

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

MODÉLISATION DES RENDEMENTS RELATIFS AUX PETITES  
CAPITALISATIONS AMÉRICAINES

MÉMOIRE PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA  
MAÎTRISE EN SCIENCES DE LA GESTION

PAR  
MOKHTAR CHERRID

DÉCEMBRE 2022

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

1	Table des matières	
	Liste des tableaux.....	4
	Liste des Figueres .....	5
	Liste des abréviations.....	6
	Remerciements .....	7
	Résumé .....	8
1	Introduction .....	9
2	Risque et rendement liés aux petites capitalisations .....	16
2.1	La capitalisation boursière .....	16
2.1.1	La bourse et son fonctionnement .....	17
2.1.2	Les petites capitalisations.....	18
2.2	Le rendement.....	19
2.2.1	Le rendement brut .....	19
2.2.2	« Le rendement versé » et « le rendement net » .....	21
2.2.3	« Le rendement sur prix de revenu unitaire ».....	21
2.3	Le risque lié au rendement .....	21
2.4	La stratégie de diversification de portefeuille .....	24
3	Revue de la littérature et cadre théorique .....	27
3.1	Les modèles théoriques de la modélisation de rendement .....	27
3.1.1	Le modèle ARCH :.....	27
3.1.2	Le modèle GARCH.....	28
3.1.3	Le modèle GJR-GARCH .....	31
3.2	La recherche empirique.....	32
3.2.1	Méthodes empiriques employées dans le cas des petites capitalisations américaines .....	34
3.3	Cadre théorique et variables retenues .....	35
4	Méthodologie de la recherche .....	39
4.1	Cadre d'analyse et échantillonnage.....	39
4.2	La collecte et source des données .....	39
4.3	Les variables retenues .....	40
4.4	Technique d'analyse des données .....	40
4.4.1	Notions de base sur les tests de séries chronologiques .....	41
4.4.2	Test de stationnarité .....	41

4.4.3	Fonction d'autocorrélation.....	44
	Test d'autocorrélation .....	45
4.4.4	Tests de prévisibilité à court terme (test de marche aléatoire).....	46
4.4.5	Tests prédictifs à long terme:.....	46
4.4.6	Test des modèles .....	47
4.4.7	Prédictions de la série : .....	48
5	Analyse empirique et résultats de la recherche .....	50
5.1	Estimation économétrique et présentation des résultats.....	57
5.1.1	Estimation du modèle ARCH (6).....	60
5.1.2	Estimation du modèle GARCH (4,1) .....	61
5.1.3	Estimation du modèle GJR-GARCH (2,1) .....	62
5.2	Choix du meilleur modèle :.....	62
6	Discussion .....	64
6.1	Les faits saillants et la pertinence de l'étude.....	64
6.2	Les contributions de la recherche.....	64
6.3	Les limites de la recherche.....	65
6.4	Pistes futures .....	65
7	Conclusion .....	66
8	Bibliographie .....	69

## Liste des tableaux

Tableau 1:États-Unis : rentabilité réels moyens 1872-2008 (en %) .....	35
Tableau 2:États-Unis rentabilités réelles par année en moyenne géométrique (en %) .....	36
Tableau 3 : Aperçu de la base .....	40
Tableau 4:: Résumé des prix de l'indice CRSP US Small Cap .....	50
Tableau 5: Résumé du rendement .....	51
Tableau 6:: Estimation du modèle ARMA (5,4) .....	54
Tableau 7: Tests de Shapiro Wilk et de Jarque Bera .....	56
Tableau 8: l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité des résidus .....	56
Tableau 9: l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité au carré des résidus .....	57
Tableau 10: Résultats de l'estimation des modèles .....	58
Tableau 11: Test de Ljung-Box pondéré sur les résidus standardisés .....	60
Tableau 12: Test de Ljung-Box pondéré sur les résidus standardisés .....	60
Tableau 13: : résultats des indicateurs de performances des modèles .....	63

## Liste des Figueres

Figure 1 : Performances dans la bourse pour les Small et big caps américains : sur un intervalle donné, privilèges aux Small caps. ....	23
Figure 3: Rentabilités réelles moyennes aux États-Unis sur dix années glissantes ...	38
Figure 4:l'évolution des rendements logarithmiques journaliers de l'indice CRSP US Small Cap.....	50
Figure 5: : L'évolution de rendements logarithmiques journaliers de l'indice.....	51
Figure 6: Décomposition de la série.....	52
Figure 7 : L'autocorrélation (ACF) et l'autocorrélation partielle (PACF). ....	54
Figure 8 : Résultats d'analyse des résidus.....	55

## Liste des abréviations

ACF	Fonction d'autocorrélation
ARMA	Modèle autorégressif et moyenne-mobile d'ordres
ARIMA	Modèle de moyenne mobile intégré autorégressif
ARCH	Hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive
AIC	Critère d'information d'Akaike
BPL	Box-Pierce-Ljung
CRSP	The Center for Research in Security Prices
ETI	Entreprise de taille intermédiaire
GARCH	Hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisé
GJR GARCH	Golsten-Jagannathan-Runkle GARCH
GIDS SM	Global Index Data Service SM
MAE	L'erreur de prédiction absolue moyenne
MAPE	L'erreur en pourcentage absolue moyenne
MEDAF	Modèle d'évaluation des actifs financiers
MSPE	L'erreur de prédiction quadratique
NYSE	Bourse de New York
PACF	Fonction d'autocorrélation partielle
PM	La mesure de la précision
PME	Petite et moyenne entreprise
PRU	Prix de revenu unitaire
QQ	Quantile-quantile plot
SEC	Securities and Exchange Commission
YOC	Rendement sur coût

## **Remerciements**

Je tiens en premier lieu à présenter mes sincères remerciements à ma famille et à mes amis, qui m'ont apporté un soutien moral et financier et des encouragements tout au long de mes études.

Aussi, merci à mon directeur de recherche, le professeur Foued Chihi pour sa grande disponibilité et son soutien.

C'est le moment aussi de dire merci à tous les professeurs du département et à toute l'équipe professionnelle de l'université pour leurs conseils et accompagnements.



## Résumé

Cette étude consiste à expliquer et à modéliser le rendement relatif aux petites capitalisations américaines. Pour ce faire, nous allons collecter des données financières relatives aux PME américaines cotées en bourse. Nous allons ensuite nous servir de plusieurs techniques économétriques permettant de modéliser la volatilité des rendements de ces capitalisations. Enfin, nous proposons plusieurs critères permettant d'identifier le modèle empirique le plus performant, c'est-à-dire le modèle qui parvient à capter adéquatement l'incertitude autour des petites capitalisations américaines.

Dans ce travail, nous détectons l'effet de la volatilité asymétrique et nous étudions les propriétés de mémoire longue dans la volatilité du marché boursier américain, en utilisant des données quotidiennes de 2015 à 2020.

Cette étude recommande aux chercheurs d'étendre l'utilisation des méthodes prédictives pour tirer le meilleur parti des modèles proposés pour prédire les fluctuations des actions, les rendements des portefeuilles et les indices boursiers.

## 1 Introduction

Depuis les années 1970, l'investissement à petite capitalisation est considéré comme un élément essentiel d'un programme d'investissement bien diversifié. D'après certaines recherches, lorsqu'on compare des entreprises mondiales à grande capitalisation avec des entreprises mondiales à petite capitalisation, nous constatons que ces dernières offrent une croissance plus rapide, une plus large diversité et des surperformances constantes pendant les dernières décennies.

Malgré ces aspects positifs sur les petites capitalisations, celles-ci sont restées tout de même moins attractives à cause du risque élevé de rendement. En effet, même si les actions internationales à petite capitalisation représentent 20 % (en capitalisation boursière) de l'univers des marchés développés et émergents, elles sont largement sous-pondérées dans les portefeuilles des investisseurs institutionnels. Selon les données de *S&P Global Ownership*, les actions internationales à petite capitalisation ne représentent que 6 % du total des actifs en actions des investisseurs institutionnels.

Plusieurs raisons peuvent expliquer ce sous-investissement : les petites capitalisations sont perçues comme plus volatiles et risquées, et sont supposées être de moins bonne qualité que les grandes capitalisations. En outre, la couverture des analystes pour les petites capitalisations est faible. En moyenne, il n'y aurait que cinq analystes qui couvrent chaque entreprise du *MSCI ACWI ex-US SC*, contre dix analystes du *MSCI ACWI ex US*. Environ 20 % des sociétés du *MSCI ACWI Ex-US SC* n'ont pas de couverture d'analystes. Compte tenu de l'étendue et de la profondeur de la classe d'actifs internationaux à petite capitalisation (plus de 4 300 actions dans 46 pays), il peut y avoir des frais de recherches importantes à investir dans cet espace.

Selon Bachelier (1900), la dynamique de la bourse ne sera jamais une science exacte, ce qui a amené les chercheurs à lier ce phénomène avec la notion d'incertitude, qui caractérise la volatilité des séries financières. Parmi les chercheurs, on trouve (Markowitz, 1952) qui a introduit le concept de variance en finance. Il a aussi développé la théorie moderne du portefeuille. D'après Markowitz (1952), un investisseur a intérêt à diversifier son portefeuille pour diluer le risque financier et minimiser la volatilité du portefeuille. Les recherches ont évolué grâce au

développement du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) de (Sharpe, 1964). Sharpe a développé le ratio de Sharpe afin d'évaluer la performance d'un portefeuille d'actifs en fonction de la volatilité. Toutefois, ses derniers travaux ont été critiqués sur l'idée de considérer la continuité des cours boursiers, puisque la réalité relève des variations d'amplitudes non similaires et même largement différentes dans les travaux de (Bachelier, 1900; Sharpe, 1964) qu'elle n'est pas toujours vérifiée. La plupart des critiques associent ces phénomènes à des aléas issus des événements incertains. À la suite des travaux de (Bachelier, 1900; Black & Scholes, 1974; Markowitz, 1952; Sharpe, 1964) considèrent que le rendement est un processus stochastique en temps continu, alors que la volatilité est connue à l'avance et constante. Le concept de volatilité inconditionnelle a été largement critiqué du fait que la variance est constante. En 1982, (Engle, 1982) arrive à souligner des anomalies dans les méthodes retenues et critique les travaux des chercheurs qui supposent la normalité des séries financières. Selon Engle (1982), les séries financières ne suivent pas toutes des distributions normales avec des variances constantes (Kouaga, 2020).

Pour pallier ce problème, les premiers travaux menés sur la volatilité ont été développés pour permettre des estimations de prédiction de la volatilité conditionnelle.

Dans ce contexte, Engle (1982) a développé les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastique (ARCH). Ces derniers tiennent compte d'informations, du temps et des événements improbables. Les modèles ARCH (p) d'Engel ont été, par la suite, généralisés dans le travail de (Bollerslev, 1986) par le développement du modèle ARCH généralisé GARCH (p, q), un modèle plus pertinent que les précédents.

Ces derniers se distinguent principalement par le concept de variance conditionnelle, qui n'est dépendant que du module des valeurs passées. Cela dit, l'effet sur la volatilité de la date courante des innovations passées positives et les innovations passées négatives sont identiques.

Dans notre cadre, les changements sur les marchés financiers qui ont été relevés durant ces dernières années nous font penser que ces modèles ont des capacités limitées à prédire les variables captant les phénomènes d'asymétrie. (Cappiello, Engle, &

Sheppard, 2006) attribuent ces changements à l'internationalisation des marchés et aux chocs économiques. De ce fait, les rendements sont sujets à des variations importantes et à des phénomènes d'asymétries. Dans la même lignée, (Nelson, 1991; Zakoian, 1994) confirment que la variance évolue asymétriquement et non symétriquement comme l'a été suggéré par (Bollerslev, 1986; Engle, 1982) dans le développement de ses modèles de prédictions ARCH et GARCH.

Aussi Glosten, Jagannathan, et Runkle (1993) ont développé davantage le modèle GARCH (p, q) pour prendre en compte la modification d'un coefficient selon l'apparition d'un événement de perturbation. Le modèle GJR GARCH de (Glosten et al., 1993) modélise les chocs positifs et négatifs sur la variance conditionnelle de manière asymétrique via l'utilisation d'une fonction indicatrice.

Ainsi, les marchés boursiers sont aujourd'hui soumis à de très fortes volatilités causées par différents chocs économiques, ce qui rend difficile de prédire la volatilité sur les marchés financiers américains. Par conséquent, dans un contexte de mondialisation, les études doivent se baser sur des modèles de prédictions plus proches de la réalité.

Nous arrivons maintenant à adapter ces modèles à notre analyse de la volatilité conditionnelle des données financières concernant les petites capitalisations américaines.

La recherche universitaire a sans doute suscité une grande partie de l'intérêt pour l'investissement, notamment dans les petites capitalisations. Dans ce contexte, (Banz, 1981), de l'Université de Chicago, a publié un article universitaire qui mettait en évidence un « effet de taille ». Plus précisément, (Banz, 1981) a souligné pendant les années 1936-1975 que, comparativement aux actions à grande capitalisation, les actions à petite capitalisation ont surperformé, tant en valeur absolue qu'en fonction du risque.

Peu de temps après, (Reinganum, 1981b) a publié des résultats similaires. L'intérêt pour les petits investissements a alors augmenté grâce à ses articles et à la recherche académique sur les actions à petite capitalisation. Il y avait cependant des

détracteurs. (Shumway & Warther, 1999) ont attribué l'effet de petite capitalisation à un biais de radiation dans la base de données du Centre de recherche sur les prix des titres (CRSP), qui est largement utilisé pour effectuer des recherches financières. (Miller & MacKillop, 2011) ont mis en doute l'existence de la prime à petite capitalisation dans la période écoulée depuis la publication de (Banz, 1981), affirmant que l'ajustement au risque basé sur le ratio de Sharpe efface la prime à petite capitalisation après (Banz, 1981) et même pendant la période (Banz, 1981).

De nombreuses recherches menées sur le concept de la volatilité ainsi que sur des actions à grande capitalisation et des actions à petite capitalisation ne sont pas arrivées à des raisons uniformes qui expliquent l'attrait en faveur des actions à grande capitalisation. Pour cela, élargir le champ d'investigation dans la volatilité des rendements des petites capitalisations est essentiel afin d'optimiser les choix des investisseurs à l'égard de leur portefeuille. En effet, une meilleure gestion du risque assure une croissance potentielle de l'entreprise, et par le fait même des opportunités de financement additionnelles.

Dans notre travail, la modélisation de la volatilité des rendements des petites capitalisations sera faite selon des modèles économétriques discutés supra. Le meilleur modèle retenu sera celui qui capte adéquatement l'incertitude autour des petites capitalisations en se basant sur des critères d'évaluation. Les modèles du type GARCH, introduits par (Engle, 1982), et, par la suite, reprises par (Bollerslev, 1986) sont les plus retenus dans l'économétrie financière. Ces derniers permettent de capter au mieux le phénomène de la volatilité présente dans les séries financières. Ce sont des modèles qui reposent sur une modélisation explicite de la variance conditionnelle des rendements des capitalisations.

En se basant sur des études antérieures, ces modélisations seront développées dans notre travail puisque les modèles GARCH sont les plus souvent retenus pour représenter la variance conditionnelle (Engle, 2002).

## Questions de recherche

Après avoir présenté cette revue de littérature sur le concept et la prédiction de volatilité, il ressort des divergences nous amenant à nous questionner sur la nature des capitalisations et sur leurs volatilités. Alors, vu cette controverse sur le plan théorique, il serait donc nécessaire d'analyser particulièrement les recherches apparemment contradictoires en se focalisant sur l'investissement à petite capitalisation. Ainsi, nous pouvons penser à plusieurs articles qui ont été publiés ces dernières années dans le *Journal of Financial Planning* sur les petites capitalisations.

Une présomption standard du paradigme des marchés efficients dans la finance est que les rendements boursiers reflètent les flux de trésorerie anticipés des entreprises dans l'économie. L'un des premiers défis du paradigme des marchés efficaces est l'anomalie des petites capitalisations. Cette anomalie s'explique par le fait qu'elles surperforment les actions à grande capitalisation pendant les périodes de détention à long terme. Dans ce contexte, (Banz, 1981; Dimson & Marsh, 1999; Reinganum, 1981a, 1981b) déclarent que la surperformance frappante des entreprises à petite capitalisation est « la principale anomalie boursière » qui est incompatible avec l'efficacité du marché. (Bhardwaj & Brooks, 1993; Horowitz, Loughran, & Savin, 2000; Schwert, 2003) contestent, cependant, l'anomalie des petites entreprises (à petite capitalisation). Sur la base de retours qui s'étendent sur la période 1982-2002, (Schwert, 2003) conclut que « l'anomalie des petites capitalisations a disparu depuis la publication initiale des articles qui l'ont découverte ». La question de la surperformance des petites capitalisations reste un sujet de débat. Plus récemment, (Switzer & Fan, 2007) montrent que les rendements élevés des petites capitalisations peuvent dépendre du pays, et démontrent les avantages de l'ajout de petites capitalisations canadiennes pour les investisseurs internationaux en améliorant leur performance risque-rendement.

Le travail de (Kim & Burnie, 2002) suggère que l'effet de la taille de l'entreprise au fil du temps peut être attribué au cycle économique (Kim & Burnie, 2002). Les auteurs étudient les rendements au cours de la période 1976–1995, affirmant que des rendements différenciellement plus élevés pour les entreprises à petite capitalisation

relative ont été observés pendant les phases d'expansion économique. La sous-performance des petites entreprises semble se produire dans leur échantillon au cours des contractions économiques. Ils postulent que cela peut être dû à la productivité relativement plus faible et au fort levier financier pendant les périodes de ralentissement (Chan & Chen, 1991; Kim & Burnie, 2002). (Switzer & Tang, 2009) notent que les entreprises à petite capitalisation fournissent une contribution importante pour l'esprit d'entreprise et l'innovation et, par conséquent, pourrait être considérées comme moins sujets aux problèmes de gouvernance que les grandes entreprises. Cela pourrait en partie expliquer la performance supérieure des entreprises à petite capitalisation, bien que l'effet de levier, qui peut être exacerbé pendant les ralentissements, puisse entraver leur performance.

Pour qu'un investisseur se procure des titres, le marché l'informe le plus possible sur les fluctuations. Alors, la participation dans le capital d'une entreprise rétorque à de nombreux objectifs. Cette dernière peut être justifiée par la recherche d'objectifs stratégiques (vérification des techniques et du savoir-faire), et aussi par la recherche du bénéfice (dividendes). Néanmoins, la présentation des échos crédibles et adéquats sur l'entreprise à acheter représente une condition essentielle à la réussite d'un projet.

Les travaux menés dans l'analyse de la volatilité ont aussi évalué l'effet des rendements passés des actions sur les décisions d'investissement (Glaser & Weber, 2009), ces derniers ont estimé que les investisseurs motivés par des rendements positifs passés ont tendance à hausser leur activité dans le futur. Dans notre travail, on s'intéressera à intégrer les valeurs passées des variables dans notre modèle afin de capter l'effet du passé sur les décisions futures.

Dans la même lignée des travaux précédents, on retient que l'évaluation empirique est une opération considérable et d'une grande sensibilité comportant de nombreux risques surtout au niveau de la rentabilité. Au fil du temps les méthodes d'évaluation se sont développées en associant des techniques comptables et des outils mathématiques. Conséquemment, on a motivé notre intérêt envers ce sujet, dont son caractère collatéral et transdisciplinaire, qui correspond absolument aux objectifs de

notre formation. La modélisation de rendement reste une question fondamentale pour les praticiens du monde de la finance.

Nos longues recherches sont donc faites dans le but de mettre de la lumière sur plusieurs points afin de répondre à la question suivante :

- Comment modéliser et expliquer le rendement relatif aux petites capitalisations américaines ?

Aussi, on peut se poser des questions plus approfondies qui nous permettent d'être plus précis dans notre travail, à savoir :

- Quels sont les risques des petites capitalisations sur le rendement en évaluation ?
- Dans quels genres de situations chaque méthode est-elle utilisée ?
- Quelle est la meilleure méthode pour effectuer l'évaluation demandée ?
- Ces diverses recherches nous amènent à nous questionner sur les points suivants :
- L'utilisation des méthodes empiriques employées dans le cas des petites capitalisations américaines.
- Avec toutes les méthodes existantes, la possibilité d'une méthode est réalisable

Nous répondrons à la problématique posée en suivant un chemin bien déterminé pour prendre le temps de détailler. Nous passerons par cinq phases : la première consiste à introduire notre travail de recherche ; la deuxième représentera les notions d'un point de vue théorique de risque et rendement en petites capitalisations ; la troisième consiste à se focaliser uniquement sur les différents modèles existant sur la modélisation de rendements liés aux petites capitalisations en prenant comme pilier des moments cruciaux dans la bourse américaine. La quatrième couvrira la méthodologie, la présentation de notre échantillon, la collecte des données et nous aborderons aussi les techniques d'analyse des données. Dans la cinquième, nous allons appliquer les techniques de modélisation de rendement.

Dans la sixième, nous discuterons de ces résultats. Et la dernière section sera consacrée pour la conclusion.



## **2 Risque et rendement liés aux petites capitalisations**

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord un aperçu du sujet de la bourse et son fonctionnement. Ensuite, nous discutons de rendement des petites capitalisations. Après cela, nous introduisons le couple rendement- risque. Et on passe à l'explication de l'évaluation théorique et de l'évaluation empirique. Enfin, dans la dernière section, nous montrons les méthodes empiriques employées dans les petites capitalisations américaines.

### **2.1 La capitalisation boursière**

La capitalisation boursière d'une société représente la valeur ou la somme spéculative de ses capitaux en bourse. Cette somme correspond au montant que doit déboursier un actionnaire pour acquérir la totalité des actions d'une société active sur le marché. La différence entre les capitaux propres indiqués dans le bilan de la société et la valeur des capitaux figurant sur le marché doivent être prise en considération. (Alhiane, 2020)

#### **Comment calculer la capitalisation boursière d'une entreprise ?**

Pour calculer la valeur de marché, nous avons besoin du cours actuel de l'action, qui est mentionné sur le site de la bourse, ainsi que du nombre d'actions spécifié dans les états financiers. Pour avoir la formule de la capitalisation de la bourse, il suffit de multiplier les actions avec le nombre de ses actions circulantes. Il faut souligner que pour éviter les erreurs de calcul, il faut toujours actualiser l'action, comme il varie souvent et rend le coût de la capitalisation très indéterminé. (Fama & French, 2021)

Ne pas oublier qu'une société peut décider d'ajouter de nouvelles actions sur le marché, ce qui entraînera une hausse de la capitalisation boursière. Et, dans le cas contraire où la société décide de racheter ses propres actions, cela aura pour conséquence de décroître sa capitalisation boursière. Le rachat des actions par les sociétés en question constitue un signe de confiance pour les investisseurs. Cela signifie tout simplement que la société acquiert plus de valeur qu'elle n'en possède et fera monter sa cour boursière.

### **2.1.1 La bourse et son fonctionnement**

Avant de pouvoir définir les fonctionnements de la bourse, il faut d'abord comprendre le rôle de cette dernière.

#### **2.1.1.1 Définition de la bourse**

La bourse se définit comme un marché où se réunissent les agents de financement et les agents qui ont des besoins de financement.

Les agents de financements ou encore les agents à capacités de financement composent les investisseurs. Ces investisseurs peuvent être soit des banques, des sociétés d'investissement ou encore des épargnants particuliers. (Alhiane, 2020)

Les entreprises constituent, en grande partie, les agents qui demandent des financements.

Ces deux protagonistes de la bourse échangent des titres que l'on appelle des actions. Ces derniers représentent une grande partie du capital de l'entreprise.

En dehors du fait que la bourse constitue un lieu de vente et d'achat de titre ou d'action, elle permet aussi aux entreprises de se financer sans dépendre des prêts de la banque. Elle permet de mettre en place des fonds, et de varier les sources de financement entre les banques, les sociétés d'investissement et les épargnants. Et pour les investisseurs, la bourse constitue un moyen de financer des entreprises tout en minimisant l'impact que cela aurait sur ses fonds. Dans ce cas-là, on dit que les titres du financeur sont liquides.

#### **2.1.1.2 Les fonctionnements de la bourse**

Il existe deux marchés au sein de la bourse :

##### **Le marché primaire :**

Le marché primaire est l'espace où on propose les titres pour la première fois. Ces titres se vendent à un certain prix encore assez bas, appelé prix d'émission.

##### **Le marché secondaire :**

Le marché secondaire constitue le second niveau d'échange. Ce second marché compose la bourse au sens propre de sa définition. Les investisseurs échangent leurs titres entre eux au niveau de ce marché.

La bourse doit se soumettre toutefois à des réglementations de marché afin de faciliter et de régulariser les échanges. Les entreprises en quête de financement doivent publier obligatoirement des informations sur leurs activités économiques, et cela, afin de permettre aux investisseurs de se faire des statistiques sur lesquelles baser leur jugement. La SEC (*ou Securities and Exchange Commission*) forme l'organisme de contrôle des marchés boursiers aux États-Unis.

La bourse occupe un rôle primordial dans le développement économique du pays, étant donné que les entreprises peuvent en tirer les capitaux nécessaires pour leur élargissement. Cependant, l'accès à la bourse reste restreint aux PME (petite et moyenne entreprise) et aux ETI (entreprises de tailles intermédiaires) par manque de ressource et coût administratif élevé. De plus, les marchés financiers s'exposent à des crises en raison des choix des investisseurs. Dans certains cas, ils méconnaissent les réelles capacités des entreprises et finissent par spéculer.

## **2.1.2 Les petites capitalisations**

### **2.1.2.1 Définition :**

Aux États-Unis, il existe un grand intérêt pour l'investissement en actions de petite capitalisation. La définition de l'expression « petite capitalisation » est flexible et diversifiée. Le *Center for Research in Securities Prices (CRSP)* définit la petite capitalisation comme des actions inférieures à la capitalisation médiane de l'univers des actions de la *New York Stock Exchange (NYSE)*, tandis que (Benoist, 2013)) définit la petite capitalisation comme les 2000 premières actions en dehors des 1000 plus grandes actions des États-Unis. En général, les petites capitalisations sont exclues des moyennes et grandes capitalisations.

### **2.1.2.2 Pourquoi investir dans les petites capitalisations ?**

Les petites capitalisations ou les « *Small caps* » présentent quelques caractéristiques collectives qui n'affectent pas leur lieu de localisation ou même le stade de développement du cycle d'investissement. Elles proposent plus de bénéfice et d'intérêt, car elles se focalisent sur un éventail plus réduit de produit et de marché. Elles possèdent une réaction plus rapide, comparativement à celle des grandes

entreprises, face aux nouvelles opportunités, ce qui entraîne une accélération du développement de leur activité.

Elles constituent des cibles très séduisantes pour les grandes entreprises, spécialement dans le cas où l'accès aux liquidités devient plus facile. Une fois l'acquisition en bourse faite, les investisseurs bénéficient d'une hausse considérable de la valeur du cours de l'action.

Les *Small caps* regroupent peu d'analystes et de grandes entreprises les couvrent. Il en subsiste alors, grâce à ces Small, caps des opportunités attirantes que seuls les investisseurs chevronnés pourraient identifier après une étude approfondie. Le choix d'une valeur à potentiel élevé engendre une performance supérieure à la simple allocation sectorielle.

Les petites capitalisations se démarquent grâce à leur rapport risque/rendement très positif. Elles possèdent un atout majeur en proposant une diversification du portefeuille d'actions.

## **2.2 Le rendement**

Le rendement est le revenu total qu'un investisseur bénéficie de son investissement chaque année. Il est exprimé en pourcentage de la valeur d'origine de l'investissement. L'investisseur obtient alors un retour sur son investissement dans les actions ou les fonds d'investissement lorsque ces fonds d'investissement sont assujettis de bénéfices. Le retour sur l'investissement peut être obtenu en divisant le bénéfice distribué que l'investisseur reçoit au cours de l'année par le montant total dépensé pour acheter l'instrument d'investissement. (Jacquillat, Solnik, & Pérignon, 2014)

On peut citer différents types de rendement, comme le rendement brut, le rendement versé, le rendement net et le rendement sur prix de revenu unitaire.

### **2.2.1 Le rendement brut**

Lorsqu'on parle de rendement sans trop précision, on parle de **rendement brut**, ou encore *Yield* en anglais. C'est cette expression de *Yield* ou de rendement brut que

la presse, les sites boursiers où tous autres sites utilisent quand ils évoquent la notion de rendement. Calculer le rendement brut permet de faire une comparaison des actions entre elles, hors fiscalités et hors taux de change. On peut ainsi comparer des actions différentes et dévaluer la différence de risque constaté sur le marché. Ce risque évalué permet aux investisseurs de mieux juger le placement de leurs actions. (Bertrand, 2016)

Le rendement d'une action est la somme des dividendes totaux partagés par la société divisée par le cours de bourse de l'action en question. Par exemple, si une compagnie nommée x, qui débourse un dividende brut annuel de 8 \$, où le prix d'action en bourse est de 100\$, dans ce cas le taux de rendement s'élève à 8%. On note que ce rendement brut ne correspond qu'aux dividendes partagés par la société aux différents actionnaires. (Bertrand, 2016)

Concernant le rendement brut, le taux de ce rendement varie en fonction du cours de la bourse de la société. Ce dernier ne peut donc se stabiliser et il évolue toujours étroitement avec le cours de bourse. On reprend l'exemple de l'entreprise X qui débourse un dividende annuel de 8 \$, le rendement reste à 8 % lorsque le cours de bourses est à 100 \$. À considérer que le cours de bourse s'élève à 110 \$, le rendement devrait baisser à 7.27 %. Autrement dit, « le rendement » évolue dans un sens opposé au cours de la bourse, cela en suivant un rapport égal. En effet une hausse du cours de la bourse de 10 % engendrera une diminution du « rendement » de 10 %.(Bertrand, 2016)

Essentiellement, il est important de noter que le rendement se détermine par un montant de dividende connu. Toutefois, le rendement se calcule en se basant sur le montant passé du dividende. Par défaut de langage, certains auteurs d'articles ou commentateurs montrent la valeur d'une action sur la base de l'anticipation du montant de dividende. Pour connaître le taux de rendement d'une action en temps réel, il suffit de consulter les sites des informations boursières. (Bertrand, 2016).

### **2.2.2 « Le rendement versé » et « le rendement net »**

Le problème avec le rendement brut provient du fait qu'il n'équivaut pas au rendement réel reçu. Cela provient du fait qu'il ne tient pas compte des prélèvements sociaux et fiscaux qui se placent sur le dividende brut. Un rendement versé équivaut au montant versé sur le compte de l'actionnaire et divisé par le cours de l'action. Le calcul varie en fonction du compte utilisé. Dans un plan d'épargne en actions mises en place depuis plus de 5 ans, le rendement versé correspond au rendement brut. Rappelons que dans ce cas, la fiscalité s'applique lors de la sortie des liquidités. Le dividende brut reste pareil au moment du versement. (Bertrand, 2016)

Le rendement net coïncide avec les rendements des actions aux mêmes titres après la déduction de l'ensemble des impôts. En cas de retrait de liquide, ce rendement tient compte des prélèvements sociaux à soustraire des revenus de dividendes.

### **2.2.3 « Le rendement sur prix de revenu unitaire »**

Le rendement sur prix de revenu unitaire ou rendement sur PRU répond au rapport du montant du dividende brut annuel par le cours d'achat de l'action et non le cours de bourse de l'action en temps réel. En reprenant l'exemple de l'entreprise X, si on achète l'action à 80 \$ et si elle qui cote actuellement à près de 100 \$ en bourse et que l'on verse un dividende de brut annuel de 8 \$. Le rendement sur PRU avoisine les 10 % alors que le rendement brut n'est seulement que de 8 %. (Bertrand, 2016)

## **2.3 Le risque lié au rendement**

Le couple rendement-risque fait partie intégrante du domaine du capitalisme. Il existe un moyen simple pour mesurer le rendement d'un investissement. Il faut prendre en considération le gain apporté par ce dernier de manière récurrente (Loyers, dividendes, intérêts...) la plus-value à partir de la vente ou du placement par rapport à ce qu'il coûte. Puis, le principal risque encouru lors d'un placement financier consiste à un abandon en capital. C'est-à-dire de ne recouvrir en aucun cas la somme placée dans l'investissement à la période de la vente. On peut parler d'une épargne ou des actions revendues sans bénéfice. Les cours des produits boursiers varient souvent en

n'assurant que rarement une stabilité. Cette variation pourrait bien être une hausse qu'une baisse. (Jacquillat et al., 2014)

### **Autres risques encourus :**

Le cas le plus probable consiste à ne rien gagner. Par exemple, si on place des montants dans un placement avec des taux d'intérêt à 0 %, le placement monétaire ne rapportera rien et n'engendrerait donc aucun bénéfice.

### **Le risque de la monnaie**

Ce cas explique tout simplement l'impossibilité de recouvrer son épargne ou ses montants à tout moment. Ceci explique souvent le cas des produits jouissant d'un avantage fiscal.

### **Le risque règlementaire**

Ce cas porte quant à lui sur la modification ou le changement d'un texte légal qui influence de façon négative sur un investissement déjà placé. À titre d'exemple, il peut s'agir de la modification des régimes de la plus-value.

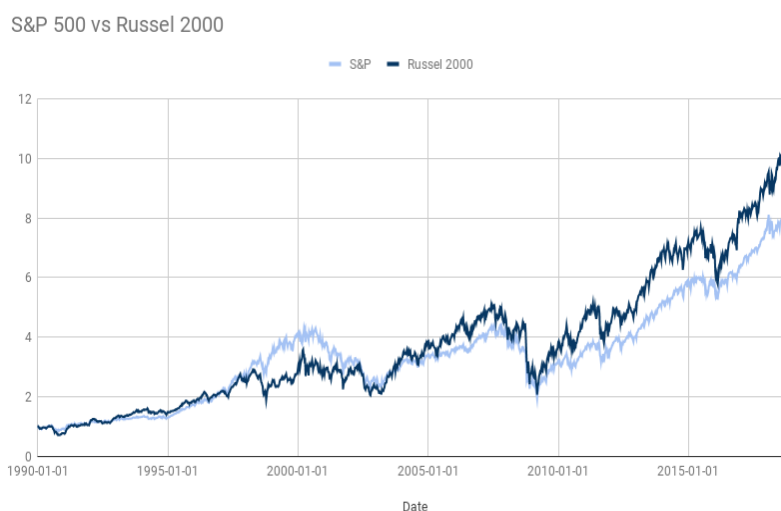
### **Pourquoi rendement et risques sont-ils étroitement liés ?**

Ce rapport entre les deux s'explique par une interdépendance évidente ; plus le rendement s'élève, plus le risque augmente. En effet, un risque élevé avec peu de rendement, voire nul, n'attire personne. Toutefois, un rendement élevé sans risque n'existe pas ! Un rendement certain à plus de 20 % par an, par exemple, ne peut signifier qu'une tromperie. Pour réussir un bon financement avec peu de risques, il suffit de bien diversifier ses placements et de laisser du temps pour que ces investissements fleurissent. Plus la durée du placement s'allonge, plus l'investisseur peut s'exposer à plus de risque. Le conseiller bancaire assure alors une mise en place d'aspect de risque avec des objectifs pour des amateurs dans la propriété du placement.

L'étude statistique et la recherche conventionnelle montrent que les petites sociétés ont de meilleures réussites boursières. Les études concernant l'évaluation des risques empirique ont été élargies avec l'arrivée des travaux de Eugene Fama. Elue prix Nobel dans le domaine de l'économie durant l'année 2013 concentrant sur le

rendement du secteur de la finance, Eugene Fama a complété les méthodes d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) à la suite d'un archétype dit « à trois facteurs ». Il expose la présence de risque pour les *Small caps* dans ses recherches. L'existence du risque est observée lorsque l'investisseur est en possession d'un actif volatile. (Fama & French, 2015)

La surperformance des *Small caps* s'étudie en confrontant la progression des marques boursières des petites capitalisations aux grandes capitalisations. Depuis 1990, le bénéfice moyen (les plus énormes économies boursières des États-Unis de S&P 500) vaut plus de 6,7 %, en ajoutant les autres firmes de S&P 500 par ordre de grandeur (marque de Russel 2000), la prouesse par année s'élève à 7,14. (Group, 2020, octobre 26)



Source : (Group, 2020, octobre 26)

**Figure 1 : Performances dans la bourse pour les Small et big caps américains : sur un intervalle donné, privilèges aux Small caps.**

Prise séparément, les *Small caps* dévoilent un risque de faiblesse plus sérieux que les big caps. Nous pouvons expliquer cela pour plusieurs raisons : un bilan peu résistant, une activité trop fermée, une prédisposition d'investissement chétive, une marque peu connue, etc. Cela se traduit par un déséquilibre plus important dans le cours de la bourse pour les petites capitalisations. L'inconstance d'un investisseur



montre la marge des variations, à l'élévation comme à l'abaissement. Plus un investisseur est momentané, plus celui-ci peut provoquer un danger dans un intervalle court.

Revenons sur le dernier exemple ci-dessous : l'inconstance historique de la marque primaire est de 15 %, et le deuxième est de 19 %.

Les *Small caps* étant dotés d'estimation boursière, elles proposent généralement une liquidité immédiate. Néanmoins, on prend ici les actions dans sa globalité. Non obstat, quelques sociétés estimées peuvent posséder une capitalisation chétive, d'un million dans la devise européenne. La valeur de leurs actions reste dans la valeur avoisinant un euro, elles se nomment « penny stocks ». Bien qu'estimées en bourse, elles disposent d'une capacité de courtage très restreint et peuvent être un danger dans le monétaire, surtout en intervalle de tension que nous ne recommandons aucunement.

## **2.4 La stratégie de diversification de portefeuille**

Dans cette étude, on présente une revue de la littérature concernant la diversification de portefeuille et les modèles de volatilités GARCH. En finance, la diversification de portefeuille représente un moyen fondamental d'investissement. Par cet acte, nous pouvons limiter les risques encourus d'un portefeuille tout en gardant l'optimisation des revenus. Selon la théorie du portefeuille de (Harry, 1952), les calculs montrent que les investissements judicieux maximalisent les chances de réussite lors des diversifications des sources de revenus, ceci dans le cadre d'une moyenne-variance.

En rassemblant différents actions ou titres sous un même portefeuille, les risques encourus, c'est-à-dire les risques particuliers de chaque entreprise, diminuent au point de devenir négligeable. De ce fait, le portefeuille en question s'expose à moins de risques. Cette technique de diversification se base sur une combinaison de titres possédant des profits avec des relations assez réduites, voire inexistantes. De sorte à réduire les risques dont le portefeuille doit s'exposer, l'entreprise doit choisir des actions avec des corrélations les plus réduites. Dans cette vision, les portefeuilles les

plus optimisés sont représentés par ceux qui disposent de niveau de rentabilité accru, avec une frontière efficiente tout en gardant un taux de risque suffisamment bas.

Ainsi, un portefeuille qui reste dans une limite efficiente et qui possède une forte tolérance au risque sera alors la principale convoitise des investisseurs prudents. Pour faire simple, la diversification de portefeuille octroie la possibilité de réduire le risque global pour un niveau de confiance du rendement. Puis, elle permet aussi d'optimiser le rendement espéré pour un niveau de risque défini.

Toujours dans cette suite d'idées, les études innovatrices (Grubel, 1968; Solnik, 1974) cheminent les avantages de cette diversification dans un plan plus élargi. En affirmant que ce sont les risques rattachés aux facteurs économiques et politiques extérieures qui influencent les marchés d'un secteur, les risques ne s'éliminent donc pas via une stratégie de diversification de portefeuille à une échelle nationale. Pour pouvoir gérer ce problème, ces auteurs invitent à investir dans des actions disséminées dans différents pays, c'est-à-dire dans différents marchés internationaux. Même dans cette mesure, la règle sur la restriction de la corrélation des actions doit toujours être tenue.

Selon Solnik (1974), il vaut mieux un portefeuille d'actions international à l'abri des risques de change qu'un portefeuille exposé aux vacillations du taux de change. Cependant, ce dernier reste, à ce jour, toujours plus efficient qu'un portefeuille domestique. (L'Her, Sy, & Tnani, 2002) soulignent que les facteurs industriels occupent de plus en plus de rôles vis-à-vis des facteurs externes dans l'étude des risques et des valeurs des titres sur les marchés internationaux.

De ce fait, l'approche d'allocation sur le plan international attire davantage l'attention des scientifiques. Toutefois, la valeur ajoutée des titres étrangers reste encore particulièrement octroyée aux corrélations les moins significantes au sein des marchés nationaux.

Après avoir présenté cette revue de littérature, il est judicieux de présenter une analyse empirique afin de déterminer quel modèle est le plus approprié pour répondre à notre question de recherche et d'analyser les résultats empiriques en matière de

prévision sur le long terme. Nous tenterons de prédire la volatilité future afin d'aider les investisseurs dans leurs décisions de portefeuille.

### 3 Revue de la littérature et cadre théorique

Dans cette partie nous passons en revue les principales études ayant traité les petites capitalisations et la modélisation de leurs rendements. L'objectif de cette revue de la littérature est d'initier un travail de recherche empirique, visant à modéliser le rendement des petites capitalisations américaines.

#### 3.1 Les modèles théoriques de la modélisation de rendement

Il existe plusieurs modèles de modélisation de rendement dans la littérature financière parmi eux :

##### 3.1.1 Le modèle ARCH :

Dans le domaine de l'économétrie, les modèles ARCH ou *Autorégressive Conditionnal Heteroskedasticity* constituent des outils qui définissent et précisent des séries chronologiques spécifiques. De manière générale, ces modèles sont connus sous l'appellation de modèles ARCH même si certaines structures très similaires à ces derniers, voire identiques sont appelées d'une autre manière.

Ce type de modèle est généralement utilisé dans la modélisation et l'explication de séries temporelles financières. Dans cette série, on constate souvent une instabilité variable. En d'autres termes, il y a des intervalles de temps qui témoignent d'une agitation et d'un calme relatif. Dans l'étude sur ces modèles, le facteur temps ( $t$ ) occupe une place importante. Ainsi, ce facteur influence, entre autres, sur les réalisations ultérieures et sur les innovations (Droesbeke, Fichet, & Tassi, 1994).

Un modèle ARCH se représente alors par la manière suivante :  $\epsilon_t = \sigma_t Z_t$ , dans cette équation,  $\epsilon_t$  symbolise les innovations de la série, tandis que  $Z_t$  indique une normale centrée réduite.

Dans ce cas,  $\sigma_t$  équivaut alors :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2$$

Puis, la variance conditionnelle varie bien en fonction des valeurs précédentes de la série, quand la variance reste constante.

Les équations proposées par (Engle, 1982) reposent sur l'implication d'un mouvement dans la résolution de l'instabilité en estimant que la fluctuation dépend des informations connues. (Engle, 1982) présente une définition ARCH où le « carré des innovations », est lié à la valeur des « termes d'erreur au carré » des périodes passées. Le « carré des innovations » ici correspond à la « fluctuation du terme d'erreur au temps (t) ».

Le modèle ARCH génère des événements de balancements remarquables ainsi que des périodes de stationnarité. Au terme de ce qui précède, (Engle, 1982) devient un pionnier en utilisant une reproduction autorégressive de la fluctuation hypothétique à son information passée pour étudier les variations de la fluctuation d'un phénomène économique.

Ceci consiste en l'étude du taux d'augmentation du prix dans un pays déterminé. (Engle & Granger, 1987) constate l'effet ARCH. Il est parvenu à observer l'autocorrélation des résidus au carré, grâce au test du multiplicateur de Lagrange. À partir de ce moment, la mise en pratique du dénombrement LM pour reconnaître l'hétéroscédasticité conditionnelle dans les séries budgétaires est renommée « test d'Engle » (Bollerslev, Chou, & Kroner, 1992).

Par ailleurs, nous pouvons évaluer un prototype ARCH à partir d'une démarche en deux étapes. La « méthode des moindres carrés ordinaire » permet de faire cette évaluation. Toutefois, Engel affirme que la manière du maximum de vraisemblance reste la plus efficace.

Le modèle ARCH démontre également la controverse de « l'hypothèse puissante de la stabilisation de la fluctuation dans le temps ». Après les travaux innovateurs de (Engle, 1982) plusieurs variétés du modèle ARCH ont été présentées dans le but de proposer une meilleure description et une meilleure prévention de la fluctuation (Bollerslev et al., 1992).

### **3.1.2 Le modèle GARCH**

Pour de nombreuses applications, l'introduction d'un certain nombre de retards (p) dans l'équation de la fluctuation ou « variance conditionnelle du modèle ARCH »

permet d'apprécier la volatilité. Cette dernière s'avère indispensable pour la détermination de séries budgétaires. L'excès de paramètre risque de nous orienter vers la violation de la contrainte de non-négativité de la variance (Kazakevičius & Leipus, 2003).

Dans cette vision, (Bollerslev, 1986) présente un accroissement important : « le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédasticité généralisée ou GARCH ». Le modèle GARCH constitue une figure ARMA concernant la variance conditionnelle. Cette technique exige moins d'éléments à évaluer à l'instar de la « formulation ARCH » pour les modélisations des « événements de persistance des chocs ». La « variance conditionnelle de la fluctuation recherchée » est calculée avec :

- Le « carré des (p) termes d'erreur passés »
- Les « (q) variances conditionnelles différées »

La progression d'une « relation de récurrence » entre la variance conditionnelle constatée et celle des (q) périodes antérieures fait que la volatilité demeure davantage dans le « modèle GARCH ». (Bollerslev, 1986), dans sa recherche, utilise le modèle GARCH afin de quantifier l'ambiguïté concernant l'inflation aux États-Unis depuis le deuxième trimestre de 1948 jusqu'au quatrième trimestre de l'année 1983.

Toujours dans cette étude, (Bollerslev, 1986) remarque que le taux d'inflation en Amérique devient très volatil à partir des années 40 et ne change que vers la moitié de la décennie suivante. Ensuite, ce taux devient peu à peu stable, mais la crise pétrolière de 1974 replonge le pays dans une situation de fluctuation. À la suite des nombreuses comparaisons du modèle ARCH au modèle GARCH, les chercheurs ont pu affirmer que le modèle GARCH propose de meilleurs résultats et permet une meilleure étude de l'inflation. De plus, un modèle GARCH dispose d'un paramètre assez simple, ce qui lui permet d'être ajusté de manière plus facile.

Toujours en se basant sur cette comparaison, (Bollerslev, 1986) nous démontre que le modèle GARCH devient plus économique et plus accessible par rapport au modèle ARCH. D'ailleurs, les travaux de ce chercheur prouvent aussi que l'application du modèle GARCH, dans un cas de figure où la distribution contingente des

innovations normalisées passe par une loi normale, permet de saisir les queues de distributions les plus épaisses. Tous les processus se rapprochant au modèle ARCH et GARCH disposent de cette capacité.

Cependant, il n'est pas rare que les innovations deviennent plus sensibles par rapport à ce que peut envisager le processus GARCH, même avec une distribution régulière des profits. Dans son ouvrage, (Bollerslev, 1987) démontre aussi que, pour résoudre ce problème, l'adoption d'une distribution Student-t possédant des queues de distribution plus épaisses serait plus efficace que la distribution gaussienne habituelle. Cette option est surtout utilisée dans des situations où les paramètres du processus GARCH nécessitent un rendement tangible pour garantir une variance positive.

Qui plus est le modèle GARCH reste immobile dans l'unique cas de figure où la somme des coefficients reste inférieure à 1. En pratique, il n'existe qu'une faible probabilité de réussir à respecter ces conditions lorsque le nombre de retards des résidus aux carrés antérieurs et des variances contingentes passées reste en hausse.

Par ailleurs, de manière générale, nous pouvons aussi affirmer que le processus GARCH d'ordre supérieur n'apporte que peu d'améliorations, malgré les avantages qu'il offre vis-à-vis du modèle ARCH.

### **La notion d'extension**

Appliquer un modèle ARCH permet d'entrevoir l'hypothèse de la « constance de la volatilité en fonction du temps ». Par les recherches innovatrices de (Engle, 1982), divers autres modèles similaires ont pu être développés. Tous modèles visent à améliorer le niveau de précision en matière de volatilité. Dans le but d'apporter plus d'efficacité aux modèles GARCH, les chercheurs exploitent principalement deux mesures.

Ils se penchent sur les autres possibilités de distributions et d'innovations que proposent les lois normales. Aussi, ils mettent en place d'autres modèles encore plus souples et qui expliquent mieux le changement de la volatilité. Ordinairement, la famille des modèles ARCH comprend deux sous-ensembles :

- Les modèles linéaires,
- Les modèles non-linéaires.

Les « modèles ARCH linéaires » combinent ceux de ARCH et GARCH, comme nous l'avons déjà expliqué. Il existe aussi les déclinaisons telles que le « modèle GARCH intégré » (IGARCH) de (Engle & Bollerslev, 1986), le modèle (GARCHM) (Engle, Lilien, & Robins, 1987). Ces derniers constituent également les « modèles ARCH linéaires ».

Autrement dit, la variable  $X_t$  suit la procédure GARCH (p, q), la forme générale de ce modèle est la suivante:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2$$

Où,

$\omega$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  sont les paramètres du modèle

$r_{t+1-i}^2$  Représentent les carrés des rendements historiques.

$\sigma_{t+1-j}^2$  Représentent les estimations historiques de la variance

### 3.1.3 Le modèle GJR-GARCH

Le modèle GJR- GARCH de (Glosten et al., 1993) modélise les chocs positifs et négatifs sur la variance conditionnelle de manière asymétrique via l'utilisation de la fonction indicatrice. Contrairement à EGARCH, qui détermine l'effet de manière linéaire, le modèle GJR-GARCH le détermine au moyen d'une variable muette et la formule du modèle s'écrit comme suit :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_i^q (\alpha_i \varepsilon_{i=1}^2 + Q_i I_{\varepsilon_{t-i} < 0} \varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-1}$$



### 3.2 La recherche empirique

Dans cette partie de la recherche, nous mettrons en lumière certaines études qui ont traité la problématique de la modélisation de rendement des titres financières.

Grâce à la recherche et à l'étude, il a été constaté qu'il existe beaucoup des études qui sont liées directement ou indirectement à notre recherche. Nous avons choisi les suivants.

À la suite des travaux de (Bachelier, 1900; Black & Scholes, 1974; Markowitz, 1952; Sharpe, 1964) considèrent que le rendement est un processus stochastique en temps continu.

Engle (1982) a développé les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastique (ARCH). Ces derniers tiennent compte de l'information, du temps et des événements improbables. Les modèles ARCH (p) de Engel ont été par la suite généralisés dans le travail de (Bollerslev, 1986) par le développement du modèle ARCH généralisés GARCH (p, q), un modèle plus pertinent que les précédents.

Dans la recherche de (Bollerslev & Mikkelsen, 1996) , on utilise le modèle GARCH afin de quantifier l'ambiguïté concernant l'inflation aux États-Unis allant du deuxième trimestre de 1948 jusqu'au quatrième trimestre de l'année 1983. Dans cette étude, (Bollerslev & Mikkelsen, 1996) remarque que le taux d'inflation en Amérique devient très volatil à partir des années 40 et ne change que vers la moitié de la décennie suivante. Ensuite, ce taux devient peu à peu stable, mais la crise pétrolière de 1974 replonge le pays dans une situation de fluctuation. À la suite de nombreuses comparaisons du modèle ARCH au modèle GARCH, les chercheurs ont pu affirmer que le modèle GARCH propose de meilleurs résultats et permet une meilleure étude de l'inflation. De plus, un modèle GARCH dispose d'un paramètre assez simple, ce qui lui permet d'être ajusté de manière plus facile. (Bollerslev & Mikkelsen, 1996) nous démontre que le modèle GARCH devient plus économique et plus accessible par rapport au modèle ARCH.

Dans la même lignée, (Nelson, 1991; Rabemananjara & Zakoian, 1993) confirment que la variance évolue asymétriquement et non symétriquement comme l'a

suggéré (Bollerslev, 1986; Engle, 1982) dans le développement de ses modèles de prédictions ARCH et GARCH.

Aussi (Glosten et al., 1993) ont développé le modèle GARCH (p, q) pour prendre en considération la modification d'un coefficient selon l'apparition d'un événement de perturbation.

Le modèle GJR GARCH de (Glosten et al., 1993) modélise les chocs positifs et négatifs sur la variance conditionnelle de manière asymétrique via l'utilisation d'une fonction indicatrice.

Dans l'étude de (Engle & Patton, 2007) ont utilisé douze années de données quotidiennes sur l'indice *Dow Jones Industriels* pour caractériser un bon modèle de volatilité par sa capacité à prévoir et à saisir les faits stylisés communément admis sur la volatilité conditionnelle. Ainsi, les chercheurs nous montrent que la volatilité conditionnelle de l'indice (*Dow Jones Industriels*) s'est avérée assez persistante, avec une demi-vie de volatilité d'environ 73 jours, mais les tests de non-stationnarité ont indiqué qu'il s'agit d'un retour à la moyenne. Il a été constaté qu'une innovation de rendement décalé négatif avait un impact sur la variance conditionnelle environ quatre fois plus important qu'une innovation de rendement positif. En plus, le taux des bons du trésor américain à 3 mois s'est avéré positivement corrélé à la volatilité, ce qui implique que des taux d'intérêt plus élevés conduisent à volatilité plus élevée du rendement des actions. Enfin, ils ont trouvé des preuves cohérentes avec le résultat théorique selon lesquelles les résultats empiriques obtenus dépendent de la fréquence d'échantillonnage - un inconvénient de la spécification GARCH.

Dans l'étude de (Yang & Parwada, 2012), d'un article publié par le département de l'administration et de management de l'Université de Perth en Australie-Occidentale en 2005, il a été question de l'indice boursier australien dans le but d'identifier l'évolution des cours des actions et de les prédire ultérieurement sur la base du le modèle de régression linéaire conditionnelle de l'hétérogénéité de la variance d'erreur généralisée (GARCH). En tenant compte d'autres facteurs tels que les différences, les changements de prix et l'instabilité de la variance.

Les résultats de l'étude ont conclu qu'il y a un effet positif des périodes standards sur la possibilité de changement de prix, et les résultats de l'analyse de prédiction ont prouvé que le modèle a réussi dans 80 % des cas à prédire la direction du changement de prix ultérieur.

L'étude de (Khedhiri & Muhammad, 2008) visait à modéliser les risques exprimés dans les fluctuations des rendements boursiers à la Bourse d'Abu Dhabi, en appliquant les modèles GARCH-VAR, CHARMA, TGARCH, EGARCH, M-GARCH. Les résultats ont conclu que la fluctuation des prix s'accompagne d'une hausse des prix dans la même direction et que le modèle présenté était en mesure de fournir de meilleures performances pour prédire les fluctuations des cours des actions dans les cas bas, moyen et élevé. C'est le cas en raison de nouveaux changements dans le cadre réglementaire du marché, permettant notamment aux étrangers de participer au marché.

L'étude de (Dutta, 2018) a été dirigée pour estimer les modèles GJR-GARCH et EGARCH, GARCH en supposant qu'ils suivent la distribution générale des erreurs GED, car il a une queue plus épaisse que la distribution normale comme les résultats ont également révélé.

Les chocs positifs ont été plus efficaces que les chocs négatifs sur le marché boursier aux États-Unis et au Japon, comme l'indiquent les tests d'asymétrie de volatilité, le volume de nouvelles. Les bonnes nouvelles étaient plus fortes que celles qui étaient mauvaises.

### **3.2.1 Méthodes empiriques employées dans le cas des petites capitalisations américaines**

Dès les années 1930, les États-Unis rétablissent peu à peu les séries boursières de 1872 avec la Commission *Cowles*. Cela explique l'utilisation des données américaines par les chercheurs et les investisseurs pour établir une relation entre le couple rentabilité-risque sur une durée des principales catégories d'actifs (Garnier & Thesmar, 2009).

Par la suite, les séries sont actualisées jusqu'en 2019 pour couvrir la période des krachs boursiers et ceux de la crise économique de 2008. Dans les calculs effectués, l'inflation a été écartée de la mesure des performances de la rentabilité totale. Le réinvestissement des parts et le changement aléatoire des tarifs des actifs se font durant un investissement. De ce fait, tout au long du placement, la fluctuation du prix des actifs, des parts perçues sont réinvesties. Par conséquent, la moyenne arithmétique ne sera pas utilisée, au contraire de la moyenne géométrique qui sera utilisée pour des calculs de rentabilités annuelles moyennes (Garnier & Thesmar, 2009).

### 3.3 Cadre théorique et variables retenues

Notant,  $r_t$  le résultat d'un investissement durant l'an  $t$ , le résultat moyen  $R_T$  sur un intervalle de  $T$  années est calculé en retenant deux méthodes de moyenne différentes, une moyenne arithmétique et une moyenne géométrique (Garnier & Thesmar, 2009):

$$\text{Arithmétique : } R_T = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_t}{T}$$

$$R_t = (r_1 + r_2 + \dots + r_t) / T$$

$$\text{Géométrique : } (R_t + 1) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) + \dots + (1 + r_t)$$

$$(R_T + 1)^T = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (1 + r_t)$$

En retenant la période 1872-2008, les statistiques nous permettent de trouver les résultats ci-dessous pour les revenus réels moyens :

**Tableau 1: États-Unis : rentabilité réels moyens 1872-2008 (en %)**

1872-2008	Actions	Obligations	Actions / Obligations
Arithmétiques	7.9 %	2.9 %	5.2 %
Géométriques	6.2 %	2.5 %	3.7 %
Différences	1.7 %	0.4 %	1.3 %

Source : O. Garnier, D. Thesmar, 2009, Épargner à long terme et maîtriser les risques financiers. Page 35

Nous observons un dépassement des rentabilités moyennes en arithmétique par rapport aux méthodes géométriques. Nous constatons aussi le large écart entre les actions et les obligations. On peut alors déduire un risque de 5 % entre les actions et les obligations contre à peine 3,6 % dans le second (Garnier & Thesmar, 2009).

La méthode arithmétique est la méthode traditionnellement utilisée. Par élimination, nous concluons que la moyenne arithmétique s'avère être le meilleur choix de prévision si le but est de se fixer une rentabilité par année. Toutefois, des études empiriques montrent qu'en matière de rentabilité, les actions annuelles sont négativées et corrélées à long terme. Dans ce cas de figure, on considère que la méthode arithmétique amplifie davantage le risque vers l'action. Par conséquent, se pencher sur la méthode géométrique semble être le meilleur choix. L'avantage de ce dernier se place sur le résultat conquis par un financier ayant obtenu les capitaux durant tout l'intervalle considéré (Garnier & Thesmar, 2009).

Notre choix se porte alors sur la moyenne géométrique, car notre intérêt se focalise sur la rentabilité relative pour un investissement à très long terme.

Les rentabilités réelles moyennes des bons, obligation du Trésor en plus des actions de 1900 à 2009 sont représentées dans le tableau ci- dessous.

**Tableau 2:États-Unis rentabilités réelles par année en moyenne géométrique (en %)**

Période	Bons du Trésor (3 mois)	Emprunts d'État (10 ans)	Actions
1872-1945	2.6	2.8	5.9
1872-1910	4.5	3.7	6.2
1911-1945	0.5	1.8	5.4
1946-2008	0.7	2.0	6.2
1946-1979	- 0.5	- 1.4	5.5
1980-2008	2.2	6.1	7.0
1872-2008	1.7	2.4	6.0

Source : O. Garnier, D. Thesmar, 2009, Épargner à long terme et maîtriser les risques financiers. Page 37

Plusieurs déductions peuvent être tirées de ces anciennes rentabilités à long terme :

- Des analyses affichent la stabilité de la rentabilité réelle moyenne d'action autour de 6 % par an. En dépit de la régression du commerce américain après 2000, les résultats observés permettent d'enregistrer une performance accrue à la moyenne exacte en centenaire (Garnier & Thesmar, 2009).

- La rentabilité concrète varie d'une période à l'autre, ce qui a été conclu à la suite d'une perte réelle enregistrée entre 1947 et 1979. Vers le début du 1980 jusqu'en 2019, les obligations engendrent une rentabilité concrète moyenne unique de 7 % par année. On peut l'expliquer par un cycle de hausse et de baisse d'inflation dépendant d'une adaptation à grande inertie du taux d'intérêt nominal. C'est un résultat qui cause souvent un retard de la politique monétaire sur le cycle d'inflation (Garnier & Thesmar, 2009).

- Enfin, les actions connaissent une hausse très significative sur un long cycle avec des investissements d'argent (près de 4½% d'augmentation par année) et obligation (avec un avantage de 3,5 % par an). Les périodes 1980-2008 paraissent irrégulières puisque les obligations sont ex aequo avec les actions. Cependant, ces résultats montrent la haute exceptionnelle des obligations (Garnier & Thesmar, 2009).

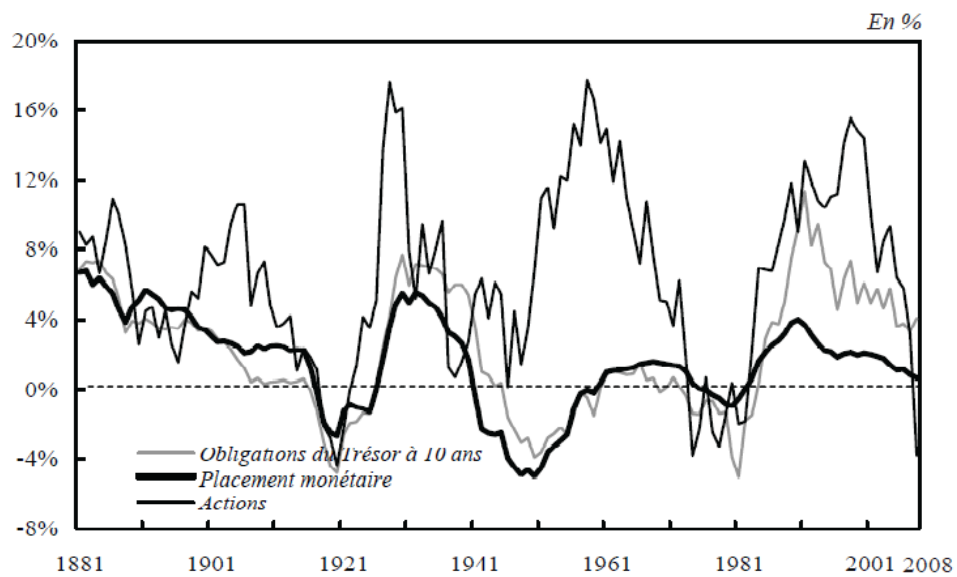
### **3.3.1.1 Schéma théorique**

Ces résultats découlent d'une analyse sur une période d'au moins trente ans. Par ailleurs, ils doivent savoir qu'un écart entre les niveaux absolus et les relatifs des rentabilités se crée obligatoirement à court terme. La période de la crise 2008 illustre parfaitement cette théorie :

- L'année 2008 expérimente une descente fulgurante pour les Américains : leur rentabilité réelle a diminué de 40 %, la performance annuelle a connu une chute similaire à celui de 1931. En dépit de la hausse de la rentabilité concrète des cautions d'État à dix ans en 2008 (+21 %), la sous-performance des actions a disposé d'un degré

d'importance moindre pour cette année (par rapport aux records précédents de -46 % d'écart en 1931 contre -58 % en 2008 (Garnier & Thesmar, 2009).

- D'un autre point de vue (voir Figure 3), en nous fiant aux périodes des années 1921 et 1975, la décennie de 1998 jusqu'à la fin 2008 souligne la baisse de performance des actions des États-Unis par rapport à leur obligation qui est d'une portée inédite (-8 % par an en moyenne), car la rentabilité existante des obligations commence à virer aux positives (Garnier & Thesmar, 2009).



Source : O. Garnier, D. Thesmar, 2009, Épargner à long terme et maîtriser les risques financiers. Page :38

**Figure 2: Rentabilités réelles moyennes aux États-Unis sur dix années glissantes**

## **4 Méthodologie de la recherche**

Après avoir présenté la revue de littérature de cette étude, il est judicieux de présenter une analyse empirique afin de déterminer quel modèle est le plus approprié pour répondre à notre question de recherche et d'analyser les résultats empiriques en prévision du long terme. On tentera de prédire la volatilité future afin d'aider les investisseurs dans leurs décisions de portefeuille

### **4.1 Cadre d'analyse et échantillonnage.**

L'échantillon sur lequel nous nous appuyons pour mener notre étude a été collecté à partir du site [www.investing.com](http://www.investing.com). Ce dernier fournit un très grand nombre de données sur certains phénomènes économiques ainsi que sur des entreprises de tailles et de secteurs d'activité différentes.

Nous avons pu examiner les données de 1260 observations concernant des données de la période du 26/12/2015 au 20/01/2020.

### **4.2 La collecte et source des données**

La base de données de notre étude provient du site [www.investing.com](http://www.investing.com). Cette base est relative à l'indice CRSP US Small Cap.

L'indice CRSP US Small Cap comprend des sociétés américaines qui se situent entre les 2 % et 15 % inférieurs à la capitalisation boursière pouvant être investie. Il n'y a pas de limite inférieure de capitalisation boursière, autre que ce qui est spécifié par les écrans d'investissement. L'indice de rendement total a été disponible pour la première fois sur le fil NASDAQ GIDS SM (Global Index Data Service SM) le 31 décembre 2012 ; l'indice de rendement des prix est rendu disponible pour la première fois le 15 août 2011. Les données couvrent la période du 26/12/2015 au 20/01/2020.



**Tableau 3 : Aperçu de la base**

Date	Prix	Ouverture	Supérieur	Inferieur
20/01/2021	2654.43	2640.46	2667.54	2640.46
19/01/2021	2640.46	2612.72	2642.89	2612.72
15/01/2021	2612.72	2645.26	2645.32	2589.34
14/01/2021	2645.26	2611.82	2657.99	2611.82

Source : [www.investing.com](http://www.investing.com).

#### **4.3 Les variables retenues**

La base de données fournit quatre variables à savoir *Price, Open, High et Low*.

- La variable **Prix** représente le cours de l'indice *CRSP US Small Cap*.
- La variable **Ouverture** représente le prix auquel une action a commencé à se négocier lorsque la cloche d'ouverture a sonné.
- La variable **Supérieur** représente le prix le plus élevé auquel une action s'est échangée pendant une période.
- La variable **Inferieur** représente le prix le plus bas sur la période.

À partir de la variable **Prix**, le rendement peut être calculé. Ainsi, les données nous permettront d'étudier la volatilité de cet actif.

#### **4.4 Technique d'analyse des données**

L'analyse technique consiste à étudier l'historique des cours des actions, ce qui nous donne une explication du mouvement et des fluctuations des cours des actions, puis à essayer de prédire les mouvements et les fluctuations futurs.

Avec le développement des méthodes techniques d'analyse, plusieurs méthodes modernes sont apparues, comme la méthode de téléchargement de séries chronologiques aléatoires linéaires, qui dépend principalement du phénomène à l'instant présent des moyennes pondérées des observations passées et des erreurs aléatoires.

Cependant, ce qui est retenu des formules linéaires, c'est qu'elles ne peuvent pas traduire le caractère cinétique de ces phénomènes, notamment les cas appliqués liés aux chaînes financières. On constate donc une violation de l'hypothèse d'homogénéité de la variance. Par conséquent, les modèles linéaires des séries temporelles ne pourraient pas expliquer le phénomène qui se caractérise par l'instabilité de la variance des erreurs, car la non-réalisation de cette hypothèse nuit fortement à la capacité d'estimation.

Ainsi, Engle a suggéré en 1982 les modèles ARCH, ce sont des modèles non linéaires qui sont considérés comme une solution au problème d'hétérogénéité de la variance, à travers lesquels les modèles ARCH de moyenne et d'écart type peuvent être utilisés pour faire une estimation et une prédiction. Ainsi, dans cette partie, nous avons détaillé la méthode d'analyse des séries temporelles aléatoires à travers ces sections:

#### **4.4.1 Notions de base sur les tests de séries chronologiques**

Avant de commencer à étudier les fluctuations d'un phénomène économique, nous devons d'abord vérifier la stationnarité de la série qui représente ce phénomène. Ensuite, nous pouvons estimer le modèle qui représente le phénomène. Toutefois, si l'on veut prédire l'avenir du phénomène, il faut d'abord appliquer des tests de prévisibilité à court et à long terme.

#### **4.4.2 Test de stationnarité**

On dit d'une série temporelle aléatoire ce qui est stationnaire ou à une covariance stationnaire, et cela, si les moyennes de ses covariances et covariances sont constantes dans le temps, c'est-à-dire que :

- La fluctuation autour d'une moyenne arithmétique constante dans le temps :

$$E(\gamma_t) = E(\gamma_{t+k}) = \mu$$

- La stationnarité de la variance dans le temps :

$$VAR(\gamma_t) = E[\gamma_t - E(\gamma_t)]^2 = var(\gamma_{t+k}) = E[\gamma_{t+k} - E(\gamma_{t+k})]^2 = \gamma(0) = \sigma^2$$

- La covariance entre deux valeurs quelconques de la même variable dépend de l'écart de temps entre les deux valeurs, et non de la valeur réelle du temps qui est calculée à la covariance, c'est-à-dire de la différence entre deux périodes.

$$COV ( Y_t, Y_{t+k} ) = E [(Y_t - \mu)( Y_{t+k} - \mu)] = COV( Y_{t+k}, Y_{t+k+s} )$$

La stationnarité de la série chronologique peut être révélée en utilisant la représentation graphique de cette série. Pourtant, juger cette stationnarité en observant le graphique ne suffit pas, car certains tests doivent être effectués pour s'assurer de la présence d'une racine unitaire, et, parmi les tests de la racine unitaire, nous mentionnons : Dickey-Fuller, Philips-Perron et KPSS.

- **Tests de racine unitaire**

Les tests de racines unitaires révèlent non seulement la composante de tendance générale, mais aident également à déterminer la méthode appropriée pour rendre la série stationnaire. Pour comprendre ces tests, il est nécessaire de différencier deux types de modèles :

- **Le processus TS (Tendance stationnaire)**

Ces modèles sont non stationnaires, présentent une non-stationnarité déterministe et prennent la forme suivante :

$$Y_t = f(t) + \varepsilon_t$$

$f(t)$  une fonction polynomiale du temps (linéaire ou non linéaire),  $\varepsilon_t$  bruit blanc, le plus courant de ces modèles prend la forme d'un polynôme du premier degré, et s'écrit sous la forme  $\gamma_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \varepsilon_t$ .

Ce modèle est non stationnaire, car sa moyenne  $E(\gamma_t)$  est liée au temps, mais on le trouve stationnaire en estimant les paramètres  $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$  par la Méthode des moindres carrés ordinaire et Soustraire le montant  $\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t$  de  $\gamma_t$ , où  $\gamma_t - \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t$ .

- **Le processus DS (stationnarité Différence)**

Ces modèles sont également non stationnaires, présentent une non-stationnarité aléatoire, et prennent la forme suivante :

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$$

Nous pouvons le rendre stationnaire en utilisant les différences, c'est-à-dire :

$$\Delta^d \gamma_t = \beta + \varepsilon_t$$

Où  $\beta$  est une constante, dans laquelle le degré de différence et souvent les différences du premier degré sont utilisées dans ces modèles  $d=1$  et écrire à partir du formulaire

$$\Delta \gamma_t = \beta + \varepsilon_t$$

Ces modèles prennent deux formes :

Si  $\beta = 0$  , le modèle DS est sans dérivée et s'écrit à la forme suivante

$\gamma_t = \gamma_{t-1} + \varepsilon_t$  , comme le bruit est blanc, le modèle s'appelle un modèle de marche aléatoire, il est largement utilisé dans l'étude des marchés financière.

Si  $\beta \neq 0$  : le modèle DS est dérivée, et il s'écrit à partir de la forme

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} + \beta + \varepsilon_t.$$

### Test Dickey-Fuller :

Dans le test ADF simple, le modèle  $\varepsilon_t$  représente et interprète hypothétiquement des chocs aléatoires, mais, dans le cas d'autocorrélation entre les erreurs, Dickey-Fuller (1981) a développé le test ADF amélioré.

Le test ADF se concentre sur l'hypothèse :  $H_1 : |\rho| < 1$  et l'estimation par la méthode des moindres carrés.

$$\begin{aligned} \nabla \gamma_t &= \lambda \gamma_{t-1} - \sum_{j=2}^p \phi_j \nabla \gamma_{t-j+1} + \varepsilon_t \\ \nabla \gamma_t &= \lambda \gamma_{t-1} - \sum_{j=2}^p \phi_j \nabla \gamma_{t-j+1} + c + \varepsilon_t \\ \nabla \gamma_t &= \lambda \gamma_{t-1} - \sum_{j=2}^p \phi_j \nabla \gamma_{t-j+1} + c + bt \varepsilon_t \end{aligned}$$

Nous pouvons définir la p-value selon le critère Akaike ou le critère Schwarz.

La décision :

- Si  $\tau_c$  Calculé  $> \tau_t$  tabulée : Nous rejetons l'hypothèse nulle  $H_0: \phi = 1 \text{ OU } \lambda = 0$ . Nous acceptons alors l'hypothèse alternative  $H_1: \phi \neq 1 \text{ OU } \lambda \neq 0$ . La série est stationnaire.
- Si  $\tau_c$  Calculé  $< \tau_t$  tabulée : Nous acceptons l'hypothèse nulle  $H_0: \phi = 1 \text{ OU } \lambda = 0$ , et nous rejetons l'hypothèse alternative  $H_1: \phi \neq 1 \text{ OU } \lambda \neq 0$ . La série est donc non stationnaire.

- **Critère d'information d'Akaike :**

En 1974, le chercheur Akaike a présenté une norme d'information connue sous le nom de critère d'information d'Akaike (AIC). En résumé, il est question de réconciliation des modèles de séries chronologiques combinés à des paramètres (h) pour les données de séries chronologiques à l'étude et pour évaluer l'adéquation de ces modèles aux données selon la (AIC) standard pour chaque modèle et en choisissant le modèle qui donne le moins de valeur pour la norme. Ce critère est défini par la formule :

$$AIC = -2\log \tilde{L} + 2K$$

K : est le nombre de paramètres dans le modèle.

$\tilde{L}$  : est la vraisemblance maximisée.

$-2\log$  : est la Déviance du modèle qui est pénalisé par 2 fois le nombre de paramètres.

- **Critère d'information de Schwartz**

Ce critère a été proposé par Gideon Schwarz en 1978, selon ce critère, la pénalité dépend de la taille d'échantillon et non seulement du nombre de paramètres. Il s'écrit :

$$BIC = -2\ln(L) + k.\ln(N)$$

N : le nombre d'observations dans l'échantillon

K : le nombre de paramètres libres du modèle

L : la vraisemblance du modèle estimée

#### 4.4.3 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation d'une série chronologique illustre l'association entre les observations pour différentes périodes, ce qui est d'une grande importance pour mettre en évidence certaines caractéristiques importantes de la série

chronologique. En pratique, nous estimons la fonction d'autocorrélation de la série par la fonction d'autocorrélation de l'échantillon, où la fonction d'autocorrélation à l'écart  $h$  est représentée par ;

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}, h \in Z$$

Avec :  $\gamma(0)=1$  |  $\rho(h)| < 1$ , donc  $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

Nous disons une série temporelle est stationnaire si le coefficient d'autocorrélation est égal ou proche de zéro pour tout écart supérieur à zéro, c'est-à-dire que l'autocorrélation doit décroître rapidement lorsque  $k$  augmente.

Si la série est non stationnaire, alors l'étape suivante est d'essayer de la séparer afin d'obtenir une série stationnaire transformée, et en utilisant  $\omega_t$  comme série dissociée.

Après avoir utilisé les différences de séries, il est possible de regarder à la fois le graphique des séries dispersées et la fonction d'autocorrélation, afin de s'assurer qu'il n'y a pas de problème du non stationnaire.

Si  $\omega_t$  reste non stationnaire, on continue à calculer les différences comme suit :

$$\omega_t = \Delta^2 \gamma_t, t = 3, 4, \dots, T$$

Et nous pouvons appliquer le facteur de différence d'une fois sur la série dérivée :  $\omega_t = \hat{\Delta}(d) \gamma_t, t = d+1, d+2, \dots, T$

### **Test d'autocorrélation**

Nous utilisons le test Ljung-Box et le test box afin d'étudier la signification quantitative des coefficients de la fonction d'autocorrélation, où la statistique de chaque test calculée  $Q$  correspond à la dernière valeur de la colonne Q-Stat dans la fonction d'autocorrélation et la valeur partielle.

- **Test Ljung-Box**

$$Q_k = T(T+2) \sum_{k=1}^k \frac{a_1 K^2}{t-k} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} X^2(K)$$

- **Test Box. Pierre :**

$$Q_{BP} = N \sum_{K=1}^K \hat{\alpha}_k^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} X^2(K)$$

#### 4.4.4 Tests de prévisibilité à court terme (test de marche aléatoire)

Pour tester l'hypothèse de la marche aléatoire de la série temporelle étudiée, deux conditions de base doivent être remplies : l'indépendance entre les observations (cours des actions) qui composent la série, et la distribution de ces observations suit la loi normale.

- **Test Jarque-Bera**

L'étude de la distribution de probabilité d'une série financière stationnaire est très importante, et la condition de la modération de la distribution de la série est une condition du modèle de marche aléatoire, et l'une des caractéristiques de la distribution normale est que le coefficient d'asymétrie est nul et que le coefficient d'aplatissement est égal à 3. La loi normale est caractérisée par une symétrie par rapport à la moyenne, et par une faible probabilité de valeurs d'anomalies, où le test de Jarque-Berra est basé sur les coefficients d'aplatissement et d'asymétrie.

$$\beta_1 = \frac{\mu^3}{\sigma^3} \text{ et } \beta_2 = \frac{\mu^4}{\sigma^4}$$

Le test est réalisé selon les deux hypothèses suivantes :

$H_0$  : la série des cours boursiers au cours de la période d'étude est distribuée normalement.

$H_1$  : la série n'a pas de distribution normale.

Le test de Jarque-Bera est basé sur les paramètres de Skewness et Kurtosis. Il s'écrit à partir de la figure suivante :

$$T = n \left( \frac{\beta_1^2}{6} + \frac{(\beta_2 - 3)^2}{24} \right)$$

#### 4.4.5 Tests prédictifs à long terme:

Nous passerons en revue certaines méthodes exploratoires telles que le test d'Hurst et certaines méthodes spectroscopiques telles que la méthode GPH, qui est

utilisée pour révéler l'étendue de la capacité de la série temporelle à prédire le long terme. Ainsi, l'étendue du GPH nous révèle la présence d'une mémoire longue dans la série temporelle.

- **Processus Hurst :**

Cette méthode a été présentée la première fois par le chercheur Hurst EH (1951) dans le domaine de l'irrigation afin d'étudier le mouvement des débits d'eau d'un des barrages à travers le temps. Ensuite, ses travaux ont été cités par des économistes pour être utilisés dans le domaine de l'analyse des séries chronologiques. L'idée de base des statistiques R/S est de comparer les valeurs minimales et maximales des sommes partielles des écarts entre le séparateur et leur moyenne arithmétique divisée par leur écart type (Mahamat, 2017).

Pour une série temporelle  $X_{t=1,...,r}$ , la statistique R/S s'écrit comme suit :

$$R/S = \frac{1}{\left[\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (X_j - \bar{x}_t)^2\right]^{1/2}} \left[ \max_{1 \leq k \leq t} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_t) - \min_{1 \leq k \leq t} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_t) \right]$$

#### 4.4.6 Test des modèles

##### 4.4.6.1 Test de l'effet ARCH

Pour réaliser le test, nous utilisons les deux hypothèses suivantes :

$$H_0 : \alpha_j = 0, j = 1 \dots p$$

$$H_1 : \alpha_j \neq 0, j = 1 \dots p$$

Si l'hypothèse nulle a été acceptée  $H_0$ , donc la variance des erreurs est constante dans le temps, c'est-à-dire  $\alpha_i = \alpha_1$ .

Si l'hypothèse alternative a été acceptée  $H_1$ , la variance des erreurs n'est pas constante dans le temps et l'erreur suit un processus ARCH de degré p.

Ce test est basé sur le coefficient de Fisher classique ou le multiplicateur Lagrange, dans la pratique ce test passé par les étapes suivantes :

- Calcul des résidus  $\varepsilon_t$  pour le modèle ARCH
- Calcul de carré des résidus



- Réalisation de carrés résiduels autorégressifs avec un retard  $p$  valeur significative, où  $\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$
- Calculer le multiplicateur Lagrange :c, où  
 $n$ : Le nombre d'observations utilisées dans le calcul de la régression pour la troisième étape.

$R^2$  : Le coefficient de détermination pour la troisième étape.

Si :  $LM > X2(p)$ , nous refusons l'hypothèse nulle  $H_0$ , et nous acceptons l'hypothèse alternative, la variance des erreurs n'est pas constante dans le temps et l'erreur suit un processus ARCH (p).

#### 4.4.6.2 Test de l'effet GARCH

Nous testons les deux hypothèses suivantes :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$$

$$H_1: \beta_j \neq 0, \quad j = 1 \dots q$$

Pour tester le modèle ARCH contre le modèle GARCH, nous calculons le coefficient de détermination  $R^2$  de l'équation suivante :

$$\hat{h}_t = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j h_{t-j}$$

Et nous comparons la statistique du multiplicateur de Lagrange avec la valeur critique de la distribution de khi-deux avec un degré de liberté  $q$ . Si cette statistique est complètement supérieure à la valeur tabulée de cette distribution, les erreurs sont soumises au modèle GARCH (p, q). Dans ce cas  $q$  et  $p$  doivent être spécifiés en diminuant le critère de Schwarz ou AIC.

#### 4.4.7 Prédictions de la série :

Pour apprécier la performance des modèles estimés, nous calculons les indicateurs suivants afin de choisir le meilleur modèle.

- L'erreur de prédiction quadratique, (MSPE) : l'erreur de prédiction quadratique moyenne mesure la distance quadratique entre la valeur prédite et la valeur réelle, il s'écrit :

$$MSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (r_j - \hat{r}_j)^2}$$

Avec  $r_j$  représente la valeur réelle et  $\hat{r}_j$  la valeur prédite.

- L'erreur de prédiction absolue moyenne, (MAE) : l'erreur absolue moyenne mesure l'ampleur moyenne des erreurs dans un ensemble de prédictions, sans tenir compte de leur direction (l'erreur en valeur absolue).

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{r}_i - r_i|}{n}$$

- L'erreur en pourcentage absolu moyen, (MAPE) : l'erreur en pourcentage absolu moyen, également appelée écart en pourcentage absolu moyen, mesure la taille de l'erreur en pourcentage. Il est calculé comme la moyenne du pourcentage d'erreur non signé.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |r_i - \hat{r}_i|$$

- La mesure de la précision, (PM) : la mesure de la précision (PM) est le rapport entre la moyenne des erreurs de prédiction et la variance des observations réelles

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^h (r_i - \hat{r}_i)^2}{\sum_{i=1}^h (\underline{r_i} - \underline{r_i})^2}$$

Avec  $r_i$  est le rendement moyen réel.

## 5 Analyse empirique et résultats de la recherche

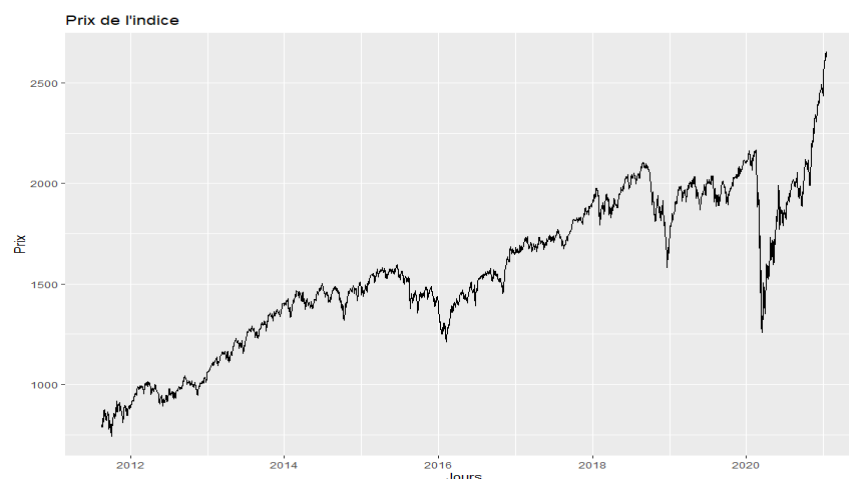
Nous rappelons qu'on cherche dans cette étude à modéliser les rendements de l'indice *CRSP US Small Cap*, ces derniers sont calculés à partir du prix de l'indice *CRSP US Small Cap*. Dans ce contexte, les principales propriétés des séries financières de prix et de rendements journaliers seront présentées.

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du prix de cet indice. Il ressort que le prix moyen de l'indice sur la période de l'étude est de 1554,8 \$. Le prix minimum sur la période de l'étude est de 740,4 \$ alors que le prix maximal est fixé à 2654,4\$. Le graphique montre que le prix de l'indice a une tendance plus ou moins haussière avec une très grande volatilité, ce qui souligne une non-stationnarité de la série.

**Tableau 4:: Résumé des prix de l'indice CRSP US Small Cap**

Minimum	Premier quartile	Médiane	Moyenne	Troisième quartile	Maximum
740.4	1337.8	1530.8	1554.8	1885.4	2654.4

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio



Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

**Figure 3:l'évolution des rendements logarithmiques journaliers de l'indice CRSP US Small Cap**

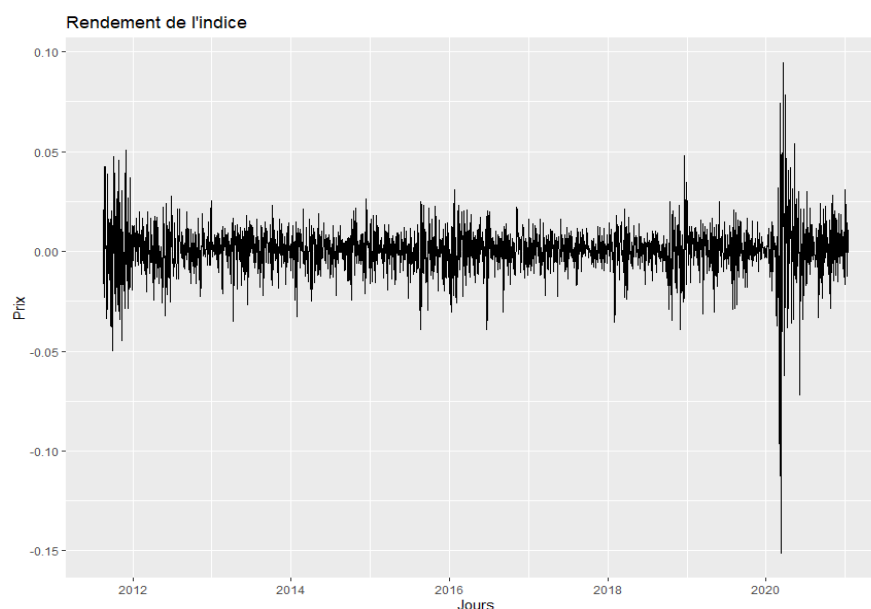
Le graphique retrace l'évolution des rendements logarithmiques journaliers de l'indice.

Le rendement logarithmique journalier moyen est assez proche de zéro (0.0005059). Le rendement minimum est de -0.1513026, tandis que le maximum est de 0.0946473. La dynamique du rendement révèle que la moyenne est constante et que la volatilité est assez constante au cours du temps, quand nous tenons compte des intervalles de temps.

**Tableau 5: Résumé du rendement**

Minimum	Premier quartile	Médiane	Moyenne	Troisième quartile	Maximum
-0.1513026	-0.0048355	0.0008971	0.0005059	0.0068552	0.0946473

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

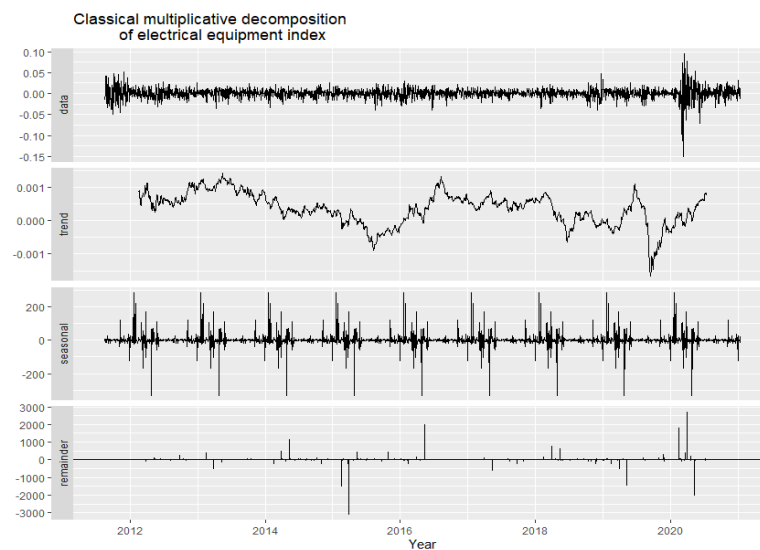


Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

**Figure 4: : L'évolution de rendements logarithmiques journaliers de l'indice**

Pour mieux analyser les caractéristiques des rendements logarithmiques journaliers de l'indice, nous réalisons une décomposition de la série en trois composantes, à savoir, la tendance, la saisonnalité et les résidus.

La représentation graphique de la décomposition du rendement de l'indice ne montre pas une tendance caractéristique. Toutefois, nous pouvons observer une saisonnalité dans la série.



Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

**Figure 5: Décomposition de la série**

L'objectif de notre étude consiste à modéliser les rendements logarithmiques journaliers de l'indice. Nous allons à présent commencer par modéliser cette variable en utilisant un modèle ARMA (p, q) avant de passer aux modèles de prédictions plus complexes tels que les modèles ARCH et GARCH.

Pour choisir les ordres p et q de notre modèle ARMA, deux graphes sont utilisés : le graphique d'autocorrélation (ACF) et le graphique d'autocorrélation partielle (PACF). Le graphique ci-dessous présente l'autocorrélation (ACF) et l'autocorrélation partielle (PACF).

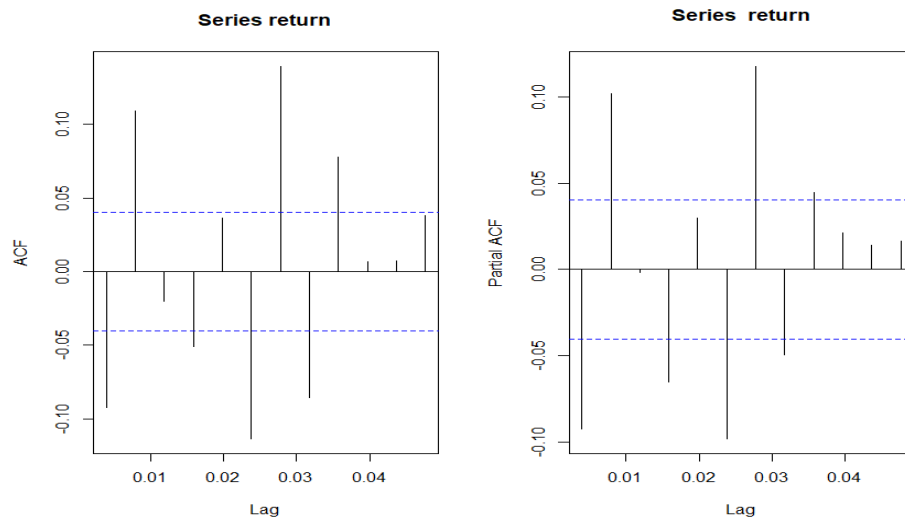
Il est nécessaire de comprendre le graphique de la fonction d'autocorrélation (ACF) et de la fonction d'autocorrélation partielle (PACF) pour déterminer l'ordre des termes AR et/ou MA. Bien que l'ACF et le PACF ne pas déduire directement l'ordre des modèles ARMA, mais ils peuvent faciliter la compréhension de l'ordre et donner une idée du modèle qui correspond le mieux aux données de la série.

Le tracé ACF explique comment la valeur actuelle d'une série temporelle donnée est corrélée avec les valeurs passées. Dans le graphique ACF l'axe des ordonnées représente le coefficient de corrélation tandis que l'axe des abscisses représente le nombre de retard.

Le tracé PACF explique la corrélation partielle entre la série et les retards eux-mêmes. Les tirets bleus représentent le seuil de significativité pour les valeurs d'autocorrélation. Cela signifie que tout ce qui se trouve dans cette zone est statistiquement proche de zéro et que tout ce qui se trouve en dehors de la zone est statistiquement non nul.

Pour déterminer l'ordre du modèle, nous vérifions le nombre de sucettes qui sont au-dessus ou en dessous de l'intervalle de confiance avant que la prochaine sucette n'entre dans la zone entre les deux lignes pointillées bleues.

Le graphique ci-dessous présente l'autocorrélation (ACF) et l'autocorrélation partielle (PACF).



Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

**Figure 6 : L'autocorrélation (ACF) et l'autocorrélation partielle (PACF).**

Pour choisir de façon efficiente les deux ordres, nous retenons le critère d'information AIC (Le critère d'information d'Akaike) et le modèle retenu, qui est celui ayant le critère d'information d'Akaike le plus faible<sup>1</sup> après l'application de la boucle. Ainsi, nous retenons comme ordre de la partie autorégressive ( $p=5$ ) et  $q=4$  pour la partie moyenne mobile. Les résultats du modèle ARMA (5,4) sont résumés dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 6:: Estimation du modèle ARMA (5,4)**

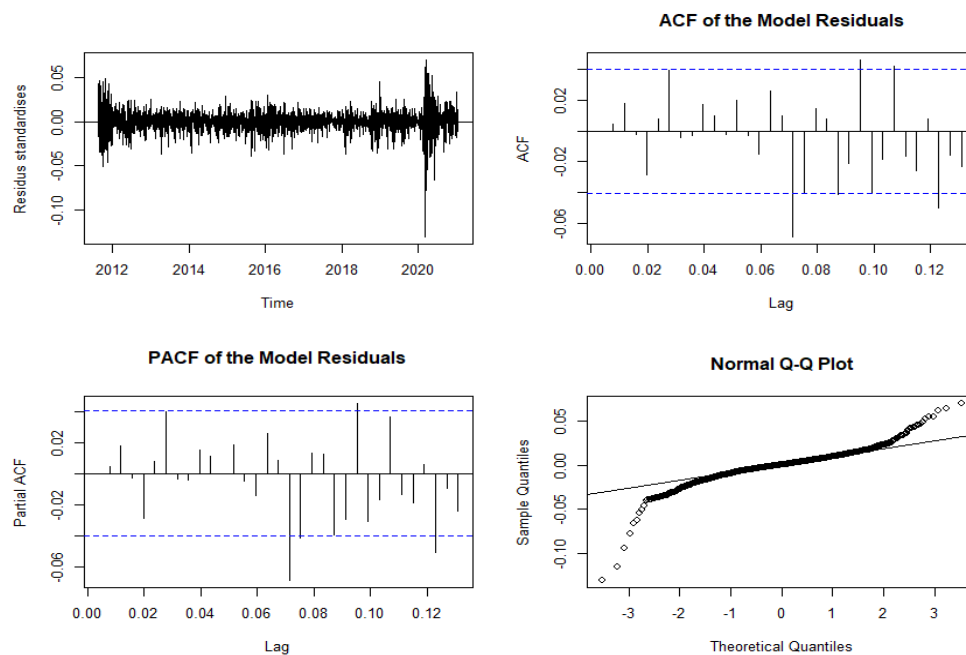
Coefficient	(P, Q)	Écart-type
AR (1)	-0.0923	0.0695
AR (2)	0.7542	0.0366
AR (3)	-0.3489	0.0681
AR (4)	-0.8044	0.0466
AR (5)	0.0443	0.0283
MA (1)	0.0331	0.0667

<sup>1</sup> Le critère d'information d'Akaike est égale à  $2k-2\ln(L)$ , avec  $k$  représente le nombre de paramètres à estimer du modèle et  $L$  est le maximum de la [fonction de vraisemblance](#) du modèle.

MA (2)	-0.6725	0.0464
MA (3)	0.3719	0.0679
MA (4)	0.6781	0.0574
$\sigma^2$	0.000156	
Log likelihood	7026.88	
AIC	-14033.76	

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

À présent, il est question d'étudier les caractéristiques des résidus issus de la modélisation économétrique du rendement. La représentation des résidus se présente comme suit :



Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

**Figure 7 : Résultats d'analyse des résidus**

Nous commençons par vérifier la normalité, l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité des résidus. À partir des tests de Shapiro Wilk et de Jarque Bera, on peut retenir que les résidus de la régression ne suivent pas une distribution normale puisque le test est significatif. Par conséquent, on peut rejeter l'hypothèse nulle de normalité. Le résultat est aussi confirmé par le graphique QQ (quantile-quantile plot).



**Tableau 7: Tests de Shapiro -Wilk et de Jarque - Bera**

Test de Shapiro-Wilk		Test de Jarque-Bera		
Statistique calculée W	Significativité empirique	Statistique calculée	Degrés de liberté	Significativité empirique
0.90233	$2.2 \times 10^{-16}$	16106	2	$2.2 \times 10^{-16}$

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

**Tableau 8: l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité des résidus**

Test de Box-Pierce			Test de Box-Ljung		
Statistique calculée	Degrés de liberté	Significativité empirique	Statistique calculée	Degrés de liberté	Significativité empirique
7.405	1	0.006504	7.4309	1	0.006411

Source: Calcul CRSP US Small Cap, rstudio

Les statistiques de Ljung-Box et Box-Pierce permettent de tester l'hypothèse d'indépendance sérielle de la série. De manière précise, cette statistique teste l'hypothèse nulle des coefficients d'autocorrélation. Elle est basée sur la somme des autocorrélations de la série et elle suit une distribution d'une loi khi-deux avec m degrés de liberté. Les résultats des méthodes Box-Pierce-Ljung (BPL) développées par Box et Pierce (1970) et Ljung et Box (1978), permettant de tester la qualité d'ajustement d'un modèle ARMA (p.q.), sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Les résultats des deux tests statistiques révèlent que les résidus obtenus des régressions sont auto-corrélés, les tests sont significatifs (Significativité empirique < 0,05).

Par la suite, nous testons l'effet GARCH dans la série des résidus, c'est-à-dire l'hétéroscédasticité<sup>2</sup>. Les deux précédents tests sont à présent réalisés sur la série au carré des résidus. Les résultats confirment un effet GARCH. On rappelle que, faisant partie de la famille ARIMA, la modélisation ARCH est retenue pour éliminer l'hétéroscédasticité conditionnelle. Cela signifie que la variance des erreurs du modèle n'est pas homogène pour toutes les observations. Nous pouvons rejeter l'hypothèse nulle d'homoscédasticité (Significativité empirique < 0,05). L'analyse du modèle ARMA révèle l'existence d'une volatilité qui convient d'être étudiée par la suite.

**Tableau 9: l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité au carré des résidus**

Test de Box-Pierce			Test de Box-Ljung		
Statistique calculée	Degrés de liberté	Significativité empirique	Statistique calculée	Degrés de liberté	Significativité empirique
2206.1	1	2.2 <sup>e-16</sup>	2211.6	1	2.2 <sup>e-16</sup>

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

## 5.1 Estimation économétrique et présentation des résultats

Dans ce qui suit, nous estimons trois modèles pour modéliser la volatilité observée dans les données. Il s'agit du modèle GJR-GARCH, le modèle GARCH standard et le modèle ARCH. Pour choisir le modèle adéquat dans chaque cas, nous estimons plusieurs modèles et nous nous basons sur le critère d'information bayésien BIC<sup>3</sup> pour déterminer et choisir le meilleur modèle. Aussi, on regarde les modèles qui respectent les diagnostics (autocorrélation, homoscédasticité). Après les estimations et

<sup>2</sup> Le test ARCH consiste à faire une régression autorégressive des carrées des résidus sur q retards

<sup>3</sup> BIC est un **critère d'information** dérivé du **critère d'information** d'Akaike, il a été développé par Gideon Schwarz en 1978. On rappelle que le **critère d'information** d'Akaike est une mesure de la qualité d'un modèle statistique développé par [Hirotugu Akaike](#) en 1973.

les calculs menés, on retient les modèles : GJR-GARCH (2,1), GARCH (4,1) et ARCH (6).

**Tableau 10: Résultats de l'estimation des modèles**

Para mètre s	ARCH (6)		GARCH (4,1)		GJR-GARCH (2,1)	
	Coef	Significativ ité empirique	Coef	Significa tivité empiriqu e	Coef	Significa tivité empiriqu e
Mu	-0.000050	0.000001	0.000798	0.000088	0.000602	0.000060
Ar1	-0.790778	0.000074	-0.009726	0.000021	-1.249372	0.000165
Ar2	1.144377	0.000100	-1.762738	0.000074	-1.119135	0.000146
Ar3	0.795311	0.000074	-0.003383	0.000016	-1.120010	0.000133
Ar4	-0.170029	0.000025	-0.992313	0.000060	-0.973267	0.000153
Ar5	0.010390	0.000019	0.003430	0.000021	-0.046174	0.000074
Ma1	0.732508	0.000069	0.009857	0.000030	1.218843	0.000036
Ma2	-1.222881	0.000094	1.778206	0.000050	1.097598	0.000100
Ma3	-0.758371	0.000078	0.006596	0.000017	1.104491	0.000085
Ma4	0.240267	0.000042	1.005483	0.000042	0.938699	0.000038
Omég a	0.000034	0.000003	0.000005	0.000002	0.000004	0.000006
Alpha 1	0.095626	0.027941	0.107701	0.031502	0.000117	0.051444
Alpha 2	0.198318	0.034276	0.060929	0.041128	0.032089	0.036443

Alpha 3	0.168258	0.035825	0.000629	0.037957	-	-
Alpha 4	0.094781	0.032057	0.000000	0.032294	-	-
Alpha 5	0.051150	0.025470	-	-	-	-
Alpha 6	0.134831	0.032436	-	-	-	-
Beta1	-	-	0.791099	0.026882	0.827440	0.009566
Gam ma1	-	-	-	-	0.211600	0.044086
Gam ma2	-	-	-	-	-0.004897	0.055151
Shape	7.753896	1.250817	8.424877	1.546520	9.631657	1.253945
Log.li ke	-	7568.691	-	7583.74	-	7633.602
AIC	-	-6.3989	-	-6.4125	-	-6.4275
BIC	-	-6.3549	-	-6.3710	-	-6.3861

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

Les résultats des estimations montrent que les modèles (GJR-GARCH (2,1) et GARCH (4,1) respectent les tests de diagnostic des résidus (autocorrélation, homoscédasticité, effets GARCH). D'après le tableau, la valeur de log- vraisemblance (7633.602) est maximale pour le modèle GJR-GARCH (2,1). Les valeurs des deux critères d'information (AIC= - 6.4275, BIC= - 6.3861) de GJR-GARCH (2,1) sont minimales par rapport à GARCH (4,1). Ces résultats indiquent que le modèle GJR-GARCH (2,1) est le modèle optimal pour décrire la volatilité de cette série. Notez que

pour le modèle GARCH (4,1), les résultats de l'estimation économétrique font apparaître que tous les coefficients de la partie ARMA (5.4) sont statistiquement significatifs au seuil de 1%. Il apparaît que les cinq (05) valeurs passées du rendement logarithmique influent négativement sur le rendement actuel. D'autre part, les valeurs d'innovation antérieures ont un impact positif sur la performance actuelle. Les coefficients  $\beta_1$  et  $\gamma_1$  sont significatifs au seuil de 5 %. Ils montrent aussi que le coefficient  $\beta_1$  est positif, et il ressort de l'estimation que la volatilité précédente a un impact plus important sur la volatilité actuelle que la volatilité précédente. En outre un coefficient  $\gamma_1$  est positif, qui indique clairement que la volatilité réagit différemment aux mauvaises nouvelles qu'aux bonnes nouvelles. En revanche, tel que discuté dans la section 5.1.1, le modèle ARCH (6) ne respecte ni l'hypothèse de non-corrélation des résidus, ni l'homoscédasticité des résidus.

#### 5.1.1 Estimation du modèle ARCH (6)

##### - L'autocorrélation

**Tableau 11: Test de Ljung-Box pondéré sur les résidus standardisés**

Lag	Statistique Q	Significativité empirique
Lag 1	5.286	0.0214991
Lag 2	24.432	0.0000000
Lag 4	36.783	0.0002523
Degré de liberté = 9	-	-

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

La significativité empirique associée au test de Ljung-Box est inférieure au seuil théorique de 5%. Il en découle que nous rejetons l'hypothèse nulle et concluons que les résidus du modèle ARCH (6) sont auto-corrélés.

##### - Homoscédasticité :

**Tableau 12: Test de Ljung-Box pondéré sur les résidus standardisés**

Lag	Statistique Q	Valeur P
Lag 1	2.883	0.089515
Lag 2	20.982	0.004122
Lag 4	29.519	0.004257
Degré de liberté = 6	-	-

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio

Le seuil de significativité empirique étant inférieur à 5%, nous rejetons ainsi l'hypothèse nulle et concluons que les résidus normalisés du modèle ARCH (6) demeurent toujours caractérisés par la présence d'hétéroscédasticité.

Il ressort ainsi que le modèle ARCH n'est pas adapté pour expliquer la volatilité de notre série.

À présent, nous interprétons les résultats des modèles GARCH (4,1) et GJR-GARCH (2,1) qui respectent toutes les tests de spécification.

### 5.1.2 Estimation du modèle GARCH (4,1)

Les résultats issus de l'estimation économétrique du modèle GARCH (4,1) montrent que tous les coefficients de la partie ARMA (5,4) sont statistiquement significatifs au seuil de 1%. Il ressort que, les cinq (05) valeurs passées du rendement logarithmiques ont un impact négatif sur le rendement présent. En revanche, les valeurs passées des innovations exercent une influence positive sur le rendement présent.

La valeur de la constante du modèle est positive, alors il ressort que l'indice est susceptible d'avoir un rendement positif et que sa valeur augmente à long terme. Pour la partie GARCH, seuls. Le coefficient  $\beta_{11}$  permet de mesurer l'impact de la volatilité passée sur la volatilité présente. Il ressort de l'estimation que la volatilité précédente a un impact positif sur la volatilité présente. Le paramètre  $\alpha_1$  permet de mesurer comment un choc de volatilité se répercute sur la volatilité de la période suivante. Ce coefficient est positif et il est statistiquement significatif. Cela confirme qu'un choc positif sur la volatilité passée augmente la volatilité présente.

### 5.1.3 Estimation du modèle GJR-GARCH (2,1)

Nous rappelons qu'il existe plusieurs variantes du modèle GARCH. Le modèle GJR- GARCH de (Glosten et al.1993) modélise les chocs positifs et négatifs sur la variance conditionnelle de manière asymétrique via l'utilisation de la fonction indicatrice.

Les résultats issus de l'estimation économétrique du modèle GJR-GARCH (2,1) montrent que tous les coefficients de la partie ARMA (5,4) sont significatifs au seuil de 1 %. Il ressort que les cinq (05) valeurs passées du rendement logarithmiques ont un impact négatif sur le rendement présent. L'impact s'affaiblit et devient moins important quand on remonte dans le passé. En revanche, les valeurs passées des innovations exercent une influence positive sur le rendement présent. Pour la partie GARCH, seuls les coefficients  $\beta_1$  et  $\gamma_1$  sont significatifs au seuil de 5 %. Le coefficient  $\beta_1$  permet de mesurer l'impact de la volatilité passée sur la volatilité présente. Il ressort de l'estimation que la volatilité précédente a un impact positif sur la volatilité présente. Les résultats d'estimation révèlent également un coefficient  $\gamma_1$  positif et statistiquement significatif, montrant clairement comment la volatilité réagit différemment aux mauvaises nouvelles par rapport aux bonnes nouvelles. Par conséquent, lorsque de mauvaises nouvelles arrivent sur le marché et que les rendements sont négatifs, la volatilité augmente fortement.

### 5.2 Choix du meilleur modèle :

Il convient de choisir le meilleur modèle parmi les deux modèles retenus : GJRGARCH (2,1) et GARCH (4,1). Pour cela, nous faisons des prédictions de la série sur un horizon  $h=11$  et nous calculons les indicateurs pour apprécier les performances des modèles, à savoir,

- L'erreur de prédiction quadratique moyenne, (MSPE)
- L'erreur de prédiction absolue moyenne, (MAE)
- L'erreur en pourcentage absolue moyenne, (MAPE)
- La mesure de la précision (U de Theil), (PM)

À partir des calculs des quatre indicateurs, les trois MSPE, MAPE et PM révèlent que le modèle GJRGARCH (2,1) est le meilleur. En effet, le modèle GJRGARCH (2,1) minimise ces trois indicateurs par rapport au modèle GARCH (4,1).

**Tableau 13: : résultats des indicateurs de performances des modèles**

Indicateurs	GJRGARCH (2,1)	GARCH (4,1)
MSPE	0.0002013478	0.0002035814
MAE	0.01174174	0.01111699
MAPE	0.2096686	0.3764278
PM	1.494237	1.510812

Source: calcul CRSP US Small Cap, rstudio



## **6 Discussion**

### **6.1 Les faits saillants et la pertinence de l'étude**

Cette étude présente quelques contributions à la modélisation des séries financières. L'objectif principal de notre étude consiste à modéliser les rendements logarithmiques journaliers de l'indice financier afin d'identifier le modèle empirique le plus performant, c'est-à-dire le modèle qui parvient à capter adéquatement l'incertitude autour des petites capitalisations américaines.

### **6.2 Les contributions de la recherche**

D'après nos résultats, on contribue en démontrant la présence effective d'un sentiment de liens de causalité entre les rendements passés du marché des petites capitalisations américaines et le volume des transactions courantes. Ces résultats soulignent également qu'un tel sentiment explique la volatilité conditionnelle du rendement des petites capitalisations américaines.

Au cours de notre étude, nous avons vérifié la performance de différents modèles retenus pour modéliser le rendement relatif aux petites capitalisations. De même, après avoir approfondi la connaissance du concept de volatilité, son origine et son évolution, nous avons pu souligner l'importante progression observée dans la recherche d'un modèle adéquat de prédiction de la volatilité. Même si les récents modèles (Engle, 1982) et (Engle & Bollerslev, 1986) ont apporté une contribution importante dans l'évolution des recherches empiriques sur la prédiction du risque financier, ils ne permettent pas de tout prédire, par exemple, les phénomènes d'asymétries observés dans certaines séries financières ainsi que les anomalies et la volatilité excessive. En fait, ceci peut se faire par l'introduction des modèles, EGARCH (Exponentiel GARCH, (Nelson, 1991)), AGARCH (*Asymmetric* GARCH, (Engle, 1990)) ou en retenant le modèle TGARCH introduit par (Zakoian, 1994).

Toutefois, nous soulignons l'implication de nos résultats pour les investisseurs en portefeuille et on a contribué à l'enrichissement de la recherche sur le concept de la volatilité, ce qui permet d'aider les investisseurs dans leurs choix de portefeuille.

### **6.3 Les limites de la recherche**

À travers cette étude, et sa modeste contribution, nous pouvons souligner la difficulté de trouver les données de façon quotidienne, cela a peu affecté les résultats de notre étude, car nous nous sommes appuyés sur les données journalières de l'indice.

Sans négliger la diversité des activités des entreprises cotées dans cet indice, cette diversité affecte ses rendements et les facteurs entrant dans son calcul.

### **6.4 Pistes futures**

Par ailleurs, cette étude peut être poussée en explorant davantage de modèles pour affiner les résultats et élargir mieux notre champ d'investigations. De cet effet, nous pouvons affirmer que le choix de la méthodologie retenue dans notre travail peut impacter la qualité de nos résultats. Et nos résultats seraient meilleurs que ceux que nous avons présentés dans ce travail. Un prochain travail pourra retenir la méthode du maximum de vraisemblance à la place de se baser sur le critère d'information d'Akaike, en plus des modèles proposés.

À la suite de cette présente étude, il nous semble aussi qu'élargir le champ d'investigations par la construction d'un portefeuille d'actions actives, diversifié et variant en fonction du temps s'avère intéressant à étudier. Une analyse plus judicieuse sera intéressante en investiguant plus dans la méthodologie.

Pour les investisseurs en portefeuille, les résultats de cette étude contribuent à clarifier l'importance de s'appuyer sur les modèles prédictifs ARCH GARCH pour prédire la rentabilité de leurs portefeuilles d'investissement au futur. Ainsi, ces résultats peuvent aider à prendre la bonne décision d'investissement appropriée au bon moment, en tenant compte des résultats à jour de la prédiction afin d'avoir une utilisation très utile et efficace dans les périodes ultérieures. Par ailleurs, nous suggérons de s'appuyer sur des données de fréquence hebdomadaire ou mensuelle pour éviter les lacunes dans les données, étant donné que les entreprises ne publient pas toutes leurs données quotidiennes de façon régulière.

## 7 Conclusion

À travers notre travail, nous avons proposé des méthodes adaptées à la modélisation des rendements relatifs aux petites capitalisations.

Ces dernières sont supposées être de moins bonne qualité que les grandes capitalisations et elles sont restées moins attractives à cause du risque élevé de rendement.

En effet, le modèle GJR-GARCH (2,1) minimise les trois indicateurs de performance des modèles par rapport au modèle GARCH (4,1). Par conséquent, nous confirmons les résultats obtenus par (Brailsford & Faff, 1996) pour un horizon de prévisions mensuelles. Cependant, nous rejetons les résultats de ce dernier pour un horizon de prévisions trimestriel. En effet, le modèle GARCH (1,1) se classe au quatrième rang pour les différents horizons de prévisions analysés, avec une exception pour un horizon d'un mois. Par conséquent, l'estimation de la volatilité mensuelle par le modèle GARCH (1,1) comme intrant dans le modèle d'évaluation des options de *Black & Scholes* pourrait fournir une bonne estimation de la valeur théorique d'une option.

Les petites capitalisations ont toujours été accompagnées d'une plus grande volatilité comparativement aux grandes capitalisations. Pourtant, aujourd'hui, les marchés financiers canadiens et mondiaux sont de plus en plus volatils. C'est dans ce contexte qu'on a voulu, élargir notre champ d'investigations sur l'étude de la volatilité des petites capitalisations.

La recherche a relevé que les sociétés mondiales à petite capitalisation offrent une croissance plus rapide, une plus grande diversification et une surperformance constante comparativement aux sociétés à grande capitalisation au cours des dernières décennies.

Pour cela, modéliser les rendements relatifs aux petites capitalisations est au centre de notre intérêt.

Après avoir mené une analyse théorique sur la capitalisation boursière d'une entreprise, le rendement et le risque lié au rendement, et l'investissement dans les

petites capitalisations, il nous a paru essentiel d'affiner notre analyse par une étude empirique.

Dans ce cadre, le modèle ARMA a été utilisé pour bien confirmer l'existence effective d'une volatilité dans notre série issue de l'indice *CRSP US Small Cap*. Les critères d'informations de Akaike (1974) et Schwarz (1978) nous ont conduit au choix d'un modèle ARMA (5,4). Par la suite, on a tenté d'examiner le comportement de la volatilité de l'indice *CRSP US Small Cap* à travers trois modèles, à savoir le modèle ARCH, le modèle GARCH standard et le modèle GJR-GARCH. Pour chacun de ces trois modèles, nous estimons plusieurs versions avec différentes combinaisons de paramètres. À l'aide de l'évaluation du critère d'information BIC et le respect des diagnostics (autocorrélation, homoscedasticité), le choix des paramètres adéquats est effectué, ce qui nous a amené à retenir les modèles suivants : ARCH (6), GARCH (4,1) et GJR-GARCH (2,1). Il est ressorti que le modèle ARCH (6) ne respecte ni l'hypothèse de non-corrélation des résidus, ni l'homoscedasticité des résidus. Ce modèle n'est pas adapté à l'étude de la volatilité que nous cherchons à modéliser. Les indicateurs L'erreur de prédiction quadratique moyenne (MSPE), L'erreur de prédiction absolue moyenne (MAE), L'erreur en pourcentage absolue moyenne (MAPE) et La mesure de la précision (U de Theil) (PM) sont utilisés pour décider le choix du modèle qui capte au mieux la volatilité, et donc pour savoir quel modèle est le plus approprié pour répondre à notre question de recherche. Selon les résultats empiriques obtenus, il apparaît que le modèle GJR-GARCH (2,1) reste le meilleur en termes de prévisions à long terme.

Les résultats montrent que les cinq valeurs passées du rendement logarithmique ont un impact négatif sur le rendement présent et que la volatilité précédente a un impact positif sur la volatilité présente. En effet, un choc positif sur la volatilité passée augmentera la volatilité présente.

Les résultats d'estimation du modèle GJR-GARCH (2,1) prouvent que l'impact négatif des valeurs passées du rendement logarithmique sur le rendement présent devient de moins en moins important en remontant dans le temps. Alors que, les valeurs passées des innovations exercent une influence positive sur le rendement

présent. Les résultats ont montré clairement comment la volatilité réagit différemment aux mauvaises nouvelles par rapport aux bonnes nouvelles. Cela dit, lorsque de mauvaises nouvelles arrivent sur le marché et que les rendements sont négatifs, la volatilité augmente fortement.

## 8 Bibliographie

- Alhiane, M. (2020). Les « Small Caps » : une Revue de la Littérature. *Revue d'Etudes en Management et Finance d'Organisation*; Vol. 4, No 10 (2020).
- Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Communication présentée Annales scientifiques de l'École normale supérieure.
- Banz, R. W. (1981). The relationship between return and market value of common stocks. *Journal of financial economics*, 9(1), 3-18.
- Benoist, R. (2013). Définition de capitalisation boursière.
- Bertrand. (2016). Comment Calculer et Connaître le RENDEMENT D'UNE ACTION ? Repéré le 2021/06/10 à <https://revenusetdividendes.com/rendement-action-bourse-calcul-mesure/>
- Bhardwaj, R. K., & Brooks, L. D. (1993). Dual betas from bull and bear markets: Reversal of the size effect. *Journal of Financial research*, 16(4), 269-283.
- Black, F., & Scholes, M. (1974). The effects of dividend yield and dividend policy on common stock prices and returns. *Journal of financial economics*, 1(1), 1-22.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The review of economics and statistics*, 542-547.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y., & Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of econometrics*, 52(1-2), 5-59.
- Bollerslev, T., & Mikkelsen, H. O. (1996). Modeling and pricing long memory in stock market volatility. *Journal of econometrics*, 73(1), 151-184.
- Brailsford, T. J., & Faff, R. W. (1996). An evaluation of volatility forecasting techniques. *Journal of Banking & Finance*, 20(3), 419-438.

- Cappiello, L., Engle, R. F., & Sheppard, K. (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial econometrics*, 4(4), 537-572.
- Chan, K., & Chen, N. F. (1991). Structural and return characteristics of small and large firms. *The journal of finance*, 46(4), 1467-1484.
- Dimson, E., & Marsh, P. (1999). Murphy's law and market anomalies. *The Journal of Portfolio Management*, 25(2), 53-69.
- Droesbeke, J.-J., Fichet, B., & Tassi, P. (1994). Modélisation arch.
- Dutta, A. (2018). Modeling and forecasting the volatility of carbon emission market: The role of outliers, time-varying jumps and oil price risk. *Journal of Cleaner Production*, 172, 2773-2781.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 987-1007.
- Engle, R. F. (1990). Stock volatility and the crash of'87: Discussion. *The Review of Financial Studies*, 3(1), 103-106.
- Engle, R. F., & Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric reviews*, 5(1), 1-50.
- Engle, R. F., & Granger, C. W. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 251-276.
- Engle, R. F., Lilien, D. M., & Robins, R. P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 391-407.
- Engle, R. F., & Patton, A. J. (2007). What good is a volatility model? *Forecasting volatility in the financial markets* (pp. 47-63): Elsevier.

- Fama, E. F., & French, K. R. (2015). A five-factor asset pricing model. *Journal of financial economics*, 116(1), 1-22.
- Fama, E. F., & French, K. R. (2021). *Common risk factors in the returns on stocks and bonds*: University of Chicago Press.
- Garnier, O., & Thesmar, D. (2009). *Épargner à long terme et maîtriser les risques financiers*: La Documentation Française.
- Glaser, M., & Weber, M. (2009). Which past returns affect trading volume? *Journal of Financial Markets*, 12(1), 1-31.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5), 1779-1801.
- Group, C. (2020, octobre 26). Russell 2000 versus S&P 500 : une comparaison des performances. Repéré à <https://www.cmegroup.com/fr/education/featured-reports/equities-comparing-russell-2000-vs-sandp-500.html>
- Grubel, H. G. (1968). Internationally diversified portfolios: welfare gains and capital flows. *The American Economic Review*, 58(5), 1299-1314.
- Harry, M. (1952). The utility of wealth. *Journal of political Economy*, 60(2), 151-158.
- Horowitz, J. L., Loughran, T., & Savin, N. E. (2000). Three analyses of the firm size premium. *Journal of Empirical Finance*, 7(2), 143-153.
- Jacquillat, B., Solnik, B., & Pérignon, C. (2014). *Marchés financiers-6e éd: Gestion de portefeuille et des risques*: Dunod.
- Kazakevičius, V., & Leipus, R. (2003). A new theorem on the existence of invariant distributions with applications to ARCH processes. *Journal of Applied Probability*, 40(1), 147-162.
- Khedhiri, S., & Muhammad, N. (2008). Empirical analysis of the UAE stock market volatility.



- Kim, M. K., & Burnie, D. A. (2002). The firm size effect and the economic cycle. *Journal of Financial Research*, 25(1), 111-124.
- Kouaga, A. P. (2020). *Prédiction de la volatilité: cas de l'indice S&P/TSX*. Disponible chez ProQuest Dissertations & Theses Full Text.
- L'Her, J.-F., Sy, O., & Tnani, M. Y. (2002). Country, industry, and risk factor loadings in portfolio management. *The Journal of Portfolio Management*, 28(4), 70-79.
- Mahamat, H. S. (2017). *Estimation de la volatilité des données financières à haute fréquence: une approche par le Modèle Score-GARCH*. Disponible chez ProQuest Dissertations & Theses Full Text.
- Markowitz, H. (1952). March 1952. portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Miller, G. A., & MacKillop, S. A. (2011). Rethinking Small Caps. *Financial Advisor Magazine*.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 347-370.
- Rabemananjara, R., & Zakoian, J.-M. (1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility. *Journal of applied econometrics*, 8(1), 31-49.
- Reinganum, M. R. (1981a). Abnormal returns in small firm portfolios. *Financial Analysts Journal*, 37(2), 52-56.
- Reinganum, M. R. (1981b). Misspecification of capital asset pricing: Empirical anomalies based on earnings' yields and market values. *Journal of financial Economics*, 9(1), 19-46.
- Schwert, G. W. (2003). Anomalies and market efficiency. *Handbook of the Economics of Finance*, 1, 939-974.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3), 425-442.
- Shumway, T., & Warther, V. A. (1999). The delisting bias in CRSP's Nasdaq data and its implications for the size effect. *The journal of finance*, 54(6), 2361-2379.

- Solnik, B. H. (1974). Why not diversify internationally rather than domestically? *Financial analysts journal*, 30(4), 48-54.
- Switzer, L. N., & Fan, H. (2007). Spanning tests for replicable small-cap indexes as separate asset classes. *The Journal of Portfolio Management*, 33(4), 102-110.
- Switzer, L. N., & Tang, M. (2009). The Impact of Corporate Governance on the Performance of US Small-Cap Firms. *International Journal of Business*, 14(4).
- Yang, J. W., & Parwada, J. (2012). Predicting stock price movements: an ordered probit analysis on the Australian Securities Exchange. *Quantitative Finance*, 12(5), 791-804.
- Zakoian, J.-M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and control*, 18(5), 931-955.