des éléments non inversibles (ce qui n'est pas le cas dans tous les anneaux). Ce fait provient directement de la représentation canonique et de l'expression de l'inverse ci-haut pour les éléments qui ne sont pas des diviseurs de zéro.

Chapitre 2

Sous-algèbre multiperplexe

Si on procède à la construction d'une algèbre de la même manière que les multicomplexes mais à partir d'unités hyperboliques ($\mathrm{j}_1, \ldots, \mathrm{j}_m$ tels que $\mathrm{j}_k^2 = 1$) plutôt qu'imaginaires, alors on découvre une toute nouvelle structure : les nombres multiperplexes. Nous n'entrerons pas dans un développement formel des définitions et propriétés de cette structure, car elle est déjà contenue dans celle des multicomplexes.

2.1 Partition des unités multicomplexes

Soit I_n l'ensemble des unités multicomplexes (principales et composites, incluant 1) et I_n^+, I_n^- la partition en unités hyperboliques et en unités imaginaires respectivement.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n^+ &= \{\mathrm{u} \in \mathrm{I}_n \mid \mathrm{u}^2 = 1\}, \\ \mathrm{I}_n^- &= \{\mathrm{u} \in \mathrm{I}_n \mid \mathrm{u}^2 = -1\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

À noter que sous cette définition l'unité 1 est considérée hyperbolique. Lorsqu'on multiplie ensemble deux unités quelconques, le résultat est soit hyperbolique ou bien imaginaire à un signe près. Voyons quelques exemples :

$$\begin{aligned} \mathrm{i}_1 \cdot \mathrm{i}_2\mathrm{i}_3\mathrm{i}_4 &= \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3\mathrm{i}_4 \\ \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2 \cdot \mathrm{i}_2\mathrm{i}_3 &= -\mathrm{i}_1\mathrm{i}_3 \\ \mathrm{i}_2\mathrm{i}_3\mathrm{i}_4 \cdot \mathrm{i}_4\mathrm{i}_7 &= -\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3\mathrm{i}_7 \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{u}_1^+, \mathrm{u}_2^+ \in \mathrm{I}_n^+$ et $\mathrm{u}_1^-, \mathrm{u}_2^- \in \mathrm{I}_n^-$, alors $(\mathrm{u}_1^+ \cdot \mathrm{u}_2^+)^2 = 1$, $(\mathrm{u}_1^+ \cdot \mathrm{u}_1^-)^2 = -1$ et $(\mathrm{u}_1^- \cdot \mathrm{u}_2^-)^2 = 1$. Donc le produit de deux unités hyperboliques ou de deux unités imaginaires est hyperbolique au signe près, alors que le produit d'une unité hyperbolique et une autre imaginaire est imaginaire. Le signe dépend du nombre d'unités principales communes entre les termes du produit, et est peu pertinent dans le contexte actuel étant donné qu'il sera toujours absorbé par une composante réelle.

Le point le plus important est qu'il y a une forme de fermeture sur l'ensemble des unités hyperboliques muni de la multiplication, ce qui signifie que l'espace généré par les unités I_n^+ sur les réels, noté $\mathbb{D}_n$,

$$\mathbb{D}_n := \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n^+) = \left\{ \sum_k x_k u_k^+ \,\middle|\, x_k \in \mathbb{R} \text{ et } u_k^+ \in I_n^+ \right\}, \tag{2.2}$$

est une sous-algèbre de $\mathbb{M}_n$ sur $\mathbb{R}$. Le cas $n = 1$ correspond aux réels avec :

$$\mathrm{I}_1^+ = \{1\} \Rightarrow \mathbb{D}_n = \mathrm{Vect}\{1\} = \mathbb{R}.$$

La dimension de cette sous-algèbre est donnée par le nombre d'éléments de I_n^+, que l'on trouve facilement à partir de la formule binomiale. Toute unité composite multicomplexe est composée d'un certain nombre k d'unités principales choisies parmi n. Celles constituées d'un nombre k pair sont hyperboliques, alors que celles constituées d'un nombre k impair sont imaginaires et on considère le cas $k = 0$ comme étant l'unité 1. Le nombre total d'unités obtenues est $|\mathrm{I}_n|$:

$$|\mathrm{I}_n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n. \tag{2.3}$$

En développant les expressions de $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ puis en séparant la somme selon les k pairs et impairs, on trouve :

$$\begin{aligned} (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = |\mathrm{I}_n^+| + |\mathrm{I}_n^-|, \\ (1-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = |\mathrm{I}_n^+| - |\mathrm{I}_n^-|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

D'où $\dim \mathbb{D}_n = |\mathrm{I}_n^+| = |\mathrm{I}_n^-| = 2^{n-1}$.

2.2 Caractérisations de l'algèbre multiperplexe

L'identification de cette sous-algèbre comme étant générée par I_n^+ est très utile, car cet ensemble d'unités est invariant sous la composition de tous les conjugués simples, Λ. En effet, appliquée sur une unité quelconque $\mathrm{u} \in \mathrm{I}_n$ composée de l unités principales distinctes, on obtient

$$\mathrm{u}^{\Lambda} = (-1)^l \mathrm{u}$$

et tout élément de I_n^+ est composé d'un nombre pair d'unités principales. Étant donné que I_n^+ et I_n^- forment une partition de l'ensemble des unités multicomplexes, l'inverse est également vrai : si une unité quelconque de I_n est invariante sous Λ, alors elle est forcément hyperbolique.

Proposition 2.1

Un nombre multicomplexe η est multiperplexe si et seulement si $\eta^\Lambda = \eta$.

DÉMONSTRATION. Toute composition de conjugués se distribue sur la somme et l'ensemble des nombres multiperplexes est constitué des combinaisons linéaires réelles d'unités hyperboliques. De plus, une unité est hyperbolique si et seulement si elle est invariante sous Λ. ■

De la proposition 1.2, les éléments de la base canonique $\Gamma_n^\ddagger$ sont tous invariants sous la composition Λ, ce qui en fait des éléments de la sous-algèbre multiperplexe. De plus, cet ensemble contient exactement 2^{n-1} éléments linéairement indépendants, ce qui correspond à la dimension de $\mathbb{D}_n$. La base canonique est donc une base commune aux multicomplexes et aux multiperplexes, la distinction entre les deux étant déterminée uniquement par les coefficients.

Proposition 2.2

Un nombre multicomplexe est multiperplexe si et seulement si ses composantes sont réelles dans la base canonique.

DÉMONSTRATION. De la proposition 2.1, un nombre η est multiperplexe si et seulement $\eta^\Lambda = \eta$, et

$$\begin{aligned} \eta^\Lambda = \eta \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \overline{\eta_{\hat{k}}} \varepsilon_k &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}} \varepsilon_k \\ \Leftrightarrow \forall k,\ \overline{\eta_{\hat{k}}} &= \eta_{\hat{k}} \\ \Leftrightarrow \forall k,\ \eta_{\hat{k}} &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

La définition de la sous-algèbre multiperplexe ainsi que les deux propositions précédentes sont toutes équivalentes entre elles et caractérisent $\mathbb{D}_n$ par rapport à $\mathbb{M}_n$.

2.3 Partie réelle et imaginaire

Soit $\eta \in \mathbb{M}_n$, un nombre multicomplexe quelconque. Chaque composante de ce nombre dans la base canonique peut être écrite en termes de sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$\eta_{\hat{k}} = x_k + \mathrm{i} y_k, \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, 2^{n-1}.$$

Substituée dans η, on peut séparer la somme en une partie « réelle » et une partie « imaginaire » de η, chacune étant dans la sous-algèbre multiperplexe.

$$\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (x_k + \mathrm{i} y_k)\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x_k \varepsilon_k + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} y_k \varepsilon_k = d_1 + \mathrm{i} d_2 \tag{2.5}$$

où $d_1, d_2 \in \mathbb{D}_n$. Cette écriture est une généralisation directe des mêmes concepts au sein de l'espace des nombres complexes. En prenant $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{M}_n$ on a

$$z = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} z\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x\varepsilon_k + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} y\varepsilon_k,$$

mais

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} x\varepsilon_k = x \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k = x \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2^{n-1}} y\varepsilon_k = y \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k = y.$$

Cela implique que les notions de partie réelle et de partie imaginaire sont les mêmes que z soit considéré comme étant complexe ou multicomplexe.

Chapitre 3

Étude des idéaux

Les idéaux sont particulièrement importants au sein des structures d'anneau, car c'est une nuance supplémentaire apparaissant par l'absence d'une propriété : celle de l'inverse multiplicatif. Tout corps ne possède que deux idéaux, $\{0\}$ et lui-même, qui sont les idéaux triviaux. Dans les multicomplexes on a un nombre fini d'idéaux non triviaux et ils ont une forme générale assez simple en termes des éléments de la base canonique $\Gamma_n^{\ddagger}$, ce qui semble souligner l'aspect fondamental de cette base par rapport aux autres. On commence par déterminer la forme des idéaux multiperplexes avant de « traduire » ces résultats en idéaux multicomplexes à l'aide de l'opération de complexification.

Nous verrons, notamment, que l'ensemble des idéaux multiperplexes et multicomplexes sont des idéaux principaux, c'est-à-dire qu'ils sont générés par un seul élément.

3.1 Idéaux multiperplexes

Les éléments de la base canonique $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{2^{n-1}} = \Gamma_n^{\ddagger}$ forment ce qu'on appelle une **décomposition orthogonale de l'identité** [10] avec :

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_k\varepsilon_l = \varepsilon_k\delta_{kl}.$$

Ce type de décomposition permet d'écrire l'anneau multiperplexe comme la somme directe

$$\mathbb{D}_n = \bigoplus_{k=1}^{2^{n-1}} \mathbb{D}_n\varepsilon_k = \bigoplus_{k=1}^{2^{n-1}} \{\eta \cdot \varepsilon_k | \eta \in \mathbb{D}_n\}.$$

Chaque terme $\mathbb{D}_n\varepsilon_j$ de cette somme est généré par l'élément correspondant ε_j. Puisque cette décomposition est également une base de l'espace, pour tout $\eta \in \mathbb{D}_n$ on a

$$\eta \cdot \varepsilon_j = \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}}\varepsilon_k\right)\varepsilon_j = \eta_{\hat{j}}\varepsilon_j$$

et $\mathbb{D}_n\varepsilon_j = \mathbb{R}\varepsilon_j$, ce qui signifie que tous les idéaux principaux générés par un terme de la base canonique sont de la forme $\mathbb{R}\varepsilon_j$ et l'espace $\mathbb{D}_n$ est une somme directe de ces idéaux. Ce n'est pas seulement $\mathbb{D}_n$, mais tous les idéaux multiperplexes qui peuvent être caractérisés de cette manière.

Proposition 3.1

Tout élément non nul d'un idéal propre multiperplexe est un diviseur de zéro.

DÉMONSTRATION. Soit I un idéal propre multiperplexe et $\eta \in I$ un élément non nul. Supposons que η n'est pas un diviseur de zéro, alors η est inversible et $\eta^{-1} \cdot \eta = 1 \in I$. La présence de l'identité dans I implique $I = \mathbb{D}_n$, ce qui est une contradiction. ∎

Proposition 3.2

Pour tout $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$, l'idéal principal $\mathbb{R}\varepsilon_j$ est minimal.

DÉMONSTRATION. Soit $I \subset \mathbb{R}\varepsilon_j$ un sous-idéal. Il y a deux possibilités : $I = \{0\}$ ou bien il existe un nombre réel $x \neq 0$ tel que $x\varepsilon_j \in I$. Pour ce deuxième cas, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(y/x) \cdot x\varepsilon_j = y\varepsilon_j \in I$ et $I = \mathbb{R}\varepsilon_j$. ∎

Lemme 3.3

Tout idéal non trivial multiperplexe contient au moins un idéal minimal $\mathbb{R}\varepsilon_j$.

DÉMONSTRATION. Soit I un idéal non trivial multiperplexe. Alors il existe un élément non nul $\eta \in I$ avec au moins une projection $\eta_{\hat{\jmath}}$ différente de zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\eta \cdot \frac{x\varepsilon_j}{\eta_{\hat{\jmath}}} = \frac{x\eta_{\hat{\jmath}}\varepsilon_j}{\eta_{\hat{\jmath}}} = x\varepsilon_j \in I \Rightarrow \mathbb{R}\varepsilon_j \subseteq I.$$

∎

Lemme 3.4

Pour tout sous-ensemble d'indices $\varnothing \neq J \subseteq \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, la somme directe $\bigoplus_{j\in J} \mathbb{R}\varepsilon_j$ est un idéal principal multiperplexe généré par l'élément $\sum_{j\in J} \varepsilon_j$.

DÉMONSTRATION. On a directement

$$\mathbb{D}_n\left(\sum_{j\in J}\varepsilon_j\right) = \left\{\eta \cdot \left(\sum_{j\in J}\varepsilon_j\right) \middle| \eta \in \mathbb{D}_n\right\} = \left\{\sum_{j\in J}\eta_{\hat{\jmath}}\varepsilon_j \middle| \eta_{\hat{\jmath}} \in \mathbb{R}\right\} = \bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j.$$

∎

Théorème 3.5

Tout idéal non trivial multiperplexe est un idéal principal de la forme $\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j$ où $\varnothing \neq J \subseteq \{1,\ldots,2^{n-1}\}$.

DÉMONSTRATION. Soit I un idéal non trivial multiperplexe et $\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j$ la plus grande somme directe contenue dans I (du lemme 3.3, I contient au moins un idéal $\mathbb{R}\varepsilon_j$). Si $I-\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j = \varnothing$ alors $I=\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j$, ce qui est le résultat souhaité. Si $I-\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j \neq \varnothing$, alors il existe un élément non nul $\eta \in I-\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j$ avec au moins une projection $\eta_{\hat{j}'}$, $j'\in J^C$, différente de zéro. La présence de cet élément implique $\mathbb{R}\varepsilon_{j'}\subseteq I$ et

$$\left(\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j\right)\oplus\mathbb{R}\varepsilon_{j'}\subseteq I,$$

contredisant le fait que $\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j$ est la plus grande somme directe contenue dans I. Ainsi $I=\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j$ et est un idéal principal (du lemme 3.4). ■

Ayant à présent caractérisé les idéaux multiperplexes en termes des idéaux minimaux, on tourne notre attention sur les hyperplans orthogonaux H_j définis comme suit :

$$H_j := \{\eta\in\mathbb{D}_n \mid \eta\cdot\varepsilon_j = 0\}.$$

Cet ensemble correspond aux nombres multiperplexes avec une j-ème composante nulle.

Proposition 3.6

Pour tout sous-ensemble propre d'indices $\varnothing\neq J\subset\{1,\ldots,2^{n-1}\}$,

$$\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j = \bigcap_{j'\in J^C} H_{j'}.$$

DÉMONSTRATION. On a directement

$$\eta\in\bigoplus_{j\in J}\mathbb{R}\varepsilon_j \Leftrightarrow \forall j'\in J^C, \eta_{\hat{j}'}=0 \Leftrightarrow \forall j'\in J^C, \eta\in H_{j'} \Leftrightarrow \eta\in\bigcap_{j'\in J^C}H_{j'}.$$

■

Remarque : Du théorème 3.5, tous les hyperplans orthogonaux ainsi que leurs intersections sont des idéaux multiperplexes.

Proposition 3.7

Pour tout $j=1,\ldots,2^{n-1}$, le plan orthogonal H_j est un idéal maximal multiperplexe.

DÉMONSTRATION. Supposons que H_j n'est pas maximal, alors il existe un idéal propre multiperplexe I tel que $H_j \subset I$. Soit $\eta \in I - H_j$, alors $\eta_{\hat{j}} \neq 0$ sinon $\eta \in H_j$ et on obtient une contradiction. Ce qui implique $R\varepsilon_j \in I$ et

$$H_j \oplus \mathbb{R}\varepsilon_j = \mathbb{D}_n \subseteq I.$$

Ainsi tous les hyperplans orthogonaux sont des idéaux maximaux multiperplexes. ■

Des deux précédentes propositions et du théorème 3.5, tous les idéaux multiperplexes ont la forme d'une somme directe d'idéaux minimaux $\mathbb{R}\varepsilon_j$ ou bien d'une intersection d'hyperplans orthogonaux H_j. De plus, il n'y a pas d'autres idéaux distincts des $\mathbb{R}\varepsilon_j$ et des H_j qui sont minimaux ou maximaux. Ce qui complète la caractérisation des idéaux multiperplexes.

3.2 Complexification et réalisation

Notons $\mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ et $\mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$ l'ensemble des idéaux multiperplexes et celui des idéaux multicomplexes respectivement. Nous verrons que ces deux ensembles sont liés par les opérations de **complexification** et de **réalisation** sur des espaces vectoriels. Il est important de noter que l'opération de réalisation est distincte de la « realification » telle que présentée dans la littérature sur le sujet [28]. Dans le contexte présent, la réalisation est l'opération inverse de la complexification qui nous permet d'obtenir la structure réelle (naturelle) d'un espace vectoriel complexe. La complexification est toujours appliquée sur un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$ comme une extension de la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{C}$.

$$(V, +, \cdot, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{Complexification}} (V \oplus \mathrm{i}V, +, \cdot, \mathbb{C})$$

Les bases et la dimension de V sont conservées à la suite d'une complexification.

Proposition 3.8

La complexification d'un idéal multiperplexe est un idéal multicomplexe.

DÉMONSTRATION. Soit $I_D \in \mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$, $\eta \in \mathbb{M}_n$ et $d_1 + \mathrm{i}d_2 \in I_D \oplus \mathrm{i}I_D$. Le nombre η peut être séparé en sa partie réelle et sa partie imaginaire $\eta = d_1' + \mathrm{i}d_2'$ avec $d_1', d_2' \in \mathbb{D}_n$. Alors

$$\eta \cdot (d_1 + \mathrm{i}d_2) = (d_1' + \mathrm{i}d_2') \cdot (d_1 + \mathrm{i}d_2) = (d_1'd_1 - d_2'd_2) + \mathrm{i}(d_1'd_2 + d_2'd_1).$$

Puisque I_D est un idéal, tous les produits du côté droit de l'équation sont dans I_D et $\eta \cdot (d_1 + \mathrm{i}d_2) \in I_D \oplus \mathrm{i}I_D$. ■

De cette proposition, la complexification peut être vue comme une fonction bien définie de $\mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ à $\mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$. Soit $\mathrm{Re} : \mathcal{I}(\mathbb{M}_n) \to \mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ la fonction de **réalisation multicomplexe** définie comme

$$\mathrm{Re}(I_M) = \{\eta \in I_M \mid \eta^{\Lambda} = \eta\}, \quad I_M \in \mathcal{I}(\mathbb{M}_n).$$

Notons que pour tout idéal multicomplexe I_M, $\mathrm{Re}(I_M)$ est non vide puisque $0 \in I_M$ et $0^\Lambda = 0$. La notion de réalisation multicomplexe et la définition qui y est associée sont spécifiques à ce mémoire.

Proposition 3.9

La réalisation d'un idéal multicomplexe est un idéal multiperplexe.

DÉMONSTRATION. Soit $I_M \in \mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$, $\zeta \in \mathbb{D}_n$ et $d \in \mathrm{Re}(I_M)$. Notons que $\mathbb{D}_n \subseteq \mathbb{M}_n$ et $\mathrm{Re}(I_M) \subseteq I_M$ ce qui implique $\zeta \cdot d \in I_M$. De plus,

$$(\zeta \cdot d)^\Lambda = \zeta^\Lambda \cdot d^\Lambda = \zeta \cdot d \Rightarrow \zeta \cdot d \in \mathrm{Re}(I_M)$$

et $\mathrm{Re}(I_M)$ est donc un idéal multiperplexe. ■

Proposition 3.10

Soit I_M un idéal multicomplexe. Si $\eta \in I_M$ alors $\eta^\Lambda \in I_M$.

DÉMONSTRATION. Soit $\eta \in I_M$ écrit sous la représentation canonique :

$$\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}} \varepsilon_k$$

et prenons $\zeta \in \mathbb{M}_n$ tel que

$$\forall k = 1, \ldots, 2^{n-1}, P_k(\zeta) = \zeta_{\hat{k}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta_{\hat{k}} = 0, \\ \overline{\eta_{\hat{k}}}^2 / |\eta_{\hat{k}}|^2 & \text{si } \eta_{\hat{k}} \neq 0. \end{cases}$$

Alors pour tout k,

$$P_k(\zeta \cdot \eta) = \zeta_{\hat{k}} \cdot \eta_{\hat{k}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta_{\hat{k}} = 0 \\ \overline{\eta_{\hat{k}}} & \text{si } \eta_{\hat{k}} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow P_k(\zeta \cdot \eta) = \overline{\eta_{\hat{k}}}.$$

Ainsi $\zeta \cdot \eta = \eta^\Lambda$ et puisque I_M est un idéal, $\eta^\Lambda \in I_M$. ■

Lemme 3.11

La réalisation multicomplexe est la fonction inverse de la complexification de l'ensemble $\mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ à $\mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$ c'est-à-dire que pour tout $I_D \in \mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ et $I_M \in \mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$

$$\mathrm{Re}(I_D \oplus \mathrm{i}I_D) = I_D \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(I_M) \oplus \mathrm{i}\mathrm{Re}(I_M) = I_M.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\eta = d_1 + \mathrm{i}d_2 \in I_D \oplus \mathrm{i}I_D$, alors

$$\begin{aligned} \eta \in \mathrm{Re}(I_D \oplus \mathrm{i}I_D) &\Leftrightarrow \eta^\Lambda = \eta \\ &\Leftrightarrow (d_1 + \mathrm{i}d_2)^\Lambda = d_1 + \mathrm{i}d_2 \\ &\Leftrightarrow d_2 = 0 \text{ et } \eta \in I_D. \end{aligned}$$

Soit $\zeta = d_1' + \mathrm{i}d_2' \in \mathrm{Re}(I_M) \oplus \mathrm{i}\mathrm{Re}(I_M)$. Puisque $\mathrm{Re}(I_M) \subseteq I_M$, ζ est dans I_M. À l'inverse, si $\zeta = d_1 + \mathrm{i}d_2 \in I_M$ alors de la proposition 3.10, $\zeta^\Lambda = d_1 - \mathrm{i}d_2 \in I_M$ et

$$\frac{\zeta + \zeta^\Lambda}{2} = d_1 \in I_M, \quad \frac{\zeta - \zeta^\Lambda}{2\mathrm{i}} = d_2 \in I_M.$$

Ce qui signifie que la partie réelle et la partie imaginaire de ζ sont tous deux dans I_M. En tant qu'éléments multiperplexes, ils sont invariants sous la composition Λ, et alors dans la réalisation de I_M et $\zeta \in \mathrm{Re}(I_M) \oplus \mathrm{i}\mathrm{Re}(I_M)$. ■

De la théorie des anneaux, l'intersection $(\cap)$ de deux idéaux est toujours un idéal, et cette opération définit une structure algébrique sur $\mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ et $\mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$. Plus spécifiquement, $(\mathcal{I}(\mathbb{D}_n), \cap)$ et $(\mathcal{I}(\mathbb{M}_n), \cap)$ sont tous deux des monoïdes avec leur élément neutre respectif $\mathbb{D}_n$ et $\mathbb{M}_n$.

Théorème 3.12

La complexification est une bijection de $\mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ à $\mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$ préservant l'opération d'intersection $(\cap)$ entre deux idéaux, c'est-à-dire que pour toute paire I_1, I_2 dans $\mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$,

$$(I_1 \cap I_2) \oplus \mathrm{i}(I_1 \cap I_2) = (I_1 \oplus \mathrm{i}I_1) \cap (I_2 \oplus \mathrm{i}I_2).$$

DÉMONSTRATION. L'existence de la fonction inverse (réalisation multicomplexe) du lemme 3.11 est suffisante pour conclure que la complexification est bijective entre $\mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$ et $\mathcal{I}(\mathbb{M}_n)$. Si I_1 et I_2 sont deux idéaux multiperplexes,

$$\begin{aligned} & \eta = d_1 + \mathrm{i}d_2 \in (I_1 \cap I_2) \oplus \mathrm{i}(I_1 \cap I_2) \\ \Leftrightarrow\ & d_1, d_2 \in I_1 \cap I_2 \\ \Leftrightarrow\ & d_1, d_2 \in I_1 \text{ et } d_1, d_2 \in I_2 \\ \Leftrightarrow\ & d_1 + \mathrm{i}d_2 \in I_1 \oplus \mathrm{i}I_1 \text{ et } d_1 + \mathrm{i}d_2 \in I_2 \oplus \mathrm{i}I_2 \\ \Leftrightarrow\ & \eta \in (I_1 \oplus \mathrm{i}I_1) \cap (I_2 \oplus \mathrm{i}I_2). \end{aligned}$$

■

Remarque : L'inclusion $(\subseteq)$ entre idéaux est également conservée étant donné que $I_1 \subseteq I_2 \Leftrightarrow I_1 \cap I_2 = I_1$. Du théorème, pour tout $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(\mathbb{D}_n)$, on a

$$I_1 \subseteq I_2 \Leftrightarrow I_1 \oplus \mathrm{i}I_1 \subseteq I_2 \oplus \mathrm{i}I_2.$$

3.3 Idéaux multicomplexes

Le théorème 3.12 permet d'obtenir la forme des idéaux multicomplexes sans devoir passer une nouvelle fois par les démarches de la section 3.1 sur les idéaux multiperplexes, en plus de souligner le lien entre les deux. La relation d'inclusion étant conservée par la complexification, les idéaux minimaux multiperplexes deviennent des idéaux minimaux multicomplexes (et de même pour les idéaux maximaux). On trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\varepsilon_j &\to \mathbb{R}\varepsilon_j \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}\varepsilon_j = \mathbb{C}\varepsilon_j, \\ H_j &\to H_j \oplus \mathrm{i}H_j. \end{aligned}$$

La complexification de H_j est elle-même un hyperplan orthogonal multicomplexe que l'on note E_j.

$$E_j = H_j \oplus \mathrm{i}H_j = \{\eta \in \mathbb{M}_n \mid \eta \cdot \varepsilon_j = 0\}.$$

De la même manière que $\mathbb{R}\varepsilon_j$ et H_j sont les éléments constitutifs de tout idéal multiperplexe, une complète description des idéaux multicomplexes est donnée en termes de $\mathbb{C}\varepsilon_j$ et E_j.

Corollaire 3.13

Tout idéal multicomplexe est de la forme

$$\bigoplus_{j\in J} \mathbb{C}\varepsilon_j = \bigcap_{j'\in J^C} E_{j'}$$

généré par l'élément $\sum_{j\in J} \varepsilon_j$ et où $\varnothing \neq J \subseteq \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$.

Prenons un idéal multicomplexe quelconque I_J avec un sous-ensemble d'indices J. L'anneau quotient correspondant noté $\mathbb{M}_n/I_J$ est donné par

$$\mathbb{M}_n/I_J = \{\eta + I_J \mid \eta \in \mathbb{M}_n\} = \{\zeta + I_J \mid \zeta \in I_{J^\complement}\} \simeq I_{J^\complement}.$$

La dernière partie provient de la représentation canonique, permettant de séparer η en deux sommes distinctes, l'une contenue dans I_J et l'autre dans $I_{J^\complement}$:

$$\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}}\varepsilon_k = \sum_{j\in J} \eta_{\hat{\jmath}}\varepsilon_j + \sum_{j'\in J^\complement} \eta_{\hat{\jmath}'}\varepsilon_{j'}.$$

Chapitre 4

Pseudo-norme multicomplexe

Jusqu'à maintenant, les tentatives de définition d'une norme multicomplexe se sont concentrées principalement sur la norme euclidienne ou une variante équivalente. Prenons une norme euclidienne modifiée (par un facteur $1/2^{n-1}$)

$$\|\eta\|_E := \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}|^2}$$

qui généralise la norme complexe

$$\|\alpha\|_E := \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\alpha|^2} = |\alpha|$$

avec $\eta \in \mathbb{M}_n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Le problème avec ce type de norme est qu'il nous manque des propriétés pour que $\mathbb{M}_n$ soit une C^*-algèbre, alors que l'on semble avoir tous les « ingrédients » pour que ça soit possible : l'addition et la multiplication terme à terme, des composantes complexes dans la base canonique, puis une involution Λ qui se réduit au conjugué usuel sur les complexes.

La solution exploitant les propriétés propres aux multicomplexes est de définir une pseudo-norme, différente de ce qu'on retrouve habituellement pour un espace vectoriel, basée sur un ordre partiel sur les multiperplexes. L'utilisation d'une pseudo-norme plutôt qu'une norme évaluée dans les réels est un compromis permettant d'obtenir la structure d'une pseudo-C^*-algèbre.

4.1 Ordre partiel et définition de la pseudo-norme

L'ensemble des nombres multiperplexes $\mathbb{D}_n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2^{n-1}. Soit $\leq$ une relation d'ordre définie telle que pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{D}_n$,

$$\eta \leq \zeta \Leftrightarrow \eta_{\hat{j}} \leq \zeta_{\hat{j}}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}.$$

Vérifions que cette relation respecte les deux propriétés d'un ordre partiel ; pour tout $\eta, \zeta, \xi \in \mathbb{D}_n$ et $r > 0$:

1. $\eta \leq \zeta \Rightarrow \eta + \xi \leq \zeta + \xi$,
2. $\eta \leq \zeta \Rightarrow r \cdot \eta \leq r \cdot \zeta$.

Supposons que $\eta \leq \zeta$, alors $\eta_{\hat{j}} \leq \zeta_{\hat{j}}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$. Il est par la suite évident que

$$\eta_{\hat{j}} + \xi_{\hat{j}} \leq \zeta_{\hat{j}} + \xi_{\hat{j}}$$

peu importe l'indice j et la valeur de $\xi_{\hat{j}}$, ce qui implique $\eta + \xi \leq \zeta + \xi$ et complète la démonstration de 1.

Pour le point 2, supposons que $\eta \leq \zeta$, alors $\eta_{\hat{j}} \leq \zeta_{\hat{j}}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$ et $r\eta_{\hat{j}} \leq r\zeta_{\hat{j}}$ pour tout j. D'où

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} r\eta_{\hat{k}}\varepsilon_k = r\eta \leq r\zeta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} r\zeta_{\hat{k}}\varepsilon_k.$$

De cet ordre partiel, $\mathbb{D}_n$ est un espace vectoriel partiellement ordonné. On note $\mathbb{D}_n^+$ l'ensemble de tous les nombres multiperplexes positifs :

$$\mathbb{D}_n^+ = \{\eta \in \mathbb{D}_n \mid \eta \geq 0\}.$$

Il est maintenant possible de définir la pseudo-norme multicomplexe $\| \cdot \| : \mathbb{M}_n \to \mathbb{D}_n$ à valeurs multiperplexes et d'en vérifier les propriétés : inégalité du triangle, homogénéité et définie positive. Soit $\eta \in \mathbb{M}_n$, alors

$$\|\eta\|_{\mathbb{M}} := \|\eta\| := \sqrt{\eta^\Lambda \eta}$$

est l'expression de cette pseudo-norme multicomplexe. Puisque la multiplication s'effectue terme à terme dans la base canonique, la racine carrée s'interprète de la même manière que dans le cas complexe et se distribue directement sur les composantes d'un nombre multicomplexe, de sorte que

$$\|\eta\| := \sqrt{\eta^\Lambda \eta} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sqrt{|\eta_{\hat{k}}|^2}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}|\varepsilon_k \in \mathbb{D}_n^+.$$

On sait que le résultat est un nombre multiperplexe positif étant donné que $|\eta_{\hat{\jmath}}| \geq 0$ pour tout $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Vérifions les trois propriétés usuelles d'une norme, à commencer par l'inégalité du triangle. Pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{M}_n$ on a

$$\|\eta + \zeta\| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}} + \zeta_{\hat{k}}|\varepsilon_k \leq \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}|\varepsilon_k + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\zeta_{\hat{k}}|\varepsilon_k = \|\eta\| + \|\zeta\|$$

puisque $|\eta_{\hat{\jmath}}+\zeta_{\hat{\jmath}}| \leq |\eta_{\hat{\jmath}}|+|\zeta_{\hat{\jmath}}|$ pour tout j. En prenant $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque on a l'homogénéité :

$$\|\lambda\eta\| = \sqrt{(\lambda\eta)^{\Lambda}(\lambda\eta)} = \sqrt{|\lambda|^2\eta^{\Lambda}\eta} = |\lambda|\|\eta\|.$$

Puis on montre finalement que la norme est définie positive. On a $|\eta_{\hat{\jmath}}| \geq 0$ pour tout $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$ d'où $\|\eta\| \geq 0$. De plus, $\|\eta\| = 0$ implique $|\eta_{\hat{\jmath}}| = 0$ et $\eta_{\hat{\jmath}} = 0$ pour tout indice j, donc $\|\eta\| = 0 \Rightarrow \eta = 0$.

4.2 Démonstration que $\mathbb{M}_n$ est une pseudo-C^*-algèbre

Avant de commencer la démonstration, voyons en détail ce qu'est une C^*-algèbre. On dit qu'une algèbre A est une C^*-algèbre si :

1. A est une algèbre de Banach sur les complexes,
2. A possède une involution, notée *, ayant les propriétés suivantes pour tout $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:
   (a) $x^{**} = (x^*)^* = x$,
   (b) $(x + y)^* = x^* + y^*$,
   (c) $(xy)^* = y^*x^*$,
   (d) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$,
   (e) $\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\|$,
   (f) $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

On peut tout d'abord noter que le conjugué Λ respecte les propriétés de (a) jusqu'à (d), et qu'il ne restera qu'à vérifier celles faisant intervenir la norme. Pour le point 1, une algèbre de Banach se définit comme : un espace vectoriel normé et complet (espace de Banach), qui de plus satisfait la propriété

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

pour tout $x, y \in A$ avec une norme évaluée dans les réels. Pour obtenir la structure de pseudo-C^*-algèbre, on retire l'exigence d'une norme dans les réels, et démontre les propriétés ci-dessus à partir de la pseudo-norme multicomplexe. On sait que les multicomplexes forment un espace vectoriel pseudo-normé sur $\mathbb{C}$, on cherchera donc à montrer que cet espace est complet, ainsi que les trois propriétés supplémentaires liées à la pseudo-norme.

Proposition 4.1

Toute projection d'une suite de Cauchy multicomplexe est une suite de Cauchy complexe.

DÉMONSTRATION. La pseudo-métrique multicomplexe induite de la pseudo-norme est

$$d(\eta, \zeta) := \|\eta - \zeta\|$$

où $\eta, \zeta \in \mathbb{M}_n$. Ainsi, une suite $\eta_1, \eta_2, \ldots \in \mathbb{M}_n$ est dite de Cauchy si pour tout $\mathbb{R} \ni r > 0$ il existe un naturel N tel que $\forall m_1, m_2 > N$,

$$\|\eta_{m_1} - \eta_{m_2}\| < r.$$

De cette dernière expression,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(\eta_{m_1} - \eta_{m_2})^{\Lambda}(\eta_{m_1} - \eta_{m_2})} < r \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{\sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{m_1,\hat{k}} - \eta_{m_2,\hat{k}}|^2 \varepsilon_k} < r \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{m_1,\hat{k}} - \eta_{m_2,\hat{k}}| \varepsilon_k < \sum_{k=1}^{2^{n-1}} r\varepsilon_k \\
\Rightarrow \quad & |\eta_{m_1,\hat{\jmath}} - \eta_{m_2,\hat{\jmath}}| < r, \quad \forall j = 1, \ldots, 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Cela correspond à la définition d'une suite de Cauchy complexe pour la suite $\eta_{1,\hat{\jmath}}, \eta_{2,\hat{\jmath}}, \ldots$, et ce pour toute projection P_j de la suite multicomplexe de départ. ■

De cette proposition, on peut montrer que $\mathbb{M}_n$ est complet. Si on a une suite de Cauchy multicomplexe $\eta_1, \eta_2, \ldots$, alors toute projection de cette suite $\eta_{1,\hat{\jmath}}, \eta_{2,\hat{\jmath}}, \ldots$ aura une limite dans $\mathbb{C}$ (l'espace des nombres complexes est lui-même complet). Notons cette limite :

$$\eta_{m,\hat{\jmath}} \xrightarrow{m \to \infty} \zeta_{\hat{\jmath}} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}.$$

Ainsi, la suite multicomplexe aura également une limite, donnée par

$$\eta_m \xrightarrow{m \to \infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \zeta_{\hat{k}} \varepsilon_k \in \mathbb{M}_n.$$

Ce qui montre que $\mathbb{M}_n$ est bien un espace de Banach.

Proposition 4.2

La pseudo-norme multicomplexe satisfait les propriétés suivantes :

$$(i)\ \|\eta^{\Lambda}\eta\| = \|\eta\|\|\eta^{\Lambda}\| \quad (ii)\ \|\eta\eta^{\Lambda}\| = \|\eta\|^2 \quad (iii)\ \|\eta\zeta\| = \|\eta\|\|\zeta\|,$$

pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{M}_n$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on a de la propriété de commutativité que

$$\|\eta^\Lambda \eta\| = \|\eta\eta^\Lambda\|.$$

Ensuite, on sait que

$$\|\eta\| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}|\varepsilon_k$$

et

$$\|\eta^\Lambda\| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\overline{\eta_{\hat{k}}}|\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}|\varepsilon_k = \|\eta\|.$$

Ce qui signifie que (i) implique (ii) et vice-versa. Développons le côté gauche de (i) :

$$\|\eta^\Lambda \eta\| = \sqrt{(\eta^\Lambda \eta)^\Lambda (\eta^\Lambda \eta)} = \sqrt{\eta^\Lambda \eta}\sqrt{\eta\eta^\Lambda} = \|\eta\|\|\eta^\Lambda\|.$$

Pour la troisième propriété, on a

$$\|\eta\zeta\| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}\zeta_{\hat{k}}|\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}||\zeta_{\hat{k}}|\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}|\varepsilon_k \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\zeta_{\hat{k}}|\varepsilon_k = \|\eta\|\|\zeta\|.$$

■

Une conséquence directe des précédentes propositions est le fait que $\mathbb{M}_n$ muni de la norme multicomplexe et du conjugué Λ satisfait toutes les propriétés d'une C^*-algèbre. Puisque ces propriétés sont obtenues d'une pseudo-norme, et non d'une norme évaluée dans les réels, les multicomplexes forment une pseudo-C^*-algèbre.

Chapitre 5

$\mathbb{M}_n$-modules libres

La notion de module est une généralisation de l'espace vectoriel usuel en prenant un anneau quelconque plutôt qu'un corps comme ensemble des scalaires. Des précautions sont alors nécessaires puisque une généralisation implique une perte de certaines propriétés, notamment celles relatives aux bases de l'espace. Dans le cas d'un module sur les multicomplexes, nous verrons au cours des prochaines sections qu'il est possible de « retrouver » plusieurs des propriétés d'un espace vectoriel et donc de le traiter comme tel à quelques nuances près.

Formellement, un module sur l'anneau des multicomplexes ($\mathbb{M}_n$-module) est un groupe commutatif $(W, +)$ muni d'une opération $(\eta, |\psi\rangle) \to \eta|\psi\rangle$ de $\mathbb{M}_n \times W$ à W satisfaisant les conditions

1. $\eta(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = \eta|\psi\rangle + \eta|\phi\rangle$,
2. $(\eta + \zeta)|\psi\rangle = \eta|\psi\rangle + \zeta|\psi\rangle$,
3. $(\eta\zeta)|\psi\rangle = \eta(\zeta|\psi\rangle)$,
4. $1|\psi\rangle = |\psi\rangle$,

pour tout $\eta, \zeta \in \mathbb{M}_n$ et $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W$. La notation bra-ket $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (notation de Dirac) est ici utilisée pour les éléments de W tout comme dans son usage usuel pour les espaces vectoriels en physique. Il y a plusieurs avantages à cette notation, notamment la distinction visuelle entre l'espace des nombres multicomplexes et le module W qui sont tous les deux étudiés au sein de ce mémoire et qui ont des « bases » et des « composantes ». Une autre raison qui sera détaillée plus tard est que le théorème de Riesz se généralise aux espaces/modules de Hilbert multicomplexes, ce qui fait de cette notation la plus naturelle à employer.

Les théorèmes et démonstrations présentés dans les prochaines sections sont des généralisations et donc fortement inspirés de [16], couvrant le sujet pour le cas bicomplexe ($n = 2$).

5.1 Bases et sous-espaces

De [29], tout module libre sur anneau commutatif a un rang (dimension) bien défini. Comme $\mathbb{M}_n$ est une algèbre commutative, pour toute paire de bases d'un $\mathbb{M}_n$-module libre, celles-ci ont la même cardinalité m.

Soit W un $\mathbb{M}_n$-module libre et $\{|w_l\rangle\}_{l=1}^{m}$ une base de $m < \infty$ éléments. Ceci décrit le cas de dimension finie, et tout élément $|\psi\rangle \in W$ (appelé *ket*) s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base :

$$|\psi\rangle = \sum_{l=1}^{m} \eta_l |w_l\rangle, \quad \eta_l \in \mathbb{M}_n. \tag{5.1}$$

Un important sous-ensemble $V \subset W$ est celui de tous les kets avec des coefficients restreints à $\mathbb{C}$.

$$V := \left\{ |\psi\rangle = \sum_{l=1}^{m} x_l |w_l\rangle \middle| x_l \in \mathbb{C} \right\}.$$

Cet ensemble V forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et dépend de la base utilisée. On utilise maintenant la représentation canonique des nombres multicomplexes pour développer l'expression du ket $|\psi\rangle$. Pour chaque η_l on a :

$$\eta_l = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x_{l,\hat{k}} \varepsilon_k, \quad x_{l,\hat{k}} \in \mathbb{C}.$$

On substitue dans (5.1) pour obtenir

$$|\psi\rangle = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} x_{l,\hat{k}} \varepsilon_k \right) |w_l\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \sum_{l=1}^{m} x_{l,\hat{k}} |w_l\rangle \tag{5.2}$$

et on pose

$$|\psi\rangle_{\hat{k}} := \sum_{l=1}^{m} x_{l,\hat{k}} |w_l\rangle,$$

ce qui donne à $|\psi\rangle$ une forme plus simple en termes des éléments de la base canonique $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{2^{n-1}}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k |\psi\rangle_{\hat{k}} \tag{5.3}$$

avec chaque $|\psi\rangle_{\hat{k}}$ dans V. De cette représentation d'un ket quelconque $|\psi\rangle$, on définit la projection P_j de W à V de la même manière que pour un nombre multicomplexe :

$$P_j(|\psi\rangle) := |\psi\rangle_{\hat{j}}, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}.$$

La même notation P_j est utilisée à la fois pour les nombres multicomplexes et le module sans ambiguïté : dans tous les cas le résultat est le coefficient complexe ou bien le ket (de

V) à côté de l'élément de la base canonique ε_j. On peut montrer aisément que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{M}_n$ et $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W$,

$$P_j(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = P_j(\alpha)P_j|\psi\rangle + P_j(\beta)P_j|\phi\rangle = \alpha_{\hat{\jmath}}|\psi\rangle_{\hat{\jmath}} + \beta_{\hat{\jmath}}|\phi\rangle_{\hat{\jmath}} \tag{5.4}$$

ce qui fait de P_j un opérateur « presque » linéaire sur W, la différence étant que les coefficients α et β deviennent $\alpha_{\hat{\jmath}}$ et $\beta_{\hat{\jmath}}$, des nombres complexes.

Remarque : De la manière que V et P_j sont définis, les deux dépendent de la base $\{|w_l\rangle\}_{k=1}^{m}$ puisque chaque élément $|w_l\rangle$ peut être développé dans une nouvelle base avec des coefficients multicomplexes. Cela implique que les éléments de V ainsi que les kets projetés $|\psi\rangle_{\hat{\jmath}}$ n'ont pas nécessairement des coefficients complexes lorsque représentés dans cette nouvelle base.

Lorsqu'un élément non nul $|\psi\rangle \in W$ possède une projection nulle $|\psi\rangle_{\hat{\jmath}} = 0$, cet élément multiplié par le nombre multicomplexe ε_j donne 0 :

$$\varepsilon_j|\psi\rangle = \varepsilon_j|\psi\rangle_{\hat{\jmath}} = 0.$$

Or, ε_j et $|\psi\rangle$ sont tous les deux des éléments non nuls, ce qui signifie qu'on ne peut pas appliquer le même type de simplification que dans un espace vectoriel. Cette notion est semblable aux diviseurs de zéro de l'espace des nombres multicomplexes, et le terme habituellement employé pour classer les kets non nuls avec une composante nulle est « null cone », qui se traduit en « cône nul » en français.

$$\text{Cône nul} = \left\{ |\psi\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k |\psi\rangle_{\hat{k}} \in W \;\middle|\; |\psi\rangle_{\hat{\jmath}} = 0 \text{ pour au moins un } j \right\}.$$

Théorème 5.1

Aucun élément d'une base d'un $\mathbb{M}_n$-module libre ne peut être dans le cône nul.

DÉMONSTRATION. Soit $|s_p\rangle$ l'élément d'une seconde base de W. On peut écrire

$$|s_p\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k |s_p\rangle_{\hat{k}}.$$

Si $|s_p\rangle$ est dans le cône nul alors $|s_p\rangle_{\hat{\jmath}} = 0$ pour au moins un indice j et

$$\varepsilon_j|s_p\rangle = \varepsilon_j|s_p\rangle_{\hat{\jmath}} = 0,$$

ce qui entre en contradiction avec l'hypothèse d'indépendance linéaire. ∎

Pour $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, on pose

$$V_k := \varepsilon_k W = \left\{ \varepsilon_k \sum_{l=1}^{m} x_l |w_l\rangle \;\middle|\; x_l \in \mathbb{C} \right\}.$$

On peut voir que V_k est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension m, avec $\varepsilon_k|w_l\rangle$ comme éléments de base. Contrairement à V, ce sous-espace **ne dépend pas** de la base choisie. De l'équation (5.2), on sait que

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{m} x_{l,\hat{k}} \varepsilon_k |w_l\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \sum_{l=1}^{m} x_{l,\hat{k}} |w_l\rangle.$$

De plus, il est clair que les $2^{n-1} \cdot m$ éléments $\varepsilon_k|w_l\rangle$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, ce qui implique l'unicité de cette représentation. Chaque terme de la sommation en k correspond à un élément de V_k, et ainsi le module W est la somme directe de ces sous-espaces.

Théorème 5.2

Un $\mathbb{M}_n$-module de dimension m, noté W, est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $2^{n-1} \cdot m$ et

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_{2^{n-1}}.$$

Théorème 5.3

Soit $P_j : W \to V$, une projection pour un certain $1 \leq j \leq 2^{n-1}$ et V le sous-espace vectoriel défini par rapport à la base $\{|w_l\rangle\}_{l=1}^m$ de W. Si $\{|s_l\rangle\}_{l=1}^m$ est une autre base de W, alors $\{P_j|s_l\rangle\}_{l=1}^m$ est une base de V.

DÉMONSTRATION. On commence par montrer que les éléments $P_j|s_1\rangle, P_j|s_2\rangle, \ldots, P_j|s_m\rangle$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ pour toute valeur fixée j. Soit $\alpha_l \in \mathbb{C}$ pour $l = 1, \ldots, m$ et supposons que

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_l P_j(|s_l\rangle) = 0.$$

En posant $\beta_l := \alpha_l \varepsilon_j$, on obtient $P_k(\beta_l) = \delta_{kj}\alpha_l$ duquel on a

$$P_k\Big(\textstyle\sum_{l=1}^m \beta_l|s_l\rangle\Big) = \sum_{l=1}^m P_k(\beta_l)P_k|s_l\rangle = \sum_{l=1}^m \delta_{kj}\alpha_l P_k|s_l\rangle = \sum_{l=1}^m \alpha_l P_j|s_l\rangle = 0.$$

Puisque cette équation est valide pour tout $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, on a $\sum_{l=1}^m \beta_l|s_l\rangle = 0$. L'ensemble $\{|s_l\rangle\}_{l=1}^m$ étant une base de W, pour $l = 1, \ldots, m$ on a $\beta_l = 0$ tel que $\alpha_l = 0$ et $\{P_j|s_l\rangle\}_{l=1}^m$ est un ensemble linéairement indépendant.

On montre maintenant que cet ensemble génère V. Soit $|\phi\rangle \in V$ et considérons le ket

$$|\psi\rangle = \varepsilon_j|\phi\rangle \in W.$$

Puisque $\{|s_l\rangle\}_{l=1}^m$ génère W sur $\mathbb{M}_n$, il existe des $\beta_l \in \mathbb{M}_n$ tel que $\sum_{l=1}^m \beta_l|s_l\rangle = |\psi\rangle$. Ainsi,

$$|\phi\rangle = P_j|\psi\rangle = P_j\big(\sum_{l=1}^{m} \beta_l|s_l\rangle\big) = \sum_{l=1}^{m} P_j(\beta_l)P_j|s_l\rangle.$$

D'où $\{P_j|s_l\rangle\}_{l=1}^m$ génère V sur $\mathbb{C}$. ■

Proposition 5.4

Soit $|\psi\rangle \in W$ et $1 \leq j \leq 2^{n-1}$. Si $|\psi\rangle_{\hat{j}} = P_j|\psi\rangle = 0$ pour une certaine base de W, alors la j-ème projection de $|\psi\rangle$ est nulle pour toutes les autres bases de W.

DÉMONSTRATION. Pour une certaine base $\{|w_l\rangle\}_{l=1}^m$ de W, $|\psi\rangle$ peut être écrit comme

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k |\psi\rangle_{\hat{k}},$$

où $|\psi\rangle_{\hat{k}} = \sum_{l=1}^m z_{l,\hat{k}}|w_l\rangle$ pour $z_{l,\hat{k}} \in \mathbb{C}$. Si $|\psi\rangle_{\hat{j}} = P_j|\psi\rangle = 0$ dans cette base alors $z_{1,\hat{j}} = \cdots = z_{m,\hat{j}} = 0$. Supposons maintenant qu'il existe une seconde base $\{|\widetilde{w}_p\rangle\}_{p=1}^m$ de W. De manière similaire on trouve

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k |\widetilde{\psi}\rangle_{\hat{k}},$$

où $|\widetilde{\psi}\rangle_{\hat{k}} = \sum_{l=1}^m \widetilde{z}_{l,\hat{k}}|\widetilde{w}_l\rangle$ pour $\widetilde{z}_{l,\hat{k}} \in \mathbb{C}$. On veut montrer que

$$|\widetilde{\psi}\rangle_{\hat{j}} = \sum_{l=1}^m \widetilde{z}_{l,\hat{j}}|\widetilde{w}_l\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_{1,\hat{j}} = \cdots = z_{m,\hat{j}} = 0. \tag{5.5}$$

Les deux bases sont liées par une matrice multicomplexe non singulière (L_{lp}) [16] telle que

$$|w_l\rangle = \sum_{p=1}^m L_{lp}|\widetilde{w}_p\rangle, \qquad L_{lp} \in \mathbb{M}_n.$$

et $|\psi\rangle_{\hat{k}}$ peut être écrit

$$|\psi\rangle_{\hat{k}} = \sum_{l=1}^m z_{l,\hat{k}} \sum_{p=1}^m L_{lp}|\widetilde{w}_p\rangle = \sum_{p=1}^m \Big(\sum_{l=1}^m z_{l,\hat{k}} L_{lp}\Big)|\widetilde{w}_p\rangle.$$

Ainsi, on a $\widetilde{z}_{p,\hat{k}} = \sum_{l=1}^m z_{l,\hat{k}} L_{lp}$ et, en particulier, on trouve que l'équation (5.5) est satisfaite. ■

5.2 Matrices multicomplexes

Une matrice carrée multicomplexe A de dimensions $m \times m$ est un tableau de m^2 nombres multicomplexes A_{ij}. Chaque élément peut être écrit

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_{ij\hat{k}} \varepsilon_k$$

avec $a_{ij\hat{k}} \in \mathbb{C}$ en utilisant la base canonique multicomplexe $\{\varepsilon_k\}$. La matrice elle-même est exprimée par

$$A = (A_{ij})_{m\times m} = \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_{ij\hat{k}}\varepsilon_k\right)_{m\times m} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k (a_{ij\hat{k}})_{m\times m}.$$

En appliquant l'opérateur projection P_l sur A on trouve la matrice carrée associée de m^2 éléments complexes :

$$A_{\hat{l}} = P_l A = (a_{ij\hat{l}})_{m\times m}.$$

Ainsi toute matrice carrée multicomplexe A peut être écrite

$$A = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k A_{\hat{k}}, \qquad A_{\hat{k}} \in M_{m\times m}(\mathbb{C}).$$

Théorème 5.5

Soit $A = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k A_{\hat{k}}$ une matrice multicomplexe de dimension $m \times m$. Alors

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \det(A_{\hat{k}}).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\{C_i\}$ l'ensemble des colonnes de A, tel que

$$A \equiv (C_1, C_2, \ldots, C_m).$$

On peut écrire la i-ème colonne

$$C_i = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k C_i^{(k)}.$$

Avec les éléments de $C_i^{(k)}$ dans $\mathbb{C}$. Puisque les éléments de matrice proviennent d'un anneau commutatif, le déterminant est une fonction multilinéaire [17] et satisfait

$$\det\left(C_1, \ldots, \textstyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k C_i^{(k)}, \ldots, C_m\right)$$
$$= \varepsilon_1 \det(C_1, \ldots, C_i^{(1)}, \ldots, C_m) + \det\left(C_1, \ldots, \textstyle\sum_{k=2}^{2^{n-1}} \varepsilon_k C_i^{(k)}, \ldots, C_m\right).$$

Appliqué successivement, on obtient

$$\det\left(C_1, \ldots, \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k C_i^{(k)}, \ldots, C_m\right) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \det(C_1, \ldots, C_i^{(k)}, \ldots, C_m).$$

Puis on répète cette procédure pour chaque colonne de la matrice :

$$\det(C_1, \ldots, C_m) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \det(C_1^{(k)}, \ldots, C_m^{(k)}).$$

■

Du précédent théorème on peut voir que $\det(A) = 0$ si et seulement si $\det(A_{\hat{l}}) = 0$ pour tout l. De plus, $\det(A)$ est dans le cône nul si et seulement si $\det(A_{\hat{l}}) = 0$ pour au moins un l. On dit qu'une matrice carrée multicomplexe est **singulière** si son déterminant est dans le cône nul.

Théorème 5.6

L'inverse A^{-1} d'une matrice carrée multicomplexe A existe si et seulement si A n'est pas singulière. Si tel est le cas, A^{-1} est alors donnée par

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k (A_{\hat{k}})^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. Si A^{-1} existe alors

$$A^{-1}A = I \Rightarrow 1 = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A).$$

D'où $\det(A)$ n'est pas dans le cône nul. Inversement, si A n'est pas singulière, $\det(A_{\hat{l}}) \neq 0$ pour tout $l \Rightarrow (A_{\hat{l}})^{-1}$ existe pour tout l et

$$\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k (A_{\hat{k}})^{-1} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_l A_{\hat{l}} \right) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k I = I.$$

■

Théorème 5.7

Il existe toujours une matrice multicomplexe non singulière reliant une base d'un $\mathbb{M}_n$-module à une autre.

DÉMONSTRATION. Soit $\{|w_l\rangle\}_{l=1}^m$ et $\{|s_l\rangle\}_{l=1}^m$ deux bases de W. On peut écrire

$$|w_l\rangle = \sum_{p=1}^{m} L_{pl} |s_p\rangle \quad \text{et} \quad |s_p\rangle = \sum_{j=1}^{m} N_{jp} |w_j\rangle$$

où L et N sont des matrices multicomplexes $m \times m$. Alors

$$|w_l\rangle = \sum_{p=1}^{m} L_{pl} \sum_{j=1}^{m} N_{jp} |w_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{p=1}^{m} N_{jp} L_{pl} \right\} |w_j\rangle = \sum_{j=1}^{m} (NL)_{jl} |w_j\rangle$$

Ce qui implique que pour tout l,

$$\sum_{j=1}^{m}\{\delta_{jl} - (NL)_{jl}\}|w_j\rangle = 0$$

et puisque les éléments $|w_j\rangle$ sont linéairement indépendants, $NL = I$ et les matrices N et L sont l'inverse l'une de l'autre. Du théorème 5.6, elles sont donc non singulières. ∎

5.3 Opérateurs linéaires

Un opérateur linéaire multicomplexe est une fonction $A : W \to W$ telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{M}_n$ et $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W$,

$$A(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha A|\psi\rangle + \beta A|\phi\rangle.$$

On dit que deux opérateurs A et B commutent si et seulement si $AB - BA = 0$. Si on pose $A_{\hat{j}} = P_j A$, ce qui correspond à l'application subséquente des opérateurs A et P_j, alors pour tout $|\psi\rangle \in W$:

$$A_{\hat{j}}|\psi\rangle = P_j\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k A|\psi\rangle_{\hat{k}}\right) = P_j A|\psi\rangle_{\hat{j}} = A_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}}. \tag{5.6}$$

L'opérateur P_j n'est pas linéaire dans W et ne peut donc pas être traité comme tel. Si on applique AP_j sur un ket quelconque on obtient

$$AP_j|\psi\rangle = A|\psi\rangle_{\hat{j}} \in W. \tag{5.7}$$

L'expression à droite est dans W alors que celle de l'équation (5.6) est dans V, ce qui signifie que A et P_j ne commutent pas en général.

Théorème 5.8

Un opérateur linéaire multicomplexe $A : W \to W$ commute avec la projection $P_j : W \to V$ pour $1 \leq j \leq 2^{n-1}$ si et seulement si $AW \subseteq V$.

DÉMONSTRATION. Supposons que A et P_j commutent, alors pour tout $|\psi\rangle \in W$ on a

$$0 = (P_j A - AP_j)|\psi\rangle = A_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}} - A|\psi\rangle_{\hat{j}}$$

tel que $A = A_{\hat{j}}$ et $A : W \to V$.

À l'inverse, si on suppose que $AW \subseteq V$, pour tout $|\psi\rangle \in W$ on a

$$P_j A|\psi\rangle = P_j A|\psi\rangle_{\hat{j}} = A|\psi\rangle_{\hat{j}}$$

et

$$AP_j|\psi\rangle = A|\psi\rangle_{\hat{j}}$$

tel que $[A, P_j] = 0$. ■

On dit qu'un opérateur linéaire A est dans le cône nul si $A_{\hat{j}} = 0$ pour au moins une valeur de j (c'est-à-dire si $A_{\hat{j}}|\psi\rangle = 0 \ \forall|\psi\rangle \in W$). Si nous avons une relation de la forme

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

avec $\lambda \in \mathbb{M}_n$ et $|\psi\rangle \in W$ tel que $|\psi\rangle$ n'est pas dans le cône nul, alors λ est appelée une valeur propre de A et $|\psi\rangle$ le vecteur propre (ou ket propre) associé. En développant l'expression on obtient

$$A\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k|\psi\rangle_{\hat{k}} = \lambda\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k|\psi\rangle_{\hat{k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k A|\psi\rangle_{\hat{k}} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \varepsilon_k \lambda|\psi\rangle_{\hat{k}}.$$

Puis l'application de P_j des deux côtés nous donne

$$A_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}} = \lambda_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}} \tag{5.8}$$

où $\lambda_{\hat{j}} = P_j(\lambda) \in \mathbb{C}$. Cette dernière équation signifie que la valeur propre d'une projection de A est la projection correspondante de λ.

Théorème 5.9

Soit A et B deux opérateurs linéaires multicomplexes. Alors pour tout j nous avons les propriétés suivantes,

$$(i)\ P_j(A+B) = A_{\hat{j}} + B_{\hat{j}}, \quad (ii)\ P_jAB = A_{\hat{j}}B_{\hat{j}}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $|\psi\rangle \in W$, alors de (5.4) et (5.6)

$$\begin{aligned} P_j(A+B)|\psi\rangle &= P_j(A|\psi\rangle + B|\psi\rangle) = P_jA|\psi\rangle_{\hat{j}} + P_jB|\psi\rangle_{\hat{j}} \\ &= A_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}} + B_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}} = A_{\hat{j}}|\psi\rangle + B_{\hat{j}}|\psi\rangle \\ &= (A_{\hat{j}} + B_{\hat{j}})|\psi\rangle. \end{aligned}$$

En posant $|\phi\rangle := B|\psi\rangle$,

$$\begin{aligned} P_jAB|\psi\rangle &= P_jA|\phi\rangle = A_{\hat{j}}|\phi\rangle_{\hat{j}} \\ &= A_{\hat{j}}P_j|\phi\rangle = A_{\hat{j}}P_jB|\psi\rangle \\ &= A_{\hat{j}}B_{\hat{j}}|\psi\rangle. \end{aligned}$$

■

Théorème 5.10

L'action d'un opérateur linéaire multicomplexe sur W peut être représentée par une matrice multicomplexe.

DÉMONSTRATION. Soit $A : W \to W$ un opérateur linéaire multicomplexe et $\{w_l\}_{l=1}^m$ une base de W. Prenons $|\psi\rangle = \sum_{l=1}^m x_l|w_l\rangle \in W$ et posons $|\psi'\rangle := A|\psi\rangle$. Chaque ket $A|w_l\rangle$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des $|w_p\rangle$:

$$A|w_l\rangle = \sum_{p=1}^{m} A_{pl}|w_p\rangle.$$

En développant l'expression de $|\psi\rangle$ on a

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle = A|\psi\rangle = \sum_{l=1}^m x_l A|w_l\rangle &= \sum_{l=1}^m x_l \sum_{p=1}^m A_{pl}|w_p\rangle \\ &= \sum_{p=1}^m \left\{ \sum_{l=1}^m A_{pl}x_l \right\} |w_p\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi on trouve que les composantes x_l' de $|\psi'\rangle = \sum_{p=1}^m x_p'|w_p\rangle$ sont, par correspondance, données par

$$x_p' = \sum_{l=1}^m A_{pl}x_l.$$

L'action de A sur $|\psi\rangle$ est donc entièrement déterminée par la matrice dont les éléments sont les nombres multicomplexes A_{pl}. ■

Chapitre 6

Espaces de Hilbert multicomplexes

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien, permettant de définir la notion d'orthogonalité entre les vecteurs de l'espace. C'est également dans ce type d'espace que se déroule toute la dynamique de la mécanique quantique qui est l'une des théories les plus importantes de la physique théorique.

De la même manière qu'un $\mathbb{M}_n$-module généralise le concept d'espace vectoriel pour inclure l'anneau multicomplexe, l'espace de Hilbert multicomplexe généralise le concept d'espace de Hilbert habituel en définissant le produit scalaire sur un $\mathbb{M}_n$-module plutôt qu'un espace vectoriel. On obtient les mêmes résultats et théorèmes, ce qui est sans surprise car nous avons vu que tout $\mathbb{M}_n$-module possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Nous verrons qu'il en est de même de l'espace de Hilbert multicomplexe, qui possède toujours une structure d'espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

6.1 Produit scalaire

Le produit scalaire multicomplexe, généralisant celui du cas complexe [27], est une fonction associant un nombre multicomplexe à chaque paire d'éléments $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W$ et satisfaisant les conditions

1. $(|\psi\rangle, |\phi\rangle + |\chi\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle) + (|\psi\rangle, |\chi\rangle)$;
2. $(|\psi\rangle, \alpha|\phi\rangle) = \alpha(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$;
3. $(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (|\phi\rangle, |\psi\rangle)^{\Lambda}$;
4. $(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \in \mathbb{D}_n^+$ et $(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 0$ si et seulement si $|\psi\rangle = 0$;

pour tout $|\chi\rangle \in W$ et $\alpha \in \mathbb{M}_n$. On note $\mathbb{D}_n^+$ l'ensemble de tous les nombres multiperplexes avec des composantes positives dans la représentation canonique (voir chapitre 2). La j-ième projection du produit scalaire multicomplexe est notée :

$$(\cdot, \cdot)_{\hat{j}} := P_j(\cdot, \cdot)$$

et des propriétés de la définition du produit scalaire multicomplexe ci-haut, chaque projection devient elle-même un produit scalaire standard (hermitien) bien défini sur les sous-espaces V_j et V.

Théorème 6.1

Tout $|\psi\rangle \in W$ qui n'est pas dans le cône nul peut être normalisé.

DÉMONSTRATION. Pour tout $|\psi\rangle \in W$ qui n'est pas dans le cône nul, on a $(|\psi\rangle, |\psi\rangle)$ dans $\mathbb{D}_n^+$ et ce produit scalaire a des composantes strictement positives.

$$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k \varepsilon_k, \quad a_k > 0.$$

Alors le ket

$$|\phi\rangle := \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{a_k}} \varepsilon_k \right) |\psi\rangle$$

satisfait $(|\phi\rangle, |\phi\rangle) = 1$. ■

Théorème 6.2

Soit $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W$, alors

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (|\psi\rangle_{\hat{k}}, |\phi\rangle_{\hat{k}})_{\hat{k}} \varepsilon_k.$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
(|\psi\rangle, |\phi\rangle) &= \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\psi\rangle_{\hat{k}} \varepsilon_k, \sum_{l=1}^{2^{n-1}} |\phi\rangle_{\hat{l}} \varepsilon_l \right) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sum_{l=1}^{2^{n-1}} (|\psi\rangle_{\hat{k}}, |\phi\rangle_{\hat{l}}) (\varepsilon_k)^{\Lambda} \varepsilon_l \\
&= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (|\psi\rangle_{\hat{k}}, |\phi\rangle_{\hat{k}}) \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{2^{n-1}} (|\psi\rangle_{\hat{k}}, |\phi\rangle_{\hat{k}})_{\hat{j}} \varepsilon_j \right) \varepsilon_k \\
&= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (|\psi\rangle_{\hat{k}}, |\phi\rangle_{\hat{k}})_{\hat{k}} \varepsilon_k.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 6.3

Un ket $|\psi\rangle$ est dans le cône nul si et seulement si $(|\psi\rangle, |\psi\rangle)$ est dans le cône nul.

DÉMONSTRATION. Si $|\psi\rangle$ est dans le cône nul alors $|\psi\rangle_{\hat{\jmath}} = 0$ pour au moins un j, et alors $(|\psi\rangle_{\hat{\jmath}}, |\psi\rangle_{\hat{\jmath}})_{\hat{\jmath}} = 0$ ce qui implique, du théorème 6.2, que $(|\psi\rangle, |\psi\rangle)$ est dans le cône nul. Inversement, si $(|\psi\rangle, |\psi\rangle)$ est dans le cône nul, $(|\psi\rangle_{\hat{\jmath}}, |\psi\rangle_{\hat{\jmath}})_{\hat{\jmath}} = 0$ pour au moins un j, ce qui est possible seulement lorsque $|\psi\rangle_{\hat{\jmath}} = 0$ (des propriétés du produit scalaire). ■

On sait que V et V_j sont, pour tout $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$, des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$. De plus, $(\cdot, \cdot)_{\hat{\jmath}}$ est un produit scalaire standard sur ces deux espaces, ce qui signifie que chacun de ces espaces équipé de la projection d'un produit scalaire multicomplexe devient directement un espace de Hilbert de dimension finie. Du théorème 5.2, W est une somme directe des sous-espaces V_j et est donc lui-même un espace de Hilbert classique muni du produit scalaire :

$$\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\psi_k\rangle, \sum_{l=1}^{2^{n-1}} |\phi_l\rangle \right)_{\mathbb{C}} := \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (|\psi_k\rangle, |\phi_k\rangle)_{\hat{k}}, \tag{6.1}$$

où $|\psi_k\rangle$ et $|\phi_k\rangle$ sont dans V_k. Cette fonction induit une norme et une métrique de laquelle W devient un espace métrique complet. Il y a une importante différence entre le produit scalaire multicomplexe présenté en début de chapitre et celui de l'expression (6.1), les deux définis sur V, mais l'un étant à valeurs multicomplexes et l'autre à valeurs complexes. De plus, on peut voir de (6.1), que le produit scalaire à valeurs complexes est clairement induit de celui à valeurs multicomplexes, mais l'inverse est également possible.

Si $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ est un produit scalaire à valeurs complexes défini de manière indépendante sur W (considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$) alors

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) := \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (|\psi\rangle_{\hat{k}}, |\phi\rangle_{\hat{k}})_{\mathbb{C}} \varepsilon_k$$

est un produit scalaire multicomplexe sur W.

Théorème 6.4

Un $\mathbb{M}_n$-module W possède une structure d'espace de Hilbert si et seulement si W est équipé d'un produit scalaire multicomplexe.

Le $\mathbb{M}_n$-module est ainsi un cas spécifique de module dans lequel il n'y a pas de distinction entre ces deux notions, du fait que le produit scalaire complexe peut toujours être induit d'un produit scalaire multicomplexe et vice-versa. On peut alors dire que de l'existence d'un tel produit scalaire, W est un **espace de Hilbert multicomplexe**.

Théorème 6.5 Riesz généralisé

Soit $f : W \to \mathbb{M}_n$ une fonctionnelle linéaire sur W. Alors il existe un ket unique $|\psi\rangle \in W$ tel que $\forall |\phi\rangle \in W$, $f(|\phi\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle)$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que toute projection $f_{\hat{\jmath}}$ de f est une fonctionnelle linéaire sur V. En appliquant le théorème de Riesz classique, il existe un ket unique $|\psi_j\rangle \in V$ tel que pour tout $|\phi_j\rangle \in V$, $f_{\hat{\jmath}}(|\phi_j\rangle) = (|\psi_j\rangle, |\phi_j\rangle)_{\hat{\jmath}}$. On pose $|\psi\rangle := \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\psi_k\rangle\varepsilon_k$ et on utilise le théorème 6.2 pour obtenir

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (|\psi_k\rangle, |\phi\rangle_{\hat{k}})_{\hat{k}}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f_{\hat{k}}(|\phi\rangle_{\hat{k}})\varepsilon_k = f(|\phi\rangle)$$

pour tout $|\phi\rangle \in W$. ■

De cette généralisation du théorème de Riesz, on a une bijection de l'ensemble des fonctionnelles linéaires à W (ensemble des kets), ce qui permet l'utilisation de la notation de Dirac pour le produit scalaire : $\langle\psi|\phi\rangle := (|\psi\rangle, |\phi\rangle)$. Le *bra* $\langle\psi|$ étant la fonctionnelle linéaire associée au ket $|\psi\rangle$.

6.2 Décomposition spectrale

Soit A un opérateur linéaire sur W. Alors l'opérateur adjoint A^* de A est définit comme un opérateur sur W satisfaisant l'égalité

$$(|\psi\rangle, A|\phi\rangle) = (A^*|\psi\rangle, |\phi\rangle), \quad \forall|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W.$$

Par la décomposition de A en ses « composantes » $A_{\hat{k}}$ (opérateurs linéaires sur V) dans la représentation canonique, l'adjoint existe toujours, est unique, et son expression est donnée par l'opérateur linéaire dont chaque composante est l'adjoint $A^*_{\hat{k}}$ de $A_{\hat{k}}$.

$$A = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} A_{\hat{k}}\varepsilon_k, \quad A^* = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} A^*_{\hat{k}}\varepsilon_k. \tag{6.2}$$

Ainsi l'opérateur adjoint multicomplexe satisfait les mêmes propriétés de base que l'adjoint sur un espace vectoriel usuel. De plus,

$$P_j(A)^* = P_j(A^*), \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1} \tag{6.3}$$

est un résultat immédiat de (6.2). Soit $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W$. On définit l'opérateur $|\phi\rangle\langle\psi|$ de sorte que son action sur un ket arbitraire $|\chi\rangle \in W$ soit donnée par

$$(|\phi\rangle\langle\psi|)|\chi\rangle := |\phi\rangle(\langle\psi|\chi\rangle).$$

Du théorème de Riesz généralisé, l'action de $\langle\psi|$ sur un ket est une fonctionnelle linéaire et donne toujours un nombre, ce qui signifie que l'opérateur $|\phi\rangle\langle\psi|$ lui-même est linéaire.

Tout comme dans un espace de Hilbert classique, l'opérateur identité peut être écrit en termes d'une base orthonormée $\{|u_l\rangle\}_{l=1}^{m}$ de W :

$$\sum_{l=1}^{m} |u_l\rangle\langle u_l| = I.$$

Puisque l'action à gauche sur n'importe quel élément $|u_p\rangle$ de la base nous donne

$$\left(\sum_{l=1}^{m} |u_l\rangle\langle u_l|\right)|u_p\rangle = \sum_{l=1}^{m} |u_l\rangle\langle u_l|u_p\rangle = \sum_{l=1}^{m} \delta_{lp}|u_l\rangle = |u_p\rangle.$$

Un opérateur multicomplexe A est dit auto-adjoint si $A^* = A$. Prenons A et A^* tels que dans l'équation (6.2), alors

$$A = A^* \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2^{n-1}} A_{\hat{k}}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} A^*_{\hat{k}}\varepsilon_k \Leftrightarrow A_{\hat{k}} = A^*_{\hat{k}}, \quad \forall k = 1, \ldots, 2^{n-1}$$

et pour toute projection, on a $P_j(A)^* = P_j(A^*) = P_j(A)$. Cela implique que la projection d'un opérateur auto-adjoint sur W est elle-même un opérateur auto-adjoint sur V.

Théorème 6.6

Soit A un opérateur auto-adjoint sur W. Alors les valeurs propres de A qui sont associées à des vecteurs propres hors du cône nul sont toutes dans l'ensemble $\mathbb{D}_n$.

DÉMONSTRATION. Soit $|\psi\rangle$ un vecteur propre de A hors du cône nul. De l'équation (5.8),

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow A_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}} = \lambda_{\hat{j}}|\psi\rangle_{\hat{j}}, \quad |\psi\rangle_{\hat{j}} \neq 0, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}.$$

Si A est auto-adjoint alors chacune de ses projections est également un opérateur auto-adjoint, d'où $\lambda_{\hat{j}}$ est un nombre réel pour tout $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$. ■

Théorème 6.7

Deux vecteurs propres d'un opérateur linéaire multicomplexe sont orthogonaux si la différence des deux valeurs propres associées est hors du cône nul.

DÉMONSTRATION. Soit $|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle$ deux vecteurs propres d'un opérateur auto-adjoint A sur W avec les valeurs propres associées λ et λ' respectivement. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= (|\psi\rangle, A|\phi\rangle) - (|\phi\rangle, A|\psi\rangle)^{\Lambda} \\ &= \lambda'(|\psi\rangle, |\phi\rangle) - \lambda^{\Lambda}(|\phi\rangle, |\psi\rangle)^{\Lambda} \\ &= (\lambda' - \lambda^{\Lambda})(|\psi\rangle, |\phi\rangle). \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \in \mathbb{D}_n$, $\lambda^{\Lambda} = \lambda$ et si $\lambda' - \lambda$ n'est pas dans le cône nul, alors $(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = 0$. ■

Théorème 6.8 Décomposition spectrale généralisée

Soit W un $\mathbb{M}_n$-module libre de dimension finie et soit $A : W \to W$ un opérateur linéaire multicomplexe auto-adjoint. Il est toujours possible de trouver un ensemble $\{|\psi_l\rangle\}_{l=1}^m$ de vecteurs propres de A qui est également une base orthonormée de W. De plus, A peut être exprimé sous la forme

$$A = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l |\psi_l\rangle\langle\psi_l|$$

où λ_l est la valeur propre de A associée au vecteur propre $|\psi_l\rangle$.

DÉMONSTRATION. Toute projection $P_j(A) = A_{\hat{\jmath}}$ est elle-même un opérateur auto-adjoint sur V. En appliquant le théorème de décomposition spectrale classique, pour tout $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$ il existe un ensemble orthonormé $\{|\psi_l\rangle_{\hat{\jmath}}\}_{l=1}^m$ de valeurs propres de $A_{\hat{\jmath}}$ qui est également une base de V muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\hat{\jmath}}$. En posant

$$|\psi_l\rangle := \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\psi_l\rangle_{\hat{k}} \varepsilon_k$$

on obtient l'ensemble $\{|\psi_l\rangle\}_{l=1}^m$ satisfaisant l'énoncé de ce théorème et

$$\begin{aligned} A = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} A_{\hat{k}} \varepsilon_k &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\sum_{l=1}^{m} \lambda_{l,\hat{k}} |\psi_l\rangle_{\hat{k}} \langle\psi_l|_{\hat{k}} \right) \varepsilon_k \\ &= \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} P_k(\lambda_l |\psi_l\rangle\langle\psi_l|) \varepsilon_k = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l |\psi_l\rangle\langle\psi_l| \end{aligned}$$

où chaque $\lambda_{l,\hat{k}}$ est la valeur propre complexe associée au vecteur propre $|\psi_l\rangle_{\hat{k}}$. ∎

6.3 Opérateurs unitaires

Un opérateur linéaire multicomplexe U est dit unitaire s'il préserve le produit scalaire multicomplexe, c'est-à-dire si pour tout $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in W$,

$$(U|\psi\rangle, U|\phi\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle).$$

Tout opérateur linéaire multicomplexe est unitaire si et seulement si $U^*U = I$, puisque

$$\begin{aligned} & (U|\psi\rangle, U|\phi\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle) \\ \Leftrightarrow \quad & (U^*U|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle) \\ \Leftrightarrow \quad & ((U^*U - I)|\psi\rangle, |\phi\rangle) = 0. \end{aligned}$$

De l'égalité $U^*U = I$ on peut remarquer que l'adjoint U^* est l'inverse de U, ce qui signifie implicitement que l'inverse existe et que U lui-même ne peut pas être dans le cône nul.

Lemme 6.9

Soit $U : W \to W$ un opérateur unitaire. Alors pour tout $j = 1, \ldots, 2^{n-1}$, $P_j(U) : V \to V$ est un opérateur unitaire sur V.

DÉMONSTRATION. De l'équation (6.3) et du théorème 5.9 on a

$$P_j(U)^* P_j(U) = P_j(U^*) P_j(U) = P_j(U^*U) = P_j(I) = I.$$

■

Théorème 6.10

Toute valeur propre λ d'un opérateur unitaire multicomplexe satisfait $\lambda^\Lambda \lambda = 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $|\psi\rangle \in W$ un vecteur propre de l'opérateur unitaire U, associé à la valeur propre λ telle que

$$U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

Puisque U préserve le produit scalaire, on a

$$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = (U|\psi\rangle, U|\psi\rangle) = (\lambda|\psi\rangle, \lambda|\psi\rangle) = \lambda^\Lambda \lambda (|\psi\rangle, |\psi\rangle)$$

et puisqu'un vecteur propre n'est pas dans le cône nul (par définition), $\lambda^\Lambda \lambda = 1$. ■

Remarque : Cela signifie que chaque composante complexe de λ dans la représentation canonique est sur le cercle unité :

$$\begin{aligned} & \lambda^\Lambda \lambda = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \overline{\lambda_{\hat{k}}} \varepsilon_k \right) \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda_{\hat{k}} \varepsilon_k \right) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\lambda_{\hat{k}}|^2 \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 1 \varepsilon_k \\ \Leftrightarrow\ & |\lambda_{\hat{k}}|^2 = 1 \quad \text{pour tout } k = 1, \ldots, 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Corollaire 6.11

Soit U un opérateur unitaire et soit $|\psi\rangle \in W$ un vecteur propre de U associé à la valeur propre λ. Alors

$$U^*|\psi\rangle = \lambda^\Lambda |\psi\rangle.$$

DÉMONSTRATION. On a directement

$$\lambda^\Lambda|\psi\rangle = \lambda^\Lambda U^* U|\psi\rangle = \lambda^\Lambda \lambda U^*|\psi\rangle = U^*|\psi\rangle.$$

■

Théorème 6.12

Deux vecteurs propres d'un opérateur unitaire multicomplexe sont orthogonaux si la différence de leurs valeurs propres n'est pas dans le cône nul.

DÉMONSTRATION. Soit $U : W \to W$ un opérateur unitaire et $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ deux vecteurs propres de U associés aux valeurs propres λ et λ' respectivement. On a

$$\begin{aligned} 0 &= (|\psi\rangle, U|\psi'\rangle) - (|\psi'\rangle, U^*|\psi\rangle)^\Lambda = \lambda'(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) - [\lambda^\Lambda(|\psi'\rangle, |\psi\rangle)]^\Lambda \\ &= \lambda'(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) - \lambda(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) = (\lambda' - \lambda)(|\psi\rangle, |\psi'\rangle). \end{aligned}$$

D'où $(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) = 0$ si $\lambda' - \lambda$ n'est pas dans le cône nul. ■

Chapitre 7

Permutation des indices

Bien que les unités principales $\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_n$ soient *a priori* équivalentes, l'unité i_1 est généralement sélectionnée dans la formulation d'équations et représentations. La représentation canonique a ses composantes dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$, et l'équation de Schrödinger multicomplexe unidimensionnelle originellement proposée [26] est

$$\mathrm{i}_1 \hbar \partial_t \psi(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x,t) - V(x,t)\psi(x,t) = 0.$$

Or, rien ne justifie cette préférence par rapport à d'autres unités, du moins pour l'instant. Afin d'évaluer l'impact de ce choix, on étudie les permutations d'indices pour l'ensemble des unités principales $\{\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_n\}$.

Le groupe des permutations sur cet ensemble, qui contient $n!$ éléments, correspond au groupe symétrique (bijections de l'ensemble à lui-même) de dimension finie que l'on note S_n. Un résultat important de la théorie des groupes de permutations est le fait que toute permutation dans S_n, $n > 1$, est un produit de cycles de longueur deux [6]. Cette propriété permet de concentrer notre attention sur les permutations de deux indices, notées σ_{pq}, en sachant qu'une permutation simultanée de plusieurs indices est équivalente à l'application consécutive d'un nombre quelconque de permutations σ_{pq}.

$$\sigma_{pq} : \quad \mathrm{i}_p \to \mathrm{i}_q \quad \text{et} \quad \mathrm{i}_q \to \mathrm{i}_p; \quad p, q \in \{1, \ldots, n\}.$$

Tout comme pour les conjugués, σ_{pq} n'affecte que les unités principales et se distribue sur les opérations d'addition et de multiplication. Appliquée sur un nombre multicomplexe quelconque, on a

$$\sigma_{pq}(\eta) = \sigma_{pq}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}} \varepsilon_k\right) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sigma_{pq}(\eta_{\hat{k}}) \sigma_{pq}(\varepsilon_k).$$

Rappelons qu'une composante quelconque $\eta_{\hat{k}}$ est dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$ et de la forme $x_{\hat{k}} + \mathrm{i}_1 y_{\hat{k}}$, $x_{\hat{k}}, y_{\hat{k}} \in \mathbb{R}$. Ce terme n'est affecté par σ_{pq} que dans le cas où $p = 1$ ou $q = 1$, ce qui se résume en un seul cas particulier $p = 1$ en considérant $p < q$ (sans perte de généralité, puisque $\sigma_{pq} = \sigma_{qp}$).

$$\sigma_{pq}(\eta_{\hat{k}}) = \begin{cases} x_{\hat{k}} + \mathrm{i}_q y_{\hat{k}} & \text{si } p = 1, \\ x_{\hat{k}} + \mathrm{i}_1 y_{\hat{k}} = \eta_{\hat{k}} & \text{si } p \neq 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

À partir de ce point, on cherche à déterminer $\sigma_{pq}(\varepsilon_k)$, $\varepsilon_k = \Gamma_n^{\ddagger_k}$ où $\ddagger_k$ est une composition de conjugués (voir chapitre 1), puis à reformuler le résultat $\sigma_{pq}(\eta)$ dans la base canonique avec composantes dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$.

7.1 Identités pour les unités principales et idempotents

Prenons le produit $\mathrm{i}_p\gamma_{pq}$ où $\gamma_{pq} = (1 + \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q)/2$. On peut voir par une simple manipulation algébrique qu'il est possible, en présence d'idempotents de cette forme, de passer d'une unité principale à une autre :

$$\mathrm{i}_p\gamma_{pq} = \frac{\mathrm{i}_p}{2}(1 + \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q) = \frac{1}{2}(\mathrm{i}_p - \mathrm{i}_q) = -\frac{\mathrm{i}_q}{2}(1 + \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q) = -\mathrm{i}_q\gamma_{pq}. \tag{7.2}$$

Puisque Γ_n est le produit en chaîne des idempotents $\gamma_{p,p+1}$, on peut utiliser la propriété ci-haut pour passer d'une unité principale quelconque à une autre, au signe près, tant qu'elle est présente dans un produit avec Γ_n.

Proposition 7.1

Pour tous $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{i}_p\gamma_{pq} = -\mathrm{i}_q\gamma_{pq}$ et $\mathrm{i}_p\gamma'_{pq} = \mathrm{i}_q\gamma'_{pq}$.

DÉMONSTRATION. La première égalité est obtenue à l'équation (7.2).
Pour la deuxième,

$$\mathrm{i}_p\gamma'_{pq} = \frac{\mathrm{i}_p}{2}(1 - \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q) = \frac{1}{2}(\mathrm{i}_p + \mathrm{i}_q) = \frac{\mathrm{i}_q}{2}(1 - \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q) = \mathrm{i}_q\gamma'_{pq}.$$

■

Proposition 7.2

Pour tous $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{i}_p\Gamma_n = (-1)^{q-p}\mathrm{i}_q\Gamma_n$.

DÉMONSTRATION. De la proposition 7.1,

$$\mathrm{i}_1\Gamma_n = -\mathrm{i}_2\Gamma_n = \mathrm{i}_3\Gamma_n = \ldots$$

Montrons par induction que pour tout q, $\mathrm{i}_1\Gamma_n = (-1)^{q-1}\mathrm{i}_q\Gamma_n$. Le cas $q = 2$ est vrai de l'égalité ci-haut, et supposons que $\mathrm{i}_1\Gamma_n = (-1)^{m-1}\mathrm{i}_m\Gamma_n$ pour un certain $m < n$. En appliquant une nouvelle fois la proposition 7.1 à droite, on obtient

$$\mathrm{i}_1\Gamma_n = (-1)^{m-1}\mathrm{i}_m\Gamma = (-1)^{m-1}(-1)\mathrm{i}_{m+1}\Gamma_n = (-1)^{(m+1)-1}\mathrm{i}_{m+1}\Gamma_n,$$

ce qui démontre l'égalité $\mathrm{i}_1\Gamma_n = (-1)^{q-1}\mathrm{i}_q\Gamma_n$. Si on l'applique simultanément pour les cas p et q alors

$$\begin{aligned}
&(-1)^{p-1}\mathrm{i}_p\Gamma_n = \mathrm{i}_1\Gamma_n = (-1)^{q-1}\mathrm{i}_q\Gamma_n \\
&\Rightarrow (-1)^{p-1}\mathrm{i}_p\Gamma_n = (-1)^{q-1}\mathrm{i}_q\Gamma_n \\
&\Rightarrow \mathrm{i}_p\Gamma_n = (-1)^{q-p}\mathrm{i}_q\Gamma_n.
\end{aligned}$$

■

Dans la représentation canonique des nombres multicomplexes, chaque composante est associée à un élément de la base canonique de la forme $\varepsilon_k = \Gamma_n^{\ddagger_k}$ où $\ddagger_k$ est une composition de conjugués. Si on souhaite passer de l'unité principale i_1 à une autre unité principale i_q, il faut alors prendre en considération l'effet de la composition $\ddagger_k$.

$$\mathrm{i}_1\Gamma_n^{\ddagger_k} = (\mathrm{i}_1^{\ddagger_k}\Gamma_n)^{\ddagger_k}$$

où

$$\mathrm{i}_1^{\ddagger_k}\Gamma_n = \begin{cases} \mathrm{i}_1\Gamma_n & \text{si } \ddagger_k \text{ ne contient pas } \dagger_1, \\ -\mathrm{i}_1\Gamma_n & \text{si } \ddagger_k \text{ contient } \dagger_1\,. \end{cases}$$

Il y a alors quatre possibilités pour la valeur de $(\mathrm{i}_1^{\ddagger_k}\Gamma_n)^{\ddagger_k}$:

$$\mathrm{i}_1\Gamma_n^{\ddagger_k} = (\mathrm{i}_1^{\ddagger_k}\Gamma_n)^{\ddagger_k} = \begin{cases} (-1)^{q-1}(\mathrm{i}_q\Gamma_n^{\ddagger_k}) & \text{si } \ddagger_k \text{ ne contient ni } \dagger_1 \text{ ni } \dagger_q, \\ (-1)^{q}(\mathrm{i}_q\Gamma_n^{\ddagger_k}) & \text{si } \ddagger_k \text{ contient } \dagger_1 \text{ et ne contient pas } \dagger_q, \\ (-1)^{q}(\mathrm{i}_q\Gamma_n^{\ddagger_k}) & \text{si } \ddagger_k \text{ contient } \dagger_q \text{ et ne contient pas } \dagger_1, \\ (-1)^{q-1}(\mathrm{i}_q\Gamma_n^{\ddagger_k}) & \text{si } \ddagger_k \text{ contient } \dagger_1 \text{ et } \dagger_q\,. \end{cases} \tag{7.3}$$

On sait que tout nombre multicomplexe η peut s'écrire sous la forme

$$\eta = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} z_k\varepsilon_k, \quad z_k \in \mathbb{C}(\mathrm{i}_1).$$

Or, des démarches précédentes, on peut passer des composantes dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$ à des composantes dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_q)$ pour un q quelconque en modifiant les signes $(-)$ selon l'élément $\varepsilon_k = \Gamma_n^{\ddagger_k}$ associé :

$$\begin{aligned}
\eta &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} z_k\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x_k\varepsilon_k + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} y_k\mathrm{i}_1\varepsilon_k \\
&= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x_k\varepsilon_k + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} y'_k\mathrm{i}_q\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} z'_k\varepsilon_k
\end{aligned}$$

où y'_k est égal à y_k **au signe près** (déterminé par (7.3)) et $z'_k = x_k + \mathrm{i}_q y'_k \in \mathbb{C}(\mathrm{i}_q)$.

Théorème 7.3

Pour tout $q \in \{1,\ldots,n\}$, tout nombre multicomplexe η possède une représentation dans la base canonique avec composantes dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_q)$.

Remarque : Cela signifie qu'il n'y a pas de « préférence » pour un sous-espace $\mathbb{C}(\mathrm{i}_q)$ en particulier, n'importe quel peut être choisi lors de l'écriture d'un nombre multicomplexe.

On introduit deux notations qui seront utilisées pour les prochains développements :

- $\gamma_{p,q}^{(m)} := \frac{1}{2}[1 + (-1)^m \mathrm{i}_p \mathrm{i}_q]$, $\qquad p, q \in \{1, \ldots, n\}$;
- $\Gamma_{\alpha \to \beta} := \gamma_{\alpha,\alpha+1}\gamma_{\alpha+1,\alpha+2} \ldots \gamma_{\beta-2,\beta-1}\gamma_{\beta-1,\beta} = \prod_{k=\alpha}^{\beta-1} \gamma_{k,k+1}$, $\qquad 1 \leq \alpha < \beta \leq n$.

Proposition 7.4

Pour tous $p, q, r \in \{1, \ldots, n\}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_{p,q}^{(x)}\gamma_{q,r}^{(y)} = \gamma_{p,r}^{(x-y+1)}\gamma_{q,r}^{(y)} = \gamma_{p,r}^{(x+y+1)}\gamma_{q,r}^{(y)}.$$

DÉMONSTRATION. Pour la première égalité, on compare directement le développement des deux expressions :

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,q}^{(x)}\gamma_{q,r}^{(y)} &= \frac{1}{4}[1 + (-1)^x \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q][1 + (-1)^y \mathrm{i}_q\mathrm{i}_r] \\
&= \frac{1}{4}[1 + (-1)^x \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q + (-1)^y \mathrm{i}_q\mathrm{i}_r + (-1)^{x+y}(-1)\mathrm{i}_p\mathrm{i}_r] \\
&= \frac{1}{4}[1 + (-1)^x \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q + (-1)^y \mathrm{i}_q\mathrm{i}_r + (-1)^{x+y+1}\mathrm{i}_p\mathrm{i}_r]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,r}^{(x-y+1)}\gamma_{q,r}^{(y)} &= \frac{1}{4}[1 + (-1)^{x-y+1} \mathrm{i}_p\mathrm{i}_r][1 + (-1)^y \mathrm{i}_q\mathrm{i}_r] \\
&= \frac{1}{4}[1 + (-1)^{x+1}(-1) \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q + (-1)^y \mathrm{i}_q\mathrm{i}_r + (-1)^{x-y+1}\mathrm{i}_p\mathrm{i}_r] \\
&= \frac{1}{4}[1 + (-1)^x \mathrm{i}_p\mathrm{i}_q + (-1)^y \mathrm{i}_q\mathrm{i}_r + (-1)^{x-y+1}\mathrm{i}_p\mathrm{i}_r].
\end{aligned}$$

De plus,

$$(-1)^{x-y+1} = (-1)^{x-y+1}(-1)^{2y} = (-1)^{x+y+1}$$

ce qui implique la première et la deuxième égalité. ∎

On souhaite utiliser ces notations et ces propositions pour le cas particulier où la permutation σ_{pq} est appliquée sur Γ_n, ce qui modifie les indices d'un certain nombre d'idempotents $\gamma_{r,r+1}$. Pour un cas général où $p > 2$, $q > p + 2$ et $n > q + 1$,

$$\sigma_{pq}(\Gamma_n) = \Gamma_{1\to p-1}(\gamma_{p-1,q}\gamma_{q,p+1})\Gamma_{p+1\to q-1}(\gamma_{q-1,p}\gamma_{p,q+1})\Gamma_{q+1\to n}. \tag{7.4}$$

Cette expression est la raison pour laquelle il était nécessaire d'introduire $\Gamma_{\alpha\to\beta}$, qui est une « chaîne » d'idempotents entre ceux dont l'indice est modifié par la permutation σ_{pq}.

Proposition 7.5

Pour tous $p, q, r \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $r > q$,

$$\gamma_{p,q}\Gamma_{q\to r} = \gamma_{p,r}^{(r-q)}\Gamma_{q\to r}.$$

DÉMONSTRATION. On reformule la proposition en terme de $m := r - q \Leftrightarrow r = q + m$, on cherche à montrer que

$$\gamma_{p,q}\Gamma_{q\to q+m} = \gamma_{p,q+m}^{(m)}\Gamma_{q\to q+m}.$$

Pour le cas $m = 1$ on a

$$\begin{aligned}\gamma_{p,q}\Gamma_{q\to q+1} &= \gamma_{p,q}\gamma_{q,q+1}\\ &= \gamma_{p,q+1}^{(1)}\gamma_{q,q+1}\\ &= \gamma_{p,q+1}^{(1)}\Gamma_{q\to q+1}.\end{aligned}$$

Supposons que la proposition est valide pour $m' = n$, et vérifions le cas $m' + 1$,

$$\begin{aligned}\gamma_{p,q}\Gamma_{q\to q+m'+1} &= \gamma_{p,q}\Gamma_{q\to q+m'}\gamma_{q+m',q+m'+1}\\ &= \gamma_{p,q+m'}^{(m')}\Gamma_{q\to q+m'}\gamma_{q+m',q+m'+1}\\ &= \gamma_{p,q+m'+1}^{(m'+1)}\Gamma_{q\to q+m'+1}\end{aligned}$$

et donc la proposition est valide pour tout $m \geq 1$ $(r > q)$. ■

Si on combine les démonstrations des propositions 7.4 et 7.5, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 7.6

Pour tous $p, q, r \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in \mathbb{Z}$ tels que $r > q$,

$$\gamma_{p,q}^{(x)}\Gamma_{q\to r} = \gamma_{p,r}^{(x+r-q)}\Gamma_{q\to r} = \gamma_{p,r}^{(x+q-r)}\Gamma_{q\to r}.$$

7.2 Propriétés de la permutation

Reprenons l'expression (7.4) d'une permutation d'indices σ_{pq} appliquée sur l'idempotent Γ_n :

$$\sigma_{pq}(\Gamma_n) = \Gamma_{1\to p-1}(\gamma_{p-1,q}\gamma_{q,p+1})\Gamma_{p+1\to q-1}(\gamma_{q-1,p}\gamma_{p,q+1})\Gamma_{q+1\to n}.$$

Celle-ci n'est valide que dans le cas où $p > 2$, $q > p + 2$ et $n > q + 1$, pour une valeur minimale de $n_{min} = 8$. Pour les autres situations, on perd un ou des termes en $\Gamma_{\alpha\to\beta}$ à gauche, au centre, et à droite de l'expression. On dresse ci-dessous la liste de l'ensemble des cas pour les valeurs de p, q et n, puis on étudie ensuite l'effet de la permutation σ_{pq} sur Γ_n pour chacun d'eux.

$$\begin{array}{lcllcl} A)\ p=1 & & 1)\ q=p+1 & & i)\ n=q \\ B)\ p=2 & \text{et} & 2)\ q=p+2 & \text{et} & ii)\ n=q+1 \\ C)\ p>2 & & 3)\ q>p+2 & & iii)\ n>q+1 \end{array}$$

Cas A.1.i) : $p=1$, $q=2$ et $n=2$.

$$\sigma_{1,2}(\Gamma_2) = \sigma_{1,2}(\gamma_{1,2}) = \gamma_{2,1} = \gamma_{1,2} = \Gamma_2 = \Gamma_2^{\dagger_1\circ\dagger_2}.$$

L'application de la composition $\dagger_1 \circ \dagger_2$ n'a aucun impact sur le résultat, mais l'écriture sous cette forme sera utile plus tard.

Cas A.1.ii) : $p=1$, $q=2$ et $n=3$.

$$\sigma_{1,2}(\Gamma_3) = \sigma_{1,2}(\gamma_{1,2}\gamma_{2,3}) = \gamma_{2,1}\gamma_{1,3}.$$

Premier cas non trivial ; on utilise la proposition 7.4 pour obtenir

$$\gamma_{2,1}\gamma_{1,3} = \gamma_{2,1}\gamma_{2,3}^{(0+0+1)} = \gamma_{1,2}\gamma_{2,3}' = (\gamma_{1,2}\gamma_{2,3})^{\dagger_1\circ\dagger_2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2}(\Gamma_3) = \Gamma_3^{\dagger_1\circ\dagger_2}.$$

Cas A.1.iii) : $p=1$, $q=2$ et $n>3$.

$$\sigma_{1,2}(\Gamma_n) = \sigma_{1,2}(\gamma_{1,2}\gamma_{2,3}\Gamma_{4\to n}) = \gamma_{2,1}\gamma_{1,3}\Gamma_{4\to n} = (\gamma_{1,2}\gamma_{2,3})^{\dagger_1\circ\dagger_2}\Gamma_{4\to n}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2}(\Gamma_n) = \Gamma_n^{\dagger_1\circ\dagger_2}.$$

Cas A.2.i) : $p=1$, $q=3$ et $n=3$.

$$\sigma_{1,3}(\Gamma_3) = \sigma_{1,3}(\gamma_{1,2}\gamma_{2,3}) = \gamma_{1,2}\gamma_{2,3} = \Gamma_3.$$

Cas A.2.ii) : $p=1$, $q=3$ et $n=4$.

$$\sigma_{1,3}(\Gamma_4) = \sigma_{1,3}(\gamma_{1,2}\gamma_{2,3}\gamma_{3,4}) = \gamma_{3,2}\gamma_{2,1}\gamma_{1,4} = \Gamma_{1\to 3}\gamma_{1,4}$$

De la proposition 7.5, on obtient $\Gamma_{1\to 3}\gamma_{1,4} = \Gamma_{1\to 3}\gamma_{3,4}^{(3-1)} = \Gamma_4$.

$$\Rightarrow \sigma_{1,3}(\Gamma_4) = \Gamma_4.$$

Cas A.2.iii) : $p=1$, $q=3$ et $n>4$.

$$\sigma_{1,3}(\Gamma_n) = \Gamma_n.$$

Cas A.3.i) : $p = 1$, $q > 3$ et $n = q$.

$$\sigma_{1,n}(\Gamma_n) = \gamma_{n,2}\Gamma_{2\to n-1}\gamma_{n-1,1} = \gamma_{1,2}^{(n-1)}\Gamma_{2\to n-1}\gamma_{n-1,n}^{(n-1)}.$$

On a $\sigma_{1,n}(\Gamma_n) = \Gamma_n$ si $n-1$ est pair et $\sigma_{1,n}(\Gamma_n) = \Gamma_n^{\dagger_1\circ\dagger_n}$ si $n-1$ est impair.

À ce stade, on peut comprendre que tous les autres cas seront semblables à ceux déjà développés jusqu'à maintenant : lorsque p est assez grand, un terme $\Gamma_{1\to p-1}$ apparaît à gauche qui permet de substituer les indices $1 \leftrightarrow p-1$, et de même lorsque q est assez grand par rapport à p, etc. Ce qui nous mène jusqu'au cas général, l'équation (7.4), dont on effectue la démarche complète.

Cas C.3.iii) : $p > 2$, $q > p+2$ et $n > q+1$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{pq}(\Gamma_n) &= \Gamma_{1\to p-1}(\gamma_{p-1,q}\gamma_{q,p+1})\Gamma_{p+1\to q-1}(\gamma_{q-1,p}\gamma_{p,q+1})\Gamma_{q+1\to n}\\
&= \Gamma_{1\to p-1}[\gamma_{p-1,q}\gamma_{q-1,q}^{(q-p)}]\Gamma_{p+1\to q-1}[\gamma_{p,p+1}^{(q-p)}\gamma_{p,q+1}]\Gamma_{q+1\to n}\\
&= \Gamma_{1\to p-1}[\gamma_{p-1,q-1}^{(p-q+1)}\gamma_{q-1,q}^{(q-p)}]\Gamma_{p+1\to q-1}[\gamma_{p,p+1}^{(q-p)}\gamma_{p+1,q+1}^{(p-q+1)}]\Gamma_{q+1\to n}\\
&= \Gamma_{1\to p-1}[\gamma_{p-1,p+1}^{(1)}\gamma_{q-1,q}^{(q-p)}]\Gamma_{p+1\to q-1}[\gamma_{p,p+1}^{(q-p)}\gamma_{q-1,q+1}^{(1)}]\Gamma_{q+1\to n}\\
&= \Gamma_{1\to p-1}[\gamma_{p-1,p+1}^{(1)}\gamma_{p,p+1}^{(q-p)}]\Gamma_{p+1\to q-1}[\gamma_{q-1,q}^{(q-p)}\gamma_{q-1,q+1}^{(1)}]\Gamma_{q+1\to n}\\
&= \Gamma_{1\to p-1}[\gamma_{p-1,p}^{(q-p)}\gamma_{p,p+1}^{(q-p)}]\Gamma_{p+1\to q-1}[\gamma_{q-1,q}^{(q-p)}\gamma_{q,q+1}^{(q-p)}]\Gamma_{q+1\to n}
\end{aligned}$$

Si $q-p$ est pair on a :

$$\sigma_{pq}(\Gamma_n) = \Gamma_n$$

et si $q-p$ est impair on a :

$$\sigma_{pq}(\Gamma_n) = \Gamma_n^{\dagger_p\circ\dagger_q},$$

ce qui est valide pour toutes les situations particulières.

Théorème 7.7

Pour tous $p, q \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\sigma_{pq}(\Gamma_n) = \begin{cases} \Gamma_n & \text{si } p-q \text{ est pair,}\\ \Gamma_n^{\dagger_p\circ\dagger_q} & \text{si } p-q \text{ est impair.}\end{cases}$$

On passe ensuite à l'étude de l'effet d'une permutation sur un conjugué multicomplexe.

Proposition 7.8

Soit $p, q, r \in \{1, \ldots, n\}$ et $\eta \in \mathbb{M}_n$, alors

$$(i)\ \sigma_{pq}(\eta^{\dagger_p}) = \sigma_{pq}(\eta)^{\dagger_q}, \quad (ii)\ \sigma_{pq}(\eta^{\dagger_q}) = \sigma_{pq}(\eta)^{\dagger_p},$$

$$(iii)\ \sigma_{pq}(\eta^{\dagger_r}) = \sigma_{pq}(\eta)^{\dagger_r},\ \text{pour } r \neq p \text{ et } r \neq q.$$

DÉMONSTRATION. Un conjugué quelconque n'agit que sur les unités principales, tout comme les permutations. On vérifie donc les cas possibles d'application sur une unité principale :

1. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_p^{\dagger_p}) = \sigma_{pq}(-\mathrm{i}_p) = -\mathrm{i}_q = \mathrm{i}_q^{\dagger_q} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_p)^{\dagger_q}$,
2. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_p^{\dagger_q}) = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_p) = \mathrm{i}_q = \mathrm{i}_q^{\dagger_p} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_p)^{\dagger_p}$,
3. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_q^{\dagger_p}) = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_q) = \mathrm{i}_p = \mathrm{i}_p^{\dagger_q} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_q)^{\dagger_q}$,
4. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_q^{\dagger_q}) = \sigma_{pq}(-\mathrm{i}_q) = -\mathrm{i}_p = \mathrm{i}_p^{\dagger_p} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_q)^{\dagger_p}$.

Pour $m \neq p$ et $m \neq q$,

5. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_m^{\dagger_p}) = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_m) = \mathrm{i}_m = \mathrm{i}_m^{\dagger_q} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_m)^{\dagger_q}$,
6. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_m^{\dagger_q}) = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_m) = \mathrm{i}_m = \mathrm{i}_m^{\dagger_p} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_m)^{\dagger_p}$.

Pour $r \neq p$, $r \neq q$, et $r \neq m$,

7. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_p^{\dagger_r}) = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_p) = \mathrm{i}_q = \mathrm{i}_q^{\dagger_r} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_p)^{\dagger_r}$,
8. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_q^{\dagger_r}) = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_q) = \mathrm{i}_p = \mathrm{i}_p^{\dagger_r} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_q)^{\dagger_r}$,
9. $\sigma_{pq}(\mathrm{i}_m^{\dagger_r}) = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_m) = \mathrm{i}_m = \mathrm{i}_m^{\dagger_r} = \sigma_{pq}(\mathrm{i}_m)^{\dagger_r}$.

Cela démontre les trois points de la proposition. ■

Remarque : La permutation s'applique sur un conjugué multicomplexe de la même manière que sur une unité principale.

Théorème 7.9

Toute permutation est une bijection de l'ensemble $\Gamma_n^{\ddagger}$ à lui-même : $\sigma_{pq}(\Gamma_n^{\ddagger}) = \Gamma_n^{\ddagger}$.

DÉMONSTRATION. Du théorème 7.7 et de la proposition 7.8, on a, pour une compositions $\ddagger_k$ quelconque

$$\sigma_{pq}(\Gamma_n^{\ddagger_k}) = \sigma_{pq}(\Gamma_n)^{\sigma_{pq}(\ddagger_k)} = \begin{cases} \Gamma_n^{\sigma_{pq}(\ddagger_k)} & \text{si } q-p \text{ est pair,} \\ \Gamma_n^{\sigma_{pq}(\ddagger_k)\circ(\dagger_p\circ\dagger_q)} & \text{si } q-p \text{ est impair.} \end{cases}$$

d'où $\sigma_{pq}(\Gamma_n^{\ddagger}) \subseteq \Gamma_n^{\ddagger}$. Notons qu'une permutation, en tant que fonction, est son propre inverse : $\sigma_{pq}^2 = Id$. Ainsi, pour toute composition $\ddagger_k$,

$$\Gamma_n^{\ddagger_k} = \sigma_{pq}^2(\Gamma_n^{\ddagger_k}) = \sigma_{pq}(\sigma_{pq}(\Gamma_n^{\ddagger_k})),$$

ce qui implique $\Gamma_n^{\ddagger} \subseteq \sigma_{pq}(\Gamma_n^{\ddagger})$, étant donné que l'on peut écrire n'importe quel élément $\Gamma_n^{\ddagger_k}$ sous la forme d'une permutation appliquée sur un autre élément de l'ensemble $\Gamma_n^{\ddagger}$. ■

7.3 Propriétés supplémentaires de la pseudo-norme

Pour $p \neq 1$, l'application de la permutation sur un nombre multicomplexe η nous donne

$$\sigma_{pq}(\eta) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \eta_{\hat{k}} \sigma_{pq}(\varepsilon_k)$$

puisque chaque $\eta_{\hat{k}}$ est dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$. On sait maintenant, du théorème 7.9, que toute permutation est une bijection de l'ensemble $\Gamma_n^{\ddagger}$ à lui-même, ce qui implique que tout élément ε_k est envoyé vers un élément $\varepsilon_{\sigma(k)}$, où σ est une bijection de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, 2^{n-1}\}$ à lui-même, et qui dépend de la permutation choisie.

$$\sigma_{pq}(\varepsilon_k) = \varepsilon_{\sigma(k)}, \quad \sigma : \{1, \ldots, 2^{n-1}\} \to \{1, \ldots, 2^{n-1}\}.$$

Si on considère le nombre multicomplexe η comme un vecteur à 2^{n-1} composantes, alors l'application de la permutation σ_{pq} s'interprète comme un changement de position. La composante $\eta_{\hat{1}}$ étant initialement à la position 1 se retrouve à la position $\sigma(1)$, celle à la position 2 à $\sigma(2)$, etc.

Lorsque $p = 1$, des démarches supplémentaires sont nécessaires :

$$\begin{aligned}\sigma_{1q}(\eta) &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sigma_{1q}(\eta_{\hat{k}})\sigma_{1q}(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (x_{\hat{k}} + \mathrm{i}_q y_{\hat{k}})\varepsilon_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x_{\hat{k}}\varepsilon_{\sigma(k)} + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} y_{\hat{k}}(\mathrm{i}_q\varepsilon_{\sigma(k)}).\end{aligned}$$

Des sections précédentes, il est possible de passer d'un facteur $\mathrm{i}_q\varepsilon_{\sigma(k)}$ à un facteur $\mathrm{i}_1\varepsilon_{\sigma(k)}$, possiblement avec un changement de signe, pour retrouver une composante dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$ plutôt que dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_q)$. De $\varepsilon_k = \Gamma_n^{\ddagger_k}$, l'élément correspondant après la permutation est $\varepsilon_{\sigma(k)} = \Gamma_n^{\ddagger_{\sigma(k)}}$.

$$\mathrm{i}_q\varepsilon_{\sigma(k)} = \mathrm{i}_q\Gamma_n^{\ddagger_{\sigma(k)}} = (\mathrm{i}_q^{\ddagger_{\sigma(k)}}\Gamma_n)^{\ddagger_{\sigma(k)}}$$

Le résultat se distingue en quatre sous-cas selon la présence ou non des conjugués $\dagger_1$ et $\dagger_q$ dans $\ddagger_{\sigma(k)}$.

Cas 1) : $\ddagger_{\sigma(k)}$ ne contient ni $\dagger_1$, ni $\dagger_q$.

$$\mathrm{i}_q\varepsilon_{\sigma(k)} = (\mathrm{i}_q\Gamma_n)^{\ddagger_{\sigma(k)}} = [(-1)^{q-1}\mathrm{i}_1\Gamma_n]^{\ddagger_{\sigma(k)}} = (-1)^{q-1}\mathrm{i}_1\varepsilon_{\sigma(k)}.$$

Cas 2) : $\ddagger_{\sigma(k)}$ contient $\dagger_1$ et ne contient pas $\dagger_q$.

$$\mathrm{i}_q\varepsilon_{\sigma(k)} = (\mathrm{i}_q\Gamma_n)^{\ddagger_{\sigma(k)}} = [(-1)^{q-1}\mathrm{i}_1\Gamma_n]^{\ddagger_{\sigma(k)}} = (-1)^{q}\mathrm{i}_1\varepsilon_{\sigma(k)}.$$

Cas 3) : $\ddagger_{\sigma(k)}$ contient $\dagger_q$ et ne contient pas $\dagger_1$.

$$\mathrm{i}_q\varepsilon_{\sigma(k)} = (-\mathrm{i}_q\Gamma_n)^{\ddagger_{\sigma(k)}} = [(-1)^{q}\mathrm{i}_1\Gamma_n]^{\ddagger_{\sigma(k)}} = (-1)^{q}\mathrm{i}_1\varepsilon_{\sigma(k)}.$$

Cas 4) : $\ddagger_{\sigma(k)}$ contient $\dagger_1$ et $\dagger_q$.

$$\mathrm{i}_q\varepsilon_{\sigma(k)} = (-\mathrm{i}_q\Gamma_n)^{\ddagger_{\sigma(k)}} = [(-1)^q\mathrm{i}_1\Gamma_n]^{\ddagger_{\sigma(k)}} = (-1)^{q-1}\mathrm{i}_1\varepsilon_{\sigma(k)}.$$

Dans tous les cas, soit la composante $\eta_{\hat{k}}$ maintient sa valeur après permutation, soit elle est conjuguée, ce qui dépend de p, q et k. On peut alors noter $\sigma_{pq}(\eta_{\hat{k}})\varepsilon_{\sigma(k)} = z_{\hat{k}}\varepsilon_{\sigma(k)}$ avec $z_{\hat{k}} \in \mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$. Puisque $z_{\hat{k}} = \eta_{\hat{k}}$ ou $z_{\hat{k}} = \eta^*_{\hat{k}}$, cette nouvelle composante a la même norme $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$-complexe que la précédente :

$$\sigma_{pq}(\eta) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sigma_{pq}(\eta_{\hat{k}})\varepsilon_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} z_{\hat{k}}\varepsilon_{\sigma(k)}, \quad |z_{\hat{k}}| = |\eta_{\hat{k}}|, \quad z_{\hat{k}} \in \mathbb{C}(\mathrm{i}_1). \tag{7.5}$$

Ces développements révèlent que la permutation (peu importe les indices p et q) conserve la norme euclidienne. En effet, puisque les composantes $\eta_{\hat{k}}$ se retrouvent soit déplacées, soit conjuguées (ou les deux), la somme sur k de leur norme au carré reste la même :

$$\|\sigma_{pq}(\eta)\|_E^2 = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |z_{\hat{k}}|^2 = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\eta_{\hat{k}}|^2 = \|\eta\|_E^2,$$

ce qui est résumé dans le théorème suivant.

Théorème 7.10

Toute permutation d'indices conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire que

$$\|\sigma_{pq}(\eta)\|_E = \|\eta\|_E$$

pour tous $p, q \in \{1, \ldots, n\}$.

Par contre la pseudo-norme multicomplexe telle que définie au chapitre 4 **n'est pas** conservée par les permutations. La proposition suivante permet de déterminer un cas particulier où elle est effectivement conservée.

Proposition 7.11

Pour tout $\eta \in \mathbb{M}_n$ tel que $\|\eta\| \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante

$$\sqrt{2^{n-1}}\|\eta\| = \|\eta\|_E.$$

DÉMONSTRATION. Le fait que la pseudo-norme de η soit un réel signifie que toutes les projections de la pseudo-norme sont égales, autrement dit :

$$\|\eta\| = x \in \mathbb{R} \Rightarrow |\eta_{\hat{\jmath}}| = x, \quad \forall j = 1, \ldots, 2^{n-1}.$$

Et alors la norme euclidienne est donnée par

$$\|\eta\|_E = \sqrt{\sum_{k=1}^{2^{n-1}} x^2} = \sqrt{2^{n-1}}x = \sqrt{2^{n-1}}\|\eta\|.$$

■

Corollaire 7.12

Pour tout $\eta \in \mathbb{M}_n$ tel que $\|\eta\| \in \mathbb{R}$, la pseudo-norme multicomplexe est conservée sous l'action d'une permutation d'indices.

Chapitre 8

Équation de Schrödinger multicomplexe

En mécanique quantique standard, il y a deux postulats possibles et équivalents l'un à l'autre permettant d'obtenir la dynamique de Schrödinger. La première est l'équation de Schrödinger directement,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

qui est l'équation différentielle exprimant l'évolution temporelle d'un système. L'autre approche est de postuler une évolution temporelle représentée par un opérateur unitaire $\mathcal{U}(t, t_0)$ tel que

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

où $|\psi(t_0)\rangle$ est l'état initial et $|\psi(t)\rangle$ l'état final qui sont tous deux dans $\mathcal{H}$, l'espace de Hilbert. Ces deux postulats sont mathématiquement équivalents et il est donc possible de « démontrer » l'équation de Schrödinger à partir du postulat de l'évolution temporelle unitaire [35].

Équation de Schrödinger $\Leftrightarrow$ évolution temporelle unitaire.

Il est important de savoir que l'hypothèse de l'évolution temporelle unitaire ne mène pas directement à l'équation de Schrödinger telle qu'on la connaît, mais plutôt à la forme sans constante :

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \Rightarrow \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = A(t)|\psi(t)\rangle$$

où $A(t)$ est un opérateur anti-hermitien ($A(t) + A^\dagger(t) = 0$) exprimé par

$$A(t) = \frac{d\mathcal{U}(t, t_0)}{dt}\mathcal{U}^\dagger(t, t_0).$$

Ensuite seulement le « choix » est fait de décrire la dynamique quantique à partir de l'hamiltonien définit par

$$H(t) := \mathrm{i}\hbar A(t) = \mathrm{i}\hbar \frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}\mathcal{U}^\dagger(t,t_0)$$

qui est un opérateur hermitien et s'interprète donc comme une observable dans la théorie, avec des unités d'énergie. Ce choix et cette description de l'évolution d'un système sont évidemment supportés par les données expérimentales, ce qui donne la forme usuelle de l'équation de Schrödinger avec la constante « i$\hbar$ » apparaissant du côté gauche.

On peut retracer cette même démarche dans le cas multicomplexe à quelques nuances près. L'opération † dans un espace de Hilbert complexe correspond à la transposée conjuguée et est équivalente à l'étoile * pour la notation de l'opérateur adjoint. Autrement dit, $A^* = A^\dagger$ pour tout opérateur A. L'équivalent pour l'espace de Hilbert multicomplexe est la transposée conjuguée-Λ, qu'on notera simplement par l'étoile *.

Un autre aspect à prendre en considération est le fait que nous avons plusieurs projections pour lesquelles la dynamique se déroule de manière indépendante. Soit W un espace de Hilbert multicomplexe tel que décrit aux chapitres 5 et 6 et soit $|\psi(t)\rangle \in W$. Alors

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\psi(t)\rangle_{\hat{k}}\varepsilon_k, \quad |\psi(t)\rangle_{\hat{k}} \in V$$

et chaque $|\psi(t)\rangle_{\hat{\jmath}}$ évolue indépendamment des autres. Toute équation faisant intervenir $|\psi(t)\rangle$ se séparera toujours en 2^{n-1} copies « complexes » indépendantes, et il faut alors se demander quelle forme d'équation est nécessaire pour retrouver les prévisions de la mécanique quantique standard. À priori, nous avons une généralisation si l'on retrouve l'équation de Schrödinger usuelle pour au moins une projection et qu'on affirme que celle-là correspond à la description de systèmes physiques.

L'utilisation des multicomplexes rend d'ailleurs possible une combinaison de la mécanique quantique standard et de l'approche plus spéculative de la mécanique quantique hyperbolique [12]. Il y a donc plusieurs possibilités cohérentes avec la notion d'évolution temporelle unitaire, et plusieurs formes d'équation de Schrödinger multicomplexe qui généralisent celle de la mécanique quantique standard.

8.1 Postulat de l'évolution temporelle unitaire

Soit W un espace de Hilbert multicomplexe et $\{|w_l\rangle\}_{l=1}^{m}$ une base de W, puis supposons que l'évolution temporelle d'un état $|\psi(t)\rangle \in W$ est donnée par un opérateur unitaire multicomplexe $\mathcal{U}(t,t_0)$ tel que

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle. \tag{8.1}$$

De cette seule équation on peut déduire les propriétés de l'opérateur évolution, qui sont les mêmes que dans la théorie usuelle :

1. $\mathcal{U}(t_0, t_0) = I$,
2. $\mathcal{U}(t_2, t_0) = \mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{U}(t_1, t_0)$,
3. $\mathcal{U}(t_0, t) = \mathcal{U}^{-1}(t, t_0) = \mathcal{U}^*(t, t_0)$,

valides pour tous $t, t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Si on dérive des deux côtés de (8.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle &= \frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}|\psi(t_0)\rangle \\
&= \frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}\mathcal{U}(t_0,t)|\psi(t)\rangle \\
&= \frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}\mathcal{U}^*(t,t_0)|\psi(t)\rangle \\
&= A(t,t_0)|\psi(t)\rangle \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle &= A(t,t_0)|\psi(t)\rangle
\end{aligned} \tag{8.2}$$

où

$$A(t, t_0) = \frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}\mathcal{U}^*(t,t_0).$$

Il y a deux faits importants à démontrer pour l'opérateur $A(t, t_0)$:

1. $A(t, t_0)$ est anti-autoadjoint, c'est-à-dire que $A(t, t_0) + A^*(t, t_0) = 0$,
2. $A(t, t_0)$ ne dépend pas de t_0, donc $A(t, t_0) = A(t)$.

Pour le premier, on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}(t,t_0)\mathcal{U}^*(t,t_0) = I \\
\Rightarrow &\frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}\mathcal{U}^*(t,t_0) + \mathcal{U}(t,t_0)\frac{d\mathcal{U}^*(t,t_0)}{dt} = 0 \\
\Rightarrow &A(t,t_0) + A^*(t,t_0) = 0.
\end{aligned}$$

L'égalité $(A^*)^* = A$ (ainsi que plusieurs autres identités) pour les opérateurs multicomplexes provient de cette même égalité valide dans le cas complexe, pour chaque projection de l'opérateur :

$$(A^*_{\hat{\jmath}})^* = A_{\hat{\jmath}}, \quad \forall j \Rightarrow (A^*)^* = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (A^*_{\hat{\jmath}})^*\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} A_{\hat{\jmath}}\varepsilon_k = A.$$

Pour le deuxième fait, on a

$$\begin{aligned}
A(t,t_0) &= \frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}\mathcal{U}^*(t,t_0) \\
&= \frac{d\mathcal{U}(t,t_0)}{dt}\Big(\mathcal{U}(t_0,t_1)\mathcal{U}^*(t_0,t_1)\Big)\mathcal{U}^*(t,t_0) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{U}(t,t_0)\mathcal{U}(t_0,t_1)\Big)\mathcal{U}^*(t_0,t_1)\mathcal{U}^*(t,t_0) \\
&= \frac{d\mathcal{U}(t,t_1)}{dt}\mathcal{U}(t_1,t_0)\mathcal{U}(t_0,t) = \frac{d\mathcal{U}(t,t_1)}{dt}\mathcal{U}^*(t,t_1).
\end{aligned}$$

D'où $A(t,t_0) = A(t,t_1)$ pour tout $t_1 \in \mathbb{R}$ et

$$\frac{dA(t,t_0)}{dt_0} = 0 \Rightarrow A(t,t_0) = A(t),$$

ce qui nous donne l'équation

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = A(t)|\psi(t)\rangle \tag{8.3}$$

avec $A(t)$ un opérateur anti-autoadjoint qui dépend du temps, avec des unités de temps inverse (t^{-1}). On obtient des unités d'énergie avec l'ajout de la constante $\hbar$, qui est donc toujours nécessaire, et il ne reste qu'à trouver une expression d'opérateur de sorte qu'au moins une de ses projections multicomplexes soit un opérateur hermitien. On explore les trois possibilités suivantes :

1. On ajoute le facteur $\mathrm{i}_1 = \mathrm{i}$, ce qui donne l'équation de Schrödinger usuelle pour toutes les projections,
2. On ajoute la somme (normalisée) de toutes les unités composites comme facteur,
3. On ajoute le facteur $\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\ldots\mathrm{i}_n$, qui est le produit de toutes les unités principales.

8.2 Forme usuelle et permutations

Posons $H(t) = \mathrm{i}_1\hbar A(t)$, on obtient alors l'équation

$$\mathrm{i}_1\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle. \tag{8.4}$$

Cette version de l'opérateur $H(t)$ est autoadjointe, et chacune de ses projections est un opérateur hermitien :

$$H^*(t) = (\mathrm{i}_1\hbar A(t))^* = (-\mathrm{i}_1)\hbar(-A(t)) = \mathrm{i}_1\hbar A(t) = H(t)$$

et

$$H^*(t) = H(t) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2^{n-1}} H^*_{\hat{k}}(t)\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} H_{\hat{k}}(t)\varepsilon_k \Leftrightarrow H^*_{\hat{\jmath}}(t) = H_{\hat{\jmath}}(t), \quad \forall j.$$

De (8.4) on obtient 2^{n-1} copies de l'équation de Schrödinger complexe,

$$\mathrm{i}_1\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\hat{\jmath}} = H_{\hat{\jmath}}(t)|\psi(t)\rangle_{\hat{\jmath}}, \quad j = 1,\ldots,2^{n-1} \tag{8.5}$$

pour lesquelles la dynamique se déroule exactement comme en mécanique quantique standard. Le véritable problème d'une expression comme l'équation (8.4) est le choix de l'unité i_1 par rapport aux autres unités principales $\mathrm{i}_2,\ldots,\mathrm{i}_n$, qui est le questionnement ayant guidé l'étude des permutations au chapitre 7.

Appliquons la permutation $\sigma_{1,l}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, des deux côtés de l'équation :

$$\mathrm{i}_l \hbar \frac{d}{dt} \sigma_{1,l}\{|\psi(t)\rangle\} = \sigma_{1,l}\{H(t)\}\sigma_{1,l}\{|\psi(t)\rangle\}. \tag{8.6}$$

Si on développe l'expression de $\sigma_{1,l}\{|\psi(t)\rangle\}$ et $\sigma_{1,l}\{H(t)\}$ on a

$$\sigma_{1,l}\{|\psi(t)\rangle\} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sigma_{1,l}\{|\psi(t)\rangle_{\hat{k}}\}\sigma_{1,l}\{\varepsilon_k\}$$

et

$$\sigma_{1,l}\{H(t)\} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sigma_{1,l}\{H(t)_{\hat{k}}\}\sigma_{1,l}\{\varepsilon_k\}.$$

Des démarches du chapitre 7, on peut écrire

$$\sigma_{1,l}\{\varepsilon_k\} = \varepsilon_{\sigma(k)}$$

où σ est une bijection de l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, 2^{n-1}\}$ à lui-même. Ensuite, les vecteurs $|\psi(t)\rangle_{\hat{\jmath}}$ et les opérateurs $H(t)_{\hat{\jmath}}$ sont dans V, c'est-à-dire le sous-espace de W avec composantes $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1 = \mathrm{i})$-complexes dans la base $\{|w_l\rangle\}_{l=1}^{m}$.

$$V := \left\{ |\psi\rangle = \sum_{l=1}^{m} x_l |w_l\rangle \middle| x_l \in \mathbb{C} \right\}.$$

Nous allons modifier cette notation pour définir un sous-espace avec composantes dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_j)$ où $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$V(\mathrm{i}_j) := \left\{ |\psi\rangle = \sum_{l=1}^{m} x_l |w_l\rangle \middle| x_l \in \mathbb{C}(\mathrm{i}_j) \right\}.$$

Cette nouvelle notation permet de préciser l'unité principale i_j et ainsi représenter de manière plus simple l'effet de la permutation $\sigma_{1,l}$. Tous les vecteurs $|\psi(t)\rangle_{\hat{\jmath}}$ qui étaient dans $V = V(\mathrm{i}_1)$ se retrouvent dans $V(\mathrm{i}_l)$ après la permutation. De même pour les opérateurs $H(t)_{\hat{\jmath}}$, qui peuvent être représentés par des matrices $m \times m$ avec entrées dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$, deviennent donc des matrices (opérateurs) sur $V(\mathrm{i}_l)$ après la permutation.

$$\sigma_{1,l}\{V(\mathrm{i}_1)\} \to V(\mathrm{i}_l).$$

Une projection quelconque de l'équation (8.4) devient, après permutation, une version équivalente avec coefficients dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_l)$ et pour la projection $P_{\sigma(j)}$ plutôt que P_j. On peut noter

$$\sigma_{1,l}\{|\psi(t)\rangle_{\hat{\jmath}}\} \to |\psi'(t)\rangle_{\hat{\sigma}(j)} \in V(\mathrm{i}_l),$$

$$\sigma_{1,l}\{H(t)_{\hat{\jmath}}\} \to H'(t)_{\hat{\sigma}(j)} \text{ sur } V(\mathrm{i}_l).$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}_l \hbar \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle_{\hat{\sigma}(j)} = H'(t)_{\hat{\sigma}(j)} |\psi'(t)\rangle_{\hat{\sigma}(j)}, \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}. \tag{8.7}$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}_l \frac{d}{dt} \hbar \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |\psi'(t)\rangle_{\hat{\sigma}(k)} \varepsilon_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} H'(t)_{\hat{\sigma}(k)} |\psi'(t)\rangle_{\hat{\sigma}(k)} \varepsilon_{\sigma(k)}. \tag{8.8}$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}_l \hbar \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle = H'(t) |\psi'(t)\rangle. \tag{8.9}$$

Cette dernière équation est une nouvelle équation valide dans le même espace de Hilbert W, ce qui signifie que postuler une équation de Schrödinger avec une unité principale i_1 implique cette même équation avec une unité principale i_l quelconque. Il est par contre difficile d'interpréter le passage de $H(t)$ avec éléments de matrice dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_1)$ à $H'(t)$ avec éléments de matrice dans $\mathbb{C}(\mathrm{i}_l)$ ainsi que le passage de la projection P_j à $P_{\sigma(j)}$. On peut par contre affirmer que les deux équations contiennent la même quantité d'information et auront les mêmes formes de solution aux signes et projections multicomplexes près.

Remarque : Tout comme les projections dans W ont été définies en fonction de la base $\{|w_l\rangle\}_{l=1}^{2^{n-1}}$ au chapitre 5, on a fait ici le même choix concernant les permutations permettant de passer de $V(\mathrm{i}_1)$ à $V(\mathrm{i}_l)$ sans devoir déterminer l'effet de $\sigma_{1,l}$ sur les éléments $|w_j\rangle$ de la base.

Ces diverses complications concernant la permutation ne semblent pas être présentes sous une éventuelle forme différentielle de l'équation (8.4) en supposant que l'hamiltonien d'une particule libre dans un potentiel unidimensionnel est le même qu'en mécanique quantique standard :

$$H(x,t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)$$

où $V(x,t)$ est un potentiel à valeurs réelles. L'équation devient

$$\mathrm{i}_1 \hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t) \tag{8.10}$$

où $\psi(x,t)$ est une fonction à valeurs multicomplexes. Si on applique la permutation $\sigma_{1,l}$ on obtient simplement

$$\mathrm{i}_l \hbar \frac{\partial \sigma_{1,l}\{\psi(x,t)\}}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \sigma_{1,l}\{\psi(x,t)\}}{\partial x^2} + V(x,t)\sigma_{1,l}\{\psi(x,t)\}. \tag{8.11}$$

On peut voir que la permutation n'affecte aucunement l'hamiltonien sous forme différentielle et que l'équation possède exactement la même forme avec l'unité i_l plutôt que i_1. De plus, la permutation $\sigma_{1,l}$ se trouve être la bijection entre l'ensemble des solutions de l'équation en i_1 et celui des solutions de l'équation en i_l. Il faut par contre garder en tête que les permutations ne préservent pas la pseudo-norme multicomplexe (voir chapitre 7), et donc qu'elles ne sont pas tout à fait sans effets.

8.3 Autres formes

La somme pseudo-normalisée des unités composites est la somme de tous les éléments de I_n, divisée par la pseudo-norme du résultat, que nous allons noter Y_n.

$$Y_n := \sum_{u \in \mathrm{I}_n} u \Bigg/ \left\| \sum_{u \in \mathrm{I}_n} u \right\|.$$

Notons y_n la somme sans la constante de normalisation, de sorte que

$$y_n := \sum_{u \in \mathrm{I}_n} u \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

Puisque la pseudo-norme multicomplexe prend des valeurs dans $\mathbb{D}_n$, il est nécessaire que toutes les projections de $\|y_n\|$ soient non nulles pour que Y_n soit bien défini. De la définition récursive des nombres multicomplexes, on sait que $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} \cup \mathrm{i}_n \mathrm{I}_{n-1}$ et on observe le même type de relation récursive pour y_n :

$$\begin{aligned}
&y_1 = 1 + \mathrm{i}_1, \\
&y_2 = 1 + \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2, \\
&\vdots \\
&y_n = y_{n-1} + \mathrm{i}_n y_{n-1} = y_{n-1}(1 + \mathrm{i}_n).
\end{aligned}$$

Des démarches des chapitres 4 et 7,

$$\|y_n\| = \|y_{n-1}(1+\mathrm{i}_n)\| = \|y_{n-1}\|\|1+\mathrm{i}_n\| = \sqrt{2}\|y_{n-1}\|$$
$$\Rightarrow \|y_n\| = \sqrt{2^n} \in \mathbb{R}.$$

Non seulement on a trouvé la valeur de la pseudo-norme dans l'expression de Y_n, mais on a également démontré que toutes ses projections sont non nulles (puisqu'elle est réelle). Pour les premières valeurs de n on a

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \frac{1+\mathrm{i}_1}{\sqrt{2}}, \\
&Y_2 = \frac{1+\mathrm{i}_1+\mathrm{i}_2+\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2}{2}, \\
&Y_3 = \frac{1+\mathrm{i}_1+\mathrm{i}_2+\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2+\mathrm{i}_3+\mathrm{i}_1\mathrm{i}_3+\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3+\mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\mathrm{i}_3}{\sqrt{2^3}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

qui sont tous des nombres de norme 1 dans leur espace respectif. On explore à présent le cas bicomplexe en particulier pour montrer que l'équation de Schrödinger avec l'unité

Y_2 combine à la fois une structure complexe et une structure hyperbolique. Dans $\mathbb{M}_2$, la base canonique est $\Gamma_2^{\ddagger} = \{\gamma_2, \gamma_2'\}$, et de la proposition 7.1,

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_2 + \gamma_2', \\ \mathrm{i}_1 &= \mathrm{i}_1\gamma_2 + \mathrm{i}_1\gamma_2', \\ \mathrm{i}_2 &= -\mathrm{i}_1\gamma_2 + \mathrm{i}_1\gamma_2', \\ \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2 &= \gamma_2 - \gamma_2' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y_2 = \frac{1 + \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2}{2} = \gamma_2 + \mathrm{i}_1\gamma_2' = \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2\gamma_2 + \mathrm{i}_1\gamma_2' = \mathrm{j}\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_2 \tag{8.12}$$

avec $\varepsilon_1 = \gamma_2$, $\varepsilon_2 = \gamma_2'$, $\mathrm{i} = \mathrm{i}_1$ et $\mathrm{j} = \mathrm{i}_1\mathrm{i}_2$. L'équation de Schrödinger bicomplexe prend alors la forme

$$Y_2\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

avec $H(t) = Y_2\hbar A(t)$ et les projections

$$\mathrm{j}\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\hat{1}} = H_{\hat{1}}(t)|\psi(t)\rangle_{\hat{1}}, \quad H_{\hat{1}}(t) = \mathrm{j}\hbar A(t) \tag{8.13}$$

et

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\hat{2}} = H_{\hat{2}}(t)|\psi(t)\rangle_{\hat{2}}, \quad H_{\hat{2}}(t) = \mathrm{i}\hbar A(t). \tag{8.14}$$

Ces deux équations ont exactement la forme de l'équation de Schrödinger hyperbolique et l'équation de Schrödinger complexe respectivement. La première projection de l'hamiltonien est alors un opérateur anti-hermitien et la deuxième un opérateur hermitien.

Un argument qui motiverait l'utilisation du produit des unités principales plutôt que la somme vient du fait que dans le cas complexe on utilise l'unité i et non $Y_1 = (1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$. Si on reprend notre relation récursive,

$$Y_n = Y_{n-1}\frac{(1 + \mathrm{i}_n)}{\sqrt{2}}$$

on peut aisément montrer que

$$Y_n = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}_j\right). \tag{8.15}$$

Il devient alors évident que $Y_n^2 = \mathrm{i}_1 \ldots \mathrm{i}_n$, ce qui semble nous « indiquer » l'utilisation du produit des unités principales plutôt que la somme dans l'équation de Schrödinger multicomplexe.

$$(\mathrm{i}_1 \ldots \mathrm{i}_n)\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{8.16}$$

avec $H(t) = \mathrm{i}_1 \ldots \mathrm{i}_n\hbar A(t)$. Dans ce cas l'équation alterne entre une forme complexe et une forme hyperbolique selon la parité de n, ce qui combine les deux structures d'une manière différente que dans le cas de la somme des unités.

Les approches présentées précédemment sont, pour l'instant, entièrement spéculatives et il n'y a aucun consensus sur une forme finale d'équation de Schrödinger multicomplexe (ou même si elle existe). Ces approches ne sont tout de même pas arbitraires, car il en existe d'autres que l'on pourrait considérer comme indésirables étant donné qu'elles éliminent directement de l'information. Par exemple, si nous prenons de nouveau le cas bicomplexe et qu'on ajoute cette fois l'élément $\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2$, la somme des deux unités principales, alors

$$(\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2)\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle.$$

On sait que $\mathrm{i}_1 = \mathrm{i}_1\gamma_2 + \mathrm{i}_1\gamma_2'$ et $\mathrm{i}_2 = -\mathrm{i}_1\gamma_2 + \mathrm{i}_1\gamma_2'$, ainsi la somme devient $\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 = 2\gamma_2'$. L'élément γ_2' est un diviseur de zéro et élimine directement une projection de $|\psi(t)\rangle$:

$$(\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2)|\psi(t)\rangle = 2\gamma_2'(|\psi(t)\rangle_{\hat{1}}\gamma_2 + |\psi(t)\rangle_{\hat{2}}\gamma_2') = 2|\psi(t)\rangle_{\hat{2}}\gamma_2'$$

ce qui impose les égalités

$$0 = H_{\hat{1}}(t)|\psi(t)\rangle_{\hat{1}}$$

et

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_{\hat{1}} = 0.$$

Donc le choix du facteur $\mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2$ serait contre-productif. Il élimine systématiquement la dynamique de la première projection. Ce type de résultat avec une perte d'information est obtenu lorsqu'on sélectionne un diviseur de zéro quelconque, car au moins une de ses composantes multicomplexes est nulle.

Conclusion

La découverte et la simplification de la représentation canonique ont mis en évidence la structure de l'espace des nombres multicomplexes, qui comporte 2^{n-1} projections complexes sans interaction entre elles. Une autre découverte est celle de l'existence d'un sous-espace $\mathbb{D}_n$ avec composantes réelles, qui permet de séparer un nombre multicomplexe en sa partie « réelle » et sa partie « imaginaire » et d'aborder d'autres notions importantes (ordre partiel, norme multicomplexe, idéaux, etc.).

On a par la suite utilisé ces nouvelles notions pour développer la théorie des $\mathbb{M}_n$-modules et espaces de Hilbert multicomplexes qui sont nécessaires aux aspects fondamentaux d'une théorie de la mécanique quantique multicomplexe. La plupart des propriétés des espaces vectoriels et des espaces de Hilbert usuels sont conservées dans le cas multicomplexe à quelques nuances près (dues aux projections). En particulier, le théorème de Riesz et de la décomposition spectrale sont toujours valides et sous la même forme.

L'étude des permutations d'indices pour les composantes principales, bien que sinueuse, permet d'obtenir des résultats importants : il existe des cas où il est possible de passer d'une unité principale à une autre dans une expression multicomplexe (avec des changements de signe) sans affecter la valeur de la norme multicomplexe. La norme Euclidienne est d'ailleurs toujours conservée. Ces résultats permettent de mieux manipuler et comprendre les expression algébriques dans lesquelles une unité principale est présente.

On a exploré au sein du dernier chapitre les différentes formes que pourrait prendre une équation de Schrödinger multicomplexe, sans pouvoir décider d'une d'entre elles en particulier. Le choix entre ces différentes approches semble dépendre de ce qui est souhaité comme modèle mathématique, et il est alors possible que plusieurs d'entre elles soient valides dans des contextes différents. Davantage de développements sont nécessaires sur les espaces de Hilbert multicomplexes de dimension infinie ainsi que sur la mécanique quantique hyperbolique pour poursuivre la discussion et la recherche sur ce sujet.

Bibliographie

[1] G. Brouillette : Classification des coupes tridimensionnelles principales des multibrots multicomplexes, 2019. Mémoire de maîtrise.

[2] P. Budinich et A. Trautman : *The Spinorial Chessboard*. Trieste Notes in Physics. Springer-Verlag, 1ère édition, 1988.

[3] J. B. Conway : *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin, 2e édition, 1990.

[4] L. Debnath et P. Mikusinski : *Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2005.

[5] A. Friedman : *Foundations of Modern Analysis*. Dover Publications Inc., New York, 1982.

[6] J. A. Gallian : *Contemporary Abstract Algebra*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, 10e édition, 2021.

[7] V. Garant-Pelletier : Ensembles de Mandelbrot et de Julia remplis classiques, généralisés aux espaces multicomplexes et théorème de Fatou-Julia généralisé, 2011. Mémoire de maîtrise.

[8] S. R. Ghorpade et B. V. Limaye : *A Course in Multivariable Calculus and Analysis*. Springer, New York, 2010.

[9] B. Hartley et T. O. Hawkes : *Rings, Modules and Linear Algebra*. Chapman and Hall, 1970.

[10] M. Hazewinkel, N. Gubareni et V. V. Kirichenko : *Algebras, Rings and Modules*, volume 1 de *Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic, 2004.

[11] I. L. Kantor et A. S. Solodovnikov : *Hypercomplex Numbers : an Elementary Introduction to Algebras*. Springer-Verlag, New York, 1989.

[12] A. Khrennikov : Hyperbolic quantum mechanics. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 13(1):1–9, 2003.

[13] A. I. Kostrikin et Y. I Manin : *Linear Algebra and Geometry*, volume 1 de *Algebra, Logic and Applications*. Gordon and Breach Science, 1997.

[14] S. Lang : *Complex Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, London, 4e édition, 1999.

[15] R. G. Lavoie, L. Marchildon et D. Rochon : The bicomplex quantum harmonic oscillator. *Nuovo Cimento Della Societa Italiana Di Fisica B*, 125(10):1173–1192, 2010.

[16] R. G. Lavoie, L. Marchildon et D. Rochon : Finite-dimensional bicomplex Hilbert spaces. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 21(3):561–581, 2011.

[17] S. Lipschutz et M. Lipson : *Schaum's Outline of Linear Algebra*. McGraw-Hill, New York, 4th édition, 2008.

[18] R. Magnus : *Metric Spaces - A Companion to Analysis*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer Nature Switzerland, 1ère édition, 2022.

[19] L. Marchildon : *Mécanique Quantique*. De Boeck université, 1ère édition, 2000.

[20] J. Mathieu, L. Marchildon et D. Rochon : The bicomplex quantum Coulomb potential problem. *Canadian Journal of Physics*, 91(12):1093–1100, 2013.

[21] J. Munkres : *Topology*. Pearson New International Edition. Pearson, Harlow, 2e édition, 2014.

[22] G. B. Price : *An introduction to Multicomplex Spaces and Functions*. Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[23] D. Rochon : A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 8(4): 355–368, 2000.

[24] D. Rochon : On a generalized Fatou-Julia theorem. *Fractals*, 11(3):213–219, 2003.

[25] D. Rochon et M. Shapiro : On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Analele Universitatii Oradea, Fasc. Matematica*, 11:71–110, 2004.

[26] D. Rochon et S. Tremblay : Bicomplex quantum mechanics : I. the generalized Schrödinger equation. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 14(2):231–248, 2004.

[27] D. Rochon et S. Tremblay : Bicomplex quantum mechanics : II. The Hilbert Space. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 16(2):135–157, 2006.

[28] S. Roman : *Advanced Linear Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2e édition, 2005.

[29] J. J. Rotman : *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, 2002.

[30] C. Segre : Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. *Mathematische Annalen*, 40(3):413–467, 1892.

[31] M. Spivak : *Calculus on Manifolds : A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. The Advanced Book Program. Addison-Wesley, New York, 1965.

[32] K. A. Theaker et R. A. Van Gorder : Multicomplex wave functions for linear and nonlinear Schrödinger equations. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 27(2):1857–1879, 2017.

[33] A. Vajiac et M. B. Vajiac : Multicomplex hyperfunctions. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 57(7-8):751–762, 2012.

[34] A. Vallières : Dynamique tricomplexe et solides de Platon, 2021. Mémoire de maîtrise.

[35] B. Zwiebach : *Mastering Quantum Mechanics : Essentials, Theory, and Applications*. MIT Press, 2022.