

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
KATHLEEN PLANTE

INTRODUCTION D'UNE NOUVELLE VALEUR À RISQUE
MULTIDIMENSIONNELLE INFÉRIEURE ET SUPÉRIEURE

DÉCEMBRE 2022

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire, de cette thèse ou de cet essai a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire, de sa thèse ou de son essai.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire, cette thèse ou cet essai. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire, de cette thèse et de son essai requiert son autorisation.

Résumé

La Valeur à Risque (VaR) est une mesure de risque commune utilisée, notamment, dans le domaine de la finance et de l'actuariat. Embrechts and Puccetti (2006) ont introduit une Valeur à Risque inférieure et supérieure dans un cadre univarié. Cossette et al. (2013) ont défini cette même Valeur à Risque inférieure et supérieure dans un cadre bidimensionnel. Les résultats très prometteurs de ces deux articles nous poussent à définir et étudier la Valeur à Risque inférieure et supérieure dans un cadre multidimensionnel. La motivation principale est l'amélioration de la gestion du risque compte tenu que plusieurs éléments peuvent influencer la tendance d'une courbe. En plus d'une introduction et de la définition de la VaR inférieure et supérieure multidimensionnelle, une propriété de convexité est présentée ainsi que des illustrations théoriques de la VaR inférieure et supérieure multidimensionnelle.

Avant-propos

Je tiens à remercier sincèrement toutes les personnes qui ont contribué à la rédaction de ce mémoire et à la réussite de mon parcours universitaire. Plus particulièrement, j'aimerais d'abord exprimé ma gratitude envers mon directeur de recherche M. Mhamed Mesfioui, professeur au Département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR). En plus de m'avoir proposé ce sujet passionnant, il m'a encouragé et soutenu tout au long de ma Maîtrise. Le temps qu'il a bien voulu me consacrer tout au long de la réalisation de ce travail en a assuré la réussite. J'ai grandement apprécié travailler en sa compagnie.

Je suis également reconnaissante envers mon employeur Equisoft d'avoir été flexible dans les deux dernières années afin de me permettre de terminer mes études tout en travaillant dans un domaine passionnant.

Mon travail a été financé en partie par des octrois individuels accordés à M. Mhamed Mesfioui.

Finalement, je veux remercier mes parents Nicole et Rosaire, ma soeur Marilyn et mon conjoint Jonathan pour leur soutien durant mes études. Ils ont toujours cru en moi et m'ont encouragé à persévérer.

Table des matières

Résumé	ii
Avant-propos	iii
Table des matières	iv
Lexique	vi
1 Introduction	1
2 Notions préliminaires sur les copules	4
2.1 Théorème de Sklar, définition et propriétés d'une copule	4
2.2 Mesures de dépendance	13
2.2.1 Rho de Spearman	13
2.2.2 Tau de Kendall	14
2.3 Modèles de copules	15
2.3.1 Copule FGM	15
2.3.2 Copules Archimédiennes	17
2.3.3 Copules de Clayton, Frank et Gumbel	21
3 Valeur à Risque bidimensionnelle inférieure et supérieure	23
3.1 Introduction et définition de la VaR	23
3.2 Propriétés	27
3.2.1 Propriétés analogues à la VaR univariée	27
3.2.2 Convexité	29

3.3	Illustration	30
3.3.1	Projection orthogonale	31
3.3.2	Répartition proportionnelle	31
4	Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle inférieure et supérieure	33
4.1	Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle	34
4.1.1	Définition	34
4.1.2	Propriétés résultantes	39
4.1.3	Illustration pour l'allocation	39
4.2	Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle de copule	42
4.2.1	Définition	42
4.2.2	Illustration	44
5	Nouvelle Valeur à Risque multidimensionnelle inférieure et supérieure	47
5.1	Introduction et Définition à la VaR multidimensionnelle	47
5.2	Convexité	51
5.3	Illustrations	52
5.3.1	Projection orthogonale	52
5.3.2	Répartition proportionnelle	53
6	Conclusion	54
	Bibliographie	56

Lexique

CCTE Valeur à Risque conditionnelle de copule

cor Corrélation

CTE Valeur à Risque conditionnelle

E Espérance

ES Déficit attendu

FGM Farlie-Gumbel-Morgenstern

Inf Infimum

max Maximum

min Minimum

Ran Rang

supp Support

sup Supremum

TVaR Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle inférieure et supérieure

VaR Valeur à Risque

var Variance

Chapitre 1

Introduction

Depuis quelques années, le milieu de la recherche porte une attention particulière à l'amélioration des mesures de risque et notamment à leur extension à un cadre multidimensionnel. Les investisseurs et différents acteurs dans le milieu financiers et de l'assurance s'intéressent beaucoup à ces mesures de risques. Les buts premiers étant la minimisation du risque et la maximisation des gains en capitale. Dans un monde d'incertitude, ces mesures peuvent être utilisées afin de contrôler la probabilité dans le but d'atteindre des objectifs donnés. Que ce soit pour l'élaboration de stratégies d'investissement ou pour l'estimation des risques encourus, une mesure importante par sa facilité d'interprétation est la Valeur à Risque (VaR).

En pratique, il faut remonter à 1993 pour voir la Valeur à Risque (VaR) en tant que mesure de risque de marché naître et s'établir comme norme dans tout l'industrie. À cette époque, le G-30 a publié un rapport fondateur traitant pour la première fois des produits dits hors bilan comme des produits dérivés. À peu près au même moment, le secteur bancaire comprend la nécessité d'une gestion appropriée des risques de ces nouveaux produits. Dans ce monde très dynamique, le besoin d'une évaluation instantanée des positions de trading est devenu une nécessité. En 1996, l'amendement

de Bâle I prescrivait un modèle standardisé pour le risque de marché, mais permettait en même temps aux grandes banques d'opter pour un modèle interne basé sur la VaR. À partir de 2001, des réflexions sur un deuxième accord sont menées par les banques qui exigent des règles plus spécifiques au risque de crédit. Bâle II est adopté en 2004 et introduit vers la fin de 2006. Suite à la crise financière de 2008, un amendement aux accords de Bâle II est mis en place en 2009. Celui-ci prévoit une meilleure prise en compte des risques et préconisent le recours à une VaR dite stressée en plus de la VaR classique. Ainsi Bâle III voit le jour en 2010 [8]. De nos jours, de nombreuses études et discussions continuent d'avoir lieu afin d'améliorer continuellement le concept de mesure de risque. Notamment, la *Fundamental Review of the Trading Book (FRTB)* suggère de remplacer la VaR par le déficit attendu (Expected Shortfall (ES)) [2].

Dans la littérature, cette mesure de risque est bien comprise et se mérite un certain intérêt depuis plusieurs années. Afin de mieux comprendre la VaR univariée, le lecteur est référé à McNeil et al. (2005). Embrechts et Puccetti (2006) ont introduit une Valeur à Risque inférieure et supérieure associée à une perte. Cossette et al. (2013) ont reformulé cette Valeur à Risque inférieure et supérieure dans un cadre bidimensionnel. Cossette et al. (2016) ont ensuite présenté une nouvelle mesure, la Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle (TVaR) basé sur le premier article de 2013. Brahim et al. (2018) ont aussi proposé une Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle alternative basée sur les copules (CCTE).

Ce mémoire est structuré de la façon suivante. Au Chapitre 2, nous ferons une introduction à la théorie des copules. Nous présenterons des mesures de dépendance et quelques exemples de copules. Au Chapitre 3, nous présenterons la Valeur à Risque bidimensionnelle inférieure et supérieure introduite par Cossette et al. (2013). Celle-ci représente la base sur laquelle nous nous appuierons afin de construire la Valeur à Risque multidimensionnelle inférieure et supérieure qui sera présenté au Chapitre 5. Avant, au Chapitre 4, nous présenterons deux différentes Valeurs à Risque bidimensionnelles conditionnelles. La première introduite par Cossette et al. (2016) et la

seconde par Brahim et al. (2018). Le Chapitre 5, représente l'apport principal de ce mémoire. Il présente une nouvelle Valeur à Risque multidimensionnelle inférieure et supérieure. Nous présenterons certaines propriétés découlant de la VaR bidimensionnelle et présenterons quelques illustrations au passage.

Chapitre 2

Notions préliminaires sur les copules

Dans ce chapitre, nous présenterons une introduction à la théorie des copules. À la section 2.1, quelques résultats de la théorie des copules ainsi que certaines propriétés seront présentées. Ensuite, à la section 2.2, certaines mesures de dépendance seront définies. Pour terminer ce chapitre, la section 2.3 présentera quelques exemples de copules. La plupart des résultats présentés dans ce chapitre sont tirés de Nelsen (2006) ainsi que des notes de cours de Quessy (2019) et Mesfioui (2021).

2.1 Théorème de Sklar, définition et propriétés d'une copule

Le théorème obtenu par Sklar (1959) est considéré comme le point de départ de l'étude des copules. Il est d'une grande importance dans la modélisation impliquant deux variables puisqu'il permet d'identifier et analyser la structure de dépendance

d'un couple de variables aléatoires (X, Y) sans tenir compte des effets des distributions marginales.

Théorème 2.1. *Soit H une fonction de répartition bivariée avec les marges $F(x) = H(x, \infty)$ et $G(y) = H(\infty, y)$. Alors, il existe une fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$,*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Si F et G sont continues, alors C est unique et elle se nomme la copule de H .

Le théorème ci-dessous montre que la copule peut-être vue comme la fonction de répartition d'une paire aléatoire dont les marginales sont uniformément distribuées.

Théorème 2.2. *La copule C d'une paire aléatoire (X, Y) continue est la fonction de répartition de la paire aléatoire (U, V) définie par :*

$$U = F(X) \sim \mathcal{U}_{[0,1]}, \quad V = G(Y) \sim \mathcal{U}_{[0,1]}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P(F(X) \leq u, G(Y) \leq v) &= P(X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(v)) \\ &= H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \\ &= C(F \circ F^{-1}(u), G \circ G^{-1}(v)) \\ &= C(u, v). \end{aligned}$$

□

La copule peut se définir comme un outil mathématique important en statistique et

donc le théorème 2.2 mène à la définition suivante :

Définition 2.1. Une fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ est une copule si et seulement si il existe des variables aléatoires :

$$U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}, V \sim \mathcal{U}_{[0,1]},$$

tel que

$$C(u, v) = P[U \leq u, V \leq v],$$

pour tout $u, v \in [0, 1]$.

En d'autres termes, C est une copule bivariée si elle satisfait aux conditions :

1. $C(u, 0) = C(0, v) = 0$.
2. $C(u, 1) = C(1, u) = u$ pour tout $u \in [0, 1]$.
3. $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$ pour tout $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$.

Copule d'indépendance.

Un exemple commun de copule est la copule associée à l'indépendance entre deux variables aléatoires. La copule caractérisant l'indépendance bivariée est définie comme :

Exemple 2.1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Ainsi, on a :

$$H(x, y) = F(x)G(y),$$

avec $u = F(x)$ et $v = G(y)$ et en utilisant le théorème de Sklar, on voit que la copule C est donnée par :

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) = uv.$$

Par conséquent, la copule d'indépendance est donnée par :

$$\Pi(u, v) = uv, \quad \forall (u, v) \in [0, 1]^2.$$

Bornes de Fréchet-Hoeffding.

Une autre application de la théorie des copules est le résultat obtenu indépendamment par Hoeffding (1940) et Fréchet (1951) concernant les meilleures bornes possible pour les fonctions de dépendance. Les bornes de Fréchet-Hoeffding permettent de définir un intervalle à l'intérieur duquel toutes les copules sont incluses.

Théorème 2.3. *Pour toute copule C et $u, v \in [0, 1]$. On a que*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v),$$

où $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ est la borne inférieure et $M(u, v) = \min(u, v)$ est la borne supérieure. De plus, W et M sont elles-mêmes des copules

Preuve. Soient A et B deux événements dans un espace de probabilité \mathbb{P} . On a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}.$$

Par les lois de **De Morgan**, on a aussi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A \cap B) &= 1 - \mathbb{P}(A^C \cup B^C) \\
 &= 1 - \{\mathbb{P}(A^C) + \mathbb{P}(B^C) - \mathbb{P}(A^C \cap B^C)\} \\
 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 + \mathbb{P}(A^C \cap B^C) \\
 &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1.
 \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \max\{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0\}.$$

On obtient donc :

$$\max\{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1, 0\} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}.$$

Supposons maintenant (X, Y) de loi H et de marges F et G . Soient $A = \{X \leq x\}$ et $B = \{Y \leq y\}$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = H(x, y), \mathbb{P}(A) = F(x) \text{ et } \mathbb{P}(B) = G(y).$$

Les inégalités deviennent ainsi :

$$\max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \leq H(x, y) \leq \min\{F(x), G(y)\}.$$

Les inégalités précédentes sont valides pour toutes fonctions de répartition bivariées. Supposant que les marges sont continues, H possède alors une unique copule C . Si l'on pose $u = F(x)$ et $v = G(y)$ et en utilisant le Théorème de Sklar, on obtient le résultat escompté soit :

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v).$$

□

Propriété d'invariance.

Une propriété importante des copules est que celle-ci est invariante sous des transformations monotones. D'abord dans le cas où les fonctions de transformation f et g sont monotones croissantes, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soient X et Y deux variables aléatoires continues avec une copule C_{XY} . Si f et g sont strictement croissantes sur $\text{Ran}X$ et $\text{Ran}Y$, alors les vecteurs (X, Y) et $(f(X), g(Y))$ possèdent la même copule, c'est-à-dire*

$$C_{XY} = C_{f(X), g(Y)}.$$

Ainsi la copule est invariante sous des transformations monotones croissantes.

Preuve. *Soient F_1, G_1 les fonctions de répartition de X et Y . Soient aussi F_2 et G_2 les fonctions de répartition de $f(X)$ et $g(Y)$. Puisque f et g sont strictement croissantes, on a :*

$$F_2(x) = F_1(f^{-1}(x)),$$

et

$$G_2(x) = G_1(g^{-1}(x)).$$

Si H_2 est la fonction de répartition conjointe de $(f(X), g(Y))$, alors

$$\begin{aligned}
 H_2(x, y) &= P(f(X) \leq x, g(Y) \leq y) \\
 &= P(X \leq f^{-1}(x), Y \leq g^{-1}(y)) \\
 &= C_{XY}(F_1(f^{-1}(x)), G_1(g^{-1}(y))) \text{ Par le théorème de Sklar} \\
 &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)).
 \end{aligned}$$

Donc, C_{XY} est aussi la copule de $(f(X), g(Y))$, ce qui prouve que (X, Y) et $(f(X), g(Y))$ ont la même copule.

□

Le résultat ne tient plus si l'une ou l'autre des fonctions de transformation est monotone décroissante. Dans ce cas, la copule de $f(X)$ et $g(Y)$ sera une transformation de la copule C_{XY} .

Théorème 2.5. Soient X et Y deux variables aléatoires continues avec une copule C_{XY} . Si f et g sont strictement monotones sur $\text{Ran}X$ et $\text{Ran}Y$, alors

1. Si f est monotone croissante et g est monotone décroissante, alors

$$C_{f(X)g(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

2. Si f est monotone décroissante et g est monotone croissante, alors

$$C_{f(X)g(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

Preuve. Soient F_1, G_1 les fonctions de répartition de X et Y . Soient aussi F_2 et G_2 les fonctions de répartition de $f(X)$ et $g(Y)$. Puisque f est monotone croissante et g

est monotone décroissante, on a :

$$F_2(x) = F_1(f^{-1}(x)),$$

et

$$G_2(x) = 1 - G_1(g^{-1}(x)).$$

Soient H_1 et H_2 les fonctions de répartition conjointes de (X, Y) et $(f(X), g(Y))$ respectivement. Le théorème de Sklar implique :

$$\begin{aligned} C_{f(X),g(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= H_2(x, y) \\ &= P(f(X) \leq x, g(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq f^{-1}(x), Y \geq g^{-1}(y)) \\ &= P(X \leq f^{-1}(x)) - P(X \leq f^{-1}(x), Y \leq g^{-1}(y)) \\ &= F_2(x) - C_{XY}((F_1(f^{-1}(x)), G_1(g^{-1}(y)))) \\ &= F_2(x) - C_{XY}(F_2(x), 1 - G_2(y)). \end{aligned}$$

En posant $u = F_2(x)$ et $v = G_2(y)$, on obtient :

$$C_{f(X)g(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

De la même façon, le résultat mentionné au point 2. peut-être prouvé en supposant que f est monotone décroissante et g est monotone croissante.

□

Maintenant lorsque f et g sont monotones décroissantes le résultat sera la version survie du Théorème de Sklar.

Théorème 2.6. *Soient X et Y deux variables aléatoires continues avec une copule C_{XY} . Si f et g sont strictement monotones décroissantes sur $\text{Ran}X$ et $\text{Ran}Y$, alors*

$$C_{f(X)g(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Preuve. *Soient F_1, G_1 les fonctions de répartition de X et Y . Soient aussi F_2 et G_2 les fonctions de répartition de $f(X)$ et $g(Y)$. Puisque f et g sont monotones décroissantes, on a :*

$$F_2(x) = 1 - F_1(f^{-1}(x)),$$

et

$$G_2(y) = 1 - G_1(g^{-1}(y)).$$

Soient H_1 et H_2 les fonctions de répartition conjointe de (X, Y) et $(f(X), g(Y))$ respectivement. Le théorème de Sklar implique :

$$\begin{aligned} C_{f(X),g(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= H_2(x, y) \\ &= P(f(X) \leq x, g(Y) \leq y) \\ &= P(X \geq f^{-1}(x), Y \geq g^{-1}(y)) \\ &= 1 - P(X \leq f^{-1}(x)) - P(Y \leq g^{-1}(y)) + P(X \leq f^{-1}(x), Y \leq g^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_1(x) - G_1(y) + C_{XY}((F_1(f^{-1}(x)), G_1(g^{-1}(y)))) \\ &= F_2(x) + G_2(y) - 1 + C_{XY}(1 - F_2(x), 1 - G_2(y)). \end{aligned}$$

En posant $u = F_2(x)$ et $v = G_2(y)$, on obtient :

$$C_{f(X)g(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

*La copule obtenue s'appelle la copule de survie de C et elle est noté C^**

□

2.2 Mesures de dépendance

On peut mesurer la force du lien entre deux variables aléatoires X et Y en calculant leur corrélation. En effet, on définit la moyenne et la variance de X et Y par :

$$\mu_X = E(X) \text{ et } \sigma_X^2 = \text{var}(X),$$

et

$$\mu_Y = E(Y) \text{ et } \sigma_Y^2 = \text{var}(Y),$$

respectivement. On obtient que le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est défini par :

$$\rho_{(X,Y)}^{Pe} = \frac{E(XY) - \mu_X \mu_Y}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Un cas particulier est que $\rho_{(X,Y)}^{Pe} = 0$ quand X et Y sont indépendantes. Cependant l'inverse n'est pas toujours vrai. En effet, il y a des exceptions qui font en sorte que $\rho_{(X,Y)}^{Pe} = 0$ même si X et Y sont dépendantes. Il est aussi prouvé que $\rho_{(X,Y)}^{Pe}$ n'est pas invariante sous des transformations de marges. Ainsi, il est justifié de s'intéresser à des mesures de dépendance alternatives.

2.2.1 Rho de Spearman

Le Rho de Spearman permet d'évaluer la force de dépendance entre deux variables aléatoires en mesurant la corrélation entre les variables uniformisées $U = F(X)$ et $V = G(Y)$. Ainsi,

$$\rho^{Sp} = \text{cor}\{F(X), G(Y)\} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{var}(U)\text{var}(V)}},$$

où $(U, V) \sim C$, on peut en déduire que le rho de Spearman d'un couple (X, Y) dépend seulement de sa copule et pas de ses marges. Comme $U = F(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$ et $V = G(Y) \sim \mathcal{U}(0, 1)$, on a :

$$E(U) = E(V) = \frac{1}{2},$$

et

$$Var(U) = Var(V) = \frac{1}{12},$$

et donc,

$$\begin{aligned} \rho^{Sp} &= \frac{E(UV) - (1/2)^2}{\sqrt{(1/12)^2}} \\ &= 12E(UV) - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3. \end{aligned}$$

On peut interpréter cette mesure comme la distance moyenne entre la Copule C et la copule d'indépendance.

2.2.2 Tau de Kendall

Les notions de concordance et de discordance sont une autre façon d'étudier la dépendance. Considérons deux couples indépendants $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \sim H$ de marges F et G . On dit que ces deux couples sont concordants si $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0$. Au contraire si $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0$, on dit qu'ils sont discordants. Le Tau de Kendall est donné par la différence entre les probabilités de concordance et de discordance. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \tau_H &= \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \\ &= 2\mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - 1. \end{aligned}$$

En supposant maintenant que les marges de H sont F et G , on a :

$$\begin{aligned}
 \tau_H &= 2\mathbb{P}((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - 1 \\
 &= 2(\mathbb{P}(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) + \mathbb{P}(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1)) - 1 \\
 &= 2(\mathbb{P}(F(X_1) < F(X_2), G(Y_1) < G(Y_2)) + \mathbb{P}(F(X_2) < F(X_1), G(Y_2) < G(Y_1))) - 1 \\
 &= 2(\mathbb{P}(U_1 < U_2, V_1 < V_2) + \mathbb{P}(U_2 < U_1, V_2 < V_1)) - 1 \\
 &= 4\mathbb{P}(U_1 < U_2, V_1 < V_2) - 1.
 \end{aligned}$$

Comme $(U_1, V_1), (U_2, V_2) \sim C$, alors le Tau de Kendall dépend seulement de sa copule et donc

$$\begin{aligned}
 \tau_C &= 4\mathbb{P}(U_1 < U_2, V_1 < V_2) - 1 \\
 &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1.
 \end{aligned}$$

2.3 Modèles de copules

2.3.1 Copule FGM

Un modèle classique de copule bien connu est celui associé aux lois de Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM).

Définition 2.2. Soient deux fonctions de répartition F et G et leurs survies :

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) \text{ et } \bar{G}(y) = \mathbb{P}(Y > y) = 1 - G(y).$$

Ainsi, les lois bivariées FGM sont définies pour $\theta \in [-1, 1]$ par :

$$H_{\theta}^{FGM}(x, y) = F(x)G(y) + \theta F(x)\bar{F}(x)G(y)\bar{G}(y).$$

Comme les marges de H sont F et G , on en déduit que la copule FGM est

$$C_{\theta}^{FGM}(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v).$$

De cette définition, il est facile de trouver la densité associé

$$\begin{aligned} c_{\theta}^{FGM}(u, v) &= dC_{\theta}^{FGM}(u, v) \\ &= 1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v). \end{aligned}$$

On obtient ensuite le Rho de Spearman et le Tau de Kendall par quelques calculs. En effet,

$$\begin{aligned} \rho_{C_{\theta}^{FGM}}^{Sp} &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv + \theta uv(1 - u)(1 - v) dudv - 3 \\ &= \frac{\theta}{3}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tau_{C_{\theta}^{FGM}}^{Sp} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv + \theta uv(1-u)(1-v) dC(u, v) - 3 \\
&= 4 \left(\frac{\theta}{18} + \frac{1}{4} \right) - 1 \\
&= \frac{2\theta}{9}.
\end{aligned}$$

2.3.2 Copules Archimédiennes

Les copules Archimédiennes ont été introduite par Genest et Mackay (1986). Il s'agit d'une classe importante souvent utilisée en pratique puisqu'elle possède de nombreuses propriétés intéressantes.

Définition 2.3. *Une copule est Archimédienne si elle s'écrit sous la forme*

$$C_{\phi}(u, v) = \phi^{-1}\{\phi(u) + \phi(v)\}, \quad u, v \in [0, 1],$$

où ϕ est une fonction continue, convexe et strictement décroissante définie sur $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ tel que $\phi(1) = 0$. Cette dernière est appelée *générateur* de la copule C_{ϕ} . La fonction ϕ^{-1} représente l'inverse de ϕ .

Propriété 2.1. *Le générateur d'une copule Archimédienne est unique à une constante positive multiplicative près. Soit ϕ est un générateur Archimédien de la copule C , alors pour tout $K > 0$, $\bar{\phi}(t) = K\phi(t)$ est aussi un générateur de C . En effet, on voit que*

$\bar{\phi}^{-1}(u) = \phi^{-1}\left(\frac{u}{K}\right)$ et donc,

$$\begin{aligned} C_{\bar{\phi}}(u, v) &= \bar{\phi}^{-1}\{\bar{\phi}(u) + \bar{\phi}(v)\} \\ &= \bar{\phi}^{-1}\{K(\phi(u) + \phi(v))\} \\ &= \phi^{-1}\{\phi(u) + \phi(v)\} \\ &= C_{\phi}(u, v). \end{aligned}$$

Propriété 2.2. *La couple Archimédienne possède la propriété de symétrie. Soit C_{ϕ} une copule Archimédienne avec un générateur ϕ , alors $C_{\phi}(u, v) = C_{\phi}(v, u)$ pour tout $(u, v) \in [0, 1]$. En effet,*

$$\begin{aligned} C_{\phi}(u, v) &= \phi^{-1}\{\phi(u) + \phi(v)\} \\ &= \phi^{-1}\{\phi(v) + \phi(u)\} \\ &= C_{\phi}(v, u). \end{aligned}$$

Propriété 2.3. *La couple Archimédienne est associative. Soit C_{ϕ} une copule Archimédienne avec un générateur ϕ , alors pour tout $(u, v, w) \in [0, 1]$ on a :*

$$C_{\phi}\{u, C_{\phi}(v, w)\} = C_{\phi}\{C_{\phi}(u, v), w\}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} C_{\phi}\{u, C_{\phi}(v, w)\} &= \phi^{-1}[\phi(u) + \phi\{\phi^{-1}\{\phi(v) + \phi(w)\}\}] \\ &= \phi^{-1}\{\phi(v) + \phi(u) + \phi(w)\}, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} C_\phi\{C_\phi(u, v), w\} &= \phi^{-1}[\phi\{\phi^{-1}\{\phi(u) + \phi(v)\}\} + \phi(w)] \\ &= \phi^{-1}\{\phi(v) + \phi(u) + \phi(w)\}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons le résultat attendu à savoir,

$$C_\phi\{u, C_\phi(v, w)\} = C_\phi\{C_\phi(u, v), w\}.$$

Il est possible de déterminer le générateur d'une copule Archimédienne à partir de celle-ci. La proposition suivante nous donne la procédure à suivre afin d'obtenir le générateur d'une copule.

Proposition 2.4. *Soit C une copule Archimédienne avec un générateur ϕ . Le rapport des dérivées partielles est donné par :*

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u} C(u, v)}{\frac{\partial}{\partial v} C(u, v)} = \frac{\phi'(u)}{\phi'(v)}.$$

Preuve. *Comme C est une copule Archimédienne avec un générateur ϕ , on a que pour tout $u, v \in [0, 1]$, $C_\phi(u, v) = \phi^{-1}\{\phi(u) + \phi(v)\}$. Alors,*

$$\phi[C_\phi(u, v)] = \phi(u) + \phi(v),$$

ce qui amène

$$\begin{aligned}\phi'[C_\phi(u, v)] \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) &= \phi'(u) \\ \phi'[C_\phi(u, v)] \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) &= \phi'(v),\end{aligned}$$

et donc,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u} C(u, v)}{\frac{\partial}{\partial v} C(u, v)} = \frac{\phi'(u)}{\phi'(v)}.$$

□

À partir de cette proposition, on peut maintenant trouver le générateur d'une copule Archimédienne quelconque. L'exemple suivant permettra d'illustrer ce processus en utilisant la copule d'indépendance décrite précédemment.

Exemple 2.2. Soit $\Pi(u, v) = uv$ la couple d'indépendance. On a :

$$\frac{\partial \Pi(u, v)}{\partial u} = v \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Pi(u, v)}{\partial v} = u,$$

et donc afin de déterminer le générateur de $\Pi(u, v)$ il faut résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\phi'(u)}{\phi'(v)} = \frac{v}{u}.$$

Pour une certaine constante K_1 , on a ainsi $\phi'(u) = \frac{K_1}{u}$. En intégrant, on obtient

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \int \frac{K_1}{u} \\ &= K_1 \ln u + K_2,\end{aligned}$$

où K_2 est aussi une constante. Comme $\phi(1) = 0$ et que $\phi'(u) \leq 0$ pour s'assurer que

ϕ est décroissante, on obtient

$$\phi(t) = -K \ln t,$$

où $K > 0$. En utilisant la propriété d'unicité à une constante près du générateur Archimédien, on obtient finalement

$$\phi(t) = -\ln t.$$

Le Tau de Kendall d'une copule Archimédienne s'exprime en fonction de son générateur ϕ . En effet, celui-ci est donné par :

$$\tau_{C_\phi} = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt.$$

2.3.3 Copules de Clayton, Frank et Gumbel

Présentons maintenant trois familles de copule qui découlent de la famille des copules Archimédiennes.

Copule de Clayton

Les copules de la famille de Clayton sont de la forme

$$C_\theta^{Cl}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}},$$

où θ est un paramètre de dépendance tel que $\theta > -1$. Le générateur de cette famille est donné par :

$$\phi_{\theta}(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta},$$

avec $\theta \geq -1$. Sachant que $\phi'(t) = -t^{-(\theta+1)}$ et en utilisant la formule du Tau de Kendall pour les copules Archimédiennes, on obtient

$$\tau_{C_{\theta}^{Cl}} = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

Copule de Frank

Les copules de la famille de Frank sont de la forme

$$C_{\theta}^{Fr}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 - \frac{(1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{1 - e^{-\theta}} \right),$$

où θ est un paramètre de dépendance tel que $\theta \in]-\infty, \infty[$. Le générateur de cette famille est défini par :

$$\phi_{\theta}(t) = -\ln \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta t}} \right).$$

Copule de Gumbel

Les copules de la famille de Gumbel sont de la forme

$$C_{\theta}^{Gu}(u, v) = \exp\left\{-\left((-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\},$$

où θ est un paramètre de dépendance tel que $\theta \in [1, \infty[$. Le générateur de cette famille est défini par :

$$\phi_{\theta}(t) = (-\ln t)^{\theta}.$$

Chapitre 3

Valeur à Risque bidimensionnelle inférieure et supérieure

Dans ce chapitre, la Valeur à Risque (VaR) bidimensionnelle inférieure et supérieure sera présentée. Il s'agit d'un résumé des travaux de Cossette et al. (2013). Dans la section 3.1, une introduction à la VaR ainsi que sa définition seront discutées. Dans la section 3.2, certaines propriétés définies dans Cossette et al. (2013) seront examinées et finalement à la section 3.3 quelques applications de la VaR seront illustrées.

3.1 Introduction et définition de la VaR

La VaR est une mesure de risque importante pour des raisons réglementaires, mais aussi parce qu'elle est facile à comprendre. Dans les dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à celle-ci afin de mieux comprendre son comportement et l'améliorer. Cossette et al. (2013) a étendu le concept de la VaR au cas bidimensionnel. Ainsi, ces auteurs ont introduit et étudié en détail la VaR bidimensionnelle inférieure

et supérieure, leurs propriétés et leurs applications. Les applications pratiques de ces mesures de risques sont très prometteuses en actuariat et en gestion quantitative des risques, notamment à ce qui attrait à l'allocation des risques, à la représentation des probabilités de ruine et à la comparaison des risques.

Définition 3.1. *Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X . La VaR au niveau α , $0 < \alpha < 1$, de X est définie par :*

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Comme mentionné dans Cossette et al. (2013), certaines situations exigent que chaque composante d'un portefeuille soit fixée de telle sorte que la fonction de répartition ne dépasse pas un seuil donné, α . Notamment, on peut vouloir décrire des relations à l'aide de fonctions quantiles inverses ou allouer du capital pour chaque composante d'un portefeuille. Comme mentionné dans Jouini et al (2004), les investisseurs pourraient ne pas être en mesure d'agréer leurs risques pour des raisons de liquidité ou de coût de transactions ce qui rend l'utilisation de la VaR bidimensionnelle plus appropriée. Embrechts et Puccetti (2006) ont introduit et ont décrit la Valeur à Risque multivariée associée à une perte X . Dans un cadre bivarié, la VaR associée à une perte X est donnée par la définition suivante.

Définition 3.2. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de fonction de répartition F_X et de fonction de survie \bar{F}_X . Pour, $\alpha \in (0, 1)$, la VaR bivariée inférieure de probabilité α est définie par :*

$$\underline{VaR}_\alpha(X) = \partial\{x \in \mathbb{R}^2 : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

La VaR bivariée supérieure associée à une perte X est définie comme :

$$\overline{VaR}_\alpha(X) = \partial\{x \in \mathbb{R}^2 : \bar{F}_X(x) \leq 1 - \alpha\}.$$

Cossette et al. (2013) ont défini de manière alternative la VaR bidimensionnelle inférieure et supérieure dans le but d'étudier en profondeur son comportement.

Proposition 3.1. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$ et de fonction de survie $\bar{F}_{\mathbf{X}}$. Notons F_{x_1} et F_{x_2} les fonctions de répartition marginales de \mathbf{X} . Pour x_1 fixé, définissons les fonctions $x_2 \mapsto F_{x_1}(x_2) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ et $x_2 \mapsto \bar{F}_{x_1}(x_2) = \bar{F}_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$. Soit $F_{x_1}^{-1}(\alpha)$ et $\bar{F}_{x_1}^{-1}(\alpha)$ les fonctions inverses généralisées correspondantes données par :*

$$F_{x_1}^{-1}(\alpha) = \inf\{t \in \mathbb{R} : F_{x_1}(t) \geq \alpha\},$$

$$\bar{F}_{x_1}^{-1}(\alpha) = \inf\{t \in \mathbb{R} : \bar{F}_{x_1}(t) \leq \alpha\}.$$

Notons que les inégalités $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \geq \alpha$ et $\bar{F}_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \leq 1 - \alpha$ sont équivalentes à $x_2 \geq F_{x_1}^{-1}(\alpha)$ et $x_2 \leq \bar{F}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha)$ respectivement. De plus, si $F_{\mathbf{X}}$ est continue, nous avons, pour tout $x_1 \geq VaR_{\alpha}(X_1)$,

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, F_{x_1}^{-1}(\alpha)) = \alpha, \quad \bar{F}_{\mathbf{X}}(x_1, \bar{F}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha)) = 1 - \alpha.$$

Dans la suite, nous allons adopter les notations suivantes,

$$F_{x_1}^{-1}(\alpha) = \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}), \quad \bar{F}_{x_1}^{-1}(1 - \alpha) = \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}).$$

Une caractérisation pratique des bornes décrites à la définition 3.2 est proposée comme suit.

Proposition 3.2. *Soient les fonctions $x_1 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$, $x_1 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ et $x_2 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X})$, $x_2 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X})$, alors*

$$\underline{VaR}_{\alpha}(\mathbf{X}) = \{(x_1, \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})), x_1 \geq VaR_{\alpha}(X_1)\},$$

$$\overline{VaR}_{\alpha}(\mathbf{X}) = \{(x_1, \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})), x_1 \leq VaR_{\alpha}(X_1)\},$$

et

$$\underline{VaR}_\alpha(\mathbf{X}) = \{(x_2, \underline{VaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X})), x_2 \geq VaR_\alpha(X_2)\},$$

$$\overline{VaR}_\alpha(\mathbf{X}) = \{(x_2, \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})), x_2 \leq VaR_\alpha(X_2)\}.$$

Nous pouvons maintenant étudier le comportement des courbes $x_1 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$, $x_1 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ de niveau α . Pour ce faire, dénotons les supports de X_1 et X_2 par $\text{supp}(X_1)$ et $\text{supp}(X_2)$. Soient l_{X_1} et u_{X_1} le supremum et l'infimum de X_1 définis par $l_{X_1} = \inf\{x : x \in \text{supp}(X_1)\}$ et $u_{X_1} = \sup\{x : x \in \text{supp}(X_1)\}$. De la même façon, on définit l_{X_2} et u_{X_2} pour X_2 .

Proposition 3.3. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ une paire de variables aléatoires de fonction de répartition et soient F_{X_1} et F_{X_2} les fonctions de répartition marginales respectives de X_1 et X_2 . Alors, les fonctions $x_1 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ et $x_1 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ sont décroissantes et si $F_{\mathbf{X}}$ est strictement croissante, alors*

1. $\lim_{x_1 \rightarrow u_{x_1}} \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = VaR_\alpha(X_2)$;
2. $\lim_{x_1 \rightarrow VaR_\alpha(X_1)} \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = u_{X_2}$;
3. $\lim_{x_1 \rightarrow l_{x_1}} \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = VaR_\alpha(X_2)$;
4. $\lim_{x_1 \rightarrow VaR_\alpha(X_1)} \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = l_{X_2}$.

Preuve. *Puisqu'on suppose $F_{\mathbf{X}}$ continue alors, on a*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(X)) = \alpha, \quad \text{et} \quad \overline{F}_{\mathbf{X}}(x_1, \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(X)) = 1 - \alpha.$$

Comme $F_{\mathbf{X}}$ est une fonction croissante et $\overline{F}_{\mathbf{X}}$ est une fonction décroissante, alors on a nécessairement que $x_1 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ et $x_1 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ sont des fonctions décroissantes de x_1 . De plus, puisque $F_{\mathbf{X}}$ est continue, alors

$$\lim_{x_1 \rightarrow u_{x_1}} \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = F_{X_2}^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(X_2).$$

Aussi comme F_X est aussi strictement croissante, alors

$$\lim_{x_1 \rightarrow \text{VaR}_\alpha(X_1)} \text{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = u_{X_2}.$$

Par conséquent (1) et (2) sont prouvés. (3) et (4) s'obtiennent similairement.

3.2 Propriétés

3.2.1 Propriétés analogues à la VaR univariée

Dans cette section, les propriétés analogues entre la VaR inférieure et supérieure bivariée et la VaR univariée seront présentées. La proposition suivante stipule que la transformation du couple bivarié, pour une fonction croissante, modifie la courbe par la même transformation. De façon analogue, des résultats similaires sont démontrés si la fonction est décroissante.

Proposition 3.4. *Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire continu et*

$$\phi(X) = (\phi_1(X_1), \phi(X_2)),$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions réelles définies sur les supports de X_1 et X_2 .

1. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont croissantes, alors pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, on a :

$$\text{VaR}_{\alpha, \phi_j(x_j)}(\phi(\mathbf{X})) = \phi_i(\text{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})),$$

et

$$\overline{\text{VaR}}_{\alpha, \phi_j(x_j)}(\phi(\mathbf{X})) = \phi_i(\overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})).$$

2. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont décroissantes, alors pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, on a :

$$\underline{VaR}_{\alpha, \phi_j(x_j)}(\phi(\mathbf{X})) = \phi_i(\underline{VaR}_{1-\alpha, x_j}(\mathbf{X})),$$

et

$$\overline{VaR}_{\alpha, \phi_j(x_j)}(\phi(\mathbf{X})) = \phi_i(\overline{VaR}_{1-\alpha, x_j}(\mathbf{X})).$$

Le corollaire suivant est un cas spécial de la Proposition 3.4. Il assure l'invariance de ces mesures de risque par translation.

Corollaire 3.1. *Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, nous avons,*

$$\underline{VaR}_{\alpha, c_j+x_j}(c+X) = \underline{VaR}_{\alpha, x_j}(X) + c_i,$$

$$\overline{VaR}_{\alpha, c_j+x_j}(c+X) = \overline{VaR}_{\alpha, x_j}(X) + c_i.$$

Le corollaire suivant qui découle aussi de la Proposition 3.4 donne les conditions sous lesquelles la VaR est homogènement invariante.

Corollaire 3.2. *Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ avec $i, j = 1, 2$ et $i \neq j$ alors :*

$$\underline{VaR}_{\alpha, c_j, x_j}(cX) = c_i \underline{VaR}_{\alpha, x_j}(X),$$

$$\overline{VaR}_{\alpha, c_j, x_j}(cX) = c_i \overline{VaR}_{\alpha, x_j}(X).$$

Le corollaire 3.3 résulte d'une application de la Proposition 3.1 pour une transformation négative du couple bivarié.

Corollaire 3.3. *Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$ avec $i, j = 1, 2$ et $i \neq j$ alors :*

$$\underline{VaR}_{\alpha, c_j, x_j}(cX) = c_i \underline{VaR}_{1-\alpha, x_j}(X),$$

$$\overline{VaR}_{1-\alpha, c_j, x_j}(cX) = c_i \overline{VaR}_{\alpha, x_j}(X).$$

3.2.2 Convexité

Cette section portera sur la propriété de convexité de la VaR bidimensionnelle inférieure et supérieure. La convexité de la fonction de répartition de $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est importante puisqu'elle a un impact sur la forme de la Valeur à risque, ce qui aura aussi pour effet d'affecter les ensembles d'allocation. La proposition suivante pose les conditions suffisantes afin de s'assurer de la convexité et de la concavité des courbes $x_1 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ et $x_1 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ à un niveau α .

Proposition 3.5. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire dont les fonctions de répartition et de survie sont notées respectivement $F_{\mathbf{X}}$ et $\overline{F}_{\mathbf{X}}$. Alors,*

1. *Si $F_{\mathbf{X}}$ est concave (respectivement convexe), alors $x_1 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ est convexe (respectivement concave).*
2. *Si $F_{\mathbf{X}}$ est convexe (respectivement concave), alors $x_1 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ est convexe (respectivement concave).*

Cossette et al.(2013) ont proposé un critère assurant la convexité des mesures de risques précédentes et ont posé $x_1^* = F_{X_1}^{-1}(\alpha)$ et $x_2^* = F_{X_2}^{-1}(\alpha)$.

Proposition 3.6. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire dont les fonctions de répartition et de survie sont notées respectivement $F_{\mathbf{X}}$ et $\overline{F}_{\mathbf{X}}$. Notons F_{X_1} et F_{X_2} les fonctions de répartition marginales. Si $F_{\mathbf{X}}$ est différentiable deux fois, alors*

1. *Si $\frac{\partial^2 F_{\mathbf{X}}}{\partial x_i^2}(x_1, x_2) \leq 0$ pour tout $x_1 \geq x_1^*$ et $x_2 \geq x_2^*$, alors la courbe $x_1 \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ à un niveau α est convexe.*
2. *Si $\frac{\partial^2 \overline{F}_{\mathbf{X}}}{\partial x_i^2}(x_1, x_2) \leq 0$ pour tout $x_1 \leq x_1^*$ et $x_2 \leq x_2^*$, alors la courbe $x_1 \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ à un niveau α est concave.*

Les copules permettent la représentation d'une distribution multivariée en fonction de

ses fonctions de répartition marginales univariées. Ainsi, comme vu dans le chapitre 2, les copules fournissent une approche flexible dans la modélisation du comportement conjoint des variables aléatoires. En utilisant le théorème de Sklar vu à la section 2.1, il est possible d'étudier $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ et $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ en terme de copule.

Corollaire 3.3. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire avec une fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$ et F_{X_1} et F_{X_2} les fonctions de répartition marginales connectées par une copule C . En supposant que la copule C et les marges sont deux fois différentiables. Alors,*

1. *Si $\frac{\partial^2 C}{\partial u_i^2}(u_1, u_2) \leq 0$ pour tout $u_1, u_2 \in [\alpha, 1]$, $i = 1, 2$ et $F_{x_1}(x_1)$ et $F_{x_2}(x_2)$ sont concaves pour tout $x_1 \geq x_1^*$ et $x_2 \geq x_2^*$, alors la courbe $x_1 \mapsto \underline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ à un niveau α est convexe.*
2. *Si $\frac{\partial^2 C}{\partial u_i^2}(u_1, u_2) \leq 0$ pour tout $u_1, u_2 \in [0, \alpha]$ et $F_{x_1}(x_1)$ et $F_{x_2}(x_2)$ sont convexes pour tout $x_1 \leq x_1^*$ et $x_2 \leq x_2^*$, alors la courbe $x_1 \mapsto \overline{\text{VaR}}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ à un niveau α est concave.*

3.3 Illustration

Dans cette section, nous présenterons les méthodes suggérées par Cossette et al. (2013) fondées sur la VaR bidimensionnelle inférieure et supérieure, qui permettent d'obtenir des ensembles optimaux pour l'allocation de capital. Deux critères d'optimisation ont été développé pour sélectionner un ensemble bivarié de valeurs à partir de la VaR. L'objectif de cette méthode est d'attribuer une valeur à risque homogène qui pourra ensuite être utilisée pour allouer un montant à chaque fonds ou un risque à chaque portefeuille. Pour ce faire, un ensemble de valeurs doit être sélectionner à partir de la VaR bivariée sous l'hypothèse selon laquelle la VaR bivariée inférieure est convexe et la VaR bivariée supérieure est concave. Deux approches différentes, à savoir la projection orthogonale et la répartition proportionnelle, sont utilisées pour

établir des ensembles de valeurs.

3.3.1 Projection orthogonale

D'abord l'allocation par projection orthogonale consiste à trouver le point de $(x_1^*, \underline{VaR}_{\alpha, x_1^*}(\mathbf{X}))$ le plus près du couple $(VaR_\alpha(X_1), VaR_\alpha(X_2))$, ce qui vient à résoudre la minimisation suivante :

$$\min_{x_1 > F_1^{-1}(\alpha)} \{(VaR_\alpha(X_1) - x_1)^2 + (VaR_\alpha(X_2) - \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}))^2\}.$$

Pour trouver une solution et obtenir la projection orthogonale, il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$2(x_1 - VaR_\alpha(X_1)) + 2(\underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) - VaR_\alpha(X_2)) \frac{d\underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})}{dx_1} = 0,$$

et s'assurer que la seconde dérivée :

$$2 + 2(\underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) - VaR_\alpha(X_2)) \frac{d^2 \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})}{dx_1^2} + 2 \left[\frac{d\underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})}{dx_1} \right]^2,$$

est positive afin d'obtenir un minimum. On peut remarquer que la dérivé seconde est positive si $\underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ est convexe.

3.3.2 Répartition proportionnelle

La seconde approche est la répartition proportionnelle, celle-ci consiste à préserver le même ratio que la VaR univariée. C'est-à-dire considérer $(x_1^*, \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}))$ comme une solution de

$$\min_{x_1 > F_1^{-1}(\alpha)} \left(x_1 - \frac{VaR_\alpha(X_1)}{VaR_\alpha(X_2)} \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) \right)^2.$$

Encore une fois si $VaR_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})$ est convexe, le minimum est obtenu par la résolution de l'équation :

$$\frac{d}{dx_1} VaR_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = \frac{VaR_{\alpha}(X_2)}{VaR_{\alpha}(X_1)}.$$

Comme $VaR_{\alpha}(X_1) > VaR_{\alpha}(X_2)$, la proportion allouée à X_1 sera toujours plus grande avec la Répartition proportionnelle. La Projection orthogonale fournit le couple le plus près de $(VaR_{\alpha}(X_1), VaR_{\alpha}(X_2))$, résultant à une proportion inférieure qu'avec la Répartition proportionnelle. Cependant, la proportion de chaque risque n'est pas conservée dans le cas de risque agrégés.

Chapitre 4

Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle inférieure et supérieure

Ce chapitre sera consacré à la Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle. Il est basé sur les articles de Cossette et al. (2016) et de Brahim et al. (2018). Dans la première section, la définition Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle (TVaR) introduite par Cossette et al. (2016) sera donnée. Quelques propriétés résultantes ainsi que deux illustrations sur l'allocation seront présentées. Dans la seconde section, la définition de la Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle de copule (CCTE) et quelques illustrations seront présentées.

4.1 Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle

Comme nous l'avons déjà vu au chapitre précédent, les mesures de risques peuvent, entre-autre, être utilisées pour étudier des scénarios d'allocation de capital sous différents niveaux de risque et de dépendance. Dans certains cas, ignorer la dépendance des risques conduit souvent à les surestimer ou à les sous-estimer. Dans le but d'améliorer la mesure de risque, Cossette et al. (2016) ont introduit la Valeur à Risque conditionnelle noté TVaR. Celle-ci est basée sur la Valeur à Risque bidimensionnelle inférieure et supérieure (VaR) présentée au chapitre 3 et introduite par Cossette et al. (2013).

4.1.1 Définition

TVaR bidimensionnelle inférieure

Dans ce chapitre, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ désigne un vecteur aléatoire de fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$. Les fonctions de répartition de X_1 et X_2 seront respectivement notées F_{X_1} et F_{X_2} .

Définition 4.1. *La TVaR bidimensionnelle inférieure est définie par :*

$$\underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}) = ((x_1, \underline{TVaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})), (\underline{TVaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X}), x_2)),$$

où

$$\underline{TVaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[X_2 | X_2 > \underline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}), X_1 \leq x_1], \quad x_1 \geq F_{X_1}^{-1}(\alpha),$$

et

$$\underline{TVaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[X_1 | X_1 > \underline{VaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X}), X_2 \leq x_2], \quad x_2 \geq F_{X_2}^{-1}(\alpha).$$

Alors, la *TVaR* bidimensionnelle inférieure de \mathbf{X} à un niveau α est représentée par :

$$\underline{TVaR}_{\alpha}(\mathbf{X}) = \{\underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}), x_i \geq F_{X_i}^{-1}(\alpha), i = 1, 2\},$$

tel que $x_1 \geq F_{X_1}^{-1}(\alpha)$ et $x_2 \geq F_{X_2}^{-1}(\alpha)$ pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

La proposition suivante montre qu'elle peut aussi être définie en fonction des composantes de la VaR inférieure tel que décrite à la proposition 3.1.

Proposition 4.1. Pour tout $x_i \geq F_{X_i}^{-1}(\alpha)$, $i = 1, 2$, on a :

$$\underline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = \frac{1}{F_{X_i}(x_i) - \alpha} \int_{\alpha}^{F_{X_i}(x_i)} \underline{VaR}_{u, x_i}(\mathbf{X}) du, \quad i = 1, 2.$$

Preuve. Soit $\underline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})$ représentant la VaR univariée de $(X_i | X_j \leq x_j)$ à un niveau $\frac{\alpha}{F_{X_j}(x_j)}$, défini comme :

$$\underline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}) = \underline{VaR}_{\frac{\alpha}{F_{X_j}(x_j)}}(X_i | X_j \leq x_j), \quad x_j \geq F_{X_j}^{-1}(\alpha).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \underline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}[X_j | X_j > \underline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}), X_i \leq x_i] \\ &= \int_{\underline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})}^{\infty} \frac{x_j dF_{x_i}(x_j)}{1 - \frac{\alpha}{F_{X_i}(x_i)}}, \end{aligned}$$

en remplaçant $x_j = F_{x_i}^{-1}(u)$,

$$\begin{aligned} \underline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{F_{X_i}(x_i)}} \int_{\frac{\alpha}{F_{X_i}(x_i)}}^1 F_{x_i}^{-1}(u) du \\ &= \frac{1}{F_{X_i}(x_i) - \alpha} \int_{\alpha}^{F_{X_i}(x_i)} F_{x_i}^{-1}\left(\frac{u}{F_{X_i}(x_i)}\right) du \\ &= \frac{1}{F_{X_i}(x_i) - \alpha} \int_{\alpha}^{F_{X_i}(x_i)} \underline{VaR}_{u, x_i}(\mathbf{X}) du. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2. *En supposant que $F_{\mathbf{X}}$ est continue et strictement croissante, alors :*

$$\lim_{x_j \rightarrow u_{X_j}} \underline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = TVaR_{\alpha}(X_i),$$

et

$$\lim_{x_j \rightarrow F_{X_j}^{-1}(\alpha)} \underline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = u_{X_i},$$

où u_{X_i} représente le support supérieur de X_i , $i, j = 1, 2 (i \neq j)$.

Preuve. Comme vu précédemment à la **Proposition 3.3**, on a $\lim_{x_j \rightarrow u_{X_j}} \underline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = VaR_{\alpha}(X_i)$. Combiné avec avec la **Proposition 4.1** et $F_{X_j}(u_{X_j}) = 1$ on obtient la première égalité. Aussi, $\lim_{x_j \rightarrow F_{X_j}^{-1}(\alpha)} \underline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = u_{X_i}$, ainsi en intégrant cette constante sur $[\alpha, F_{X_i}(x_i)]$, on obtient la seconde égalité.

□

TVaR bidimensionnelle supérieure

Définition 4.2. La TVaR bidimensionnelle supérieure est définie par :

$$\overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}) = ((x_1, \overline{TVaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X})), (\overline{TVaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X}), x_2)),$$

où

$$\overline{TVaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[X_2 | X_2 > \overline{VaR}_{\alpha, x_1}(\mathbf{X}), X_1 \geq x_1], \quad x_1 \geq F_{X_1}^{-1}(\alpha)$$

et

$$\overline{TVaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[X_1 | X_1 > \overline{VaR}_{\alpha, x_2}(\mathbf{X}), X_2 \geq x_2], \quad x_2 \geq F_{X_2}^{-1}(\alpha).$$

Alors, la TVaR bivariée inférieure de \mathbf{X} à un niveau α est représenté par :

$$\overline{TVaR}_{\alpha}(\mathbf{X}) = \{\overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}), x_i \leq F_{X_i}^{-1}(\alpha), i = 1, 2\},$$

tel que $x_i \leq F_{X_i}^{-1}(\alpha)$, $i = 1, 2$ pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

La TVaR supérieure est un semble de deux courbes. Chaque courbe représente l'espérance d'une variable aléatoire sous X_i , si la variable aléatoire X_j liée à celle-ci est inférieure à sa VaR supérieur de niveau α . Cette mesure est particulièrement pertinente en finance et en actuariat, car elle pourrait représenter des seuils communs d'investissements ou de fond de pension. Une façon alternative de la définir est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4.3. Pour tout $x_i \leq F_{X_i}^{-1}(\alpha)$, $i = 1, 2$, on a :

$$\overline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \overline{VaR}_{u, x_i}(\mathbf{X}) du, \quad i = 1, 2.$$

Preuve. Soit les probabilités $\mathbb{P}(X_i \geq \overline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}), X_j \geq x_j) = 1 - \alpha$ et $\mathbb{P}(X_i \leq \overline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}), X_j \geq x_j) = 1 - \frac{1 - \alpha}{1 - F_{X_j}(x_j)}$, on observe que la $\overline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})$ coïncide avec

la VaR de $(X_i|X_j \geq x_j)$ à un niveau $\frac{\alpha - F_{X_j}(x_j)}{1 - F_{X_j}(x_j)}$, tel que :

$$\overline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}) = VaR_{\frac{\alpha - F_{X_j}(x_j)}{1 - F_{X_j}(x_j)}}(X_i|X_j \geq x_j), \quad x_j \leq F_{X_j}^{-1}(\alpha).$$

Soit $F_{\bar{x}_i}(x_j)$ la fonction de répartition de $(X_j|X_i \geq x_i)$, $i, j = 1, 2, i \neq j$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \overline{TVaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}[X_i|X_i > \overline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}), X_j \geq x_j] \\ &= \frac{1 - F_{X_j}(x_j)}{1 - \alpha} \int_{\overline{VaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})}^{\infty} x_i dF_{\bar{x}_j}(x_i), \quad i, j = 1, 2 (i \neq j) \end{aligned}$$

En posant, $u = F_{\bar{x}_j}(x_i)$ et $v = (1 - F_{X_j}(x_j))u + F_{X_j}(x_j)$, on a :

$$\begin{aligned} \overline{TVaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}) &= \frac{1 - F_{X_j}(x_j)}{1 - \alpha} \int_{\frac{\alpha - F_{X_j}(x_j)}{1 - F_{X_j}(x_j)}}^1 F_{\bar{x}_j}^{-1}(u) du \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 F_{\bar{x}_j}^{-1} \left(\frac{v - F_{X_j}(x_j)}{1 - F_{X_j}(x_j)} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \overline{VaR}_{v, x_j}(\mathbf{X}) dv, \quad i, j = 1, 2 (i \neq j). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.4. Supposant que $F_{\mathbf{X}}$ est continue et strictement croissante, alors :

$$\lim_{x_j \mapsto l_{X_j}} \overline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = TVaR_{\alpha}(X_i), \quad \lim_{x_j \mapsto F_{X_j}^{-1}(\alpha)} \overline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) = l_{X_i},$$

où l_{X_i} représente le support supérieur de X_i , $i, j = 1, 2 (i \neq j)$.

4.1.2 Propriétés résultantes

Dans cette section, les propriétés de la TVaR bidimensionnelle seront présentées. La $\underline{TVaR}_\alpha(\mathbf{X})$ et $\overline{TVaR}_\alpha(\mathbf{X})$ sont homogènes et invariantes sous translation.

Proposition 4.5. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire continu et aussi ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions réelles définies sur les supports de X_1 et X_2 , respectivement.*

1. (Translation) Pour tout $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$,

$$\underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X} + \mathbf{c}}(\mathbf{X} + \mathbf{c}) = \underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}) + \mathbf{c},$$

et

$$\overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X} + \mathbf{c}}(\mathbf{X} + \mathbf{c}) = \overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}) + \mathbf{c}.$$

2. (Homogénéité) Si $\mathbf{a} \geq 0$, alors

$$\underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{aX}}(\mathbf{aX}) = \mathbf{a} \underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}),$$

et

$$\overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{aX}}(\mathbf{aX}) = \mathbf{a} \overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}}(\mathbf{X}).$$

4.1.3 Illustration pour l'allocation

Comme pour la VaR bidimensionnelle vue au chapitre 3, des méthodes développées à partir de la TVaR permettent de sélectionner des couples de variable afin notamment d'optimiser l'allocation en capital. Cossette et al. (2016) ont présenté deux approches en partant de la projection orthogonale de la VaR bidimensionnelle. La première méthode consiste à trouver le couple optimal pour l'allocation de capitale à partir de la projection orthogonale de la Valeur à Risque bidimensionnelle et ensuite calculer la

TVaR. Comme vu à la section 3.3.1, afin de trouver les x_i^* , il faut résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{x_1 > F_{X_i}^{-1}(\alpha)} \{(x_i - VaR_\alpha(X_i))^2 + (\underline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) - VaR_\alpha(X_j))^2\}, \quad i, j = 1, 2 \quad (i \neq j).$$

La deuxième étape consiste à calculer les composantes de $\underline{TVaR}_\alpha(\mathbf{X})$ avec :

$$\underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}^*}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\alpha - F_{X_i}(x_i^*)} \int_\alpha^{F_{X_i}(x_i^*)} \underline{VaR}_{u, x_i^*}(X) du, \quad i = 1, 2.$$

Donc,

$$\underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}^*}(\mathbf{X}) = (\underline{TVaR}_{\alpha, x_2^*}(\mathbf{X}), \underline{TVaR}_{\alpha, x_1^*}(\mathbf{X})).$$

De la même façon, il est possible d'obtenir :

$$\overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{X}^*}(\mathbf{X}) = (\overline{TVaR}_{\alpha, x_2^*}(\mathbf{X}), \overline{TVaR}_{\alpha, x_1^*}(\mathbf{X})).$$

Les couples de la TVaR inférieure représentent les montants optimaux afin de se protéger contre les pires pertes attendues à un niveau α pour chaque valeur aléatoire. Ici, nous n'assumons pas que X_1 puisse compenser pour X_2 et ce même s'il existerait une dépendance positive ou négative entre les deux variables aléatoires. Les valeurs de la TVaR supérieure représentent les montants optimaux afin de se protéger contre les pires pertes et de conserver un niveau de survie $(1 - \alpha)$ pour X_1 et X_2 . Notons que les valeurs de la TVaR inférieure seront toujours supérieures à celles de la TVaR supérieure.

La seconde méthode est une extension de la projection orthogonale. Au lieu de considérer les courbes quantiles, on s'intéresse à la contrainte de minimisation appliquée à la TVaR bidimensionnelle inférieure et supérieure.

Définition 4.3. Soit $\mathcal{C}_{i, \alpha}$ la courbe α obtenu à partir de $\underline{TVaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{x})$ tel que

$$\mathcal{C}_{i, \alpha} = \{(x_j, \underline{TVaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})), x_j \geq F_{X_j}^{-1}(\alpha)\} \quad i, j = 1, 2, \quad (i \neq j).$$

Pour α fixé, la méthode consiste à trouver les couples $(x_j^*, \underline{TVaR}_{\alpha, x_j^*}(\mathbf{X}))$ de $\mathcal{C}_{i, \alpha}$ les plus près des couples $(VaR_\alpha(X_j), TVaR_\alpha(X_i))$ pour $i, j = 1, 2$ ($i \neq j$). Ce dernier représente les limites de la TVaR bidimensionnelle inférieure. Il suffit maintenant de choisir les x_i^* , $i = 1, 2$ qui solutionnent le problème de minimisation suivant :

$$\min_{x_i \geq F_{X_i}^{-1}(\alpha)} \{(x_i - VaR_\alpha(X_i))^2 + (\underline{TVaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) - TVaR_\alpha(X_j))^2\} \quad i, j = 1, 2, \quad (i \neq j).$$

Le couple optimal de la TVaR inférieure est donné par :

$$\underline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{x}^*}(\mathbf{X}) = (\underline{TVaR}_{\alpha, x_2^*}(\mathbf{X}), \underline{TVaR}_{\alpha, x_1^*}(\mathbf{X})).$$

Définition 4.4. Définissons la courbe α obtenue à partir de $\overline{TVaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{x})$, avec $x_j, x_j \geq F_{X_j}^{-1}(\alpha)$, tel que

$$\overline{\mathcal{C}}_{i, \alpha} = \{(x_j, \overline{TVaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X})), x_j \leq F_{X_j}^{-1}(\alpha)\} \quad i, j = 1, 2, \quad (i \neq j).$$

De la même manière, le couple (x_i^*, x_j^*) d'allocation de capital est obtenu en résolvant le problème suivant :

$$\min_{x_j \leq F_{X_j}^{-1}(\alpha)} \{(x_j - VaR_\alpha(X_j))^2 + (TVaR_\alpha(X_i) - \overline{TVaR}_{\alpha, x_j}(\mathbf{X}))^2\} \quad i, j = 1, 2, \quad (i \neq j).$$

Le couple optimal de la TVaR supérieure est donné par :

$$\overline{TVaR}_{\alpha, \mathbf{x}^*}(\mathbf{X}) = (\overline{TVaR}_{\alpha, x_2^*}(\mathbf{X}), \overline{TVaR}_{\alpha, x_1^*}(\mathbf{X})).$$

4.2 Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle de copule

La complexité sans cesse croissante des produits d'assurance et de l'activité financière conduit à un intérêt accru pour la modélisation des risques dépendants. Brahim et al. (2018) avait comme objectif de proposer une mesure de risque alternative qui prend en compte les fluctuations des pertes et les éventuelles corrélations entre les variables aléatoires. Cette nouvelle notion de mesure de risque introduit les copules et décrit la quantité de risque attendue étant donné qu'un risque bivarié potentiel dépasse une valeur seuil. Cette article, se veut une amélioration de la Valeur à Risque conditionnelle, aussi appelée déficits attendus, tel que défini par Artzner et al. (1999) et Wirch et Hardy (1999) comme :

$$CTE_X(\alpha) = \frac{1}{1 - F_X(VaR_X(\alpha))} \int_{VaR_X(\alpha)}^{\infty} x dF_X(x),$$

où F_X est fonction de répartition de X . En supposant que X est continue, alors $F_X(VaR_X(\alpha)) = \alpha$, et ainsi pour tout $0 < \alpha < 1$ on a :

$$CTE_X(\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_X(u) du.$$

4.2.1 Définition

La contribution de Brahim et al.(2018) consiste à introduire la notion de copule afin de permettre plus de flexibilité en terme de perte et de structure de dépendance. En effet, la formule précédente de la CTE se concentre uniquement sur la moyenne des pertes. Il leur fallait introduire une mesure plus inclusive qui prend en considération la structure de dépendance et le comportement des queues. Ainsi, ils ont proposé la

mesure suivante :

$$CCTE_{X_1}(t) := \mathbb{E}[X_1 | X_1 > VaR_{X_1}(\alpha), X_2 > VaR_{X_2}(t)],$$

dont nous traduirons librement le nom par la Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle de copule. Nous avons vu au chapitre 2 que la copule de survie est définie comme :

$$\bar{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

En supposant que C est absolument continue avec une densité c , on peut réécrire pour tout $s, t \in (0, 1)$,

$$\bar{C}(1 - s, 1 - t) = \int_s^1 J_t(u) du,$$

où

$$J_t(u) := \int_t^1 c(u, v) dv.$$

Donc, pour un niveau $s = \alpha$ fixé, nous avons :

$$\bar{C}(1 - \alpha, 1 - t) = 1 - \alpha - t + C(\alpha, t).$$

Ainsi la proposition suivante donne la CCTE du risque ciblé X_1 .

Proposition 4.6. *Soit (X_1, X_2) un couple de valeurs aléatoires avec la fonction de répartition représentée par la copule C . Supposons que X_2 a une moyenne finie et la fonction de répartition F_X . Alors pour α fixé et pour tout $t \in (0, 1)$, la CCTE de X_1 est donné par*

$$CCTE_{X_1}(t) = \frac{\int_{\alpha}^1 J_t(u) F_{X_1}^{-1}(u) du}{\int_{\alpha}^1 J_t(u) du}.$$

4.2.2 Illustration

Présentons maintenant quelques exemples, à l'aide de la copule des lois de Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) et la famille des copules Archimédiennes afin de mieux comprendre l'utilisation de cette valeur à risque.

CCTE avec la Copule FGM

Les copules appartenant à cette famille sont symétriques, c'est-à-dire, $C_{\theta}^{FGM}(u, v) = C_{\theta}^{FGM}(v, u)$, pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$. Le lecteur est référé à la définition 2.2 pour un rappel de la définition de la copule FGM. Leur coefficient inférieur et supérieur de dépendance est égal à zéro. À des fins pratiques, seule les copules avec une dépendance positive sont considérées.

Soit la paire de valeurs aléatoire (X_i, Y) , $i = 1, 2, 3$, avec les marges $F_{X_i}(x)$ et $G_Y(y)$ et la fonction de répartition $H_{X_i, Y}(x, y)$. Considérant une copule FGM de paramètres θ_i , on a :

$$H_{X_i, Y}(x, y) = C_{\theta_i}^{FGM}(F_{X_i}(x), G_Y(y)),$$

respectivement pour $i = 1, 2, 3$.

Les fonctions de survie sont données par :

$$\bar{F}_{X_i}(x) = \begin{cases} (1+x)^{\gamma}, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

et

$$\bar{G}_Y(y) = \begin{cases} (1+y)^\gamma, & y \geq 0, \\ 1, & y < 0, \end{cases}$$

où $\gamma > 0$ est l'index de Pareto.

La valeur à risque conditionnelle à un niveau fixé α est donnée par :

$$CTE_{X_i}(\alpha) = \frac{\gamma(1-\alpha)^{-1/\gamma}}{\gamma-1}.$$

La VaR de X_i au même niveau α est donné par :

$$VaR_{X_i}(\alpha) = (1-\alpha)^{-1/\gamma}.$$

Pour un s fixé égale à α , on a :

$$\bar{C}(1-\alpha, 1-t) = 1-\alpha-t + \alpha t + \theta_i \alpha t (1-\alpha)(1-t).$$

Calculons maintenant :

$$\int_{\alpha}^1 J_t(u) F_{X_i}^{-1}(u) du =$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 J_t(u) F_{X_i}^{-1}(u) du &= \int_{\alpha}^1 (1-u)^{-1/\gamma} (\theta_i - 2u\theta_i - 2v\theta_i + 4uv\theta_i + 1) dudv, \\ &= \int_t^1 (\theta_i - 2\theta_i v + 1) dv \int_{\alpha}^1 (1-u)^{-1/\gamma} du \\ &+ 2\theta_i \int_t^1 (2v-1) dv \int_{\alpha}^1 u(1-u)^{-1/\gamma} du, \end{aligned}$$

alors,

$$\int_{\alpha}^1 J_t(u) F_{X_i}^{-1}(u) du = \gamma \frac{(1-t)(2\gamma + t\theta_i - 2t\theta_i\alpha + 2t\theta_i\alpha\gamma - 1)}{2\gamma^2 - 3\gamma + 1} \times (1-\alpha)^{1-1/\gamma}.$$

En remplaçant dans l'équation donné à la proposition 4.6, nous obtenons :

$$\text{CCTE}_{X_i}(t) = \gamma \frac{2\gamma + t\theta_i - 2t\alpha\theta_i + 2t\alpha\gamma\theta_i - 1}{(t\alpha\theta_i + 1)(2\gamma^2 - 3\gamma + 1)} (1-\alpha)^{-1/\alpha}.$$

CCTE avec la Copule Archimédienne

Le lecteur est référé à la définition 2.3 pour un rappel de la définition de la copule Archimédienne. Dans le cas de la copule Archimédienne, il n'y a pas de formule explicite pour la CCTE, celle-ci peut être exprimé en fonction du générateur ϕ :

Définition 4.7. *Soit C une copule Archimédienne continue avec ϕ son générateur, alors pour α fixé et $t \in (0, 1)$,*

$$J_t(u) = 1 - \frac{\phi'(u)}{\phi'(C(u, t))}.$$

Ainsi,

$$\text{CCTE}_{X_1}(t) = \frac{1}{\bar{C}(1-\alpha, 1-t)} \left((1-\alpha)\text{CTE}_{X_1}(\alpha) - \int_{\alpha}^1 \frac{\phi'(u)F_{X_1}^{-1}(u)}{\phi'(C(u, t))} du \right).$$

Chapitre 5

Nouvelle Valeur à Risque multidimensionnelle inférieure et supérieure

Dans ce chapitre, nous présenterons l'apport principal de ce mémoire. Dans la première section, une nouvelle Valeur à Risque multidimensionnelle inférieure et supérieure sera définie. À la section 2, nous présenterons quelques propriétés découlant de la VaR bidimensionnelle et quelques illustrations seront ensuite présentées dans la dernière section.

5.1 Introduction et Définition à la VaR multidimensionnelle

Comme nous avons pu voir au chapitre 3, la valeur à risque est une mesure importante dans divers domaines, notamment en science actuarielle, en finance et en

assurance. Cossette et al. (2013) ont étudié la VaR dans un cadre bidimensionnel, cependant dans des cas réels il y a souvent plusieurs facteurs de risques à considérer. Il est donc justifié de vouloir s'intéresser à un cadre multidimensionnel. Rappelons la définition de la VaR :

Définition 5.1. Soit X une variable aléatoire et F_X une fonction de distribution cumulative. La VaR à un niveau α , $0 < \alpha < 1$, de X est défini par :

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Définition 5.2. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire avec la fonction de distribution conjointe F_X et la fonction de survie \bar{F}_X . Pour $\alpha \in (0, 1)$ la VaR multivariée inférieure de probabilité α est défini par :

$$\underline{VaR}_\alpha(X) = \partial\{x \in \mathbb{R}^d : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

La VaR multivariée supérieure associé à une perte X est défini comme :

$$\overline{VaR}_\alpha(X) = \partial\{x \in \mathbb{R}^d : \bar{F}_X(x) \leq 1 - \alpha\}.$$

Définissons maintenant de manière alternative la Valeur à Risque multidimensionnelle inférieure et supérieure.

Proposition 5.1. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire avec $F_{\mathbf{X}}$ sa fonction de répartition et $\bar{F}_{\mathbf{X}}$ sa fonction de survie. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, on note $\mathbf{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$, $i = 2, \dots, d-1$, avec $\mathbf{x}_1 = (x_2, \dots, x_d)$ et $\mathbf{x}_d = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Pour \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, d$, fixé, définissons les fonctions $x_i \mapsto F_{\mathbf{x}_i}(x_i) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ et

$x_i \mapsto \bar{F}_{x_i}(x_i) = \bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, et soient $F_{x_i}^{-1}(\alpha)$ et $\bar{F}_{x_i}^{-1}(\alpha)$ leurs fonctions généralisées associées exprimées par :

$$F_{x_i}^{-1}(\alpha) = \inf\{x_i \in \mathbb{R} : F_{x_i}(x_i) \geq \alpha\},$$

$$\bar{F}_{x_i}^{-1}(\alpha) = \inf\{x_i \in \mathbb{R} : \bar{F}_{x_i}(x_i) \leq 1 - \alpha\}.$$

Notons que les inégalités $F_{x_i}(x_i) \geq \alpha$ et $\bar{F}_{x_i}(x_i) \leq 1 - \alpha$ sont équivalentes à $x_i \geq F_{x_i}^{-1}(\alpha)$ et $x_i \leq \bar{F}_{x_i}^{-1}(1 - \alpha)$ avec $j > i$. De plus, si F_{x_i} est continue, nous avons :

$$F_{x_i}(x_i, F_{x_i}^{-1}(\alpha)) = \alpha \quad \text{et} \quad \bar{F}_{x_i}(x_i, \bar{F}_{x_i}^{-1}(1 - \alpha)) = 1 - \alpha.$$

Nous adoptons la notation suivante :

$$F_{x_i}^{-1}(\alpha) = \underline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}),$$

$$\bar{F}_{x_i}^{-1}(1 - \alpha) = \overline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}).$$

Il est aussi possible de proposer une caractérisation des bornes.

Proposition 5.2. Soit la fonction $\mathbf{x}_i \mapsto VaR_{\alpha, x_i}$, pour tout $i = 1, \dots, d$, on a :

$$\underline{VaR}_{\alpha}(\mathbf{X}) = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, \underline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}), x_{i+1}, \dots, x_d); x_j \geq VaR_{\alpha}(X_j), j \neq i\},$$

et

$$\overline{VaR}_{\alpha}(\mathbf{X}) = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, \overline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}), x_{i+1}, \dots, x_d); x_j \leq VaR_{\alpha}(X_j), j \neq i\}.$$

Étudions maintenant le comportement des courbes $\mathbf{x}_i \mapsto VaR_{\alpha, x_i}(\mathbf{X})$ de niveau α . Dénotons le support de X_i par $supp(X_i)$. Soient l_{x_i} et u_{x_i} l'infimum et le supremum de X_i défini par $l_{x_i} = \inf\{x_i : x_i \in supp(X_i)\}$ et $u_{x_i} = \sup\{x_i : x_i \in supp(X_i)\}$.

Soient,

$$l_{\mathbf{x}_i} = (l_{x_1}, \dots, l_{x_{(i-1)}}, l_{x_{(i+1)}}, \dots, l_{x_d}),$$

$$u_{\mathbf{x}_i} = (u_{x_1}, \dots, u_{x_{(i-1)}}, u_{x_{(i+1)}}, \dots, u_{x_d}),$$

et

$$VaR_{\alpha, i} = (VaR_{\alpha}(x_1), \dots, VaR_{\alpha}(x_{i-1}), VaR_{\alpha}(x_{i+1}), \dots, VaR_{\alpha}(x_d)).$$

Proposition 5.3. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire avec $F_{\mathbf{X}}$ la fonction de répartition et les marges F_{X_i} . La fonction $\mathbf{x}_i \mapsto VaR_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ est décroissante et si F_{X_i} est strictement croissante, alors*

1. $\lim_{\mathbf{x}_i \rightarrow u_{\mathbf{x}_i}} \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X}) = VaR_{\alpha}(X_i)$ et $\lim_{\mathbf{x}_i \rightarrow VaR_{\alpha, i}} \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X}) = u_{X_i}$.
2. $\lim_{\mathbf{x}_i \rightarrow l_{\mathbf{x}_i}} \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X}) = VaR_{\alpha}(X_i)$ et $\lim_{\mathbf{x}_i \rightarrow VaR_{\alpha, i}} \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X}) = l_{X_i}$.

Preuve. *Puisqu'on suppose F_{x_i} continue alors, on a*

$$F_{x_i}(\mathbf{x}_i, \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})) = \alpha,$$

$$\overline{F}_{x_i}(\mathbf{x}_i, \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})) = 1 - \alpha.$$

Comme F_{x_i} est une fonction croissante et \overline{F}_{x_i} est une fonction décroissante, alors on a nécessairement que $\mathbf{x}_i \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{x}_i \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ sont des fonctions décroissantes de \mathbf{x}_i . De plus, puisque F_{x_i} est continue, alors

$$\lim_{\mathbf{x}_i \rightarrow u_{\mathbf{x}_i}} \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X}) = F_{X_i}^{-1}(\alpha) = VaR_{\alpha}(X_i).$$

Aussi comme $F_{\mathbf{X}}$ est aussi strictement croissante, alors

$$\lim_{\mathbf{x}_i \rightarrow VaR_{\alpha}(X_i)} \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X}) = u_{X_i}.$$

Par conséquent (1) est prouvé. De la même façon, (2) est aussi prouvé.

5.2 Convexité

Dans cette section, nous aborderons la propriété de convexité appliquée à la VaR multidimensionnelle inférieure et supérieure. La convexité de la fonction de répartition de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ est importante puisqu'elle a un impact sur la forme de la Valeur à Risque, ce qui aura aussi pour effet d'affecter les ensembles d'allocation. La proposition suivante pose les conditions suffisantes afin de s'assurer de la convexité et de la concavité de la courbe $\mathbf{x}_i \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ à un niveau α .

Proposition 5.4. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire avec une fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$ et $\bar{F}_{\mathbf{X}}$ une fonction de survie. Alors,*

1. *Si $F_{\mathbf{X}}$ est concave (respectivement convexe), alors $\mathbf{x}_i \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ est convexe (respectivement concave).*
2. *Si $F_{\mathbf{X}}$ est convexe (respectivement concave), alors $\mathbf{x}_i \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ est convexe (respectivement concave).*

Afin d'assurer la convexité des mesures de risques précédentes, posons $\mathbf{x}_i^* = F_{X_i}^{-1}(\alpha)$.

Proposition 5.5. *Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire avec une fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$ et $\bar{F}_{\mathbf{X}}$ une fonction de survie. Notons F_{X_i} , les fonctions de répartition marginales. Si $F_{\mathbf{X}}$ est différentiable d fois, alors*

1. *Si $\frac{\partial^2 F_{\mathbf{X}}}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}_i) \leq 0$ pour tout $\mathbf{x}_i \geq \mathbf{x}_i^*$ et $i \neq j$, alors la courbe $\mathbf{x}_i \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ à un niveau α est convexe.*
2. *Si $\frac{\partial^2 \bar{F}_{\mathbf{X}}}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}_i) \leq 0$ pour tout $\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_i^*$ et $i \neq j$, alors la courbe $\mathbf{x}_i \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ à un niveau α est concave.*

Les copules permettent la représentation d'une distribution multivariée en fonction de ses fonctions de répartition marginales univariées. Ainsi, comme vu dans le chapitre 2, les copules fournissent une approche flexible dans la modélisation du comportement conjoint des variables aléatoires. En utilisant le théorème de Sklar vu à la section 2.1, il est possible d'étudier $\mathbf{x}_i \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ et $\mathbf{x}_i \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ en terme de copule.

Proposition 5.6. Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire avec une fonction de répartition $F_{\mathbf{X}}$ et notons F_{X_i} les fonctions de répartition marginales connectées par une copule C . En supposant que la copule C et les marges sont différentiables 2 fois. Alors,

1. Si $\frac{\partial^2 C}{\partial u_j^2}(u_i) \leq 0$ pour tout $u_i \in [\alpha, 1]$, $i \in \mathbb{R}$, $i \neq j$ et $F_{x_i}(\mathbf{x}_i)$ sont concaves pour tout $\mathbf{x}_i \geq \mathbf{x}_i^*$, alors la courbe $\mathbf{x}_i \mapsto \underline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ à un niveau α est convexe.
2. Si $\frac{\partial^2 C}{\partial u_j^2}(u_i) \leq 0$ pour tout $u_i \in [0, \alpha]$, $i \neq j$ et $F_{x_i}(\mathbf{x}_i)$ sont convexes pour tout $\mathbf{x}_i \leq \mathbf{x}_i^*$, alors la courbe $\mathbf{x}_i \mapsto \overline{VaR}_{\alpha, \mathbf{x}_i}(\mathbf{X})$ à un niveau α est concave.

5.3 Illustrations

5.3.1 Projection orthogonale

D'abord l'allocation par projection orthogonale consiste à trouver le point $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, VaR_{\alpha, x_i^*}(\mathbf{X}), x_{i+1}^*, \dots, x_d^*)$ le plus près de $(VaR_{\alpha}(X_1), \dots, VaR_{\alpha}(X_d))$, ce qui vient à résoudre le problème de minimisation suivant. Pour chaque i fixé :

$$\min_{x_j > (VaR_{\alpha}(X_j))} \left\{ \sum_{i \neq j} (VaR_{\alpha}(X_j) - x_j)^2 + (VaR_{\alpha}(X_i) - \underline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}))^2 \right\},$$

Pour tout $j \neq i$. Pour trouver une solution et obtenir la projection orthogonale, il suffit d'annuler les dérivées partielles de la fonction suivante. Soit $\mathbf{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$,

$$f(\mathbf{x}_i) = \sum_{i \neq j} (VaR_{\alpha}(X_j) - x_j)^2 + (VaR_{\alpha}(X_i) - \underline{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}))^2,$$

à savoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{i-1}} &= 0 \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_{i+1}} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_d} &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à, pour tout $j = 1, \dots, i-1, i+1, d$,

$$-2(\text{VaR}_\alpha(X_j - x_j)) + 2(\text{VaR}_{\alpha, x_1}(X_j) - \text{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X})) \frac{\partial \text{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X})}{\partial x_i} = 0.$$

La résolution numérique de ce système non linéaire de $(d-1)$ équations nous donne le point optimal

$$(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \text{VaR}_{\alpha, x_i^*}(\mathbf{X}), x_{i+1}^*, \dots, x_d^*).$$

5.3.2 Répartition proportionnelle

La seconde approche est la répartition proportionnelle, celle-ci consiste à préserver le même ratio que la VaR univariée. C'est-à-dire considérer $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \text{VaR}_{\alpha, x_i^*}(\mathbf{X}), x_{i+1}^*, \dots, x_d^*)$ comme une solution de

$$\min_{x_j > \text{VaR}_\alpha(X_j)} \sum_{j \neq i} \left(x_j - \frac{\text{VaR}_\alpha(X_j)}{\text{VaR}_\alpha(X_i)} \text{VaR}_{\alpha, x_i}(\mathbf{X}) \right)^2.$$

Chapitre 6

Conclusion

Comme nous avons pu le voir dans le cadre de ce travail, le milieu de la recherche s'intéresse particulièrement à l'amélioration des mesures de risques. Dans un monde en changement continu, il nous faut s'adapter afin de contrôler la probabilité et ainsi atteindre des objectifs donnés. Afin d'améliorer la gestion du risque, nous avons proposé dans ce travail une nouvelle Valeur à Risque multidimensionnel inférieure et supérieure.

Dans un premier temps, il nous a fallu faire un résumé de la théorie des copules au chapitre 2. Ensuite, nous avons présenté au chapitre 3, la Valeur à Risque bidimensionnelle inférieure et supérieure introduite par Cossette et al. (2013) base sur laquelle nous avons construit la VaR multidimensionnelle inférieure et supérieure. Au chapitre 4, deux Valeurs à Risque conditionnelles ont été présentés. Soit la Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle (TVaR) introduite par Cossette et al. (2016) basée sur la VaR présentée au chapitre 3. La seconde étant la Valeur à Risque bidimensionnelle conditionnelle de copule (CCTE) introduite par Brahim et al. (2018) et basée celle-ci sur la Valeur à Risque conditionnelle (CTE) définie par Artzner et al. (1999).

Nous retrouvons finalement l'apport principal de ce mémoire au chapitre 5 dans lequel nous avons introduit et défini la Valeur à Risque multidimensionnelle inférieure et supérieure. Il nous a été possible de proposer une caractérisation des bornes et de présenter la propriété de convexité de cette Valeur à Risque. Nous avons terminé avec la présentation de deux illustrations à savoir la Projection orthogonale et la Répartition proportionnelle.

Bibliographie

- [1] ARTZNER P.H. , DELBAEN F., EBER J.M. and HEATH D. (1999) Coherent measures of risk *Math. Finance*, 9(3), pp. 203-228.
- [2] BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS. *Consultative Document : History of the Basel Committee*, 24(1), pp. 82-100.
- [3] BRAHIM B. , FATAH B. and DJABRANE Y.(2018) Copula conditional tail expectation for multivariate financial risks *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 24(1), pp. 82-100.
- [4] COSSETTE H. , MAILHOT M., MARCEAU E. et MESFIOUI M. (2013) Bivariate lower and upper orthant Value-at-Risk *European Actuarial Journal*, 3, pp. 321-357.
- [5] COSSETTE H. , MAILHOT M., MARCEAU E. et MESFIOUI M. (2016) Vector-Valued Tail Value-at-Risk and Capital Allocation *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18, pp. 653-674.
- [6] EMBRECHTS P. and PUCETTI G. (2006) Bounds for function of multivariate risks. *Journal of Multivariate Analysis*, 97(2), pp. 526-547.
- [7] JOUINI E. , MEDDEB M. and TOUZI N. (2004) Vector-valued coherent risk measures. *Finance Stoch*, 8(4), pp. 531-552.
- [8] FEKIR H. (2005) Présentation du nouvel accord de Bale sur les fonds propres. *Revue MIF (Management, information, finance)*, Presses de la Recherche, 2005, pp. Revue Management- Information-Finance (MIF) Numéro ISSN : 1630-1889. hal-00384561.

- [9] FRÉCHET, M. (1951) Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'Université de Lyon*, Série 3, 14, 53-77.
- [10] GENEST, C. et MACKAY, R.J. (1986) Copules Archimédiennes et Familles de Lois Bidimensionnelles dont les marges sont données, *The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique*, 14(2), pp. 145-159.
- [11] Hoeffding, W. (1940) Maszstabinvariante Korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin* 5, 179-233.
- [12] McNEIL A.J. , FREY R. and EMBRECHTS P. (2005) Quantitative risk management. Princeton University Press, Princeton.
- [13] MESFIOUI, M. (2021) Theory and applications of copulas. Université du Québec à Trois-Rivières.
- [14] NELSEN, R.B. . (2006) An introduction to Copulas. 2nd edn. *New York : Springer (Springer Series in Statistics)*.
- [15] QUESSY, J.-F. (2019) Modélisation Statistique de la Dépendance Stochastique : Notes de cours. Université du Québec à Trois-Rivières.
- [16] SKLAR, A. (1959) Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris* Paris 8, 229-231.
- [17] WIRCH, J. and HARDY, M. (1999) A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance Mathematic Economy* 25, 337-347.