

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
ALEXANDRE DUGUAY

ONDES MULTIPLES DE RIEMANN DÉCRITES PAR LA
MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE IDÉALE EN (3+1) DIMENSIONS

MAI 2022

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode des caractéristiques généralisées pour trouver de nouvelles solutions explicites en termes des invariants de Riemann pour les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) idéale classique en (3+1) dimensions. Ces équations décrivent l'écoulement d'un fluide idéal (non visqueux), compressible, avec conductivité infinie et qui est soumis à un champ magnétique et à un gradient de pression hydrodynamique. Nous avons trouvé les éléments intégraux simples associés à ces équations. Pour ces quatre types d'éléments, nous avons trouvé les solutions d'ondes simples (solutions de rang-1) pour les ondes entropiques E , les ondes d'Alfvén A^ε et les ondes magnétoacoustiques rapides F et lentes S . Par la suite, nous avons démontré que le système d'équations pour la MHD admet quatre types de superpositions, à savoir : les superpositions entropique-entropique, Alfvén-Alfvén, entropique-Alfvén et entropique-magnétoacoustique rapide. Parmi ces quatre types de superpositions (solution de rang- k), nous avons été en mesure de construire 15 nouvelles classes de solutions explicites pour la superposition des ondes simples sous forme solitonique (algébrique, trigonométrique et en termes des fonctions elliptiques). Parmi ces solutions, nous avons donné des représentations graphiques pour l'onde double stationnaire $E_2A_2^\varepsilon$, l'onde triple stationnaire $E_2E_2A_2^\varepsilon$ et l'onde double non stationnaire EF , à laquelle nous avons appliqué le problème de Cauchy. Finalement, une interprétation physique est présentée pour certaines solutions.

Alexandre Duguay

Michel Grundland

Avant-propos

Je voudrais sincèrement remercier mon directeur de recherche, Michel Grundland, pour son soutien, sa précieuse aide et sa bienveillance. J'ai énormément appris de nos échanges et je n'aurais pu rêver d'un meilleur directeur. Je suis aussi reconnaissant du soutien financier offert par sa subvention de recherche du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG).

De plus, je tiens à remercier mes parents, mes grands-parents et mes beaux-parents pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de mon parcours académique. Je remercie aussi mon amoureuse Marguerite d'avoir été à mes côtés depuis le début de cette aventure.

J'aimerais aussi remercier le Fond de recherche du Québec - Nature et technologies (FRQNT) et l'Institut des sciences mathématiques (ISM) pour leur soutien financier qui m'a permis de me donner pleinement à ce projet.

J'aimerais finalement remercier les professeurs Pierre Bénard (Département de chimie, biochimie et physique - UQTR) et Jean-François Quessy (Département de mathématiques et informatique - UQTR) pour l'évaluation de ce mémoire.

Table des matières

Résumé	ii
Avant-propos	iii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	vii
Table des figures	x
Listes des symboles et des abréviations	xii
1 Introduction	1
1.1 Plan du mémoire	3
2 La magnétohydrodynamique idéale	7
2.1 Les équations de la magnétohydrodynamique idéale	8
2.1.1 Comportement hydrodynamique	10
2.1.2 Comportement électromagnétique	12
2.2 Lois de conservation	15
2.3 Algèbre de symétries pour les équations de la MHD	19
3 Les ondes simples de Riemann décrites par les systèmes quasi linéaires	22
3.1 Le problème de Cauchy pour les ondes de Riemann	30
3.2 Certains exemples simples	33

4 Les éléments intégraux simples et les ondes simples de la MHD	39
4.1 Les éléments intégraux simples de la MHD	39
4.1.1 Les éléments intégraux simples entropiques E	42
4.1.2 Les éléments intégraux simples d'Alfvén A^ε	43
4.1.3 Les éléments intégraux simples magnétoacoustiques lents (S) et rapides (F)	45
4.1.4 Relations entre les éléments intégraux simples	47
4.2 Les ondes simples (solutions de rang 1) de la MHD	48
4.2.1 Les ondes simples entropiques	48
4.2.2 Les ondes simples d'Alfvén	52
4.2.3 Les ondes simples magnétoacoustiques	53
5 Les k-ondes de Riemann : superposition d'ondes simples	57
6 Superpositions d'ondes simples en fonction des invariants de Riemann	68
6.1 Les ondes doubles	69
6.2 Les ondes multiples	71
6.3 Superpositions d'ondes entropiques	72
6.4 Superpositions d'ondes d'Alfvén	75
6.5 Superpositions entre les ondes entropiques et les ondes d'Alfvén	82
6.6 Superpositions entre les ondes entropiques et les ondes magnétoacoustiques	103
7 Représentations graphiques et problème de Cauchy	117
7.1 Représentations graphiques pour quelques solutions explicites de types solitoniques	118
7.1.1 Solution explicite pour l'onde double entropique-Alfvén $E_2 A_2^\varepsilon$ (page 92)	119
7.1.2 Solution explicite pour l'onde triple entropique-entropique-Alfvén $E_2 E_2 A_2^\varepsilon$ (page 99)	121

7.2	Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'évolution	123
7.2.1	Solution explicite non stationnaire et problème de Cauchy pour l'onde double entropique-magnétoacoustique rapide <i>EF</i> (page 107)	127
8	Conclusion	133
8.1	Perspectives de recherche et certains domaines d'application	134
8.1.1	Configurations fermées d'un fluide dans un tore	135
8.1.2	Les ondes d'Alfvén et les aurores boréales	136
8.1.3	La magnétohydrodynamique relativiste générale	139
Bibliographie		142
A	Résumé des solutions d'ondes simples et d'ondes multiples	147
B	Programme Mathematica pour vérifier les solutions	155
B.1	Représentations graphiques d'une solution sur Mathematica	158

Liste des tableaux

4.1	Diverses contraintes sur les ondes simples	56
6.1	Diverses superpositions d'ondes simples	69
6.2	Diverses superpositions d'ondes simples entropiques et d'Alfvén	71
A.1	Solutions explicites des équations de la MHD pour les ondes simples E_3 , E_1 et E_2	148
A.2	Solutions des équations de la MHD pour les ondes simples A^ε , F et S . . .	149
A.3	Solutions explicites des équations de la MHD pour les ondes multiples E_2E_2 et $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$	150
A.4	Solutions explicites des équations de la MHD pour les ondes multiples EA^ε et $EA^\varepsilon A^\varepsilon$	151
A.5	Solutions explicites des équations de la MHD pour les ondes multiples $E_2A_2^\varepsilon$, EA^ε et $E_2A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$	152
A.6	Solutions explicites des équations de la MHD pour les ondes multiples $E_2E_2A^\varepsilon$, $E_2A_2^\varepsilon$ et EF	153
A.7	Solutions explicites des équations de la MHD pour les ondes multiples EF , E_2F et EEF	154

Table des figures

6.1	Le champ magnétique externe (donné par le champ de vecteurs avec les flèches mauves) qui génère une surface toroïdale, représentée en jaune.	77
6.2	Le champ magnétique interne (donné par le champ de vecteurs avec les flèches rouges) qui génère une surface toroïdale, représentée en bleue.	77
6.3	<i>Les deux tores sont superposés. Le courant, représenté par les flèches, circule entre les deux surfaces</i>	78
6.4	<i>Coupe transversale de la figure 6.3. La surface S_1 correspond à la surface jaune (le tore extérieur) et la surface S_2 correspond à la surface bleue (le tore intérieur).</i>	79
6.5	Un élément de volume de la figure 6.3. Le champ \vec{H}_{S_1} génère la surface extérieure tandis que le champ \vec{H}_{S_2} génère la surface intérieure.	80
6.6	Le champ magnétique \vec{H} et la force magnétique $\vec{F}_M = \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H})/4\pi$ le long des courbes déterminées par les deux invariants R^1 et R^2 dans le plan xy à $z = 0$.	88
6.7	Le champ magnétique \vec{H} et la force magnétique \vec{F}_M sont définis le long des courbes déterminées par les deux invariants R^1 et R^2	101
6.8	Le champ magnétique \vec{H} et le vecteur $\vec{\lambda}_A$ sont situés dans le plan xy .	103
6.9	Le champ magnétique \vec{H} , la densité de courant \vec{j} et les deux composantes du champ de vitesse $a(R^1)\vec{e}_0$ et $b(R^2)\vec{e}_1$ pour un écoulement entre deux plaques conductrices fixes. Le symbole \odot correspond à un vecteur orthogonal aux vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .	114
7.1	Graphiques des fonctions doublement périodiques de Jacobi $\text{cn}(r, k)$, $\text{sn}(r, k)$ et $\text{dn}(r, k)$ pour $k = 0.95$.	118

7.2	Représentation graphique de la densité $\rho(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.	120
7.3	Représentation graphique de la pression $p(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.	120
7.4	Représentation graphique de la première composante du champ magnétique $\vec{H}(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.	120
7.5	Représentation graphique de la deuxième composante du champ magnétique $\vec{H}(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.	120
7.6	Représentation graphique de l'invariant $R^1(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.	120
7.7	Représentation graphique de l'invariant $R^2(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.	120
7.8	Représentation graphique de la densité $\rho(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.	122
7.9	Représentation graphique de la pression $p(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.	122
7.10	Représentation graphique de la première composante du champ magnétique $\vec{H}(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2A_2^\varepsilon$.	122
7.11	Représentation graphique de la deuxième composante du champ magnétique $\vec{H}(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.	122
7.12	Représentation graphique de l'invariant $R^1(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.	122
7.13	Représentation graphique de l'invariant $R^2(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.	122
7.14	Représentation graphique de l'invariant $R^3(z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.	122
7.15	Propagation de deux ondes simples w_1 et w_2 ainsi que leur superposition, représentées par le croisement de leurs courbes caractéristiques $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ dans l'intervalle $[t_1$ et $t_2]$.	127
7.16	Représentation graphique de la densité $\rho(z, t)$ pour l'onde double EF .	129
7.17	Représentation graphique de la pression $p(z, t)$ pour l'onde double EF .	129
7.18	Représentation graphique de la première composante du champ de vitesse $\vec{v}(z, t)$ pour l'onde double EF .	129
7.19	Représentation graphique de la deuxième composante du champ de vitesse $\vec{v}(z, t)$ pour l'onde double EF .	130
7.20	Représentation graphique de la troisième composante du champ de vitesse $\vec{v}(z, t)$ pour l'onde double EF .	130

7.21	Représentation graphique de la première composante du champ magnétique $\vec{H}(z, t)$ pour l'onde double EF .	130
7.22	Représentation graphique de la deuxième composante du champ magnétique $\vec{H}(z, t)$ pour l'onde double EF .	130
7.23	Représentation graphique de l'invariant $R^1(z, t)$ pour l'onde double EF .	130
7.24	Représentation graphique de l'invariant $R^2(z, t)$ pour l'onde double EF .	130
7.25	Propagation de deux ondes simples w_E (l'onde entropique) et w_F (l'onde magnétoacoustique rapide) ainsi que leur superposition, représentées par le croisement de leurs courbes caractéristiques $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ dans l'intervalle $[1.3, 35/11]$.	132
8.1	Structure hélicoïdale du champ magnétique dans un tokamak	135
8.2	Schéma de la reconnection magnétique et de l'amortissement de Landau causés par le vent solaire	138
B.1	Solution pour l'onde $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ correspondant à l'équation (B.2)	156
B.2	Les côtés gauches des équations du système (B.1).	157
B.3	Résultats lorsque nous remplaçons les solutions (B.2) dans les côtés gauches des équations du système (B.1).	157
B.4	Ajout de contraintes sur les variables indépendantes.	158
B.5	Paramètres arbitraires pour les représentations graphiques de la solution $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$.	158
B.6	Représentation graphique pour la deuxième composante de \vec{v} pour l'onde $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ dans le plan xy .	159

Listes des symboles et des abréviations

Liste des symboles importants

ρ	Densité du fluide
p	Pression dans le fluide
\vec{v}	Champ de vitesse
\vec{H}	Champ magnétique
κ	Indice adiabatique du fluide
σ	Conductivité électrique du fluide
\vec{F}_M	Force magnétique
\vec{j}	Densité de courant
μ_0	Perméabilité du vide
\vec{E}	Champ électrique
E_K, E_I, E_M, E_H	Énergies cinétique, interne, magnétique et hydrodynamique
$\vec{q}_K, \vec{q}_I, \vec{q}_M, \vec{q}_H$	Densités de courant d'énergie pour E_K, E_I, E_M, E_H
a	Vitesse du son dans le fluide
x, y, z	Variables indépendantes spatiales
t	Variable indépendante temporelle
\mathcal{E}	Espace des variables indépendantes
\mathcal{H}	Espace des variables dépendantes (hodographe)
∇a	Gradiant du scalaire a
$\nabla \cdot \vec{A}$	Divergence du vecteur \vec{A}
$\nabla \times \vec{A}$	Rotationnel du vecteur \vec{A}

$\frac{d}{dt}$	Dérivée convective
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport à t
$\dot{a}, \ddot{a}, \dddot{a}$	Dérivées première, seconde et triple de a par son argument
a_ξ	Dérivée partielle de a par son argument ξ
γ	Vecteur caractéristique de l'espace hodographique (amplitude)
λ	Vecteur caractéristique de l'espace physique (vecteur d'onde)
γ_p	Composante du vecteur γ associée à p
γ_ρ	Composante du vecteur γ associée à ρ
$\vec{\gamma}$	Composante du vecteur γ associée à \vec{v}
\vec{h}	Composante du vecteur γ associée à \vec{H}
λ_0	Composante temporelle du vecteur λ (vitesse de phase)
$\vec{\lambda}$	Composante spatiale du vecteur λ
E, E_1, E_2, E_3	Ondes entropiques
$A^\varepsilon, A_2^\varepsilon$	Ondes d'Alfvén
F	Onde magnétoacoustique rapide
S	Onde magnétoacoustique lente
$\delta_E, \delta_A, \delta_F, \delta_S$	Vitesse de groupe pour les ondes E, A, F et S
$\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$	Vecteurs unitaires
R^i	i-ème invariant de Riemann
ψ^i	Fonction arbitraire associée au i-ème invariant de Riemann
id	Identité
ε	± 1

Liste des abréviations

MHD	Magnétohydrodynamique
ÉDP	Équation aux dérivées partielles
ÉDO	Équation aux dérivées ordinaires
PVI	Problème aux valeurs initiales
MHDRG	Magnétohydrodynamique relativiste générale

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'utiliser la méthode des caractéristiques généralisées pour trouver de nouvelles solutions explicites en termes des invariants de Riemann pour les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) idéale en (3+1) dimensions. Ces équations décrivent l'écoulement d'un fluide idéal, compressible et avec conductivité infinie. Le système d'équations étudié est un système d'équations aux dérivées partielles quasi linéaires et hyperboliques de la forme

$$\sum_{\mu=0}^n \sum_{j=1}^{\ell} a_j^{s\mu}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (1.1)$$

où les éléments matriciels $a_j^{s\mu}$ sont des fonctions des variables dépendantes $u = (u^1, \dots, u^\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ et les variables indépendantes $x = (t = x^0, x^1, \dots, x^n)$ appartiennent à l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} . Nous cherchons des solutions sous forme *d'ondes de Riemann*. Ces ondes furent initialement introduites par Siméon Denis Poisson en 1808 lorsqu'il considérait les équations d'Euler unidimensionnelles décrivant l'écoulement compressible d'un gaz isothermique [2]. Il construisit le problème tel que les solutions de ces équations sont des ondes de propagation unidimensionnelles données sous la

forme implicite

$$u = F((u + u_0)t - x), \quad (1.2)$$

où F est une fonction arbitraire.

Cette idée fut généralisée par Bernard Riemann lorsqu'il construisit des solutions représentant des superpositions de deux ondes simples en [3]. Il considéra les équations d'Euler pour un gaz idéal pour deux variables indépendantes t et x et deux variables dépendantes u et ρ

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

où u est la vitesse locale du fluide, p est la pression, fonction qui dépend de la densité ρ et où $dp/d\rho > 0$. Il construisit des solutions qui correspondent à la superposition de deux ondes qui se propagent avec des vitesses locales $u = \pm \left(\frac{dp}{d\rho} \right)^{1/2}$. Par cette méthode, on trouve la solution d'onde double de diffusion

$$u = \sqrt{k}(R^1 - R^2) + u_0, \quad \rho = A \exp(R^1 + R^2), \quad p = kA \exp(R^1 + R^2) + p_0, \quad (1.4)$$

où $u_0, p_0, k, A \in \mathbb{R}$ et les invariants de Riemann R^1 et R^2 satisfont le système

$$R_t^i + \left[\sqrt{k}(R^1 - R^2 + 1) + u_0 \right] R_x^i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Il a ensuite démontré que ces ondes pouvaient se séparer après un temps suffisamment long (après la superposition) de sorte que les ondes sortantes étaient du même type qu'imposé dans les conditions initiales. Cette superposition peut être interprétée comme une superposition élastique entre deux ondes. Riemann a aussi remarqué que les solutions du système de type (1.3) n'étaient habituellement pas continues après un certain temps $T > 0$. En fait, les dérivées premières des solutions deviennent non définies après un certain temps $T > 0$ et pour des temps $t > T$. Ce phénomène se

nomme *catastrophe du gradient*. Plusieurs auteurs se sont intéressés au problème des ondes de Riemann et de leurs superpositions [4], [5]. Les méthodes de construction de ces solutions sont donc une continuation des idées de Riemann. L'élément principal derrière ces idées est l'introduction de nouvelles variables dépendantes, appelées *invariants de Riemann* (qui sont exprimés en termes des variables indépendantes), qui ont la propriété particulière de préserver leurs valeurs le long des courbes caractéristiques appropriées du système d'équations initiales (1.1). Cette approche permet donc de réduire le nombre de variables dépendantes pour le problème de superpositions d'ondes, ce qui simplifie la résolution du système d'équations initial [6], [1].

En somme, l'objectif de ce mémoire est d'appliquer la méthode des caractéristiques généralisées aux équations de la MHD (1.1). Nous allons trouver quatre types d'ondes simples, soient les ondes entropiques E , les ondes d'Alfvén A^e et les ondes magnétoacoustiques rapides F et lentes S . Avec ces quatre types d'ondes simples, nous trouverons diverses superpositions admises par la MHD afin de construire des ondes doubles (solutions de rang 2) et des ondes triples (solutions de rang 3). Parmi ces ondes multiples, nous avons des combinaisons entropique-entropique, Alfvén-Alfvén, entropique-Alfvén et magnétoacoustique-entropique. Ces superpositions sont généralement données sous forme implicite, mais dans ce mémoire, nous allons écrire ces superpositions sous forme explicite.

1.1 Plan du mémoire

Dans le chapitre 2, nous présentons le système physique décrivant le mouvement d'un fluide conductif soumis à un champ magnétique selon les équations de la MHD (voir équation (2.1) du chapitre 2). Nous expliquons la signification physique de ces équations en décrivant le comportement hydrodynamique (l'équation de continuité, l'équation d'Euler et la conservation de l'entropie) et le comportement électromagné-

tique (loi de Faraday, loi d'Ampère, loi d'Ohm et la loi de Gauss pour le magnétisme). Par la suite, nous présentons les lois de conservation de notre écoulement, soit les lois de conservation pour l'énergie cinétique, l'énergie magnétique, la quantité de mouvement, la vorticité et la circulation. Nous allons finalement illustrer les propriétés de symétrie du système d'équations étudié pour l'algèbre de Lie ponctuelle.

Dans le chapitre 3, nous présentons la méthodologie pour trouver les ondes simples, soit la théorie de la propagation des ondes simples décrites par les systèmes quasi linéaires d'ordre premier en termes des invariants de Riemann. Nous détaillons ensuite la notion d'élément intégrable simple qui nous permettra d'algébriser le système d'équations différentielles de sorte que les solutions correspondront aux ondes de Riemann, lesquelles seront des fonctions qui dépendent des invariants de Riemann. Par la suite, une description du problème de Cauchy est présentée. Quelques exemples simples sont présentés afin d'illustrer la théorie.

Dans le chapitre 4, nous appliquons la méthode des caractéristiques généralisées aux équations de la MHD. Nous trouvons premièrement les éléments intégraux simples et nous présentons les trois types d'éléments intégraux simples admis par la MHD, soient les éléments intégraux simples entropiques, d'Alfvén et magnétoacoustiques rapides et lents. À partir de ces éléments intégraux simples, on présente les trois types d'ondes simples (solution de rang-1 pour le système d'équation de la MHD), soit les trois types d'ondes simples entropiques (E_1 , E_2 et E_3), les ondes simples d'Alfvén (A^ε , $\varepsilon = \pm 1$) et les ondes simples magnétoacoustiques rapides et lentes (F et S). À l'annexe A, nous regroupons ces solutions dans des tables afin de résumer les résultats de ce chapitre.

Dans le chapitre 5, nous généralisons la méthode des caractéristiques généralisées afin d'obtenir des solutions d'ondes multiples qui dépendent de plusieurs invariants de Riemann. Ces solutions correspondent à des superpositions non linéaires d'ondes simples.

Dans le chapitre 6, nous appliquons la superposition des ondes simples afin d'obtenir de nouvelles k-ondes de Riemann, c'est-à-dire des solutions de rang k pour les équations de la MHD. Nous présentons la construction et l'étude des superpositions d'ondes entropiques (page 72), les superpositions d'ondes d'Alfvén (page 75), les superpositions entre les ondes entropiques et les ondes d'Alfvén (page 82) et les superpositions entre les ondes entropiques et les ondes magnétoacoustiques (page 103). Pour chacune de ces solutions, nous trouvons les invariants de Riemann, et lorsque cela est possible, nous les écrivons sous forme explicite. À l'annexe A, nous présentons un résumé de ces nouvelles solutions explicites. Nous retrouvons les superpositions E_2E_2 et $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ dans la table A.3, les superpositions EA^ε et $EA^\varepsilon A^\varepsilon$ dans la table A.4, les superpositions $E_2A_2^\varepsilon$, EA^ε et $E_2A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ dans la table A.5, les superpositions $E_2E_2A_2^\varepsilon$, $E_2A_2^\varepsilon$ et EF dans la table A.6 et finalement les superpositions EF , E_2F et EEF dans la table A.7.

Dans le chapitre 7, nous représentons graphiquement quelques-unes de ces solutions à l'aide de la commande Plot3D sur le système de calcul formel *Mathematica*. Puisque ces solutions admettent des fonctions arbitraires, nous introduisons les fonctions elliptiques de Jacobi (fonctions doublement périodiques) afin d'avoir des solutions intéressantes d'un point de vue physique. À titre d'exemple, nous illustrons l'onde double stationnaire $E_2A_2^\varepsilon$ et l'onde triple stationnaire $E_2E_2A_2^\varepsilon$. Par la suite, nous présentons le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles quasi linéaires unidimensionnelles d'évolutions. Nous appliquons finalement le problème de Cauchy à l'onde double non stationnaire EF et démontrons qu'il y a bien une interaction (superposition élastique) entre les deux ondes avant que se produise la catastrophe du gradient.

Dans le chapitre 8, nous présentons la conclusion du mémoire avec un retour sur l'objectif et un résumé des résultats. Par la suite, nous présentons les perspectives de recherche et les domaines d'application reliés à cette recherche, c'est-à-dire les tokamaks avec les configurations fermées de plasma dans un tore, les aurores boréales avec

les ondes d'Alfvén engendrées par reconnexion magnétique et la magnétohydrodynamique relativiste générale pour les plasmas non maxwelliens dans l'étude des quasars, des noyaux galactiques et des effondrements de supernovae.

Dans l'annexe A, nous présentons un résumé des résultats d'ondes simples et d'ondes multiples (ondes doubles et triples). Ces nouvelles solutions sont présentées dans leurs ordres d'apparition dans le mémoire.

Dans l'annexe B, nous présentons un programme Mathematica qui permet de vérifier les solutions explicites dans ce mémoire. De plus, il est expliqué comment les représentations graphiques ont été obtenues sur le système de calcul formel *Mathematica* avec la commande Plot3D.

Chapitre 2

La magnétohydrodynamique idéale

Soit l'écoulement d'un fluide idéal conductif dans un champ magnétique extérieur \vec{H}_{ext} . Sous ces hypothèses, nous savons, de l'électromagnétisme, que ce champ magnétique exercera une force sur chaque particule chargée se trouvant dans le fluide, ce qui va générer un courant électrique dans le fluide. Ce déplacement de charges électriques (un courant) induit un champ magnétique supplémentaire \vec{H}_{ind} (nous n'avons qu'à penser aux électroaimants qui génèrent des champs magnétiques en faisant circuler un courant électrique dans un solénoïde). Ce nouveau champ magnétique va donc s'ajouter au champ magnétique externe, de sorte que le fluide sera maintenant soumis au nouveau champ magnétique $\vec{H} = \vec{H}_{ext} + \vec{H}_{ind}$. Ce nouveau champ magnétique va à nouveau modifier le déplacement de charge dans le fluide et modifier le champ magnétique induit par ce déplacement. Cette interaction complexe entre le comportement hydrodynamique (l'écoulement d'un fluide) et l'électromagnétisme (le champ magnétique dans lequel est plongé l'écoulement) nécessite donc de combiner l'hydrodynamique et l'électromagnétisme, d'où la **magnétohydrodynamique** (MHD). [7]

2.1 Les équations de la magnétohydrodynamique idéale

Dans ce mémoire, nous analyserons le mouvement d'un fluide conductif et idéal (il n'y a pas de viscosité dans le fluide) soumis à un champ magnétique selon les équations de la MHD classique non relativiste, ce qui signifie que les vitesses de l'écoulement sont significativement inférieures à la vitesse de la lumière. Les fluides considérés seront parfaitement conductifs, c'est-à-dire $\sigma = \infty$, où σ est la conductivité électrique, et nous allons négliger la conductivité thermique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'échange de chaleur dans le fluide. De plus, les fluides considérés seront seulement soumis à un gradient de pression hydrodynamique et à une force magnétique ; la gravité est donc négligée. Nous allons donc étudier les équations en 3+1 dimensions

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \text{Équation de continuité} \quad (2.1a)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) = 0, \quad \text{Équation d'Euler} \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) = 0, \quad \text{Équation d'induction du champ magnétique} \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \text{Loi de Gauss pour le champ magnétique} \quad (2.1d)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) = 0, \quad \text{Conservation de l'entropie} \quad (2.1e)$$

où $\rho, \vec{v}, p, \vec{H}$ et κ sont respectivement la densité du fluide, le champ de vitesse, la pression, le champ magnétique et l'indice adiabatique. L'espace des variables indépendantes $\vec{x} = (t, x, y, z)$ est $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ et l'espace des variables dépendantes $\vec{u} = (\rho, p, \vec{v}, \vec{H})$

est l'espace hodographie $\mathcal{H} = \mathbb{R}^8$ avec $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ et $\vec{H} = (H^1, H^2, H^3)$. On a donc un système de 9 équations, de 8 variables $(\rho, p, \vec{v}, \vec{H})$ dépendantes et 4 variables indépendantes (t, x, y, z) .

La dérivée convective d/dt (aussi appelée dérivée particulaire) est donnée par

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla). \quad (2.2)$$

Pour illustrer la signification physique de la dérivée convective, appliquons-la au champ de vitesse \vec{v} .

Définition 2.1.1. La dérivée convective $d\vec{v}/dt$ correspond à l'accélération d'une particule du fluide se déplaçant (on suit la particule dans son déplacement). Pour $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z)$, on a que la variation du champ de vitesse $d\vec{v}$ se décompose en deux parties, de sorte que

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + (d\vec{r} \cdot \nabla) \vec{v}, \end{aligned}$$

où $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$. La première partie correspond à la variation de la vitesse au point considéré pendant l'intervalle dt et la deuxième partie correspond à la différence des vitesses de deux points séparés par le vecteur $d\vec{r}$ au même instant [8]. En divisant par dt , on obtient donc

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v},$$

ce qui correspond à la dérivée convective (2.2) sur le champ \vec{v} .

L'opérateur ∇ , appelé del ou nabla, prend trois significations particulières, selon qu'il agit sur une fonction scalaire, sur un vecteur dans un produit scalaire ou sur un vecteur dans un produit vectoriel.

Définition 2.1.2. Soit la fonction scalaire a et le vecteur $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$. On a

donc

$$\begin{aligned}
 \text{gradient : } \nabla a &= \mathbf{grad} \, a = \left(\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z} \right), \\
 \text{divergence : } \nabla \cdot \vec{A} &= \mathbf{div} \, \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}, \\
 \text{rotationnel : } \nabla \times \vec{A} &= \mathbf{rot} \, \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

2.1.1 Comportement hydrodynamique

La partie du système qui dicte le comportement hydrodynamique provient des équations de l'hydrodynamique

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \text{Équation de continuité} \quad (2.3a)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{F}_{tot} = 0, \quad \text{Équation d'Euler} \quad (2.3b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) = 0. \quad \text{Conservation de l'entropie} \quad (2.3c)$$

Nous pourrons donc modifier légèrement ces équations pour obtenir les équations de la MHD (2.1a), (2.1b) et (2.1e).

Équation de continuité

L'équation (2.3a) est purement hydrodynamique et correspond donc à l'équation (2.1a) de la MHD. La signification physique de cette équation est qu'elle garantit la conservation de la masse lors de l'écoulement des particules dans le fluide.

Équation d'Euler

L'équation (2.3b) nous renseigne sur la compensation entre la force d'inertie hydrodynamique $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$ et les forces agissant sur le fluide pendant l'écoulement. Puisque l'écoulement est considéré comme non visqueux, il y a seulement la force engendrée par le gradient de pression ∇p dans la fluide et la force de Lorentz [9]

$$\vec{F}_M = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}), \quad (2.4)$$

de sorte que $\vec{F}_{tot} = \nabla p + \vec{F}_M$ et l'équation d'Euler pour la MHD devient

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) = 0. \quad (2.5)$$

Avec l'identité vectorielle

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{2} \nabla \vec{A}^2 - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{A}, \quad (2.6)$$

on peut réécrire l'équation (2.1b) comme

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \nabla \vec{H}^2 - (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Pour mieux saisir le sens physique de cette équation, on se rappelle que l'équation d'Euler est l'équivalent de la deuxième loi de Newton pour la mécanique des fluides. En effet, le terme $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$ est équivalent au produit entre la masse et l'accélération (ma) et les deux autres termes correspondent à la somme des forces ($-F_{tot}$), d'où la fameuse loi $F_{tot} = ma$. On note que le gradient de pression ∇p comprend le potentiel gravitationnel qui comprime le fluide.

Conservation de l'entropie

En définissant l'entropie comme $A = p/\rho^k$, l'équation pour la conservation de l'entropie s'écrit comme

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^k} \right) = 0. \quad (2.8)$$

On utilise la dérivée convective, car on demande que l'entropie soit conservée pendant son déplacement dans l'espace spatial, mais aussi son déplacement dans le temps (l'entropie est conservée le long de l'écoulement).

2.1.2 Comportement électromagnétique

Pour la MHD idéale, les équations qui gouvernent le comportement électromagnétique sont

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{Loi de Faraday} \quad (2.9a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = 4\pi \vec{j}, \quad \text{Loi d'Ampère} \quad (2.9b)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}), \quad \text{Loi d'Ohm en présence de champ magnétique} \quad (2.9c)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \text{Loi de Gauss pour le magnétisme} \quad (2.9d)$$

où σ , \vec{j} , \vec{E} et \vec{H} sont respectivement la conductivité électrique, la densité de courant, le champ électrique et le champ magnétique. De plus, nous avons posé que la perméabilité du vide était $\mu_0 = 4\pi$ [10]. Aussi, nous considérons que le champ électrique est constant dans le temps, c'est-à-dire que $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$. Avec ces équations, nous pourrons formuler les équations (2.1c) et (2.1d) et trouver des expressions pour calculer \vec{j} et \vec{E} .

Équation d'induction du champ magnétique

Des équations (2.9a) et (2.9b), nous pouvons éliminer \vec{E} de telle sorte que

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{j} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}).$$

Puisque la conductivité est infinie, nous avons

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{j} = 0,$$

de telle sorte que nous obtenons l'équation d'induction du champ magnétique

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) = 0.$$

En utilisant l'équation (2.9d) et l'identité vectorielle

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B},$$

on peut réécrire l'équation (2.1c) sous la forme équivalente

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{H}(\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{v} = 0. \quad (2.10)$$

Cette équation tient compte de la cinématique (le mouvement) du fluide dans le champ magnétique et c'est elle qui est derrière la complexité de la MHD, telle qu'expliquée au début de ce chapitre. Cette équation d'induction a largement été étudiée, notamment par van Kampen et Felderhof [11] et Tamm [12].

Loi de Gauss pour le champ magnétique

L'équation (2.9d) est purement électromagnétique et correspond donc à l'équation (2.1e) de la MHD. Puisque la divergence du champ magnétique est nulle, on conclut qu'il n'y a pas de sources ou de puits au champ vectoriel \vec{H} . La loi de Gauss pour le champ magnétique implique l'absence de monopoles magnétiques. En effet, puisqu'il n'y a pas de sources et de puits au champ \vec{H} , il ne peut y avoir de charge et de courant magnétique, d'où l'absence de monopôle [13].

Les équations pour le champ électrique et la densité de courant

Des équations (2.9b) et (2.9c), on a que

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{H} - \vec{v} \times \vec{H}.$$

Puisque la conductivité est infinie, on a que

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\sigma} \nabla \times \vec{H} = 0,$$

et donc que

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{H}, \quad (2.11)$$

ce qui est l'équation qui permet de calculer le champ électrique à partir de \vec{v} et \vec{H} .

De l'équation (2.9b), on a que la densité de courant est donnée par

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \vec{H}. \quad (2.12)$$

De cette équation, on trouve immédiatement

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0,$$

puisque $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$ (la divergence d'un rotationnel est nulle). Puisque la divergence de la densité de courant est nulle, on conclut qu'il n'y a pas de sources ou de puits au champ vectoriel \vec{j} et donc qu'il n'y a pas accumulation de charges dans l'espace (x, y, z) [13].

2.2 Lois de conservation

En définissant l'indice adiabatique κ comme le rapport entre les chaleurs spécifiques à pression et à volume constant, c'est-à-dire $\kappa = c_p/c_v$, on a que la loi de la conservation de l'énergie est

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} - \frac{\kappa-2}{\kappa-1} p \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{\kappa-2}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\vec{v} \times \vec{H}) \right], \quad (2.13)$$

où $\kappa \neq 1$. De cette équation, nous pouvons identifier quelques termes, soit

Énergie cinétique	$E_K = \frac{\rho \vec{v}^2}{2}$,
Énergie interne	$E_I = p \left(1 - \frac{\kappa - 2}{\kappa - 1}\right)$
Énergie magnétique	$E_M = \frac{\vec{H}^2}{8\pi}$
Énergie hydrodynamique	$E_H = E_K + E_I$
Densité de courant d'énergie cinétique	$\vec{q}_K = \rho \vec{v} \frac{\vec{v}^2}{2}$
Densité de courant d'énergie interne	$\vec{q}_I = \vec{v} p \left(1 - \frac{\kappa - 2}{\kappa - 1}\right)$
Densité de courant d'énergie magnétique	$\vec{q}_M = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\vec{v} \times \vec{H})$
Densité de courant d'énergie hydrodynamique	$\vec{q}_H = \vec{q}_K + \vec{q}_I$

En utilisant les termes définis ci-haut, on remarque que l'équation (2.13) se décompose en deux lois de conservation.

Loi de conservation pour l'énergie cinétique

$$\frac{\partial}{\partial t} E_K = -\nabla \cdot \vec{q}_K - \vec{v} \cdot \nabla p + \vec{v} \cdot \vec{F}_M \quad (2.14)$$

On voit que le changement d'énergie cinétique d'un certain élément fluide est provoqué par les travaux effectués par le gradient de pression $-\vec{v} \cdot \nabla p$ et la force magnétique $\vec{v} \cdot \vec{F}_M$ et par le flux d'énergie cinétique $-\nabla \cdot \vec{q}_K$. La force magnétique est donnée par

$$\vec{F}_M = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) \quad (2.15)$$

Loi de conservation pour l'énergie magnétique

$$\frac{\partial}{\partial t} E_M = -\nabla \cdot \vec{q}_M - \vec{v} \cdot \vec{F}_M, \quad (2.16)$$

On voit que le changement d'énergie magnétique d'un certain élément fluide est provoqué par le travail effectué par la force magnétique $\vec{v} \cdot \vec{F}_M$ et par le flux d'énergie magnétique $-\nabla \cdot \vec{q}_M$.

Il est aussi possible de définir d'autres lois de conservation pour la quantité de mouvement et pour la vorticité.

Loi de conservation pour la quantité de mouvement

Des équations (2.1a) et (2.1b), on obtient la loi de conservation pour la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) = -\nabla \hat{\Pi}, \quad (2.17)$$

où $\hat{\delta}$ est le delta de Kronecker et $\hat{\Pi}$ est le tenseur de densité de quantité de mouvement donné par

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi}_H + \hat{\Pi}_M = (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \hat{\delta}) + \left(\frac{1}{8\pi} \vec{H}^2 \hat{\delta} - \frac{1}{4\pi} \vec{H} \otimes \vec{H} \right).$$

Loi de conservation pour la vorticité

Formulons le théorème de Kelvin pour la magnétohydrodynamique (MHD). Soit la circulation $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r}$, alors

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_S \nabla \times \frac{\vec{F}}{\rho} dS, \quad (2.18)$$

où $\vec{F} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H})$ et S est la surface de l'élément fluide. De cette équation, on voit que la circulation n'est pas conservée en magnétohydrodynamique. Nous allons maintenant voir comment varie le champ $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ pour les éléments

fluides. En utilisant la définition de la dérivée convective (2.2) et l'identité vectorielle (2.6), on peut réécrire l'équation (2.1b) comme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}).$$

En appliquant l'opération $\nabla \times$ sur cette équation, on trouve, après quelques manipulations,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} &= \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho^2} \nabla \rho \times [\vec{H} \times (\nabla \times \vec{H})] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\rho} [-(\vec{H} \cdot \nabla)(\nabla \times \vec{H}) + ((\nabla \times \vec{H}) \cdot \nabla) \vec{H}] - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{v}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

De cette équation, on voit que les lignes de champ $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ ne bougent pas avec l'élément fluide, mais se diffusent à une vitesse déterminée par le côté droit de cette équation. En appliquant l'opérateur D sur la vorticité $\vec{\omega}$, on obtient

$$D\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (2.20)$$

On peut voir que lorsque $D\vec{\omega} > 0$, alors la vorticité $\vec{\omega}$ augmente dans l'élément fluide et lorsque $D\vec{\omega} < 0$, la vorticité diminue.

Équation d'état associé à l'effet Joule

Dans cette analyse, nous négligeons la conductivité thermique. Une analyse qui tiendrait compte des échanges de chaleur dans le fluide devra inclure l'équation d'état

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) S = \frac{Q}{\rho T} = \frac{\vec{j}^2}{\rho T \sigma},$$

où S est l'entropie, $Q = \vec{j}^2/\sigma$ est l'évolution de l'effet Joule par unité de volume et T est la température [9].

2.3 Algèbre de symétries pour les équations de la MHD

Nous allons chercher les opérateurs infinitésimaux des symétries ponctuelles des équations de la MHD données par le système (2.1). Cette section s'inspire de l'ouvrage [14]. Pour plus de détail sur les symétries des équations de la MHD, voir l'article [15]. Le générateur infinitésimal de symétries pour le système (2.1) est un champ de vecteurs de la forme

$$\begin{aligned}\alpha = & \eta^x \partial_x + \eta^y \partial_y + \eta^z \partial_z + \eta^t \partial_t + \phi^\rho \partial_\rho + \phi^p \partial_p + \phi^{v_x} \partial_{v_x} + \phi^{v_y} \partial_{v_y} + \phi^{v_z} \partial_{v_z} \quad (2.21) \\ & + \phi^{H_x} \partial_{H_x} + \phi^{H_y} \partial_{H_y} + \phi^{H_z} \partial_{H_z},\end{aligned}$$

où les $\eta^x, \eta^y, \dots, \phi^{H_z}$ sont des fonctions des variables $(\vec{x}, t, \rho, p, \vec{v}, \vec{H})$. Nous appliquons le critère de symétrie, c'est-à-dire la première prolongation du champ α sur les équations de la MHD (2.1)

$$\text{pr}^{(1)}\alpha(\Delta) = 0,$$

où le système $\Delta = 0$, correspondant aux équations de la MHD(2.1) a lieu. Nous trouvons le système d'équations déterminantes et leurs solutions sont

$$\begin{aligned}\eta^x &= k_2 + k_3 5t - k_8 y - k_9 z + k_{11} x, \\ \eta^y &= k_3 + k_6 t + k_8 x - k_{10} z + k_{11} y, \\ \eta^z &= k_4 + k_7 t + k_9 x + k_{10} y + k_{11} z, \\ \eta^t &= k_1 + k_{12} t, \\ \phi^\rho &= -2(k_{11} - k_{12} - k_{13})\rho, \\ \phi^p &= 2k_{13}p,\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
\phi^{v_x} &= k_5 - k_8 v_y - k_9 v_z + (k_{11} - k_{12}) v_x, \\
\phi^{v_y} &= k_6 + k_8 v_x - k_{10} v_z + (k_{11} - k_{12}) v_y, \\
\phi^{v_z} &= k_7 + k_9 v_x + k_{10} v_y + (k_{11} - k_{12}) v_z, \\
\phi^{H_x} &= k_{13} H_x - k_8 H_y - k_9 H_z, \\
\phi^{H_y} &= k_{13} H_y + k_8 H_x - k_{10} H_z, \\
\phi^{H_z} &= k_{13} H_z + k_9 H_x + k_{10} H_y,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

où k_1, \dots, k_{13} sont les 13 constantes d'intégration du système déterminant. Pour trouver une base de l'algèbre de symétries, nous posons une constante $k_i = 1$ et les autres $k_j = 0$, pour $i \neq j$. L'algèbre de symétries des équations de la MHD en (3+1) dimensions est générée par les 13 champs de vecteurs infinitésimaux

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 &= \partial_t, & \mathfrak{g}_2 &= \partial_x, & \mathfrak{g}_3 &= \partial_y, & \mathfrak{g}_4 &= \partial_z, \\
\mathfrak{g}_5 &= t\partial_x + \partial_{v_x}, & \mathfrak{g}_6 &= t\partial_y + \partial_{v_y}, & \mathfrak{g}_7 &= t\partial_z + \partial_{v_z}, \\
\mathfrak{g}_8 &= x\partial_y - y\partial_x + v_x\partial_{v_y} - v_y\partial_{v_x} + H_x\partial_{H_y} - H_y\partial_{H_x}, \\
\mathfrak{g}_9 &= y\partial_z - z\partial_y + v_y\partial_{v_z} - v_z\partial_{v_y} + H_y\partial_{H_z} - H_z\partial_{H_y}, \\
\mathfrak{g}_{10} &= z\partial_x - x\partial_z + v_z\partial_{v_x} - v_x\partial_{v_z} + H_z\partial_{H_x} - H_x\partial_{H_z}, \\
\mathfrak{g}_{11} &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - 2\rho\partial_\rho + v_x\partial_{v_x} + v_y\partial_{v_y} + v_z\partial_{v_z}, \\
\mathfrak{g}_{12} &= t\partial_t + 2\rho\partial_\rho - v_x\partial_{v_x} - v_y\partial_{v_y} - v_z\partial_{v_z}, \\
\mathfrak{g}_{13} &= 2\rho\partial_\rho + 2p\partial_p + H_x\partial_{H_x} + H_y\partial_{H_y} + H_z\partial_{H_z}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Les générateurs $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_4$ représentent les translations en t, x, y et z . Les générateurs $\mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_6, \mathfrak{g}_7$ représentent les *boosts* galiléens dans les directions v_x, v_y et v_z respectivement. Les générateurs $\mathfrak{g}_8, \mathfrak{g}_9, \mathfrak{g}_{10}$ sont les rotations en fonction des variables $t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, H_x, H_y$ et H_z . Le générateur \mathfrak{g}_{11} représente une dilatation (changement d'échelle) en fonction des variables x, y, z, ρ, v_x, v_y et v_z . Le générateur \mathfrak{g}_{12} représente une dilatation (changement d'échelle) en fonction des variables t, ρ, v_x, v_y et v_z . Le générateur \mathfrak{g}_{13} représente une dilatation (changement d'échelle) en fonction des variables ρ, p, H_x, H_y et H_z . Le groupe de transformations correspondant à l'al-

gèbre engendrée par les générateurs du système (2.24) peut être trouvé dans l'article [15].

Le groupe de transformations associé aux générateurs \mathfrak{g}_5 , \mathfrak{g}_6 et \mathfrak{g}_7 (les boosts galiléens) est donné par les expressions,

$$\begin{aligned} t &= t', & \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{v}_0 &= \vec{v}(\vec{x}', t')', & \rho &= \rho' \\ \vec{x} - \vec{v}_0 t &= \vec{x}', & \vec{H}(\vec{x}, t) &= \vec{H}(\vec{x}', t')', & p &= p', \\ \vec{E}(\vec{x}, t) - \vec{v}_0 \times \vec{H}(\vec{x}, t) &= \vec{E}(\vec{x}', t')', \end{aligned} \quad (2.25)$$

où les variables non primées sont dans un référentiel stationnaire et les variables primées sont dans un système qui se déplace à vitesse constante \vec{v}_0 . On appelle ces expressions les transformations galiléennes. Cela signifie que les équations de la MHD sont invariantes par rapport à ces transformations (elles gardent la même forme). De plus, il est possible de faire les translations sur les variables indépendantes

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} - \vec{x}_0, \quad t \rightarrow t - t_0, \quad (2.26)$$

où \vec{x}_0 et t_0 sont constants.

Chapitre 3

Les ondes simples de Riemann décrites par les systèmes quasi linéaires

Ce chapitre porte sur les notions de base concernant les ondes simples de Riemann (solution de rang 1). Ce chapitre s'inspire principalement de l'article de Grundland et al. [1], dans lequel sont tirés les théorèmes qui seront présentés. Une description des ondes de Riemann sera présentée pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles (ÉDP) quasi linéaires et multidimensionnelles. Par conséquent, le problème de Cauchy pour les ondes simples sera abordé. Quelques exemples simples seront présentés afin d'illustrer la théorie.

Soit un système non elliptique de m ÉDP quasi linéaires de n variables indépendantes x^μ et ℓ variables dépendantes u^j de la forme

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^{\ell} a_j^{s\mu}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (3.1)$$

Soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}^\ell$ l'espace hodographique des variables dépendantes $u = (u^1, \dots, u^\ell)$ et $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ l'espace euclidien des variables indépendantes $x = (x^1, \dots, x^n)$. Avec l'application lisse de classe C^∞

$$v : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H},$$

on peut considérer la différentielle de v , qui est l'application linéaire

$$dv|_x : T_x \mathcal{E} \rightarrow T_{v(x)} \mathcal{H},$$

pour chaque point $x \in \mathcal{E}$. Pour chaque point $x_0 \in \mathcal{E}$ et pour chaque application lisse $v : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$, on considère le sous-ensemble de toutes les applications linéaires telles que

$$\text{rang}(dv|_{x_0}) = 1 \tag{3.2}$$

Définition 3.0.1. Une paire $(x_0, dv|_{x_0})$, pour $x_0 \in \mathcal{E}$ et où $v : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ est une application lisse, est appelée un **élément intégrable simple** si l'équation (3.2) est respectée.

Théorème 3.0.2. *Si $(x_0, dv|_{x_0})$ est un élément intégrable simple (c'est-à-dire que $\text{rang}(dv|_{x_0}) = 1$ selon la définition 3.0.1), alors il existe $n+\ell$ nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta^1, \dots, \beta^\ell$ tels que les dérivées sont décomposables sous la forme*

$$\frac{\partial v^j}{\partial x^\mu}(x_0) = \alpha_\mu \beta^j.$$

Preuve. Si $\text{rang}(dv|_{x_0}) = 1$, alors la matrice $\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^\mu} \right)$ est aussi de rang 1. Du théorème du rang, il existe une matrice avec la décomposition énoncée dans le théorème. \square

Si $v : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ est lisse et que la paire $(x_0, dv|_{x_0})$ est un élément intégrable simple, alors il existe un voisinage \mathcal{K} de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \mathcal{K}$, la paire $(x_1, dv|_{x_1})$ est aussi un élément intégrable simple. Cela induit donc que sur \mathcal{K} , il existe une collection

de $n + \ell$ fonctions réelles lisses $\alpha_\mu : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\beta^j : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour chaque point $x_1 \in \mathcal{K}$ on a

$$\frac{\partial v^j}{\partial x^\mu}(x_1) = \alpha_\mu(x_1)\beta^j(x_1).$$

Cette notion locale d'élément intégrable simple sera utilisée dans ce mémoire afin d'obtenir les solutions d'ondes de Riemann associées au système (3.1).

Définition 3.0.3. Une solution $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ du système quasi linéaire (3.1) est appelée une **onde de Riemann** s'il existe un sous-ensemble ouvert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ et des fonctions réelles $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta^1, \dots, \beta^\ell$ et $\xi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que pour chaque $x_0 \in \mathcal{D}$ on a

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu}(x_0) = \xi(x_0)\alpha_\mu(x_0)\beta^j(x_0). \quad (3.3)$$

Pour calculer les ondes de Riemann décrites par le système (3.1), il faut premièrement demander l'existence des fonctions de classe C^1 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^\ell : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l a_j^{s\mu}(u) \lambda_\mu(u) \gamma^j(u) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4)$$

sur un sous-ensemble ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$. L'équation (3.4) correspond à la **relation d'onde**. En supposant que de telles fonctions existent, on identifie l'ensemble des fonctions γ^j comme étant un champ vectoriel tangent sur \mathcal{H} et on considère la courbe intégrale du champ vectoriel $\gamma = \gamma^j(u) \frac{\partial}{\partial u^j}$, qui est une courbe de classe C^1 Γ dans \mathcal{H} avec un paramètre R . La courbe Γ est donc l'image de l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ définie par l'ensemble d'équations aux dérivées ordinaires (ÉDO)

$$\frac{df^j}{dR} = \gamma^j(f^1, f^2, \dots, f^\ell), \quad j = 1, 2, \dots, \ell. \quad (3.5)$$

Pour construire les fonctions λ et γ qui satisfont le système (3.4), il faut trouver des

$\gamma_1, \dots, \gamma_n$ qui satisfont

$$\text{rang} (a_j^{s\mu} \lambda_\mu) < \ell.$$

Pour chaque λ_μ , le γ^j correspondant est une solution de

$$(a_j^{s\mu} \lambda_\mu) \gamma^j = 0,$$

C'est-à-dire

$$\det (a_j^{s\mu} \lambda_\mu) = 0, \quad (3.6)$$

ce qui correspond à la **relation de dispersion**. Il est possible d'interchanger le rôle de γ et λ de telle sorte qu'on puisse chercher les fonctions γ telles que

$$\text{rang} (a_j^{s\mu} \gamma^j) < n,$$

et les fonctions γ_μ seront des solutions de

$$(a_j^{s\mu} \gamma^j) \lambda_\mu = 0.$$

Supposons qu'on a construit un ensemble de fonctions (λ, γ) sur $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ qui satisfait (3.4) de telle sorte que Γ soit une courbe intégrale du champ vectoriel lisse γ sur \mathcal{U} . Soit les fonctions $\lambda_\mu^*(u)$ qui correspondent aux fonctions $\lambda_\mu(u)$ qui sont «pulled back» à la sous-variété $\Gamma \subset \mathcal{H}$. Puisque les fonctions $\lambda_\mu(u)$ sont ramenées sur la courbe Γ , elles sont donc des fonctions qui dépendent du paramètre R . Pour simplifier la notation, nous allons définir $f^*(\lambda_\mu)$ par $\lambda_\mu(R)$. Soit l'application de classe C^1 $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et définissons R comme une fonction implicite sur \mathcal{E} par la relation

$$R = \phi(\lambda_\mu(R)x^\mu). \quad (3.7)$$

Théorème 3.0.4. *Supposons que (λ, γ) est un ensemble de fonctions C^1 qui satisfait*

l'équation (3.4) et que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ est une courbe intégrale définie par le champ vectoriel $\gamma^j(u) \frac{\partial}{\partial u^j}$ sur \mathcal{H} avec le paramètre R . Supposons que pour une application C^1 $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble de relations implicites entre les variables u^j , x^μ et R

$$R = \phi(\lambda_\mu(R)x^\mu), \quad (3.8a)$$

$$u^j = f^j(R) \quad (3.8b)$$

peuvent être solutionnées de sorte que R et u^j peuvent être donnés comme des graphes sur le sous-ensemble ouvert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$; alors les fonctions

$$u^j = f^j(R(x)), \quad (3.8c)$$

forment une solution exacte du système quasi linéaire (3.1). On appelle cette solution une **onde de Riemann** (appelée aussi *onde simple*). **La fonction scalaire $R(x)$ est appelée invariant de Riemann.**

Preuve. De l'équation (3.8b), on a

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \frac{df^j}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\mu},$$

tandis que de l'équation (3.8a), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x^\nu} &= \left(x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\nu} + \lambda_\mu(R) \delta_\nu^\mu \right) \dot{\phi} \\ &= \frac{\dot{\phi} \lambda_\nu(R)}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi}}, \quad \text{pour } 1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi} \neq 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où δ_ν^μ est le delta de Kronecker et $\dot{\phi}$ correspond à la dérivée de ϕ par son argument $\lambda_\mu(R)x^\mu$. En combinant ces deux résultats, on peut écrire

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \frac{df^j}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} = \frac{df^j}{dR} \left(\frac{\dot{\phi} \lambda_\nu(R)}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi}} \right). \quad (3.10)$$

En utilisant l'équation (3.5), on obtient

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\dot{\phi}}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi}} \right) \gamma^j \lambda_\mu = \xi(x) \gamma^j \lambda_\mu. \quad (3.11)$$

De la définition 3.0.3, on voit que $\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu}$ peut être décomposé comme une onde de Riemann de rang 1 ($\text{rang} \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 1$) lorsque $1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi} \neq 0$. On peut vérifier que u^j est bien une solution exacte. En substituant (3.11) dans (3.1), on obtient

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l a_j^{s\mu}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l \xi(x) a_j^{s\mu} \gamma^j \lambda_\mu = \xi(x) \sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l a_j^{s\mu} \gamma^j \lambda_\mu = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

puisque l'équation (3.4) a lieu pour chaque point de \mathcal{U} et en particulier le long de $\Gamma \subset \mathcal{U}$. De l'égalité (3.10), on obtient que la condition de compatibilité de (3.11) est automatiquement satisfaite [16]. En effet, puisque ϕ est une fonction arbitraire, $\xi(x)$ est aussi arbitraire. \square

Lorsque $1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi} = 0$ dans l'équation (3.9), on obtient que l'invariant R devient infini, ce qu'on appelle la **catastrophe du gradient**. Cette discontinuité peut, dans l'hydrodynamique et la MHD, correspondre à une onde de choc [4].

On pourrait vouloir utiliser une paramétrisation qui éliminerait la fonction arbitraire ϕ de l'équation (3.8a). On peut réécrire les équations (3.4), (3.5) et (3.8) comme

$$\begin{aligned} u(x) &= \bar{f}(\bar{R}(x)), & \text{où } \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} &= \bar{\gamma}(\bar{f}), \\ \bar{R}(x) &= \bar{\lambda}_\mu(\bar{R}(x))x^\mu. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En supposant que ϕ est inversible et avec les transformations

$$\begin{aligned} \bar{R} &:= \phi^{-1} \circ R, & \bar{\lambda}_\mu(\bar{R}) &:= \lambda_\mu(R), \\ \bar{f} &:= f \circ \phi, & \gamma(f \circ \phi) \frac{d\phi}{d\bar{R}} &:= \bar{\gamma}(\bar{f}), \end{aligned}$$

on a

$$\bar{R}(x) = \phi^{-1} \circ R(x) = \lambda_\mu(R(x))x^\mu = \bar{\lambda}_\mu(\bar{R}(x))x^\mu,$$

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} = \frac{d}{d\bar{R}}(f \circ \phi(\bar{R})) = \frac{df(\phi(\bar{R}))}{dR} \frac{d\phi}{d\bar{R}} = \gamma(f \circ \phi(\bar{R})) \frac{d\phi}{d\bar{R}} =: \bar{\gamma}(\bar{f})$$

$$u(x) = f(R(x)) = (\bar{f} \circ \phi^{-1})R(x) = \bar{f}(\phi^{-1} \circ R(x)) = \bar{f}(\bar{R}),$$

alors les relations (3.8) et (3.12) sont équivalentes.

Théorème 3.0.5. *Soit $R \rightarrow f(R)$ une courbe C^1 dans l'espace \mathcal{H} . Considérons les m champs vectoriels*

$$X_s = \sum_{\mu=1}^n A^{s\mu}(R) \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad s = 1, 2, \dots, m$$

sur l'espace \mathcal{E} , où

$$A^{s\mu}(R) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j^{s\mu}(f(R)) \frac{\partial f^j}{\partial R}, \quad (3.13)$$

et où $a_j^{s\mu}(f(R))$ sont les coefficients donnés dans l'équation (3.1). Supposons qu'il existe un invariant $F(R, x)$ pour les champs vectoriels $\{X_s\}_{s=1}^m$. Si la condition

$$F(R, x) = 0, \quad (3.14)$$

peut être solutionnée pour exprimer R comme une fonction de x , alors

$$u^j = f^j(R(x)), \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (3.15)$$

est une solution explicite du système quasi linéaire (3.1).

Preuve. Soit $m < n$, où m est le nombre de variables dépendantes et n le nombre de variables indépendantes. Les champs vectoriels $\{X_s\}_{s=1}^m$, qui commutent (puisque R est un paramètre), ont au moins $n - m$ invariants fonctionnellement indépendants (en supposant que les champs vectoriels X_s sont linéairement indépendants). Supposons maintenant que $F(R)$ est l'un des invariants de ces champs vectoriels, de telle sorte que, du théorème des fonctions implicites, il soit possible de solutionner l'équation $F(R, x) = 0$ par rapport à R si

$$\frac{\partial R}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F/\partial x^\mu}{\partial F/\partial R}, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Puisque F est un invariant des champs vectoriels X_s , on obtient

$$\sum_{\mu=1}^n A^{s\mu}(R) \frac{\partial R}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, \dots, m.$$

De l'équation (3.13), on a

$$\sum_{\mu=1}^n a_j^{s\mu}(f(R)) \frac{df^j}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, \dots, m,$$

et de (3.15), on a donc

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \frac{df^j}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\mu}, \quad j = 1, \dots, \ell; \mu = 1, \dots, n,$$

ce qui est bel et bien une solution du système quasi linéaire (3.1) □

3.1 Le problème de Cauchy pour les ondes de Riemann

Considérons le problème aux conditions initiales

$$\frac{\partial u^j}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\ell} A_p^{jk}(u^1, \dots, u^{\ell}) \frac{\partial u^p}{\partial x^k} = 0, \quad j = 1, \dots, \ell, \quad (3.16)$$

$$t = 0 \quad : \quad u(0, x^1, \dots, x^n) = u_0(\bar{x}),$$

où $u_0(\bar{x})$ est une fonction C^1 dans un sous-ensemble ouvert de l'hyperplan \mathbb{P} défini par $t = 0$ et où $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$. Supposons qu'un ensemble de fonctions $C^1(\lambda, \gamma) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{\ell}$ satisfait la relation d'onde (3.4), qui s'écrit comme

$$(\delta_p^j \lambda_0^s + A_p^{jk} \lambda_k) \gamma_s^p = 0, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Supposons que $u = f(R)$ est la solution unique du problème aux valeurs initiales (PVI)

$$\frac{df}{dR} = \gamma(f), \quad f(R_0) = u_0(\bar{x}_0), \quad (3.17)$$

pour un point $R_0 \in \mathbb{R}$ et $\bar{x}_0 \in \mathbb{P}$.

Théorème 3.1.1. *Supposons qu'il existe une fonction réelle ξ sur un certain sous-ensemble $\Omega \subset \mathcal{E}$ qui contient $(0, \bar{x}_0)$ de sorte que*

1)

$$\frac{\partial u_0^j}{\partial x^k} = \xi(0, \bar{x}) \gamma^j(u_0(\bar{x})) \lambda_k(u_0(\bar{x})),$$

pour tout $\bar{x} \in \Omega \cap \mathbb{P}$

2)

$$F(x, R) = \phi(\lambda_\mu(f(R))x^\mu) - R,$$

où ϕ est une unique solution de l'équation

$$\frac{d\phi}{ds} = \xi(0, \bar{x}) \frac{1}{1 + x^k \frac{d\lambda_k}{dR}}, \quad s = \lambda_k(f(R))x^k,$$

et qui sera nulle pour tout point dans le voisinage de $(0, \bar{x}, R_0) \in \mathcal{E} \times \Gamma$ et que

3)

$$\frac{\partial F}{\partial R}(0, \bar{x}, R_0) \neq 0.$$

Alors le problème de Cauchy pour le système (3.16) a une solution unique d'onde de Riemann dans un voisinage $\mathcal{N}(0, \bar{x})$ de $(0, \bar{x})$

Preuve. On sait qu'une solution d'onde de Riemann est une solution $u(x)$ du système (3.16) qui satisfait

$$du^j(x) = \xi(x)\gamma^j(u(x))\lambda(u(x)), \quad (3.18)$$

où $\lambda(u(x)) = \lambda_\mu(u(x))dx^\mu$, $\mu = 0, 1, \dots, n$, pour une fonction non nulle $\xi(x)$. Du théorème 3.0.4, si $u = f(R)$ est une solution du PVI (3.17) et que R est implicitement définie comme une fonction de x par

$$R = \phi(\lambda_\mu(R)x^\mu),$$

alors $u = f(R)$ est en effet une solution d'onde de Riemann avec

$$\xi(x) = \frac{\dot{\phi}}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi}}, \quad 1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \dot{\phi} \neq 0,$$

où $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{ds}$, $s = \lambda_\mu(R)x^\mu$. Si la donnée initiale $u_0(\bar{x})$ satisfait la condition 1, alors ϕ doit satisfaire

$$\frac{d\phi}{ds} = \xi(0, \bar{x}) \frac{1}{1 + x^k \frac{d\lambda_k}{dR}}, \quad s = \lambda_k(f(R))x^k.$$

Des conditions 2 et 3 et par le théorème des fonctions implicites, il est possible de solutionner $F(x, R) = 0$ afin d'obtenir R comme une fonction qui dépend uniquement de x . La fonction $u = f(R)$ est une solution d'onde de Riemann unique qui solutionne le PVI (3.16) dans le voisinage

$$\mathcal{N}(0, \bar{x}) \subseteq \Omega.$$

□

Ce théorème permet de garantir l'existence et l'unicité de solution d'onde de Riemann pour un problème de Cauchy donné, mais ne donne pas de méthodes pour construire les paires $(R_0, \bar{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{P}$ qui vont satisfaire les conditions du théorème (une fois que la fonction ϕ est déterminée). Pour étudier de telles paires, il est possible de procéder ainsi.

Supposons que le système de ÉDO

$$\frac{df}{dR} = \gamma(f) \tag{3.19}$$

à la solution générale

$$u = f(R; c_1, \dots, c_\ell),$$

et qu'on fixe la valeur de $\bar{x} \in \mathbb{P}$, alors la relation implicite

$$F(\bar{x}_0; R; c) := \phi((\lambda_k(f(R; c_1, \dots, c_\ell))\bar{x}_0^k) - R = 0,$$

dépend de ℓ constantes arbitraires $c_j, j = 1, \dots, \ell$. Supposons que

$$\frac{\partial F}{\partial c_\ell} \neq 0, \quad (3.20)$$

à un certain point de l'espace des variables x, R et c^j . Du théorème des fonctions implicites, il existe une fonction unique et différentiable τ telle que

$$c_\ell = \tau(\bar{x}; R; c_1, \dots, c_{\ell-1}),$$

et $F(\bar{x}; R; c) = 0$ est satisfait identiquement dans un certain voisinage ou (3.20) est satisfait. Dans ce cas, la solution générale de l'ÉDO (3.19) peut s'exprimer comme

$$u^j = f^j(R; c_1, \dots, c_{\ell-1}; \tau(\bar{x}, R, c_1, \dots, c_{\ell-1})).$$

À \bar{x} , la fonction $u^j(x)$ prend la valeur $u^j(0, \bar{x}) = u_0^j(\bar{x})$. Dans ce cas, on obtient un système de ℓ équations avec ℓ inconnus $R, c_1, \dots, c_{\ell-1}$:

$$u_0^j(\bar{x}) = f^j(R; c_1, \dots, c_{\ell-1}; \tau(\bar{x}, R, c_1, \dots, c_{\ell-1})), \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Une fois que les nombres $R, c_1, \dots, c_{\ell-1}$ sont obtenus, on obtient la fonction unique qui satisfait le PVI (3.17) et la paire appropriée \bar{x}, R qui satisfait la condition 2 du théorème 3.1.1.

3.2 Certains exemples simples

Exemple 3.1. Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} + u \frac{\partial u}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} + \dots + u^n \frac{\partial u}{\partial x^n} = 0, \quad (3.21)$$

avec la condition initiale

$$t = 0 \quad : \quad u(0, x^1, x^2, \dots, x^n) = \psi(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (3.22)$$

Pour cette équation, l'équation d'onde (3.4) prend la forme

$$(\lambda_0 + u\lambda_1 + u^2\lambda_2 + \dots + u^n\lambda_n)\gamma = 0,$$

où γ est arbitraire et où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Pour $\gamma \neq 0$, on obtient

$$\lambda_0 = -u\lambda_1 - u^2\lambda_2 - \dots - u^n\lambda_n,$$

tel que le vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ devient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ &= (-u\lambda_1 - u^2\lambda_2 - \dots - u^n\lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ &= \lambda_1(-u, 1, 0, \dots, 0) + \lambda_2(-u^2, 0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \lambda_n(-u^n, 0, \dots, 0, 1) \\ &= \lambda_1\Lambda^1 + \lambda_2\Lambda^2 + \dots + \lambda_n\Lambda^n. \end{aligned}$$

On voit donc que les vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ sont engendrés par l'ensemble de vecteurs linéairement indépendants $\{\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^n\}$.

Supposons que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_i = \alpha_i(u)$, $i > 1$ où les $\alpha_i(u)$ sont des fonctions de u .

On a donc que

$$\boldsymbol{\lambda} = \Lambda^1 + \alpha_2(u)\Lambda^2 + \dots + \alpha_n(u)\Lambda^n,$$

et

$$\lambda_0 = -u - u^2\alpha_2(u) - \dots - u^n\alpha_n(u).$$

De l'équation (3.8a), on a

$$\begin{aligned}
 R &= \phi[\lambda_\mu x^\mu] = \phi[\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_n x^n] \\
 &= \phi[(-u - u^2 \alpha_n - \dots - u^n \alpha_n)x^0 + \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_n x^n] \\
 &= \phi[x^1 - ux^0 + \alpha_2(x^2 - u^2 x^0) + \dots + \alpha_n(x^n - u^n x^0)].
 \end{aligned}$$

De l'équation (3.8b), on trouve

$$u = f(R) = f \circ \phi[x^1 - ux^0 + \alpha_2(x^2 - u^2 x^0) + \dots + \alpha_n(x^n - u^n x^0)].$$

En définissant $F := f \circ \phi$, on obtient finalement

$$u(x^0, x^1, \dots, x^n) = F[x^1 - ux^0 + \alpha_2(u)(x^2 - u^2 x^0) + \dots + \alpha_n(u)(x^n - u^n x^0)].$$

De plus, puisque les vecteurs λ sont engendrés par les vecteurs $\{\Lambda^1, \Lambda^2, \dots, \Lambda^n\}$, on cherche la solution sous une forme plus générale

$$R = \phi(\Lambda_\mu^1 x^\mu, \Lambda_\mu^2 x^\mu, \dots, \Lambda_\mu^n x^\mu) = \phi(-ux^0 + x^1, -u^2 x^0 + x^2, \dots, -u^n x^0 + x^n),$$

et donc

$$\begin{aligned}
 u(x^0, x^1, \dots, x^n) &= f(R) = f \circ \phi(-ux^0 + x^1, -u^2 x^0 + x^2, \dots, -u^n x^0 + x^n) \\
 &= F(-ux^0 + x^1, -u^2 x^0 + x^2, \dots, -u^n x^0 + x^n).
 \end{aligned}$$

De la condition initiale $u(0, x^1, \dots, x^n) = \psi(x^1, \dots, x^n)$ pour $x^0 = 0$, on trouve

$$\psi(x^1, \dots, x^n) = F(x^1, \dots, x^n).$$

La solution soumise aux conditions initiales (3.22) est donc

$$u(x^0, x^1, \dots, x^n) = \psi(-ux^0 + x^1, -u^2 x^0 + x^2, \dots, -u^n x^0 + x^n).$$

Dans le cas où $n = 2$ avec $x^0 := t$, $x^1 := x$ et $x^2 := y$, l'équation (3.21) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

et sa solution est donnée par

$$u(t, x, y) = \psi(-ut + x, -u^2t + y).$$

Exemple 3.2. Soit le système de deux ÉDP

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + u^1 \frac{\partial u^2}{\partial y} = 0, \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^1}{\partial y} = 0, \quad (3.23b)$$

avec les variables indépendantes x, y, t et les variables dépendantes u^1, u^2 qui correspondent aux composantes du vecteur $u = (u^1, u^2)$. En décomposant les dérivées partielles avec l'équation (3.11), on obtient

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} \sim \gamma^1 \lambda_0, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x} \sim \gamma^2 \lambda_1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial y} \sim \gamma^2 \lambda_2, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} \sim \gamma^2 \lambda_0, \quad \frac{\partial u^1}{\partial x} \sim \gamma^1 \lambda_1, \quad \frac{\partial u^1}{\partial y} \sim \gamma^1 \lambda_2,$$

de sorte que le système (3.23) devient

$$\begin{aligned} \gamma^1 \lambda_0 + \gamma^2 \lambda_1 + u^1 \gamma^2 \lambda_2 &= 0, \\ \gamma^2 \lambda_0 + u^2 \gamma^1 \lambda_1 + \gamma^1 \lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

ou bien, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 + u^1 \lambda_2 \\ u^2 \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

La relation de dispersion de l'équation (3.6) nous donne

$$\lambda_0^\epsilon = \epsilon \sqrt{(\lambda_1 + u^1 \lambda_2)(u^2 \lambda_1 + \lambda_2)}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Pour $\boldsymbol{\lambda}^\epsilon = (\lambda_0^\epsilon, \lambda_1, \lambda_2)$, on obtient

$$\boldsymbol{\lambda}^\epsilon = \left(\epsilon \sqrt{(\lambda_1 + u^1 \lambda_2)(u^2 \lambda_1 + \lambda_2)}, \lambda_1, \lambda_2 \right), \quad \epsilon = \pm 1.$$

En solutionnant le système (3.24) en normalisant $\gamma^1 = 1$, on trouve

$$\gamma^2 = -\epsilon \sqrt{\frac{u^2 \lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + u^1 \lambda_2}}, \quad \epsilon = \pm 1,$$

et on trouve donc

$$\boldsymbol{\gamma}^\epsilon = (\gamma^1, \gamma^2) = \left(1, -\epsilon \sqrt{\frac{u^2 \lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + u^1 \lambda_2}} \right), \quad \epsilon = \pm 1.$$

Cas 1 : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\phi = id$ et $\epsilon = +1$. Des équations (3.5) et (3.8b), on a le système

$$\frac{du^1}{dR} = 1, \quad \frac{du^2}{dR} = -\sqrt{\frac{u^2 + 1}{1 + u^1}}.$$

En solutionnant la première et en substituant u^1 dans la deuxième, on trouve

$$u^1 = R + c^1, \quad u^2 = \left(c_2 - \sqrt{R + c_1 + 1} \right)^2 - 1, \quad (3.25)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration. De l'équation (3.8a) avec $\phi = id$, on trouve

$$R = \lambda_\mu x^\mu = \lambda_0 t + \lambda_1 x + \lambda_2 y = \sqrt{(1 + R + c_1)} \left(c_2 - \sqrt{R + c_1 + 1} \right) t + x + y.$$

En solutionnant, on obtient

$$R_\pm = \left(\frac{c_2 t \pm \sqrt{c_2^2 t^2 + 4(1+t)(x+y+c_1+1)}}{2(1+t)} \right)^2 - c_1 - 1.$$

En substituant ce résultat dans les équations (3.25), on trouve les solutions explicites

$$u_{\pm}^1(x, y, t) = \left(\frac{c_2 t \pm \sqrt{c_2^2 t^2 + 4(1+t)(x+y+c_1+1)}}{2(1+t)} \right)^2 - 1,$$

$$u_{\pm}^2(x, y, t) = \left(c_2 - \frac{c_2 t \pm \sqrt{c_2^2 t^2 + 4(1+t)(x+y+c_1+1)}}{2(1+t)} \right)^2 - 1.$$

Cas 2 : $\lambda_1 = \lambda_2 = R$, $\phi = id$ et $\epsilon = +1$. Pour ce cas, nous obtenons encore

$$u^1 = R + c^1, \quad u^2 = \left(c_2 - \sqrt{R + c_1 + 1} \right)^2 - 1. \quad (3.26)$$

Pour le calcul de R , on trouve cette fois-ci

$$R = \lambda_\mu x^\mu = \lambda_0 t + \lambda_1 x + \lambda_2 y = R \sqrt{1 + R + c_1} \left(c_2 - \sqrt{1 + R + c_1} \right) t + Rx + Ry,$$

et donc

$$1 = \sqrt{1 + R + c_1} \left(c_2 - \sqrt{1 + R + c_1} \right) t + x + y.$$

En solutionnant, on trouve les racines

$$R_{\pm} = \frac{c_2^2 t + 2(x+y-1) \pm c_2 \sqrt{t} \sqrt{c_2^2 t + a(x+y-1)}}{2t} - c_1 - 1.$$

En substituant ce résultat dans les équations (3.26), on trouve les autres solutions explicites

$$u_{\pm}^1(x, y, t) = \frac{c_2^2 t + 2(x+y-1) \pm c_2 \sqrt{t} \sqrt{c_2^2 t + c_1(x+y-1)}}{2t} - 1,$$

$$u_{\pm}^2(x, y, t) = \left(c_2 - \sqrt{\frac{c_2^2 t + 2(x+y-1) \pm c_2 \sqrt{t} \sqrt{c_2^2 t + c_1 x + y - 1}}{2t}} \right)^2 - 1.$$

Chapitre 4

Les éléments intégraux simples et les ondes simples de la MHD

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode des invariants de Riemann aux équations de la MHD. Nous trouvons premièrement les éléments intégraux simples pour les ondes entropiques, les ondes d'Alfvén et les ondes magnétoacoustiques. Par la suite, nous présentons les solutions d'ondes simples associées à ces éléments intégraux simples. La stabilité de ces solutions d'ondes simples a été discutée par Chandrasekhar [17] et van Kampen et Fellerhof [11]. Ce chapitre se base principalement sur les articles de Grundland [18], [19], [20] et Zajczkowski [21].

4.1 Les éléments intégraux simples de la MHD

Nous allons maintenant étudier le système d'équations pour la MHD (2.1) à l'aide de la méthode des invariants de Riemann. L'espace des variables dépendantes $(\rho, p, \vec{v}, \vec{H})$ est l'espace hodographique $\mathcal{H} = \mathbb{R}^8$. L'espace des variables (t, \vec{x}) est l'espace

physique $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$. Les éléments intégraux simples intégrables ont la forme $L = \gamma \otimes \lambda$ et satisfont le système d'équations

$$\begin{aligned} s &= 1, \dots, m, & \dim \mathcal{H} &= l \\ a_j^{sv} L_\nu^j &= 0, & j &= 1, \dots, l, & \dim \mathcal{E} &= n \\ & & \nu &= 1, \dots, n, & & \end{aligned} \quad (4.1)$$

où

$$L_\nu^j = \gamma^j \lambda_\nu.$$

Le vecteur γ est le **vecteur caractéristique de l'espace hodographique** (aussi appelé amplitude) et le vecteur λ est le **vecteur caractéristique de l'espace physique** (aussi appelé vecteur d'onde). Avec la décomposition de l'équation (4.1), on peut décomposer les dérivées partielles du système (2.1) comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &\rightarrow \gamma_\rho \lambda_0, & \frac{\partial \rho}{\partial x^i} &\rightarrow \gamma_\rho \lambda_i, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &\rightarrow \gamma_p \lambda_0, & \frac{\partial p}{\partial x^i} &\rightarrow \gamma_p \lambda_i, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &\rightarrow \vec{\gamma} \lambda_0, & \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^i} &\rightarrow \vec{\gamma} \lambda_i, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &\rightarrow \vec{h} \lambda_0, & \frac{\partial \vec{H}}{\partial x^i} &\rightarrow \vec{h} \lambda_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour l'espace hodographique, nous avons le vecteur $\gamma = (\gamma_\rho, \gamma_p, \vec{\gamma}, \vec{h}) \in T\mathcal{H} \cong \mathcal{H}$ (un isomorphisme) et pour l'espace physique $\lambda = (\lambda_0, \vec{\lambda}) \in \mathcal{E}^*$, c'est-à-dire que $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$.

Les équations de la MHD du système (2.1) prennent donc la forme

$$\gamma_\rho \delta |\vec{\lambda}| + \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.3a)$$

$$\rho \delta |\vec{\lambda}| \vec{\gamma} + \gamma_p \vec{\lambda} + \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \cdot \vec{h}) \vec{\lambda} - \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{h} = 0, \quad (4.3b)$$

$$\delta |\vec{\lambda}| \vec{h} - (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\gamma} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda}) \vec{H} = 0, \quad (4.3c)$$

$$\vec{h} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.3d)$$

$$\delta |\vec{\lambda}| \left(\gamma_p - \frac{\kappa p}{\rho} \gamma_\rho \right) = 0, \quad (4.3e)$$

où on définit la vitesse de groupe $\delta |\vec{\lambda}|$ par

$$\delta |\vec{\lambda}| = \lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \quad (4.4)$$

où λ_0 est la vitesse de phase. Le système (4.3) est un système homogène. La condition d'existence d'un vecteur γ non nul est la relation de dispersion

$$\det \left(a_j^{s\nu} \lambda_\nu \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta^2 \vec{\lambda}^2 \left(\delta^2 \vec{\lambda}^2 - \frac{(\vec{H} \cdot \vec{\lambda})^2}{4\pi\rho} \right) \left[\delta^4 \vec{\lambda}^2 - \delta^2 \vec{\lambda}^2 \left(\frac{\vec{H}^2}{4\pi\rho} + a^2 \right) + \frac{(\vec{H} \cdot \vec{\lambda})^2}{4\pi\rho} a^2 \right] = 0, \quad (4.5)$$

où $a = \sqrt{\kappa p / \rho}$ est la vitesse du son dans le fluide. Cette équation comporte trois types de solutions

$$\delta_E = \delta |\vec{\lambda}| = 0, \quad (4.6a)$$

$$\delta_A = \delta |\vec{\lambda}| = \varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (4.6b)$$

$$\delta_{F,S} = \delta |\vec{\lambda}| = \varepsilon \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(a \vec{\lambda} + \frac{\vec{H} |\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)^2} \pm \sqrt{\left(a \vec{\lambda} - \frac{\vec{H} |\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)^2} \right) \quad (4.6c)$$

où $\delta_E, \delta_A, \delta_F$ et δ_S correspondent respectivement aux vitesses de groupe entropique

(E), d'Alfvén (A), magnétoacoustique rapide (F) (le $+$ dans le \pm du terme entre parenthèses) et magnétoacoustique lente (S) (le $-$ dans le \pm du terme entre parenthèses). Les vitesses que nous venons de définir sont associées aux éléments intégraux simples pouvant être obtenus du système (4.3).

4.1.1 Les éléments intégraux simples entropiques E

En utilisant l'équation (4.6a) dans le système (4.3) et l'équation (4.4), on obtient les équations qui déterminent les éléments entropiques

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.7a)$$

$$(\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\gamma} = 0, \quad (4.7b)$$

$$\vec{h} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.7c)$$

$$\gamma_p \vec{\lambda} + \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \cdot \vec{h}) \vec{\lambda} - \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{h} = 0, \quad (4.7d)$$

où la vitesse de phase est donnée par

$$\lambda_0 = -\vec{v} \cdot \vec{\lambda}. \quad (4.7e)$$

De l'équation (4.7c), on constate qu'on a deux types de solutions, soit $\vec{\gamma} = 0$ ou $\vec{H} \cdot \vec{\lambda} = 0$. Pour le cas où $\vec{\gamma} = 0$, on trouve les vecteurs caractéristiques pour l'onde E_3

$$\gamma = \left(\gamma_p, 0, \vec{0}, \vec{0} \right), \quad \lambda = \left(-\vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \vec{\lambda} \right). \quad (4.8)$$

Pour le cas où $\vec{H} \cdot \vec{\lambda} = 0$, on trouve les vecteurs caractéristiques

$$\gamma = \left(\gamma_p, -\frac{\vec{H} \cdot \vec{h}}{4\pi}, \vec{\gamma}, \vec{h} \right), \quad \lambda = \left(-\vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \vec{\lambda} \right). \quad (4.9)$$

Pour le deuxième cas, on a $\vec{H} \cdot \vec{\lambda} = \vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = \vec{h} \cdot \vec{\lambda} = 0$, et que les vecteurs $\vec{H}, \vec{\gamma}$ et \vec{h} sont linéairement indépendants. De plus, nous avons deux cas particuliers associés aux vecteurs caractéristiques (4.9)

- a) Si les vecteurs $\vec{H}, \vec{\gamma}$ et \vec{h} ne sont pas parallèles entre eux, nous avons ce que nous appelons des éléments de E_1 .
- b) Si les vecteurs $\vec{H}, \vec{\gamma}$ et \vec{h} sont parallèles entre eux, nous avons ce que nous appelons des éléments de E_2 , c'est-à-dire $\vec{\gamma} = \alpha \vec{H}$ et $\vec{h} = \beta \vec{H}$ où α et β sont constants. Les éléments intégraux simples E_2 seront générés par les vecteurs

$$\gamma = \left(\gamma_\rho, -\frac{\beta \vec{H}^2}{8\pi}, \alpha \vec{H}, \beta \vec{H} \right), \quad \lambda = \left(-\vec{v} \cdot \vec{\alpha}_i \times \vec{H}, \vec{\alpha}_i \times \vec{H} \right), \quad (4.10)$$

où les $\vec{\alpha}_i$, $i = 1, 2$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

4.1.2 Les éléments intégraux simples d'Alfvén A^ε

En utilisant l'équation (4.6b) dans le système (4.3) et l'équation (4.4), on obtient les équations qui déterminent les éléments intégraux simples d'Alfvén

$$\varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}} \gamma_\rho + \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.11a)$$

$$\varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}} \vec{\gamma} + \frac{\gamma_p}{\rho} \vec{\lambda} + \frac{\vec{H} \cdot \vec{h}}{4\pi\rho} \vec{\lambda} - \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{4\pi\rho} \vec{h} = 0, \quad (4.11b)$$

$$\varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}} \vec{h} - (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\gamma} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda}) \vec{H} = 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (4.11c)$$

$$\vec{h} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.11d)$$

$$\varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}} \left(\gamma_p - \frac{\kappa p}{\rho} \gamma_\rho \right) = 0. \quad (4.11e)$$

où la vitesse de phase est donnée par

$$\lambda_0 = \varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}} - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}. \quad (4.11f)$$

Du système (4.11), on constate que les éléments intégraux simples d'Alfvén A^ε sont

$$\gamma = \left(0, 0, \frac{\varepsilon \vec{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \vec{h} \right), \quad \lambda = \left(\varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}} - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \vec{\lambda} \right), \quad (4.12)$$

avec $\vec{\lambda} \cdot \vec{h} = \vec{H} \cdot \vec{h} = 0$. Pour $\varepsilon = +1$, il s'agit du cas où lorsque \vec{v} augmente, \vec{H} augmente aussi. Pour $\varepsilon = -1$, il s'agit du cas où lorsque \vec{H} augmente, \vec{v} diminue, et vice versa. Nous avons deux cas particuliers :

- a) Si les vecteurs \vec{H} et $\vec{\lambda}$, ne sont pas parallèles entre eux, nous avons ce que nous appelons les éléments de A_1^ε . L'équation (4.12) devient

$$\gamma = \left(0, 0, \varepsilon \frac{\vec{H} \times \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \vec{H} \times \vec{\lambda} \right), \quad \lambda = \left(\varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}} - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \vec{\lambda} \right), \quad (4.13)$$

où est $\vec{\lambda}$ arbitraire.

- b) Si les vecteurs \vec{H} et $\vec{\lambda}$ sont parallèles entre eux, nous avons ce que nous appelons les éléments de A_2^ε . L'équation (4.12) devient

$$\gamma = \left(0, 0, \varepsilon \frac{\vec{\alpha} \times \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \vec{\alpha} \times \vec{H} \right), \quad \lambda = \left(\varepsilon \frac{\vec{H}^2}{\sqrt{4\pi\rho}} - \vec{v} \cdot \vec{H}, \vec{H} \right), \quad (4.14)$$

où $\vec{\alpha}$ est arbitraire.

4.1.3 Les éléments intégraux simples magnétoacoustiques lents (S) et rapides (F)

Les équations qui déterminent les éléments intégraux simples magnétoacoustiques rapides et lents sont de la forme

$$\gamma_\rho \delta |\vec{\lambda}| + \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.15a)$$

$$\delta |\vec{\lambda}| \vec{\gamma} + \frac{\gamma_p}{\rho} \vec{\lambda} + \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{H} \cdot \vec{h}) \vec{\lambda} - \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{h} = 0, \quad (4.15b)$$

$$\delta |\vec{\lambda}| \vec{h} - (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\gamma} + (\vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda}) \vec{H} = 0, \quad (4.15c)$$

$$\vec{h} \cdot \vec{\lambda} = 0, \quad (4.15d)$$

$$\delta |\vec{\lambda}| \left(\gamma_p - \frac{\kappa p}{\rho} \gamma_\rho \right) = 0. \quad (4.15e)$$

et la vitesse de groupe est donnée par

$$\delta |\vec{\lambda}| = \lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda}. \quad (4.15f)$$

avec

$$\delta^4 \vec{\lambda}^2 - \delta^2 \vec{\lambda}^2 \left(\frac{\vec{H}^2}{4\pi\rho} + a^2 \right) + \frac{(\vec{H} \cdot \vec{\lambda})^2}{4\pi\rho} a^2 = 0, \quad (4.16)$$

où $a^2 = \kappa p / \rho$. De l'équation (4.16), il y a les deux solutions $\delta = \delta_F$ et $\delta = \delta_S$. En solutionnant l'équation (4.16), on trouve les vitesses de groupe

$$\delta_F = \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\left(a \vec{\lambda} + \frac{\vec{H} |\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)^2} + \sqrt{\left(a \vec{\lambda} - \frac{\vec{H} |\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)^2} \right), \quad (4.17a)$$

$$\delta_S = \frac{\varepsilon}{2} \left(\sqrt{\left(a \vec{\lambda} + \frac{\vec{H} |\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)^2} - \sqrt{\left(a \vec{\lambda} - \frac{\vec{H} |\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)^2} \right). \quad (4.17b)$$

Du système (4.15) et de l'équation (4.16), on a que les éléments intégraux simples sont donnés par

$$\gamma = \left(\rho \left[\delta^2 \vec{\lambda}^2 - \frac{(\vec{H} \cdot \vec{\lambda})^2}{4\pi\rho} \right], \kappa p \left[\delta^2 \vec{\lambda}^2 - \frac{(\vec{H} \cdot \vec{\lambda})^2}{4\pi\rho} \right], -\delta |\vec{\lambda}| \left[\delta^2 \vec{\lambda} - \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{4\pi\rho} \vec{H} \right], \delta^2 \left[\vec{H} \vec{\lambda}^2 - (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda} \right] \right), \quad (4.18)$$

$$\lambda = \left(\delta |\vec{\lambda}| - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \vec{\lambda} \right),$$

où $\vec{\lambda}$ est un vecteur quelconque tel que δ satisfait l'équation (4.16). L'équation (4.18) décrit les éléments magnétoacoustiques rapides (lorsque δ est donné par (4.17a)) et lents (lorsque δ est donné par (4.17b)). Parfois, il est plus pratique d'utiliser les éléments magnétoacoustiques

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\gamma_\rho, \frac{\kappa p}{\rho} \gamma_\rho, \frac{|\vec{h}|}{\sqrt{4\pi\rho(\vec{h}^2 - \frac{\gamma_\rho}{\rho} \vec{H} \cdot \vec{h})}} \left(\vec{h} - \frac{\gamma_\rho}{\rho} \vec{H} \right), \vec{h} \right), \\ \lambda &= \left(\frac{(\vec{H} \times \vec{h})^2}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{|\vec{h}|}{\sqrt{\vec{h}^2 - \frac{\gamma_\rho}{\rho} \vec{H} \cdot \vec{h}}} - \vec{v} \cdot \vec{h} \times (\vec{H} \times \vec{h}), \vec{h} \times (\vec{H} \times \vec{h}) \right), \end{aligned} \quad (4.19)$$

qui exigent la condition

$$\frac{\vec{h}^2}{4\pi\rho} \left[\frac{\gamma_\rho}{\rho} \vec{H}^2 - \vec{H} \cdot \vec{h} \right] - \frac{\kappa p}{\rho} \left[\vec{h}^2 - \frac{\gamma_\rho}{\rho} \vec{H} \cdot \vec{h} \right] = 0 \quad (4.20)$$

où γ_ρ et \vec{h} sont des paramètres quelconques qui satisfont l'équation (4.20).

4.1.4 Relations entre les éléments intégraux simples

Le système (4.3) peut être écrit comme

$$\sum_{j,\mu} a_j^{s\mu} \lambda_\mu \gamma^j = 0. \quad (4.21)$$

où $s = 1, \dots, 9$ et $j = 1, \dots, 8$ est une matrice dont les éléments dépendent de δ et $\vec{\lambda}$.

Selon la forme de δ de (4.6), on obtient les éléments intégraux simples.

Théorème 4.1.1. *Entre les divers types d'éléments, il existe les relations*

$$\delta_A = 0 \iff \vec{H} \cdot \vec{\lambda} = 0 \quad (4.22a)$$

$$\delta_S = 0 \iff \delta_F = \pm \sqrt{a^2 + \frac{\vec{H}^2}{4\pi\rho}} \iff \vec{H} \cdot \vec{\lambda} = 0 \quad (4.22b)$$

$$\frac{\vec{H}^2}{4\pi\rho} < a^2 \Rightarrow \left(\delta_S = \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{4\pi\rho} \quad \text{et} \quad \delta_F = a \right) \iff \vec{H} \parallel \vec{\lambda} \quad (4.22c)$$

$$\frac{\vec{H}^2}{4\pi\rho} > a^2 \Rightarrow \left(\delta_S = a \quad \text{et} \quad \delta_F = \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{4\pi\rho} \right) \iff \vec{H} \parallel \vec{\lambda} \quad (4.22d)$$

$$\delta_S = \delta_F \iff a^2 = \frac{\vec{H}^2}{4\pi\rho} \quad \text{et} \quad \vec{H} \parallel \vec{\lambda} \quad (4.22e)$$

De plus, des équations (4.6), on remarque que

$$0 = \delta_E \leq \delta_S \leq \delta_A \leq \delta_F. \quad (4.23)$$

4.2 Les ondes simples (solutions de rang 1) de la MHD

Les ondes simples ont déjà été discutées dans la littérature (par exemple les articles [22], [23], [24]). Nous allons tout de même les présenter de façon générale et plus complète.

4.2.1 Les ondes simples entropiques

Des équations (4.9) et (4.8), on a trois types d'ondes entropiques (solutions de rang 1), soit les ondes planes (E_1) et les ondes non planes (E_2 et E_3). L'onde plane est une solution de la forme $u = u_0 + Ae^{i\lambda_\mu x^\mu}$, où A est l'amplitude de l'onde et $\lambda = (\lambda_\mu) = (\lambda_0, \vec{\lambda})$, où λ_0 est la vitesse de phase et $\vec{\lambda}$ est la direction du vecteur d'onde. Pour les éléments intégraux simples de l'équation (4.8), on applique les relations (3.5) et (3.7) et on obtient l'ensemble de solutions

$$\mathbf{E}_3 : \quad \rho = \rho(R), \quad p = p_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0, \quad \vec{H} = \vec{H}_0, \quad (4.24a)$$

avec l'invariant de Riemann

$$R = \phi(-\vec{v}_0 \cdot \vec{\lambda} t + \vec{\lambda} \cdot \vec{x}), \quad (4.24b)$$

où $\rho(R)$ et $\phi(-\vec{v}_0 \cdot \vec{\lambda} t + \vec{\lambda} \cdot \vec{x})$ sont des fonctions arbitraires d'une variable et p_0 , \vec{v}_0 et \vec{H}_0 sont constants et arbitraires. Nous dénotons cette onde E_3 puisqu'elle possède trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{\lambda}_i$. Puisque les équations de la MHD sont invariantes sous les transformations galiléennes, on peut poser $\vec{v}_0 = 0$ de sorte que

$$R = \phi(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{x}, \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{x}, \vec{\lambda}_3 \cdot \vec{x}), \quad (4.25)$$

où les $\vec{\lambda}_i$ sont linéairement indépendants. De l'indépendance linéaire des vecteurs $\vec{\lambda}_i$, on peut écrire l'invariant de Riemann comme

$$R = \psi(x, y, z), \quad (4.26)$$

où $\psi(x, y, z)$ est une fonction arbitraire de trois variables. Physiquement, l'onde E_3 correspond à une distribution de densité $\rho(x, y, z)$ indépendante du temps d'un élément de volume qui se propage avec le fluide.

Pour les éléments intégraux simples E_2 donnés par l'équation (4.9), on applique les relations (3.5) et (3.7) et on obtient deux ensembles de solutions (correspondant aux cas a) et b) de la section 4.1.1). Premièrement, on a l'ensemble de solutions implicites associé au cas a)

$$\mathbf{E}_1 : \quad \rho = \rho(R), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \vec{v}(R), \quad \vec{H} = \vec{H}(R), \quad (4.27a)$$

avec l'invariant de Riemann

$$R = \phi(-\vec{v}(R) \cdot \vec{\lambda} t + \vec{\lambda} \cdot \vec{x}) \quad (4.27b)$$

et les contraintes (car $\vec{H} \cdot \vec{\lambda} = \vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma} = 0$)

$$\left(\dot{\vec{v}} \times \dot{\vec{H}} \right) \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{\lambda} = \vec{H} \times \dot{\vec{H}} \quad (4.27c)$$

où un point sur une variable correspond à une dérivée par son argument ($\dot{\vec{v}} = d\vec{v}/dR$) et $\rho(R)$ et $\phi(-\vec{v}(R) \cdot \vec{\lambda} t + \vec{\lambda} \cdot \vec{x})$ sont des fonctions arbitraires d'une variable.

Hypothèse : pour écrire l'invariant R sous forme explicite, on pose les vecteurs arbitraires

$$\vec{v}(R) = (v_1(R), v_2(R), v_3), \quad \vec{H}(R) = (\cos R, \sin R, 0),$$

où $v_1(R)$ et $v_2(R)$ sont des fonctions arbitraires, v_3 est une constante arbitraire et la contrainte (4.27c) est respectée. Dans ce cas, l'invariant R de l'équation (4.27b) prend la forme

$$R(z, t) = \phi(z - v_3 t), \quad (4.28)$$

où $\phi(z - v_3 t)$ est une fonction arbitraire.

Pour l'onde entropique E , la pression magnétique est $\frac{\nabla \vec{H}^2}{8\pi} = \nabla p$. Puisque le gradient de pression est perpendiculaire à la surface de l'élément fluide, celui-ci peut donc comprimer et allonger l'élément. La force magnétique ne peut donc pas faire tourner l'élément fluide (générer de la vorticité). Nous avons aussi que la force magnétique est couplée à l'énergie de l'élément fluide. En effet, on voit que $\vec{F}_M \cdot \vec{v} \neq 0$, c'est-à-dire $\delta|\vec{\lambda}| = 0$. Pour les ondes entropiques, on a que $\frac{d}{dt} \equiv 0$, c'est-à-dire que les variables physiques restent constantes dans l'élément fluide, ce qui est normal puisque l'onde se propage avec l'élément. L'équation pour la conservation de la quantité de mouvement (2.17) devient

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)(\rho\vec{v}), \quad (4.29)$$

de sorte que la quantité de mouvement n'est pas affectée par le champ magnétique pour les ondes entropiques. La vorticité devient

$$D\vec{\omega} = 0, \quad (4.30)$$

c'est-à-dire qu'elle est constante dans l'élément fluide. Pour une onde stationnaire, on a

$$\mathbf{E_1 :} \quad \rho = \rho(R), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \vec{\alpha}(R) \times \vec{e}_0, \quad \vec{H} = \vec{\beta}(R) \times \vec{e}_0, \quad \vec{\lambda} = \vec{e}_0, \quad (4.31a)$$

avec l'invariant de Riemann

$$R(x, y, z) = \phi(\vec{e}_0 \cdot \vec{x}), \quad (4.31b)$$

où \vec{e}_0 est un vecteur unitaire constant et $\vec{\alpha}(R), \vec{\beta}(R)$ sont des vecteurs à deux dimensions arbitraires d'une variable et $\rho(R)$ et $\phi(\vec{e}_0 \cdot \vec{x})$ sont des fonctions arbitraires d'une variable. La solution obtenue sera perpendiculaire au vecteur \vec{e}_0 et constante sur le plan formé par les vecteurs \vec{v} et \vec{H} .

Considérons maintenant le deuxième cas (cas b) de la section 4.1.1. L'onde non plane E_2 est décrite par l'ensemble solution

$$\mathbf{E}_2 : \quad \rho = \rho(R), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \beta(R)\vec{H}_0, \quad \vec{H} = \alpha(R)\vec{H}_0, \quad \vec{H}_0 \cdot \vec{\lambda}_i = 0, \quad (4.32)$$

où les $\vec{\lambda}_i$, $i = 1, 2$ sont linéairement indépendants et \vec{H}_0 a une direction constante. En choisissant \vec{H}_0 dans la direction de l'axe z , l'invariant de Riemann aura la forme

$$R = \phi(x, y) \quad (4.33)$$

où $\phi(x, y)$ est une fonction arbitraire de deux variables. Le cas E_2 correspond donc à une onde stationnaire puisqu'elle ne dépend pas du temps.

De l'équation (2.14), on a que $\vec{v} \cdot \vec{F}_M = 0$, c'est-à-dire que le flux d'énergie hydrodynamique est affecté par la variation d'énergie hydrodynamique. Les comportements hydrodynamique et magnétique ne sont donc pas liés. Pour chaque onde entropique, on a que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, ce qui signifie que le fluide est incompressible. Cependant, il y a tout de même une distribution de densité dans le fluide dans le plan xy .

4.2.2 Les ondes simples d'Alfvén

De l'équation (4.12), on a que les ondes simples d'Alfvén sont des ondes stationnaires données par l'ensemble de solutions

$$\mathbf{A}^\varepsilon : \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H} = \vec{H}(R), \quad \text{où} \quad \vec{H}^2 = H_0, \quad (4.34)$$

où ρ_0, p_0 et H_0 sont des constantes arbitraires. De cette relation, on voit qu'il existe deux types d'ondes d'Alfvén, soit le cas où $\varepsilon = 1$ (l'écoulement est dans la direction du champ magnétique) et où $\varepsilon = -1$ (l'écoulement est dans la direction opposée au champ magnétique). L'invariant de Riemann correspondant aux ondes A^ε est donné par

$$R = \phi(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{x}, \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{x}), \quad (4.35)$$

où $\dot{\vec{H}} \cdot \vec{\lambda}_i = 0$ pour $i = 1, 2$ et $\phi(\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{x}, \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{x})$ est une fonction arbitraire de deux variables. Puisque p et \vec{H}^2 sont constants, l'élément fluide ne subit pas de compression et d'allongement. Cependant, l'élément peut être tordu par la force $(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H}$. La vitesse des ondes par rapport au fluide est $\delta|\vec{\lambda}| = \varepsilon \frac{\vec{H} \cdot \vec{\lambda}}{\sqrt{4\pi\rho}}$, de sorte que la vitesse des ondes sera nulle par rapport au système de coordonnées. Pour les ondes d'Alfvén, l'énergie totale est

$$E = \frac{1}{\kappa - 1} p + \frac{\vec{H}^2}{4\pi} = \text{const}, \quad \kappa \neq 1,$$

la densité de courant d'énergie est

$$\vec{q}_E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho}} \vec{H} \left(\frac{\vec{H}^2}{8\pi} p - \frac{\kappa - 2}{\kappa - 1} p \right)$$

de sorte que $\nabla \cdot \vec{q}_E = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de sources au courant d'énergie. La densité de quantité de mouvement du fluide est $\mathcal{P} = \varepsilon \vec{H} \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi}}$, de sorte que $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = 0$

et le tenseur de densité de quantité de mouvement est

$$\Pi = \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) \hat{\delta},$$

où $\hat{\delta}$ est le delta de Kronecker. On remarque que le tenseur de densité de quantité de mouvement Π est constant et diagonal. Pour les ondes d'Alfvén, on a $\vec{v} \cdot \vec{F}_M = 0$, de sorte que les comportements hydrodynamique et magnétique sont séparés.

4.2.3 Les ondes simples magnétoacoustiques

Les éléments intégraux simples définis par les équations (4.6c) et (4.19) définissent les ondes magnétoacoustiques. De l'équation (4.6c), on remarque que ces ondes ont une relation de dispersion non linéaire (de la norme de $|\vec{\lambda}|$) , contrairement aux ondes entropiques et d'Alfvén. La vitesse de propagation de groupe pour les ondes magnétoacoustiques est de la forme

$$\vec{v}_g = \vec{v} - \frac{1}{2\sqrt{4\pi\rho}} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(a\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} + \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\left(a\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} - \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2}} \right] \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \times \left(\vec{H} \times \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \right) \quad (4.36)$$

$$- \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(a\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} + \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2} \mp \sqrt{\left(a\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} - \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2} \right] \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|}.$$

Lorsqu'on utilise le signe (-) du (\pm) dans les termes entre les crochets [], il s'agit de l'onde *lente* tandis que le signe (+) correspond à l'onde *rapide*. Les ondes magnétoacoustiques sont données par l'ensemble de solutions

$$p = A\rho^\kappa, \quad A = \text{const}, \quad \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0, \quad \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0, \quad (4.37)$$

Notons que

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = A,$$

c'est-à-dire que l'entropie est conservée dans l'écoulement. De plus, on remarque que les vecteurs $\nabla \times \vec{H}$ et $\nabla \times \vec{v}$ sont perpendiculaires au champ \vec{H} . Pour les ondes magnétoacoustiques, la force magnétique est donnée par

$$\vec{F}_M = \delta^2 \vec{\lambda}^2 \vec{H} \times (\vec{H} \times \vec{\lambda}). \quad (4.38)$$

Pour ce type d'onde, nous avons deux théorèmes.

Théorème 4.2.1.

$$(\vec{H} \cdot \vec{\lambda} = 0) \iff (\nabla \times \vec{v} = 0) \iff (\vec{H} \text{ a une direction constante}) \iff \delta_S = 0.$$

De ce théorème, on conclut que l'onde se propage perpendiculairement au champ magnétique, que \vec{H} a une direction constante, que l'écoulement causé par l'onde est potentiel et qu'il y a seulement l'onde rapide qui est possible. Dans ce cas, il est possible de décrire les ondes magnétoacoustiques rapides ainsi :

$$\vec{H} = C\rho\vec{H}_0, \quad p = A\rho^\kappa, \quad p + \frac{C^2\rho^2}{8\pi} = C_1, \quad \frac{d\vec{v}}{dR} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dR} \left(A\kappa\rho^{\kappa-1} + \frac{C^2\rho}{4\pi} \right)^{1/2} \vec{\lambda}, \quad (4.39a)$$

où l'invariant de Riemann est donné par

$$R = \phi \left(\left[\sqrt{A\kappa\rho^{\kappa-1} + \frac{C^2\rho}{4\pi}} - \vec{v} \cdot \vec{\lambda} \right] t, \vec{\lambda} \cdot \vec{x} \right) \quad (4.39b)$$

et où $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(R)$ avec $|\vec{\lambda}| = 1$, $\vec{H}_0 \cdot \vec{\lambda} = 0$ et C, C_1 et \vec{H}_0 sont constants.

Théorème 4.2.2.

$$(\vec{H} \parallel \vec{\lambda}) \iff (\vec{H} = \text{const}) \iff (\nabla \times \vec{H} = 0) \iff (\delta_S = \delta_A)$$

De ce théorème, on conclut que pour une onde se propageant dans le sens du champ magnétique \vec{H} , celui-ci sera constant, il n'y aura pas de vorticité, et la vitesse de l'onde magnétoacoustique lente correspond à celle de l'onde d'Alfvén. Si $\vec{v} \parallel \vec{H}$, alors les énergies magnétique et hydrodynamique ne sont pas liées.

Considérons maintenant des ondes magnétoacoustiques se propageant dans une direction fixe \vec{e}_0 . Les ondes seront décrites par les solutions

$$\vec{v} = -\rho \vec{e}_o + a_1 \vec{e}_1, \quad \vec{H} = a_2 \vec{e}_1 + C_1 \vec{e}_o, \quad (4.40a)$$

où

$$\dot{a}_1 = \frac{C_1 \dot{a}_2}{4\pi \rho^2} \quad a_2(\rho) = 4\pi \varepsilon \left(\rho - \frac{C_1^2}{4\pi \rho^2} \right) \sqrt{\frac{\rho^2(\rho^2 - A\kappa \rho^{\kappa-1})}{4\pi \rho^3 - C_1^2}}, \quad (4.40b)$$

et l'invariant est donné par

$$R = \phi((\delta + \rho)t + \vec{e}_o \cdot \vec{x}), \quad (4.40c)$$

et où $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 = 0$ et les vecteurs unitaires \vec{e}_0, \vec{e}_1 et C_1 sont constants et où

$$\delta_{F,S} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 + \frac{a_2^2 + C_1^2}{4\pi \rho} + \frac{2a_1 C_1}{\sqrt{4\pi \rho}}} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a_2^2 + C_1^2}{4\pi \rho} - \frac{2a_1 C_1}{\sqrt{4\pi \rho}}} \right]. \quad (4.40d)$$

La table 4.2.3 illustre comment les ondes étudiées dans ce chapitre se comportent lorsqu'elles sont soumises à diverses contraintes. Un résumé des solutions d'ondes simples obtenues dans ce chapitre est présenté à l'annexe A.

Contraintes	E_1	E_2	E_3	A^ε	F	S
$\rho = \text{const}$	X	X	-	+	-	-
$p = \text{const}$	X	X	+	+	-	-
$\vec{v} = \text{const}$	X	X	+	-	-	-
$p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = \text{const}$	+	+	+	+	-	-
$\vec{H} = \text{const}$	X	X	+	-	A_h	-
$\nabla \times \vec{v} = 0$	X	X	+	-	X	E_h
$\nabla \times \vec{H} = 0$	X	X	+	+	A_h	A_h
$\vec{H}^2 = \text{const}$	X	X	+	+	A_H	A_h
$\vec{F}_M = 0$	X	X	+	E	A_H	A_h
$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$	E	+	+	?	+	+
$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$						
$p = A\rho^\kappa$	X	X	-	+	+	+

TABLE 4.1 – Diverses contraintes sur les ondes simples. (X) : la contrainte s’applique ; (+) : la contrainte n’affecte pas l’onde ; (-) : la contrainte rend l’existence de l’onde impossible ; (E, E_h , A_h) : l’onde devient de ce type sous la contrainte ; (?) : non déterminé. L’indice h signifie que l’onde se retrouve en hydrodynamique. Nous n’allons pas rencontrer ce type d’onde dans ce mémoire.

Chapitre 5

Les **k**-ondes de Riemann : superposition d'ondes simples

Dans ce chapitre, nous généralisons le concept de solution d'onde de Riemann à une superposition non linéaire d'ondes de Riemann. Cette généralisation permet de construire des solutions de rang k , appelées k -ondes de Riemann. Ce chapitre s'inspire principalement de l'article de Grundland et al. [1], dans lequel sont tirés les théorèmes qui seront présentés.

On se rappelle que pour construire une solution d'onde de Riemann du système

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^{\ell} a_j^{s\mu}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (5.1)$$

il faut trouver des fonctions $C^1 \lambda_1, \dots, \lambda_n, \gamma^1, \dots, \gamma^\ell : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation

$$\sum_{j,\mu} a_j^{s\mu} \lambda_\mu \gamma^j = 0. \quad (5.2)$$

Pour procéder, nous allons demander que la matrice $\sum_\mu a_j^{s\mu} \lambda_\mu$ de dimensions $m \times \ell$ ait un rang inférieur à ℓ pour un certain point $u \in \mathcal{H}$. Cette condition apporte donc

des restrictions sur les fonctions $\{\lambda_\mu\}_{\mu=1}^n$. Supposons qu'il est possible de trouver k ensembles de fonctions $\lambda^p = (\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p), p = 1, 2, \dots, k$ qui forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants à chaque point d'un certain sous-ensemble ouvert $\Omega \subseteq \mathcal{H}$ et qui satisfait la condition du rang amené plus haut. Pour chaque fonction λ^p obtenue, l'équation (5.2) peut être solutionnée pour $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^\ell)$. Pour procéder, nous allons demander que, pour chaque choix de λ_p , il y ait un vecteur γ_p tel que $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants à chaque point $u_0 \in \mathcal{H}$ d'un sous-ensemble $\Omega^1 \subseteq \Omega$.

Définition 5.0.1. Une solution $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ du système quasi linéaire (5.2) est dite une **superposition non linéaire de k ondes de Riemann** s'il existe un sous-ensemble ouvert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ de nk fonctions $\alpha_\mu^r : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, ℓk fonctions $\beta_r^j : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, et k fonctions $\xi^r : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu}(x_0) = \sum_{r=1}^k \xi^r(x_0) \alpha_\mu^r(x_0) \beta_r^j(x_0), \quad \text{pour chaque } x_0 \in \mathcal{D},$$

$$\mu = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, \ell,$$

où toutes fonctions sont assumées C^1 sur \mathcal{D} . Si on définit $\{\alpha_\mu^r(x)\}_{\mu=1}^n$ par $\alpha^r(x)$ et $\{\beta_r^j(x)\}_{\mu=1}^\ell$ par $\beta_r(x)$, la condition peut s'écrire

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu}(x) = \sum_{r=1}^k \xi^r(x) \alpha^r(x) \otimes \beta_r(x), \quad x \in \mathcal{D},$$

où \otimes est le produit tensoriel.

La construction de la superposition non linéaire des k ondes de Riemann est analogue à la construction d'ondes de Riemann (telle que présentée dans le chapitre 3). Supposons que l'ensemble de fonctions C^1 λ^p et γ_p a été construit sur un certain sous-ensemble ouvert $\Omega \subseteq \mathcal{H}$ en demandant que

$$\text{rang}(a_j^{s\mu} \lambda_\mu) < \ell,$$

dans Ω , où nous assumons que le rang reste constant dans Ω . Puisqu'il existe une grande liberté sur le choix des λ_μ , nous allons considérer le cas le plus simple, c'est-à-dire

$$\text{rang}(a_j^{s\mu} \lambda_\mu) = \ell - 1,$$

alors l'espace de solution

$$(a_j^{s\mu} \lambda_\mu) \gamma^j = 0,$$

est unidimensionnel : $\dim \{\gamma : a_j^{s\mu} \lambda_\mu \gamma^j = 0\} = 1$. On suppose donc qu'on peut trouver k vecteurs distincts, $2 \leq l \leq \ell$, $\lambda^1 = \{\lambda_\mu^1\}_{\mu=1}^n$, $\lambda^2 = \{\lambda_\mu^2\}_{\mu=1}^n$, ..., $\lambda^k = \{\lambda_\mu^k\}_{\mu=1}^n$, tels que

$$\text{rang}(a_j^{s\mu} \lambda_\mu^r) = \ell - 1, \quad r = 1, 2, \dots, k$$

dans un certain sous-ensemble $\Omega \subseteq \mathcal{H}$. Pour chaque choix de λ^r , on suppose qu'on peut trouver un vecteur γ_r tel que pour chaque $u \in \Omega$, $\{\gamma_1(u), \gamma_2(u), \dots, \gamma_k(u)\}$ est un ensemble linéairement indépendant¹. Soit $u(x)$ une solution quelconque du système quasi linéaire (5.1). Dénotons

$$\Gamma_u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{H},$$

de sorte que

$$\Gamma_u : x \rightarrow (x, u(x)),$$

est le graphe de $u(x)$. Des fonctions λ^r et γ_r construites précédemment, on définit un

1. Si la dimension de l'espace engendré par les solutions du système homogène

$$(a_j^{s\mu} \lambda_\mu) \gamma^j = 0,$$

est supérieure à 1, nous allons demander la condition sur les vecteurs λ que chaque triplet $\lambda^{\alpha_1}, \lambda^{\alpha_2}, \lambda^{\alpha_3}$, pour $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 = 1, 2, \dots, k$ est linéairement indépendant.

ensemble de 1-formes sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, appelé ω^j , où,

$$\omega^j = du^j - \sum_{r=1}^k \sum_{\mu=1}^n \xi^r(x) \gamma_r^j(u) \lambda_\mu^r(u) dx^\mu, \quad \xi^r \neq 0, j = 1, 2, \dots, \ell.$$

Théorème 5.0.2. *Une fonction $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ est une solution de k -ondes de Riemann si $\omega^j \in \mathcal{T}^*(\mathcal{E} \times \mathcal{H})$ est ramené à zéro par Γ_u pour une certaine collection de fonctions non nulles $\xi^1, \dots, \xi^k : \mathcal{D}(\subseteq \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$.*

Preuve. Supposons que ω^j est ramené à zéro par Γ_u pour un certain u et une certaine collection de fonctions $\xi^r, r = 1, 2, \dots, k$. Alors

$$\Gamma_u^* \omega^j = 0 \iff \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} - \sum_r \xi^r(x) \gamma_r^j(u(x)) \lambda_\mu^r(u(x)) = 0, \quad \forall \mu, j.$$

Cela montre que $\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu}$ a la bonne décomposition pour tout j et μ pour une k -onde. Pour bien voir que u est une solution, il suffit de multiplier à gauche par $a_j^{s\mu}(u(x))$ pour obtenir

$$a_j^{s\mu}(u(x)) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} - \sum_r \xi^r(x) a_j^{s\mu}(u(x)) \gamma_r^j(u(x)) \lambda_\mu^r(u(x)) = 0,$$

d'où

$$\sum_{\mu, j} a_j^{s\mu}(u(x)) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0,$$

par la construction de λ^p et γ_p . □

Pour la prochaine étape, nous allons examiner les formes pullback $\Gamma_u^* \omega^j$ et dériver des conditions nécessaires sur λ et γ , qui sont des conséquences de l'existence d'une solution de k -ondes du système quasi linéaire. On a

$$du^j(x) = \sum_{r, \mu} \xi^r(x) \gamma_r^j(u(x)) \lambda_\mu^r(u(x)) dx^\mu, \quad (5.3)$$

et de $d^2u(x) = 0$, on obtient

$$\gamma_r^j(d\xi^r \wedge \lambda^r + \xi^r d\lambda^r) + \xi^r d\gamma_r^j \wedge \lambda^r = 0, \quad (5.4)$$

où λ^r correspond à la 1-forme $\lambda_\mu^r(u(x))dx^\mu \in \mathcal{T}^*\mathcal{E}$, où la convention de sommation d'Einstein est utilisée. Alors

$$d\lambda^r = d(\lambda_\mu^r(u(x))dx^\mu) = \frac{\partial \lambda_\mu^r}{\partial u^j} du^j \wedge dx^\mu = -\frac{\partial \lambda_\mu^r}{\partial u^j} dx^\mu \wedge \xi^p \gamma_p^j \lambda^p = -\xi^p \gamma_p^j \frac{\partial \lambda_\mu^r}{\partial u^j} dx^\mu \wedge \lambda^p.$$

On considère les champs vectoriels $\gamma_p = \gamma_p^j \frac{\partial}{\partial u^j}$ sur \mathcal{H} , et on définit $\gamma_p(\lambda_\mu^r)dx^\mu = (\mathcal{L}\gamma_p \lambda_\mu^r)dx^\mu$ par $\lambda_{,\gamma_p}^r$, où $\mathcal{L}\gamma_p$ est la dérivée de Lie. Alors

$$d\lambda^r = \xi^p \lambda^p \wedge \lambda_{,\gamma_p}^r. \quad (5.5)$$

Par un argument similaire, on trouve

$$d\gamma_r^j = \xi^p \gamma_p(\gamma_r^j) \lambda^p. \quad (5.6)$$

En substituant (5.5) et (5.6) dans (5.4), on obtient

$$\sum_r \left[\gamma_r^j \left(d\xi^r \wedge \lambda^r + \xi^r \sum_p \xi^p \lambda^p \wedge \lambda_{,\gamma_p}^r \right) \right] + \sum_r \xi^r \sum_p \xi^p \gamma_p(\gamma_r^j) \lambda^p \wedge \lambda^r = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell. \quad (5.7)$$

On peut réécrire l'équation (5.7) comme

$$\sum_r \left(d\xi^r \wedge \lambda^r + \xi^r \sum_p \xi^p \lambda^p \wedge \lambda_{,\gamma_p}^r \right) \otimes \gamma_r + \frac{1}{2} \sum_r \xi^r \sum_p \xi^p [\gamma_p, \gamma_r] \otimes \lambda^p \wedge \lambda^r = 0. \quad (5.8)$$

Soit Φ , le module de la 1-forme sur \mathcal{H} , duale aux champs vectoriels $\{\gamma_p\}_{p=1}^k \in \mathcal{T}\mathcal{H}$. Le côté gauche de (5.8) peut être interprété comme un élément de $\wedge^2 \mathcal{E} \otimes \mathcal{T}\mathcal{H}$. Si $\phi \in \Phi_1$, alors ϕ a une action sur $\wedge^2 \mathcal{E} \otimes \mathcal{T}\mathcal{H}$ définie par l'application

$$\phi : \wedge^2 \mathcal{E} \otimes \mathcal{T}\mathcal{H} \rightarrow \wedge^2 \mathcal{E} \times \mathbb{R}$$

Il s'en suit, de (5.8) et en contractant par Φ , que

$$\xi^r \xi^p \langle \Phi_1, [\gamma_p, \gamma_r] \rangle \otimes \lambda^p \wedge \lambda^r = 0,$$

et par l'hypothèse que les $\lambda^r, R = 1, 2, \dots, \ell$ sont linéairement indépendants, il s'en suit que

$$\langle \Phi_1, [\gamma_p, \gamma_r] \rangle = 0,$$

et donc que

$$[\gamma_p, \gamma_r] = \tau_{pr}^r \gamma_t,$$

pour une certaine collection de fonctions réelles $\tau_{pr}^r \gamma_t$ sur \mathcal{H} . Ensuite, à partir des champs vectoriels $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sur \mathcal{H} , on peut construire le *coframe* Φ_2 , ce qui correspond à l'ensemble de toutes les 1-formes ω_2^q sur \mathcal{H} qui satisfont

$$\langle \omega_2^q, \gamma_p \rangle = \delta_p^q.$$

De l'équation (5.8) on a que

$$\sum_{r=1}^k \langle \omega_2^q, \gamma_r \rangle \otimes d\xi^r \wedge \lambda^r + \sum_{r=1}^k \xi^r \sum_{p=1}^k \langle \omega_2^q, \gamma_r \rangle \otimes \xi^p \lambda^p \wedge \lambda_{,\gamma_p}^r + \frac{1}{2} \sum \sum \xi^r \xi^p \tau_{rp}^s \langle \omega_2^q, \gamma_s \rangle \lambda^p \wedge \lambda^r = 0,$$

et par conséquent

$$d\xi^q \wedge \lambda^q + \xi^q \sum_{p=1}^k \xi^p \lambda^p \wedge \lambda_{,\gamma_p}^q + \frac{1}{2} \sum_r \sum_p \xi^r \xi^p \tau_{rp}^q \lambda^q \wedge \lambda^r = 0.$$

En y appliquant le produit extérieur avec λ^q , on obtient

$$\xi^q \sum_p \xi^p \lambda^p \wedge \lambda_{,\gamma_p}^q \wedge \lambda^q + \frac{1}{2} \sum_r \sum_p \xi^r \xi^p \tau_{rp}^q \lambda^q \wedge \lambda^r \wedge \lambda^q = 0.$$

Pour ne pas imposer de restriction sur la forme des fonctions ξ^r , on choisit les condi-

tions

$$\begin{cases} \lambda_{\gamma_p}^q \wedge \lambda^q \wedge \lambda^p = 0 \\ \tau_{rp}^q = 0, q \neq r \neq p \end{cases} \quad (5.9)$$

puisque $\lambda^p \wedge \lambda^q \wedge \lambda^r \neq 0$ si $q \neq r \neq p$. Alors on obtient

$$\begin{cases} [\gamma_p, \gamma_r] = \tau_{rp}^r \gamma_r + \tau_{pr}^p \gamma_p \\ \lambda_{\gamma_p}^q \in \text{span} \{ \lambda^q, \lambda^p \} \end{cases} \quad (5.10)$$

pour $p \neq q$. À partir de maintenant, il est possible de simplifier les calculs en choisissant la longueur des champs vectoriels γ_p afin que $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ deviennent une distribution abélienne sur \mathcal{H} . Maintenant que la distribution k -dimensionnelle est normalisée et abélienne $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, elle détermine une sous-variété k -dimensionnelle $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ qui s'obtient en solutionnant le système

$$\frac{\partial f^j}{\partial R^p} = \gamma_p^j(f^1, \dots, f^\ell), \quad (5.11)$$

avec la solution $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$ définie par

$$\pi : (R^1, \dots, R^k) \rightarrow (f^1(R^1, \dots, R^k), \dots, f^\ell(R^1, \dots, R^k)). \quad (5.12)$$

Jusqu'à maintenant, il a été démontré que si les formes différentielles ω^j sont ramenées à zéro par une application $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$, alors il est nécessaire que les champs vectoriels $\gamma_p = \gamma_p^j(u) \frac{\partial}{\partial u^j}$ soient intégrables selon Frobenius et donc, par la condition d'indépendance linéaire, qu'ils déterminent un feuilletage de \mathcal{H} par des feuilles k -dimensionnelles. On peut ensuite démontrer qu'en ramenant les ω_j à ces feuilles, on peut réduire le problème de construction des solutions de k -ondes à une résolution d'un système hyperbolique linéaire de EDP avec deux variables indépendantes du second ordre et un certain Pfaffian de degré n (du système des 1-formes différentielles extérieures). Chaque composante du problème peut être étudiée séparément, ce qui simplifie considérablement le problème. De l'application π , nous avons que les fonctions R^1, \dots, R^k sont un système de coordonnées locales pour la sous-variété \mathcal{S} .

Considérons maintenant l'application

$$id \times \pi : \mathcal{E} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{H},$$

définie par

$$id \times \pi : (x_1, \dots, x_n, R^1, \dots, R^k) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, f^1(R), \dots, f^\ell(R)),$$

où $R = (R^1, \dots, R^k)$. On complète la construction des solutions de k -ondes en ramenant les ω^j à $\mathcal{E} \times \mathcal{S}$ par $id \times \pi$ et en demandant qu'elles soient nulles.

$$(id \times \pi)^* \omega^j = \frac{\partial f^j}{\partial R^t} dR^t = \xi^t(x) \gamma_t^j(f(R)) \lambda_\mu^t dx^\mu = 0, \quad (5.13)$$

mais puisque

$$\frac{\partial f^j}{\partial R^t} = \gamma_t^j(f(R)),$$

on a que $(id \times \pi)^* \omega^j = 0$ si et seulement si

$$\gamma_t^j(f(R)) (dR^t - \xi^t(x) \lambda_\mu^t dx^\mu) = 0,$$

c'est-à-dire le tenseur

$$\gamma_t \otimes (dR^t - \xi^t(x) \lambda_\mu^t dx^\mu). \quad (5.14)$$

Par la condition d'indépendance sur γ_t on a que pour chaque $t = 1, 2, \dots, k$

$$dR^t - \xi^t(x) \lambda_\mu^t dx^\mu = 0, \quad (5.15)$$

sans sommation sur l'indice t . On écrit cela comme

$$dR^t - \xi^t(x) \lambda^t = 0. \quad (5.16)$$

En appliquant la dérivée extérieure sur (5.16), on obtient

$$d\xi^t \wedge \lambda^t + \xi^t d\lambda^t = 0. \quad (5.17)$$

De l'équation (5.5) pour $d\lambda^t$ et de la forme du champ vectoriel γ_p , on a

$$d\lambda^p = \sum_r \xi^r \lambda^r \wedge \lambda_{,R^r}^p, \quad (5.18)$$

où

$$\lambda_{,R^r}^p = \frac{\partial \lambda_\mu^p}{\partial R^r} dx^\mu,$$

où les formes λ^p sont celles qui ont été ramenées à $\mathcal{E} \times \mathcal{S}$. En appliquant la dérivée extérieure sur (5.17) par λ^t et en y substituant (5.18), on obtient

$$\sum_r \xi^r \lambda^r \wedge \lambda_{,R^r}^t \wedge \lambda^t = 0. \quad (5.19)$$

À partir de maintenant, on impose la condition qu'aucune restriction ne soit imposée sur les ξ^r . On demande donc que

$$\lambda_{,R^r}^p \in \text{span}\{\lambda^r, \lambda^p\}, \quad r \neq p. \quad (5.20)$$

Sous ces circonstances, nous avons le prochain théorème :

Théorème 5.0.3. *Si les 1-formes λ^p , pour $p = 1, 2, \dots, k$, qui sont restreintes à $\mathcal{E} \times \mathcal{S}$ satisfont la condition*

$$\lambda_{,R^p}^q \in \text{span}\{\lambda^q, \lambda^p\}, \quad p \neq q,$$

alors le système de Pfaff (système des 1-formes différentielles extérieures)

$$dR^p = \xi^p(x) \lambda^p(f(R)),$$

est un système involutif selon Cartan et les sous-variétés intégrales

$$\mathcal{K} : (x^1, \dots, x^n) \rightarrow (x^1, \dots, x^n, R^1(x), \dots, R^k(x)),$$

dépendent de k fonctions analytiques arbitraires appelées **invariants de Riemann**. Pour plus d'information concernant les systèmes de Pfaff, voir Cartan [25] et Šleboďski [26].

Finalement, de la condition (5.20), il existe des fonctions α_r^s et $\beta_r^s : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial \lambda_\mu^s}{\partial R^r} = \alpha_r^s \lambda_\mu^s + \beta_r^s \lambda_\mu^r, \quad s \neq r, = 1, 2, \dots, k, \quad \mu = 1, 2, \dots, n. \quad (5.21)$$

En normalisant λ_μ^s de sorte que

$$\lambda^s = (1, \lambda_2^s, \dots, \lambda_n^s),$$

l'équation (5.21) peut s'écrire comme

$$\frac{\partial \lambda_\mu^s}{\partial R^r} = \alpha_r^s (\lambda_\mu^s - \lambda_\mu^r), \quad (5.22a)$$

$$\frac{\partial \lambda_\mu^r}{\partial R^s} = \beta_s^r (\lambda_\mu^r - \lambda_\mu^s). \quad (5.22b)$$

En dérivant (5.22a) par R^s et (5.22b) par R^r , on obtient un système hyperbolique linéaire de nk équations d'ordre 2 pour les fonctions λ_μ^s , c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 \lambda_\mu^s}{\partial R^s \partial R^r} + a_r^s \frac{\partial \lambda_\mu^s}{\partial R^s} + b_r^s \frac{\partial \lambda_\mu^s}{\partial R^r} = 0 \quad \forall s \neq r, \quad (5.23)$$

où

$$\begin{aligned} a_r^s &= \alpha_r^s, & b_r^s &= \beta_r^s + \frac{1}{\alpha_r^s} \frac{\partial \alpha_r^s}{\partial R^s}, \\ a_r^s &= \alpha_r^s + \frac{1}{\beta_s^r} \frac{\partial \beta_s^r}{\partial R^r}, & b_s^r &= \beta_s^r. \end{aligned}$$

Ceci complète la factorisation du problème de construction des solutions des k -ondes.

On remarque qu'en choisissant une autre normalisation pour l'équation (5.21) : $\lambda^s \rightarrow \kappa_s \lambda^s$ (sans sommation) nous permet d'exprimer ces équations sous la forme

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial R^r} = a_r^s \lambda^r, \quad s \neq r \quad \text{sans sommation} \quad (5.24)$$

pour certaines fonctions $a_r^s : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ qui seront pratiques pour de futurs calculs.

Voici un résumé de l'approche pour construire les solutions de k -ondes :

1. Trouver les fonctions λ_μ^s et γ_s^j en solutionnant la relation d'onde. Cette méthode est complètement algébrique.
2. En supposant que nous avons k fonctions λ^s et γ_s linéairement indépendantes, en identifiant les vecteurs γ_s avec des champs vectoriels sur l'espace hodographique \mathcal{H} on vérifie si la condition (5.10) est satisfaite.
3. On choisit un système holonome pour les champs vectoriels $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ en demandant que les modules des vecteurs soient tels que $[\gamma_r, \gamma_p] = 0, \forall p = 1, 2, \dots, k$. On obtient la paramétrisation explicite de la variété \mathcal{S} en solutionnant l'équation (5.11).
4. On choisit les solutions les plus générales des équations (5.23) ou (5.24) pour les λ_μ^s comme fonctions des R^1, \dots, R^k .
5. À partir des solutions générales λ_μ^s , la solution du système de Pfaff (5.16) peut s'écrire implicitement.
6. Finalement, les solutions de k -ondes sont obtenues de la paramétrisation explicite de la variété \mathcal{S} en termes des paramètres R^1, \dots, R^l de l'espace \mathcal{H} , tandis que les R^1, \dots, R^k sont définies implicitement comme des fonctions des x^1, \dots, x^n à partir des solutions du système de Pfaff (5.16) dans l'espace \mathcal{E} .

Chapitre 6

Superpositions d'ondes simples en fonction des invariants de Riemann

Dans ce chapitre, nous appliquons la superposition des ondes simples afin d'obtenir de nouvelles k -ondes ($k \geq 2$) de Riemann, c'est-à-dire des solutions de rang k pour les équations de la MHD. Nous présentons la construction et l'étude des superpositions d'ondes entropiques, les superpositions d'ondes d'Alfvén, les superpositions entre les ondes entropiques et les ondes d'Alfvén et les superpositions entre les ondes entropiques et les ondes magnétoacoustiques. Pour chacune de ces solutions, nous trouvons les invariants de Riemann, et lorsque cela est possible, nous les trouvons sous forme explicite. Un résumé de ces nouvelles solutions explicites est présenté à l'annexe A.

6.1 Les ondes doubles

Une onde double est une solution de l'équation

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^{\ell} a_j^{s\mu}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (6.1)$$

définie comme la superposition de deux ondes simples pour lesquelles des invariants de Riemann existent. Suite à une superposition de deux ondes simples, il en résulte une onde double formée par les deux ondes simples. Il est possible que deux ondes simples se croisent sans interagir, ce qu'on appelle une superposition linéaire. Il n'y aura pas d'onde double pour de telles superpositions. Ce chapitre se base sur les articles de Grundland [18], [19], Zajczkowski [21], Burnat [22], [23] et Peradzynski [24],[27]. Les superpositions d'ondes simples possibles sont présentées à la table 6.1.

	E	E_2	E_3	A^+	A^-	A_2^+	A_2^-	F	S
E	X	X	X	X	X	X	X	.	?
E_2		+	X	X	X	X	X	X	-
E_3			-	-	-	-	-	-	-
A^+				X	-	X	-	-	-
A^-					X	-	X	-	-
A_2^+						+	-	-	-
A_2^-							+	-	-
F								.	-
S									?

TABLE 6.1 – Diverses superpositions d'ondes simples. (+) : les invariants de Riemann existent ; (-) : les invariants de Riemann n'existent pas ; (X) : les invariants existent seulement pour certaines ondes simples spécifiques ; (.) nous ne sommes pas en mesure de les résoudre et (?) : elles ne sont pas connues.

Pour désigner une onde double, on utilise les symboles des deux ondes simples qui la composent. Par exemple, l'onde double formée par les deux ondes simples E et A^ε se désignera EA^ε . L'invariant de Riemann R^1 sera associé à la première onde de EA^ε , c'est-à-dire l'onde E . Pareillement, l'invariant de Riemann R^2 sera associé à la deuxième onde de EA^ε , c'est-à-dire l'onde A^ε .

Les ondes multiples qui seront présentées se regroupent dans les quatre catégories suivantes :

1. Ondes entropiques
2. Ondes d'Alfvén
3. Ondes entropiques et d'Alfvén
4. Ondes entropiques et magnétoacoustiques

Plus spécifiquement, voici les ondes multiples pour chacune de ces catégories :

1. Pour les superpositions d'ondes entropiques, l'onde double E_2E_2 présentée à la page 73 est la forme la plus générale. À la page 73, on retrouve la k-onde E_2E_2 .
2. Pour les superpositions d'ondes d'Alfvén, l'onde double $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ présentée à la page 75 est la solution la plus générale.
3. Les superpositions possibles entre des ondes simples entropiques et d'Alfvén sont présentées à la table 6.2. Pour les pages 82 à 92, on a les superpositions pour $\vec{v} \nparallel \vec{H}$, tandis que pour les pages 92 à 102 on a les superpositions pour $\vec{v} \parallel \vec{H}$, dont la solution $E_2A_2^\varepsilon$ est la plus générale.
4. Pour les superpositions d'ondes entropiques et magnétoacoustiques, on retrouve les ondes doubles EF et ES . Nous avons les cas suivants :
 - (a) Pour $\vec{\lambda}_E \parallel \vec{\lambda}_{F,S}$, $\lambda_E \parallel \lambda_{F,S}$ et $\lambda_{0E} \neq \lambda_{0F,S}$, on a la solution présentée à la page 107. Dans ce cas, les invariants sont des ondes planaires dans la même direction et $\vec{H} \cdot \vec{\lambda}_{F,S} = 0$. Du théorème 4.2.1, on a que seulement l'onde EF est possible.

- (b) Pour $\vec{H} \cdot \vec{\lambda}_{F,S} = 0 \iff \vec{H} \parallel \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^2}$, seule la superposition linéaire EF est possible, d'après le théorème 4.2.1. Cette solution sera présentée à la page 109. On remarque que cette solution est un sous-cas du cas précédent, puisque la condition $\vec{\lambda}_E \parallel \vec{\lambda}_{F,S}$ implique $\vec{H} \cdot \vec{\lambda}_{F,S} = 0$.
- (c) Pour la superposition linéaire des ondes E, F, S , les invariants de Riemann existent pour les cas suivants :
- \vec{H} a une direction constante (ce qui revient au cas b)).
 - \vec{H} est dans un plan fixe.
- (d) Pour $\vec{H} \parallel \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^1}$, on a l'onde double formée avec E_2 et F , présentée à la page 111.

		A^ε		A_2^ε	
		$\vec{v} \parallel \vec{H}$	$\vec{v} \nparallel \vec{H}$	$\vec{v} \parallel \vec{H}$	$\vec{v} \nparallel \vec{H}$
E	$\vec{v} \parallel \vec{H}$	X	-	X	-
	$\vec{v} \nparallel \vec{H}$	-	X	-	-
E_2	$\vec{v} \parallel \vec{H}$	X	-	X	-
	$\vec{v} \nparallel \vec{H}$	-	-	-	-
E_3		-	-	-	-

TABLE 6.2 – Diverses superpositions d'ondes simples entropiques et d'Alfvén. (-) : les invariants de Riemann n'existent pas ; (X) : les invariants existent seulement pour certaines ondes simples spécifiques. Pour l'onde E_3 , il n'y a aucune onde double possible, peu importe la direction des champs \vec{v} et \vec{H} .

6.2 Les ondes multiples

Les superpositions des k-ondes en fonction des invariants de Riemann se réduisent toujours à une superposition entre k ondes d'un certain type et 2 ondes d'un autre type. Si deux des ondes (qui forment la k-onde) ne peuvent s'écrire en termes des invariants de Riemann, alors il n'y aura pas de k-ondes. Comme pour les ondes doubles,

l'invariant R^1 sera associé à la première onde, l'invariant R^2 sera associé à la deuxième onde, l'invariant R^3 sera associé à la troisième onde, et ainsi de suite. Voici quelques k-ondes :

1. Le résultat d'une superposition de k ondes entropiques E et ℓ ondes entropiques E_2 (les deux sont exprimables par les invariants de Riemann) est une onde triple. La plus générale est l'onde triple $E_2E_2E_2$, présentée à la page 73.
2. Le résultat le plus général pour k ondes A_2^ε et ℓ ondes A^ε (exprimables en fonctions des invariants de Riemann) est l'onde double $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ présentée à la page 75.
3. Les superpositions entre les ondes entropiques et d'Alfvén se divisent en deux groupes :
 - (a) Lorsque $\vec{v} \nparallel \vec{H}$ on a la superposition d'une onde E et k ondes A^ε en fonction des invariants de Riemann. Le cas le plus général est l'onde triple $EA^\varepsilon A^\varepsilon$ présentée à la page 85.
 - (b) Lorsque $\vec{v} \parallel \vec{H}$, on retrouve diverses ondes multiples formées par k ondes E_2 et ℓ ondes A_2^ε . Pour $k = 1$ et $\ell = 2$, on a l'onde triple $E_2A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ présentée à la page 98. Pour $k = 2$ et $\ell = 1$, on a l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$ présentée à la page 99.
4. Les ondes multiples (plus de deux ondes) en termes des invariants de Riemann pour k ondes E et une onde F existent seulement lorsque $k = 2$ (donc deux ondes E) et pour $\kappa = 2$. On obtient donc l'onde triple EEF , présentée à la page 114.

6.3 Superpositions d'ondes entropiques

La solution la plus générale pour la superposition de deux ondes entropiques en fonction des invariants de Riemann est l'onde double E_2E_2 donnée par

$$\mathbf{E_2 E_2} : \rho = \rho(R^1, R^2), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \alpha(R^1, R^2)\vec{H}_0, \quad \vec{H} = \beta(R^1, R^2)\vec{H}_0 \quad (6.2a)$$

où les invariants de Riemann sont

$$R^i = \psi^i(x, y), \quad i = 1, 2, \quad (6.2b)$$

où $\rho(R^1, R^2), \alpha(R^1, R^2), \beta(R^1, R^2)$ et $\psi^i(x, y)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions arbitraires et $\vec{H}_0 = (0, 0, 1)$. Il s'agit donc d'un écoulement stationnaire parallèle au champ magnétique. Les éléments intégraux simples pour cette superposition sont donnés par

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial R^i}, -\frac{\beta}{4\pi} \frac{\partial \beta}{\partial R^i}, \frac{\partial \alpha}{\partial R^i} \vec{H}_0, \frac{\partial \beta}{\partial R^i} \vec{H}_0 \right), \\ \lambda_i^{(k)} &= \left(0, \alpha_i^{(k)}(R^1, R^2) \times \vec{H}_0 \right), \quad i, k = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.2c)$$

où les $\alpha_i^{(k)}$ sont des vecteurs linéairement indépendants. L'indice k signifie qu'il y a deux vecteurs λ_i pour chaque onde E_2 . Par exemple, la première onde E_2 aura les vecteurs $\lambda_1^{(1)}$ et $\lambda_1^{(2)}$. Les éléments simples donnés par l'équation (6.2c) sont une forme générale des éléments simples pour l'onde E_2 (4.10).

D'une manière analogue, les k -ondes E_2 sont données par la

$$\mathbf{k - ondes E_2} : \rho = \rho(R^1, \dots, R^k), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \alpha(R^1, \dots, R^k)\vec{H}_0, \quad \vec{H} = \beta(R^1, \dots, R^k)\vec{H}_0, \quad (6.3a)$$

où les invariants de Riemann sont

$$R^i = \psi^i(x, y), \quad i = 1, \dots, 2, \quad (6.3b)$$

où $\rho(R^1, \dots, R^k), \alpha(R^1, \dots, R^k), \beta(R^1, \dots, R^k)$ et $\psi^i(x, y)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions

arbitraires et $\vec{H}_0 = (0, 0, 1)$. Pareillement, les éléments intégraux simples seront donnés par

$$\gamma_i = \left(\frac{\partial \rho}{\partial R^i}, -\frac{\beta}{4\pi} \frac{\partial \beta}{\partial R^i}, \frac{\partial \alpha}{\partial R^i} \vec{H}_0, \frac{\partial \beta}{\partial R^i} \vec{H}_0 \right). \quad (6.3c)$$

Puisqu'il peut y avoir trois vecteurs linéairement indépendants γ_i , il s'agira donc d'une onde triple. La superposition d'une ℓ -onde E avec une k -onde E_2 (pour des entiers positifs ℓ et k) sera une onde triple, c'est-à-dire un cas particulier de la solution (6.3). Lorsque les superpositions sont formées seulement d'ondes entropiques, les équations de la MHD se réduisent au système

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{H}}{dt} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0, \\ \nabla \left(p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} = 0, \quad (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{v} = 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on retrouve la superposition linéaire d'ondes simples en termes des invariants de Riemann donnés par

$$\mathbf{E_2 E_2} : \quad \rho = \rho(R^1, R^2), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \alpha(R^1, R^2) \vec{H}_0, \quad \vec{H} = \beta(R^1, R^2) \vec{H}_0 \quad (6.4a)$$

où les invariants de Riemann sont

$$R^i = \psi^i(x + \alpha_i(R^i)y), \quad i = 1, 2, \quad (6.4b)$$

où $\rho(R^1, R^2), \alpha(R^1, R^2), \beta(R^1, R^2), \psi^i(x + \alpha_i(R^i)y)$ et $\alpha_i(R^i)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions arbitraires. Cette solution correspond à l'union de deux ondes entropiques qui n'interagissent pas.

Hypothèse : Pour les fonctions arbitraires ψ^i et α_i , posons

$$\begin{aligned}\alpha_i(R^i) &= R^i, \\ \psi^1(x + \alpha_1(R^1)y) &= \sqrt{x + \alpha_1(R^1)y}, \\ \psi^2(x + \alpha_2(R^2)y) &= (x + \alpha_2(R^2)y)^{-1}.\end{aligned}$$

De l'équation (6.4b), les invariants de Riemann seront donnés par

$$R^1(x, y) = \frac{y + \varepsilon\sqrt{4x + y^2}}{2}, \quad R^2(x, y) = \frac{-x + \varepsilon\sqrt{x^2 + 4y}}{2y}, \quad y \neq 0 \quad (6.5a)$$

6.4 Superpositions d'ondes d'Alfvén

Les solutions d'ondes multiples d'Alfvén de rang k sont seulement possibles lorsque les ondes d'Alfvén sont stationnaires et du même type.

La superposition de k ondes en termes des invariants de Riemann se ramène à une onde multiple de la forme

$$\mathbf{A}_2^\varepsilon \mathbf{A}_2^\varepsilon : \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad \vec{H}^2 = H_0^2, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (6.6a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(R^1, \dots, R^k),$$

où les invariants R^i , $i = 1, \dots, k$ satisfont

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial R^i} \cdot \nabla R^i = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6.6b)$$

Il s'agit du cas le plus général pour l'onde multiple d'Alfvén. Pour ces ondes multiples

d'Alfvén, les équations de la MHD se réduisent au système

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0, & p &= p_0, & \vec{H}^2 &= H_0^2, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho}}(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{v}, & \nabla \cdot \vec{H} &= 0, \\ \frac{d\vec{H}}{dt} &= (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho}}(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H}, & \nabla \cdot \vec{v} &= 0.\end{aligned}$$

Pour le cas de la superposition linéaire des ondes d'Alfvén, on obtient la solution stationnaire

$$\rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad \vec{H} = \vec{H}(R^1, R^2), \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (6.7a)$$

où

$$\vec{H}^2 = H_0^2, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^i} \cdot \vec{\phi}_i(R^i) = 0, \quad R^i = \psi^i(\vec{\phi}_i \cdot \vec{x}) \quad i = 1, 2, \quad (6.7b)$$

où $\vec{\phi}_i$ est un vecteur arbitraire qui dépend de R^i et ψ^i est une fonction arbitraire qui dépend de $\vec{\phi}_i \cdot \vec{x}$. Cette solution correspond à une superposition linéaire d'ondes, c'est-à-dire que les ondes ne s'affectent pas. Les deux ondes se croisent sans interagir.

Hypothèse : Pour satisfaire les contraintes données par l'équation (6.7b), nous allons poser

$$\begin{aligned}\vec{H}(R^1, R^2) &= H_0 \left(f(R^1), g(R^2), \varepsilon \sqrt{1 - f(R^1)^2 - g(R^2)^2} \right), \\ \vec{\phi}_1(R^1) &= (0, R^1, 0), \quad \vec{\phi}_2(R^2) = (R^2, 0, 0), \\ \psi^1(\vec{\phi}_1 \cdot \vec{x}) &= (\vec{\phi}_1 \cdot \vec{x})^2 + \vec{\phi}_1 \cdot \vec{x}, \quad \psi^2(\vec{\phi}_2 \cdot \vec{x}) = (\vec{\phi}_2 \cdot \vec{x})^2 - \vec{\phi}_1 \cdot \vec{x},\end{aligned}$$

où H_0 est une constante arbitraire et $f(R^1)$ et $g(R^2)$ sont des fonctions arbitraires.

Dans ce cas, les invariants de Riemann seront donnés par

$$R^1(y) = \frac{1-y}{y^2}, \quad R^2(x) = \frac{1+x}{x^2}, \quad x, y \neq 0. \quad (6.7c)$$

Pour l'onde double $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ donnée par l'équation (6.6), il est possible de trouver un écoulement situé entre deux régions fermées générées par un champ magnétique où aucun courant ne circule en dehors de ces régions. Par exemple, on pourrait avoir un fluide qui circule entre deux tores générés par des champs magnétiques. La figure 6.1 illustre le tore extérieur tandis que la figure 6.2 illustre le tore intérieur. Dans les deux cas, les flèches correspondent aux champs magnétiques qui génèrent les surfaces toroïdales.

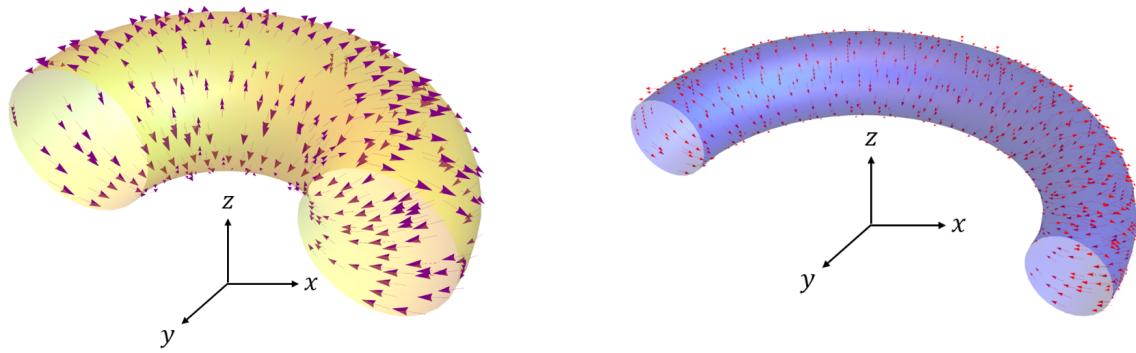


FIGURE 6.1 – Le champ magnétique externe (donné par le champ de vecteurs avec les flèches mauves) qui génère une surface toroïdale, représentée en jaune.

FIGURE 6.2 – Le champ magnétique interne (donné par le champ de vecteurs avec les flèches rouges) qui génère une surface toroïdale, représentée en bleue.

La figure 6.3 illustre les deux surfaces engendrées par les champs magnétiques avec le courant électrique $\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \vec{H}$ qui circule entre les deux tores.

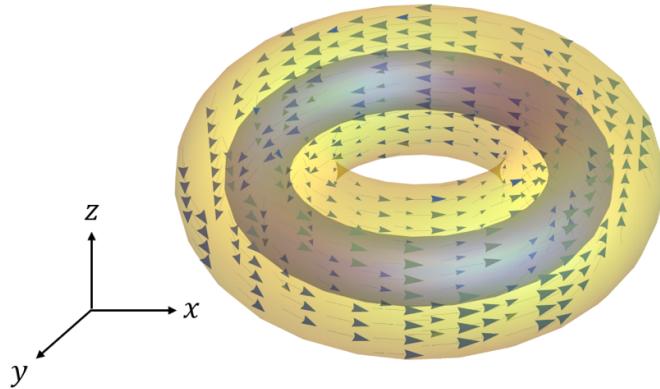


FIGURE 6.3 – Les deux tores sont superposés. Le courant, représenté par les flèches, circule entre les deux surfaces

Puisque le courant peut seulement circuler entre les deux surfaces (il ne peut pas traverser les surfaces), on a la condition frontière

$$(\nabla \times \vec{H})_N = 0, \quad (6.8)$$

où N est la composante normale par rapport à la surface extérieure S_1 . On vérifie cette condition en intégrant le champ $\nabla \times \vec{H}$ sur un élément de surface dS_1 du tore

$$\int_{S_1} (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{\partial S_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_R \vec{H} \cdot d\vec{\ell} - \int_R \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (6.9)$$

c'est-à-dire que la condition frontière est $(\nabla \times \vec{H})_N = 0$ entre les lignes de champ magnétique. De la figure (6.4), on voit que $\vec{H} \cdot d\vec{\ell}_1 = 0$ et $\vec{H} \cdot d\vec{\ell}_2 = 0$. Les ℓ_1 et ℓ_2 sont des courbes sur les surfaces S_1 (tore extérieur) et S_2 (tore intérieur). On voit que la contrainte différentielle $\frac{\partial \vec{H}}{\partial R^i} \cdot \nabla R^i = 0$, $i = 1, 2 \implies \nabla \cdot \vec{H} = 0$, où les R^i sont les invariants de Riemann. On peut donc éviter d'utiliser les invariants de Riemann comme coordonnées (les coordonnées cartésiennes sont plus adaptées pour décrire un tore). On peut maintenant se concentrer sur la condition $\nabla \cdot \vec{H} = 0$. Pour ce faire,

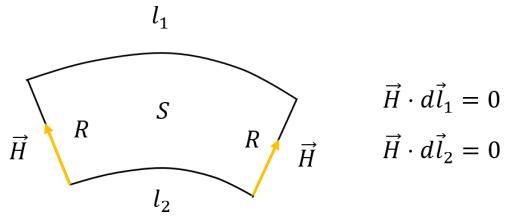


FIGURE 6.4 – Coupe transversale de la figure 6.3. La surface S_1 correspond à la surface jaune (le tore extérieur) et la surface S_2 correspond à la surface bleue (le tore intérieur).

nous allons considérer une section du tore, illustrée à la figure 6.5. En intégrant le long du volume V entre les deux tores, on a

$$\int_V \nabla \cdot \vec{H} dz = \int_{S_1} \vec{H} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{S_2} \vec{H} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{S_1} H d\sigma - \int_{S_2} H d\sigma = H(S_1 - S_2), \quad (6.10)$$

ce qui est nul pour $S_1 = S_2$. La variable z est l'axe vertical au centre du tore. On note finalement que lorsque

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial R^i} \cdot \nabla R^i = 0 \implies \nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (6.11)$$

alors la discussion précédente s'applique. Les solutions ne s'exprimeront plus en fonction des invariants de Riemann. Les solutions seront donc plus générales. De l'équation (6.11), on note qu'on peut additionner les deux termes pour $i = 1, 2$ de sorte que

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^i} \cdot \nabla R^i = 0, \quad (6.12)$$

ce qui correspondrait à une nouvelle solution.

Nous allons maintenant calculer quelques quantités physiques pour cette solution en fonction des invariants de Riemann donnés par l'équation (6.7c). Ces quantités sont présentées en détail dans le chapitre 2. Nous avons que le champ électrique \vec{E} , la densité de courant \vec{j} , la force magnétique \vec{F}_M , la vorticité $\vec{\omega}$ et le tenseur de densité

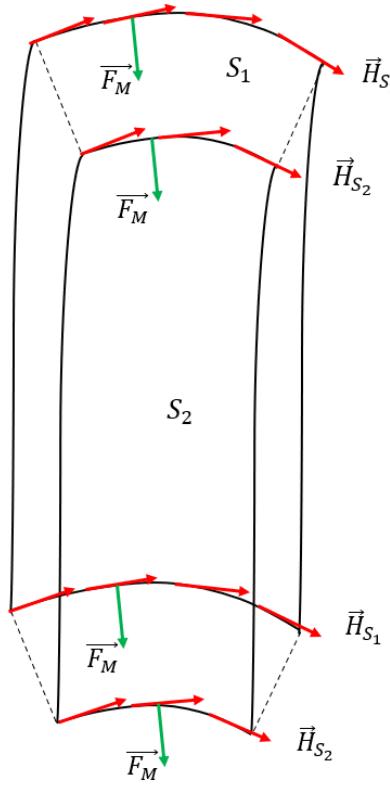


FIGURE 6.5 – Un élément de volume de la figure 6.3. Le champ \vec{H}_{S_1} génère la surface extérieure tandis que le champ \vec{H}_{S_2} génère la surface intérieure.

de la quantité de mouvement $\hat{\Pi}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(x, y) &= (0, 0, 0), \\
 \vec{j}(x, y) &= -\frac{H_0}{4\pi} \left(\frac{(y-2)f\dot{f}}{y^3\sqrt{1-f^2-g^2}}, \frac{(x+2)g\dot{g}}{x^3\sqrt{1-f^2-g^2}}, \frac{x^3(y-2)\dot{f}+y^3(x+2)\dot{g}}{x^3y^3} \right), \\
 \vec{F}_M(x, y) &= \frac{H_0^2}{4\pi} \left(-\frac{(y-2)g\dot{f}}{y^3}, \frac{(x+2)f\dot{g}}{x^3}, \frac{f\dot{g}(x^3(y-2)\dot{f}-y^3(x+2)\dot{g})}{x^3y^3\sqrt{1-f^2-g^2}} \right), \\
 \vec{\omega}(x, y) &= -\frac{\varepsilon H_0}{2\sqrt{\pi\rho_0}} \left(\frac{(y-2)f\dot{f}}{y^3\sqrt{1-f^2-g^2}}, \frac{(x+2)g\dot{g}}{x^3\sqrt{1-f^2-g^2}}, \frac{x^3(y-2)\dot{f}+y^3(x+2)\dot{g}}{x^3y^3} \right), \\
 \hat{\Pi}(x, y) &= \left(p_0 + \frac{H_0^2}{8\pi} \right) I_3,
 \end{aligned}$$

et les énergies cinétique E_K , interne E_I , magnétique E_M , hydrodynamique E_H et les densités de courant d'énergie cinétique \vec{q}_K , interne \vec{q}_I , magnétique \vec{q}_M et hydrodyna-

mique \vec{q}_H sont données par

$$\begin{aligned} E_K(x, y) &= \frac{H_0^2}{8\pi}, & \vec{q}_K(x, y) &= \frac{\varepsilon H_0^3}{16\sqrt{\rho_0\pi^3}} \left(f, g, \sqrt{1 - f^2 - g^2} \right), \\ E_I(x, y) &= \frac{p_0}{\kappa - 1}, & \vec{q}_I(x, y) &= \frac{\varepsilon H_0 p_0}{2\sqrt{\rho_0\pi}(\kappa - 1)} \left(f, g, \sqrt{1 - f^2 - g^2} \right), \\ E_M(x, y) &= \frac{H_0^2}{8\pi}, & \vec{q}_M(x, y) &= (0, 0, 0), \\ E_H(x, y) &= \frac{H_0^2}{4\pi}, & \vec{q}_H(x, y) &= \frac{\varepsilon H_0^3}{16\sqrt{\rho_0\pi^3}} \left(f, g, \sqrt{1 - f^2 - g^2} \right), \end{aligned}$$

où f et g sont des fonctions arbitraires

$$f = f \left(\frac{1-y}{y^2} \right) \quad \text{et} \quad g = g \left(\frac{1+x}{x^2} \right),$$

et où I_3 est la matrice identité 3×3 . On remarque que les énergies E_K, E_I, E_M et E_H sont toutes constantes. De plus, il n'y a pas de champ électrique \vec{E} et de densité de courant magnétique \vec{q}_M pour cet écoulement et le tenseur de densité de quantité de mouvement $\hat{\Pi}$ est constant. À partir de ces quantités, on vérifie les lois de conservation présentées à la section 2.2 pour les énergies cinétique E_K et magnétique E_M , la quantité de mouvement $\hat{\Pi}$ et on obtient de l'équation (2.20)

$$D\vec{\omega} = \frac{H_0^2(x+2)(y-2)fg(f-g)\dot{f}\dot{g}}{4\pi x^3 y^3 \rho_0 (1-f^2-g^2)^{3/2}} (1, 1, 1).$$

Par exemple, si le terme $\frac{(x+2)(y-2)fg(f-g)\dot{f}\dot{g}}{x^3 y^3 (1-f^2-g^2)^{3/2}}$ est positif, alors la vorticité augmente dans l'élément fluide. Si ce terme est négatif, alors la vorticité diminue dans l'élément fluide. On remarque aussi que la force magnétique \vec{F}_M est perpendiculaire à la densité de courant \vec{j} et au champ magnétique \vec{H} , et par conséquent aussi au champ de vitesse \vec{v} . Cela signifie que la force magnétique \vec{F}_M maintient l'écoulement dans le tore.

6.5 Superpositions entre les ondes entropiques et les ondes d'Alfvén

Les superpositions entre les ondes entropiques et les ondes d'Alfvén se ramènent à deux groupes, soit lorsque le champ de vitesse n'est pas parallèle au champ magnétique, c'est-à-dire $\vec{v} \nparallel \vec{H}$, et lorsque le champ de vitesse est parallèle au champ magnétique, c'est-à-dire $\vec{v} \parallel \vec{H}$.

1. $\vec{v} \nparallel \vec{H}$

Lorsque les champs \vec{v} et \vec{H} ne sont pas parallèles, seule la superposition des ondes E et A^ε existe en fonction des invariants de Riemann. Cette onde double est de la forme

$$\mathbf{EA}^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + \vec{\phi}(R^1), \quad \vec{H}^2 = \mathcal{H}^2(R^1) \quad (6.13a)$$

$$\vec{H} = \alpha(R^1, R^2) \dot{\vec{\phi}} + \beta(R^1, R^2) \ddot{\vec{\phi}} + \vec{\psi}(R^1)$$

où $\mathcal{H}(R^1)$ est une fonction arbitraire et les vecteurs $\vec{\phi}(R^1)$ et $\vec{\psi}(R^1)$ sont arbitraires. Définissons la fonction

$$\Delta = (\beta \dot{\vec{\phi}} \cdot \ddot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\phi}} \cdot \vec{\psi})^2 - \dot{\vec{\phi}}^2 (\beta^2 \ddot{\vec{\phi}}^2 + 2\beta \dot{\vec{\phi}} \cdot \vec{\psi} + \vec{\psi}^2 - \mathcal{H}^2),$$

alors la fonction $\alpha(R^1, R^2)$ est donnée par

$$\alpha(R^1, R^2) = -\frac{\beta \dot{\vec{\phi}} \cdot \ddot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\phi}} \cdot \vec{\psi} \mp \sqrt{\Delta}}{\dot{\vec{\phi}}^2}, \quad (6.13b)$$

et la fonction $\beta(R^1, R^2)$ satisfait l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial R^1} (\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\psi}) \cdot \ddot{\vec{\phi}} + \beta^2 (\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\phi}) \cdot \ddot{\vec{\phi}} + \beta \left((\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\psi}) \cdot \ddot{\vec{\phi}} + \vec{\psi} \cdot (\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\phi}) - \frac{\dot{\vec{\phi}} \cdot \ddot{\vec{\phi}}}{\dot{\vec{\phi}}^2} (\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\psi}) \cdot \ddot{\vec{\phi}} \right) + \\ \mp \sqrt{\Delta} \frac{(\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\psi}) \cdot \ddot{\vec{\phi}}}{\dot{\vec{\phi}}^2} + (\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\psi}) \cdot \dot{\vec{\psi}} - \frac{\dot{\vec{\phi}} \cdot \vec{\psi}}{\dot{\vec{\phi}}^2} (\dot{\vec{\phi}} \times \vec{\psi}) \cdot \ddot{\vec{\phi}} = 0. \end{aligned} \quad (6.13c)$$

Les invariants de Riemann R^1 et R^2 satisfont les équations

$$\frac{\partial R^i}{\partial t} + \vec{\phi} \cdot \nabla R^i = 0, \quad \dot{\vec{\phi}} \cdot \nabla R^i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (6.13d)$$

$$\vec{H} \cdot \nabla R^1 = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^2} \cdot \nabla R^2 = 0, \quad (6.13e)$$

pour les fonctions et vecteurs arbitraires qui dépendent de R^1 . La seule dépendance en R^2 provient de la fonction $\beta(R^1, R^2)$. Dans le cas où $\vec{\phi}(R^1) = a(R^1) \vec{e}_0$, où $a(R^1)$ est une fonction arbitraire et \vec{e}_0 est un vecteur constant et unitaire, la solution donnée par l'équation (6.13) devient

$$\mathbf{EA}^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}(R^1, R^2)}{\sqrt{4\pi\rho}} + a(R^1) \vec{e}_0, \quad (6.14a)$$

$$\vec{H}^2 = \mathcal{H}^2(R^1), \quad \vec{H} = \left(H_1(R^1, R^2), b(R^2) H_1(R^1, R^2), \frac{\mathcal{H}(R^1)}{H_1(R^1, R^2) \sqrt{1 + b(R^2)^2}} \right)$$

et les éléments intégraux simples sont

$$\lambda_E = (0, \vec{H} \times \vec{e}_0), \quad \lambda_A = \left(0, \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^2} \times \vec{e}_0 \right). \quad (6.14b)$$

Les invariants de Riemann R^1 et R^2 satisfont les équations différentielles

$$\frac{\partial R^1}{\partial x} + b(R^2) \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0, \quad (6.14c)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial R^2} \frac{\partial R^2}{\partial x} + \frac{\partial(H_1 b)}{\partial R^2} \frac{\partial R^2}{\partial y} = 0, \quad (6.14d)$$

où $H_1(R^1, R^2)$, $b(R^2)$, $\mathcal{H}(R^1)$ et $a(R^1)$ sont des fonctions arbitraires. Les ondes obtenues sont donc stationnaires avec une direction constante \vec{e}_0 . De la contrainte $\vec{H}^2 = \mathcal{H}^2(R^1)$, on obtient que la fonction $H_1(R^1, R^2)$ doit être donnée par

$$H_1(R^1, R^2) = \varepsilon \sqrt{\frac{\mathcal{H}(R^1)^2 + \varepsilon \sqrt{\mathcal{H}(R^1)^2(\mathcal{H}(R^1)^2 - 4)}}{2 + 2b(R^2)^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

Dans ce cas, l'équation (6.14d) prend la forme

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} - \frac{1}{b(R^2)} \frac{\partial R^2}{\partial y} = 0,$$

dont la solution est

$$R^2 = \phi^2 \left(y + \frac{x}{b(R^2)} \right), \quad (6.15)$$

où $\psi^2 \left(y + \frac{x}{b(R^2)} \right)$ est une fonction arbitraire.

Hypothèse : Pour écrire l'invariant R^2 sous forme explicite, on pose les fonctions arbitraires

$$\psi^2 = id \quad \text{et} \quad b(R^2) = \frac{1}{R^2},$$

de sorte que, de l'équation (6.15), l'invariant R^2 prend la forme

$$R^2(x, y) = \frac{y}{1-x}, \quad x \neq 1. \quad (6.16)$$

L'équation (6.14c) s'écrit maintenant comme

$$\frac{\partial R^1}{\partial x} + \frac{1-x}{y} \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0. \quad (6.17)$$

En résolvant par la méthode des caractéristiques, on obtient la solution

$$R^1(x, y) = \psi^1 \left(x^2 - 2x + y^2 \right) \quad (6.18)$$

où $\psi^1(x^2 - 2x + y^2)$ est une fonction arbitraire.

La superposition en termes des invariants de Riemann pour une onde E et k ondes A^ε est donnée par

$$\mathbf{E} \text{ et } \mathbf{k} \text{ ondes } \mathbf{A}^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p(R^1) + \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + \vec{\phi}(R^1), \quad (6.19a)$$

$$\vec{H} = \alpha(R^1, R^2, \dots, R^{k+1}) \dot{\vec{\phi}}(R^1) + \beta(R^1, R^2, \dots, R^{k+1}) \ddot{\vec{\phi}} + \vec{\psi}(R^1)$$

où \vec{H} et $\vec{\phi}$ satisfont

$$\vec{H} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^1} \cdot \dot{\vec{\phi}} = 0.$$

Les invariants de Riemann satisfont les équations

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\phi}} \cdot \nabla R^1 &= 0, & \frac{\partial R^i}{\partial t} + \vec{\phi} \cdot \nabla R^i &= 0, \\ \vec{H} \cdot \nabla R^1 &= 0, & \dot{\vec{\phi}} \cdot \nabla R^i &= 0, \quad i = 2, \dots, k+1 \\ \frac{\partial R^1}{\partial t} + \vec{\phi} \cdot \nabla R^1 &= 0, & \ddot{\vec{\phi}} \cdot \nabla R^i &= 0, \end{aligned} \quad (6.19b)$$

où R^1 est l'invariant associé à l'onde E et les R^2, \dots, R^{k+1} sont associés aux k ondes A^ε . Les fonctions et vecteurs $\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1), \vec{\phi}(R^1), \vec{\psi}(R^1)$ sont arbitraires et les fonctions α et β satisfont les équations (6.13b) et (6.13c). Pour cette solution, on remarque qu'il y a trois vecteurs γ linéairement indépendants. Cette solution se ramène donc à une onde triple $EA^\varepsilon A^\varepsilon$. Pour $\vec{\phi}(R^1) = a(R^1) \vec{e}_0$, on a la solution d'onde triple

$$\mathbf{EA}^\varepsilon \mathbf{A}^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p(R^1) + \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + a(R^1) \vec{e}_0, \quad (6.20a)$$

$$\vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2, \quad \vec{H} = \left(H_1(R^2, R^3), b(R^2, R^3) H_1(R^2, R^3), \frac{\mathcal{H}(R^1)}{H_1(R^2, R^3) \sqrt{1 + b(R^2, R^3)^2}} \right)$$

et les éléments intégraux simples sont

$$\lambda_E = (0, \vec{H} \times \vec{e}_0), \quad \lambda_A^{(i)} = \left(0, \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^i} \times \vec{e}_0 \right), \quad i = 2, 3,$$

et où $\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$. Les invariants de Riemann satisfont les équations

$$\frac{\partial R^1}{\partial x} + b \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0, \quad (6.20b)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial R^i} \frac{\partial R^i}{\partial x} + \frac{\partial (H_1 b)}{\partial R^i} \frac{\partial R^i}{\partial y} = 0, \quad i = 2, 3, \quad (6.20c)$$

où R^1 est l'invariant associé à l'onde E et R^2, R^3 sont associés aux deux ondes A^ε .

On remarque que cette solution est stationnaire. Pour trouver les invariants de Riemann sous forme explicite, nous allons procéder de façon analogue à l'onde EA^ε de l'équation (6.14). De la contrainte $\vec{H}^2 = \mathcal{H}^2(R^1)$, on obtient que la fonction $H_1(R^2, R^3)$ est donnée par

$$H_1(R^1, R^2, R^3) = \varepsilon \sqrt{\frac{\mathcal{H}(R^1)^2 + \varepsilon \sqrt{\mathcal{H}(R^1)^2(\mathcal{H}(R^1)^2 - 4)}}{2 + 2b(R^2, R^3)^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

De l'équation (6.20c) on trouve les invariants

$$R^i = \psi^i \left(y + \frac{x}{b(R^2, R^3)} \right), \quad i = 2, 3, \quad (6.20d)$$

où les $\psi^i \left(y + \frac{x}{b(R^2, R^3)} \right)$, $i = 2, 3$ sont des fonctions arbitraires.

Hypothèse : Pour écrire les invariants R^2 et R^3 sous forme explicite, on pose les fonctions arbitraires

$$\begin{aligned} \psi^2 \left(y + \frac{x}{b(R^2, R^3)} \right) &= \left(y + \frac{x}{b(R^2, R^3)} \right)^2, \\ \psi^3 \left(y + \frac{x}{b(R^2, R^3)} \right) &= \left(y + \frac{x}{b(R^2, R^3)} \right)^{-1}, \\ b(R^2, R^3) &= \frac{1}{R^2 R^3}, \end{aligned}$$

telles que, de l'équation (6.20d), les invariants R^2 et R^3 prennent la forme

$$R^2(x, y) = \frac{y^2}{(x-1)^2}, \quad R^3(x, y) = \frac{1-x}{y}, \quad x \neq 1, y \neq 0. \quad (6.20e)$$

L'équation (6.20b) s'écrit maintenant comme

$$\frac{\partial R^1}{\partial x} + \frac{1-x}{y} \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0. \quad (6.20f)$$

En résolvant par la méthode des caractéristiques, on obtient la solution

$$R^1(x, y) = \psi^1(x^2 - 2x + y^2) \quad (6.20g)$$

où $\psi^1(x^2 - 2x + y^2)$ est une fonction arbitraire.

Considérons maintenant la solution EA^ε pour $\vec{v} \nparallel \vec{H}$ donnée par

$$\mathbf{EA}^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + a(R^1) \vec{e}_0, \quad \vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2, \quad (6.21a)$$

$$\vec{H}(R^1, R^2) = \frac{\mathcal{H}(R^1)}{\sqrt{1 + b(R^2)^2}} (1, b(R^2), 0)$$

où $\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$. Les invariants de Riemann satisfont les relations

$$\nabla R^1 \parallel (-b(R^2), 1, 0), \quad \nabla R^2 \parallel (1, b(R^2), 0), \quad (6.21b)$$

où R^1 est l'invariant de Riemann associé à l'onde E et R^2 est l'invariant de Riemann associé à l'onde A^ε .

Les fonctions $\rho(R^1)$, $a(R^1)$, $\mathcal{H}(R^1)$ et $b(R^2)$ sont arbitraires. Puisque \vec{v} est déterminé par des fonctions arbitraires ($\mathcal{H}(R^1)$, $b(R^2)$ et $a(R^1)$), on peut choisir un écoulement circulaire entre deux cylindres. La solution (6.21) peut donc être illustrée par la figure 6.6. Puisque les spirales correspondent à des valeurs constantes de R^1 , on a que la densité, la pression et la composante de \vec{v} sur

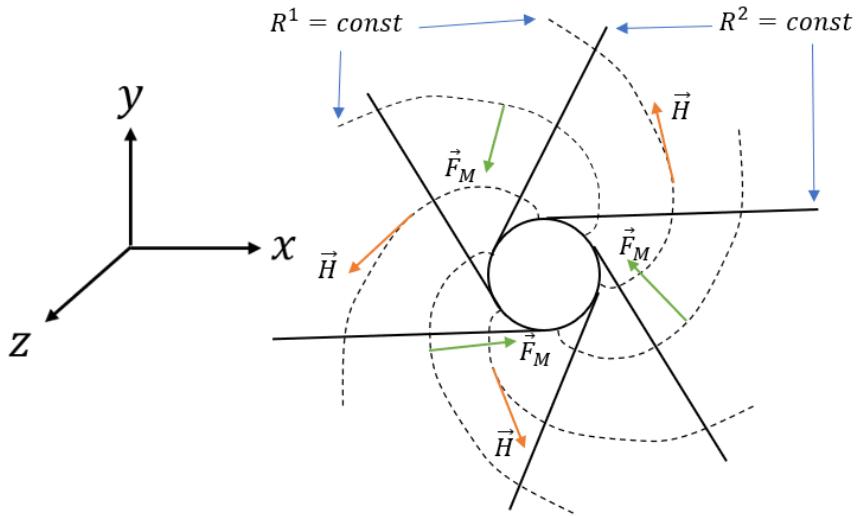


FIGURE 6.6 – Le champ magnétique \vec{H} et la force magnétique $\vec{F}_M = \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H})/4\pi$ le long des courbes déterminées par les deux invariants R^1 et R^2 dans le plan xy à $z = 0$.

l'axe z sont constantes le long de ces courbes. Les droites correspondent à des valeurs constantes de l'invariant R^2 et alors la direction du champ magnétique est constante le long de ces droites. Puisque ∇R^1 est perpendiculaire à ∇R^2 , leurs courbes se croisent de façon perpendiculaire, tel qu'illustré à la figure 6.6. Les droites $R^2 = const$ sont tangentes au cercle au centre de la figure. Aux intersections entre les droites et ces cercles, on retrouve une onde de choc. Les spirales $R^1 = const$ sont perpendiculaires à la surface du cercle. Ces spirales sont courbées ainsi à cause de la force magnétique \vec{F}_M qui est perpendiculaire à ces spirales.

De l'équation (6.21b), on a

$$\nabla R^1 = \xi^1(x, y, z)(-b(R^2), 1, 0), \quad \nabla R^2 = \xi^2(x, y, z)(1, b(R^2), 0),$$

où les $\xi^i(x, y, z)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions de proportionnalité. De ces relations

de proportionnalité, on peut écrire les différentielles dR^1 et dR^2 comme

$$\begin{aligned} dR^1 &= \frac{\partial R^1}{\partial x}dx + \frac{\partial R^1}{\partial y}dy + \frac{\partial R^1}{\partial z}dz = \xi^1(-b(R^2)dx + dy), \\ dR^2 &= \frac{\partial R^2}{\partial x}dx + \frac{\partial R^2}{\partial y}dy + \frac{\partial R^2}{\partial z}dz = \xi^2(dx + b(R^2)dy). \end{aligned}$$

En regardant séparément les termes en dx , dy et dz , on a

$$\begin{aligned} dx : \quad \frac{\partial R^1}{\partial x} &= -\xi^1 b(R^2), & \frac{\partial R^2}{\partial x} &= \xi^2, \\ dy : \quad \frac{\partial R^1}{\partial y} &= \xi^1, & \frac{\partial R^2}{\partial x} &= \xi^2 b(R^2), \\ dz : \quad \frac{\partial R^1}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial R^2}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant les fonctions ξ^i , $i = 1, 2$ on obtient les équations différentielles

$$\frac{\partial R^1}{\partial x} + b(R^2) \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0, \quad (6.21c)$$

$$b(R^2) \frac{\partial R^2}{\partial x} - \frac{\partial R^2}{\partial y} = 0. \quad (6.21d)$$

La solution de l'équation (6.21d) est

$$R^2 = \psi^2(b(R^2)y + x), \quad (6.21e)$$

où $\psi^2(b(R^2)y + x)$ est une fonction arbitraire.

Hypothèse : Pour écrire l'invariant R^2 sous forme explicite, on pose les fonctions arbitraires

$$b(R^2) = R^2 \quad \psi^2(b(R^2)y + x) = b(R^2)y + x,$$

telles que, de l'équation (6.21e), R^2 est donné par

$$R^2(x, y) = \frac{x}{1-y}, \quad y \neq 1. \quad (6.21f)$$

L'équation (6.21c) s'écrit maintenant comme

$$\frac{\partial R^1}{\partial x} + \frac{x}{1-y} \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0.$$

De la méthode des caractéristiques, on trouve la solution

$$R^1(x, y) = \psi^1(x^2 + y^2 - 2y), \quad (6.21g)$$

où $\psi^1(x^2 + y^2 - 2y)$ est une fonction arbitraire.

Nous allons maintenant calculer quelques quantités physiques pour cette solution en fonction des invariants de Riemann donnés par les équations (6.21f) et (6.21g). Ces quantités sont présentées en détail dans le chapitre 2. Nous avons que le champ électrique \vec{E} , la densité de courant \vec{j} , la force magnétique \vec{F}_M , la vorticité $\vec{\omega}$ et le tenseur de densité de la quantité de mouvement $\hat{\Pi}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y) &= -\frac{a\mathcal{H}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2y}} (x, y - 1, 0), \\ \vec{j}(x, y) &= -\frac{\mathcal{H} + 2(x^2 + y^2 - 2y)\dot{\mathcal{H}}\dot{\psi}^1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 - 2y}} (0, 0, 1), \\ \vec{F}_M(x, y) &= \frac{\mathcal{H}\dot{\mathcal{H}}\dot{\psi}^1(\mathcal{H} + 2(x^2 + y^2 - 2y))}{4\pi(x^2 + y^2 - 2y)} (x, y - 1, 0), \\ \vec{\omega}(x, y) &= \left(2(y-1)\dot{a}\dot{\psi}^1, -2x\dot{a}\dot{\psi}^1, \varepsilon \frac{-\mathcal{H}\rho - (x^2 + y^2 - 2y)(2\rho\dot{\mathcal{H}} - \mathcal{H}\dot{\rho})\dot{\psi}^1}{2\sqrt{\pi(x^2 + y^2 - 2y)}\rho^{3/2}} \right), \\ \hat{\Pi}(x, y) &= \begin{pmatrix} p_0 & 0 & \varepsilon \frac{(y-1)a\mathcal{H}\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\pi(x^2 + y^2 - 2y)}} \\ 0 & p_0 & -\varepsilon \frac{xa\mathcal{H}\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\pi(x^2 + y^2 - 2y)}} \\ \varepsilon \frac{(y-1)a\mathcal{H}\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\pi(x^2 + y^2 - 2y)}} & -\varepsilon \frac{xa\mathcal{H}\sqrt{\rho}}{2\sqrt{\pi(x^2 + y^2 - 2y)}} & p_0 + a^2\rho \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et les énergies cinétique E_K , interne E_I , magnétique E_M , hydrodynamique E_H

sont données par

$$\begin{aligned} E_K(x, y) &= \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} + \frac{a^2\rho}{2}, & E_I(x, y) &= \frac{8p_0\pi - \mathcal{H}^2}{8\pi(\kappa - 1)}, \\ E_M(x, y) &= \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}, & E_H(x, y) &= \frac{\mathcal{H}^2}{4\pi} + \frac{a^2\rho}{2}, \end{aligned}$$

et les densités de courant d'énergie cinétique \vec{q}_K , interne \vec{q}_I , magnétique \vec{q}_M et hydrodynamique \vec{q}_H sont données par

$$\begin{aligned} \vec{q}_K(x, y) &= (\mathcal{H}^2 + 4\pi a^2 \rho) \left(\frac{\varepsilon \mathcal{H}(y-1)}{16\pi^{3/2} \sqrt{\rho(x^2 + y^2 - 2y)}}, -\frac{\varepsilon \mathcal{H}x}{16\pi^{3/2} \sqrt{\rho(x^2 + y^2 - 2y)}}, \frac{a}{8\pi} \right), \\ \vec{q}_I(x, y) &= \frac{\mathcal{H}^2 - 8p_0\pi}{8\pi(\kappa - 1)} \left(-\frac{\varepsilon \mathcal{H}(y-1)}{2\sqrt{\pi\rho(x^2 + y^2 - 2y)}}, \frac{\varepsilon \mathcal{H}x}{2\sqrt{\pi\rho(x^2 + y^2 - 2y)}}, -a \right), \\ \vec{q}_M(x, y) &= \frac{a\mathcal{H}^2}{4\pi}(0, 0, 1), \\ \vec{q}_H(x, y) &= \frac{\mathcal{H}^2 - 8p_0\pi}{8\pi(\kappa - 1)} \left(-\frac{\varepsilon \mathcal{H}(y-1)}{2\sqrt{\pi\rho(x^2 + y^2 - 2y)}}, \frac{\varepsilon \mathcal{H}x}{2\sqrt{\pi\rho(x^2 + y^2 - 2y)}}, -a \right) + \frac{a\mathcal{H}^2}{4\pi}(0, 0, 1), \end{aligned}$$

où a, ρ, \mathcal{H} et ψ^1 sont des fonctions arbitraires de $x^2 + y^2 - 2y$. On remarque que le tenseur de densité de quantité de mouvement $\hat{\Pi}$ est symétrique. À partir de ces quantités, on vérifie les lois de conservation présentées à la section 2.2 pour les énergies cinétique E_K et magnétique E_M et pour la quantité de mouvement $\hat{\Pi}$. L'énergie et la quantité de mouvement sont bien conservées pour cet écoulement.

De l'équation (2.20), on obtient

$$\begin{aligned} D\vec{\omega} = - \frac{\varepsilon x(x+y-1)(y-1)}{\sqrt{\pi(x^2 + y^2 - 2y)}\rho^{3/2}} \\ \left[2\dot{a}\mathcal{H}\rho(\dot{\psi}^1)^2 - \dot{a}\mathcal{H}\dot{\rho}(\dot{\psi}^1)^2 - \ddot{a}\mathcal{H}\rho(\dot{\psi}^1)^2 - 2\dot{a}\mathcal{H}\rho\ddot{\psi}^1 - \frac{\dot{a}\mathcal{H}\rho\dot{\psi}^1}{x^2 + y^2 - 2y} \right] (1, 1, 1). \end{aligned}$$

On voit que la vorticité varie avec la même intensité dans toutes les directions. Si $D\vec{\omega}$ est positif, alors, la vorticité augmente dans l'élément fluide. Si ce terme est négatif, alors la vorticité diminue dans l'élément fluide.

On remarque aussi que la force magnétique \vec{F}_M est perpendiculaire à la densité de courant \vec{j} et au champ magnétique \vec{H} . La force magnétique \vec{F}_M fait donc courber les lignes de champ magnétique \vec{H} selon des spirales, telles qu'illustrées dans la figure 6.6. Puisque le champ de vitesse \vec{v} est parallèle au champ magnétique \mathcal{H} dans le plan xy , alors l'écoulement suit ces spirales. Cependant, le champ de vitesse \vec{v} a une composante $a(x^2 + y^2 - 2y)$ selon l'axe z tel que le fluide s'éloigne du plan xy avec un mouvement hélicoïdal.

2. $\vec{v} \parallel \vec{H}$

Lorsque les champs \vec{v} et \vec{H} sont parallèles, on retrouve deux types d'ondes doubles : $E_2 A_2^\varepsilon$ et EA^ε . Pour l'onde $E_2 A_2^\varepsilon$ en termes des invariants de Riemann, on a la solution

$$\mathbf{E_2 A_2^\varepsilon :} \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H} = \mathcal{H}(R^1) \vec{e}(R^2), \quad (6.22a)$$

où $|\vec{e}(R^2)| = 1$. Les invariants de Riemann satisfont les équations

$$\vec{e} \cdot \nabla R^1 = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}}{\partial R^2} \cdot \nabla R^2 = 0, \quad (6.22b)$$

où R^1 est l'invariant associé à l'onde E_2 et R^2 est l'invariant associé à l'onde A_2^ε et les fonctions $\rho(R^1)$, $\mathcal{H}(R^1)$ et $\vec{e}(R^2)$ sont arbitraires. Cette solution est stationnaire.

Les éléments intégraux simples pour l'onde E_2 sont donnés par

$$\gamma_{E_2} = \left(\dot{\rho}, -\frac{\vec{H}}{4\pi} \vec{H}_{R^1}, \varepsilon \left(\frac{\mathcal{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} \right)_{R^1} \vec{e}, \dot{\mathcal{H}} \vec{e} \right), \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (6.22c)$$

$$\lambda_{E_2}^{(i)} = \left(0, \vec{\alpha}^{(i)} \times \vec{e} \right), \quad (6.22d)$$

où $\vec{\alpha}^{(i)}$, $i = 1, 2$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

Les éléments intégraux simples pour l'onde A_2^ε sont donnés par

$$\gamma_{A_2} = \left(0, 0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho}} \dot{\vec{e}}, \dot{\vec{e}} \right), \quad (6.22e)$$

$$\lambda_{A_2}^{(i)} = \left(0, \vec{\alpha}^{(i)} \times \dot{\vec{e}} \right), \quad (6.22f)$$

où $\vec{\alpha}^{(i)}$, $i = 1, 2$ sont des vecteurs linéairement indépendants. Il s'agit du cas le plus général pour l'onde double $E_2 A_2^\varepsilon$, où on retrouve plus particulièrement les ondes $E_2 A^\varepsilon$ et $E A_2^\varepsilon$. Pour satisfaire la contrainte $|\vec{e}(R^2)| = 1$, on choisit le vecteur

$$\vec{e} = (\varepsilon \sqrt{1 - (R^2)^2}, R^2, 0), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

De l'équation (6.22b), les équations pour les invariants sont

$$\varepsilon \sqrt{1 - (R^2)^2} \frac{\partial R^1}{\partial x} + R^2 \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0, \quad (6.22g)$$

$$R^2 \frac{\partial R^2}{\partial x} - \varepsilon \sqrt{1 - (R^2)^2} \frac{\partial R^2}{\partial y} = 0. \quad (6.22h)$$

Pour l'équation (6.22h), on a la solution implicite

$$R^2 = \psi^2 \left(R^2 y + \varepsilon \sqrt{1 - (R^2)^2} x \right), \quad (6.22i)$$

où $\psi^2 \left(R^2 y + \varepsilon \sqrt{1 - (R^2)^2} x \right)$ est une fonction arbitraire.

Hypothèse : Pour écrire l'invariant R^2 sous forme explicite, on pose la fonction arbitraire $\psi^2 = id$, de sorte que l'invariant R^2 s'écrit comme

$$R^2(x, y) = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(y-1)^2 + x^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad y < 1. \quad (6.22j)$$

où la condition $y < 1$ découle du fait qu'on doit avoir $\sqrt{(y-1)^2} = (1-y)$ pour satisfaire l'équation (6.22h). Des équations (6.22g) et (6.22j), l'équation pour

l'invariant R^1 devient

$$(1-y)\frac{\partial R^1}{\partial x} + x\frac{\partial R^1}{\partial y} = 0, \quad y < 1,$$

dont la solution est

$$R^1(x, y) = \psi^1(x^2 + y^2 - 2y), \quad y < 1, \quad (6.22k)$$

où $\psi^1(x^2 + y^2 - 2y)$ est une fonction arbitraire.

L'onde double EA^ε est donnée par

$$\mathbf{EA}^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2, \quad (6.23a)$$

où \vec{H} satisfait l'équation

$$\begin{aligned} & (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})_{R^1} \cdot (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})_{R^2} \times (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})(\vec{H} \times \vec{H}_{R^1 R^2} \cdot \vec{H}_{R^2}) \\ & - (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})_{R^1 R^2} \cdot (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})_{R^2} \times (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})(\vec{H} \times \vec{H}_{R^1}) \cdot \vec{H}_{R^2} = 0. \end{aligned} \quad (6.23b)$$

Les éléments intégraux simples sont donnés par

$$\lambda_E = (0, \vec{H} \times \vec{H}_{R^1}), \quad \lambda_A = (0, [(\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})_{R^2} \times (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})] \times \vec{H}_{R^2}),$$

et les invariants de Riemann satisfont les équations

$$\vec{H} \cdot \nabla R^1 = 0, \quad (6.23c)$$

$$\vec{H}_{R^1} \cdot \nabla R^1 = 0, \quad (6.23d)$$

$$\vec{H}_{R^2} \cdot \nabla R^2 = 0, \quad (6.23e)$$

$$[(\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})_{R^2} \times (\vec{H} \times \vec{H}_{R^1})] \cdot \nabla R^2 = 0, \quad (6.23f)$$

où R^1 est l'invariant associé à l'onde E et R^2 est l'invariant associé à l'onde A^ε et $\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1)$ sont arbitraires.

Cette solution est stationnaire. Contrairement aux autres ondes multiples entropiques-Alfvén, le champ magnétique de l'onde EA^ε dépend des deux invariants de Riemann.

On remarque qu'un champ magnétique donné par

$$\vec{H}(R^1, R^2) = \frac{\mathcal{H}(R^1)}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+b(R^2)^2}}, \frac{b(R^2)}{\sqrt{1+b(R^2)^2}}, 1 \right), \quad (6.23g)$$

satisfait la contrainte différentielle donnée par l'équation (6.23b) et est tel que $\vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$. On remarque aussi que l'équation (6.23f) est aussi satisfaite, peu importe la valeur de R^2 . L'équation (6.23e) prend donc la forme

$$-b(R^2) \frac{\partial R^2}{\partial x} + \frac{\partial R^2}{\partial y} = 0,$$

dont la solution est

$$R^2 = \psi^2(x + b(R^2)y),$$

où $\psi^2(x + b(R^2)y)$ est une fonction arbitraire.

Hypothèse : Pour écrire l'invariant R^2 sous forme explicite, on pose les fonctions

arbitraires

$$\psi^2 = id, \quad b(R^2) = R^2,$$

telles que l'invariant R^2 s'écrit comme

$$R^2 = \frac{x}{1-y}, \quad y \neq 1. \quad (6.23h)$$

D'après l'équation (6.23h) et du fait que $b(R^2) = R^2$, les équations (6.23c) et (6.23d) prennent toutes les deux la forme

$$(1-y) \frac{\partial R^1}{\partial x} + x \frac{\partial R^1}{\partial y} + \sqrt{(1-y)^2 + x^2} \frac{\partial R^1}{\partial z} = 0, \quad y < 1, \quad (6.23i)$$

où la condition $y < 1$ découle du fait qu'on demande $\sqrt{(y-1)^2} = (1-y)$.

Autrement, l'équation (6.23i) aurait été plus compliquée à résoudre. En utilisant la séparation de variable

$$R^1 = \psi^1 (A(x, 1-y)B(z)),$$

où $\psi^1 (A(x, 1-y)B(z))$ est une fonction arbitraire des fonctions à déterminer $A(x, 1-y)$ et $B(z)$. En utilisant la méthode de Monge, on trouve que l'équation (6.23i) admet la solution

$$R^1(x, y, z) = \psi^1 \left(f(x^2 + (1-y)^2) \exp \left[\zeta \left\{ \sqrt{x^2 + (1-y)^2} \arctan \left(\frac{x}{1-y} \right) - z \right\} \right] \right), \quad (6.23j)$$

où ψ^1 et $f(x^2 + (1-y)^2)$ sont des fonctions arbitraires et ζ est la constante arbitraire de séparation des variables. On note que cette solution est seulement définie pour $y < 1$, d'après l'équation (6.23i). La superposition en termes des invariants de Riemann pour k ondes E_2 et ℓ ondes A_2^ε est une solution de la

forme

$$\mathbf{k} \text{ ondes } \mathbf{E}_2 \text{ et } \ell \text{ ondes } \mathbf{A}_2^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1, \dots, R^k), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad (6.24a)$$

$$\vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H} = \mathcal{H}(R^1, \dots, R^k) \vec{e}(\tilde{R}^1, \dots, \tilde{R}^\ell),$$

où $|\vec{e}(\tilde{R}^1, \dots, \tilde{R}^\ell)| = 1$ et les invariants de Riemann satisfont les équations

$$\vec{e}(\tilde{R}^1, \dots, \tilde{R}^\ell) \cdot \nabla R^i = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (6.24b)$$

$$\vec{e}(\tilde{R}^1, \dots, \tilde{R}^\ell)_{\tilde{R}^s} \cdot \nabla \tilde{R}^s = 0, \quad s = 1, \dots, \ell \quad (6.24c)$$

où les R^i sont les invariants associés aux k ondes E_2 et les \tilde{R}^s sont les invariants associés aux ℓ ondes A_2^ε . Voici quelques résultats pour certaines valeurs de k (le nombre d'ondes E_2) et ℓ (le nombre d'ondes A_2^ε) :

- Pour $k = 1$, on a l'onde triple $E_2 A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ car $\text{rang} \|\gamma_{E_2}, \gamma_{A_2}^{(1)}, \dots, \gamma_{A_2}^{(\ell)}\| = 3$
- Pour $\ell = 1$, on a l'onde triple $E_2 E_2 A_2^\varepsilon$ car $\text{rang} \|\gamma_{E_2}^{(1)}, \dots, \gamma_{E_2}^{(k)}, \gamma_{A_2}\| = 3$
- Pour $k > 1$ et $\ell > 1$ on a les ondes multiples $E_2 E_2 A$, $E_2 E_2 A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ et $E_2 A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$
- Pour $k = 0$, on a l'onde double $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$
- Pour $\ell = 0$, on a l'onde triple $E_2 E_2 E_2$

Cette solution est stationnaire. De plus, la densité, la pression et la norme du champ magnétique dépendent des invariants des ondes E_2 tandis que la direction du champ magnétique dépend des invariants des ondes A_2^ε .

Voici quelques ondes multiples qu'il est possible d'obtenir à partir de la solution (6.24).

Pour $k = 1$ et $\ell = 2$, on a l'onde triple

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{A}_2^\varepsilon \mathbf{A}_2^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H} = \mathcal{H}(R^1) \vec{e}(R^2, R^3). \quad (6.25a)$$

Pour

$$\vec{e}(R^2, R^3) = (R^2, R^3, \sqrt{1 - (R^2)^2 - (R^3)^2}), \quad |\vec{e}| = 1,$$

les invariants satisfont les équations différentielles

$$R^2 \frac{\partial R^1}{\partial x} + R^3 \frac{\partial R^1}{\partial y} + \sqrt{1 - (R^2)^2 - (R^3)^2} \frac{\partial R^1}{\partial z} = 0, \quad (6.25b)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} - \frac{R^2}{\sqrt{1 - (R^2)^2 - (R^3)^2}} \frac{\partial R^2}{\partial z} = 0, \quad (6.25c)$$

$$\frac{\partial R^3}{\partial y} - \frac{R^3}{\sqrt{1 - (R^2)^2 - (R^3)^2}} \frac{\partial R^3}{\partial z} = 0, \quad (6.25d)$$

où R^1 est l'invariant de l'onde E_2 et R^2, R^3 sont les invariants des deux ondes A_2^ε .

Hypothèse : On remarque que les équations (6.25c) et (6.25d), admettent les solutions

$$R^2(y) = -y, \quad R^3(x) = x, \quad (6.25e)$$

de sorte que l'équation (6.25b) prend la forme

$$-y \frac{\partial R^1}{\partial x} + x \frac{\partial R^1}{\partial y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \frac{\partial R^1}{\partial z} = 0,$$

dont la solution est

$$R^1(x, y, z) = \psi^1 \left(x^2 + y^2, \arctan \frac{y}{x} - \frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right), \quad (6.25f)$$

où ψ^1 est une fonction arbitraire des deux arguments $x^2 + y^2$ et $\arctan \frac{y}{x} - \frac{z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Pour $k = 1$ et $\ell = 2$, on a l'onde triple

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2 \mathbf{A}_2^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1, R^2), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H} = \mathcal{H}(R^1, R^2) \vec{e}(R^3). \quad (6.26a)$$

Pour

$$\vec{e}(R^3) = (R^3, \sqrt{1 - (R^3)^2}, 0), \quad |\vec{e}| = 1,$$

les invariants satisfont les équations différentielles

$$R^3 \frac{\partial R^1}{\partial x} + \sqrt{1 - (R^3)^2} \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0, \quad (6.26b)$$

$$R^3 \frac{\partial R^2}{\partial x} + \sqrt{1 - (R^3)^2} \frac{\partial R^2}{\partial y} = 0, \quad (6.26c)$$

$$\frac{\partial R^3}{\partial x} - \frac{R^3}{\sqrt{1 - (R^3)^2}} \frac{\partial R^3}{\partial y} = 0, \quad (6.26d)$$

où R^1, R^2 sont les invariants des ondes E_2 et R^3 est l'invariant de l'onde A_2^ε .

Hypothèse : On remarque que l'équation (6.26b) admet la solution

$$R^3(z) = \psi^3(z), \quad (6.26e)$$

où $\psi^3(z)$ est une fonction arbitraire. Dans ce cas, les équations (6.26b) et (6.26c) prennent la forme

$$\psi^3(z) \frac{\partial R^i}{\partial x} + \sqrt{1 - \psi^3(z)^2} \frac{\partial R^i}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2,$$

dont la solution est

$$R^i(x, y, z) = \psi^i \left(x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}} \right), \quad i = 1, 2, \quad (6.26f)$$

où les ψ^i $i = 1, 2$ sont des fonctions arbitraires des arguments $x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}}$.

Analysons le cas où $k = 1$ et $\ell = 1$, c'est-à-dire l'onde $E_2 A_2^\varepsilon$, pour

$$\vec{e} = (\cos R^2, \sin R^2, 0).$$

Dans ce cas, la solution donnée par l'équation (6.24) prend la forme

$$\mathbf{E_2 A_2^\varepsilon} : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2, \quad (6.27a)$$

$$\vec{H} = \mathcal{H}(R^1) (\cos R^2, \sin R^2, 0)$$

où $|\vec{e}(R^2)| = 1$. Les invariants de Riemann satisfont les équations

$$\frac{\partial R^1}{\partial x} + \tan R^2 \frac{\partial R^1}{\partial y} = 0, \quad (6.27b)$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} - \cot R^2 \frac{\partial R^2}{\partial y} = 0, \quad (6.27c)$$

où R^1 est l'invariant de Riemann associé à l'onde E_2 et R^2 est l'invariant de Riemann associé à l'onde A_2^ε . Pour cette solution, on a que le fluide circule sur des cercles concentriques dans la direction du champ magnétique, tel qu'ilustré à la figure 6.7. Perpendiculaire au champ magnétique, on retrouve la force magnétique \vec{F}_M qui maintient le fluide le long des cercles concentriques. Chaque cercle correspond à une valeur constante de l'invariant R^1 , de sorte que, le long de ces cercles, la pression, la densité et l'intensité du champ magnétique sont constantes, puisque celles-ci dépendent seulement de R^1 . Les rayons correspondent à des valeurs constantes de l'invariant R^2 . Le long de ces lignes, la direction du champ magnétique \vec{e} sera constante puisque celle-ci dépend seulement de R^2 . On remarque que \vec{H} est tangent aux cercles engendrés par les différentes valeurs de $R^1 = \text{const}$ et perpendiculaire aux rayons engendrés par les différentes valeurs de $R^2 = \text{const}$. Pour cette solution, il pourrait être préférable d'utiliser les coordonnées cylindriques.

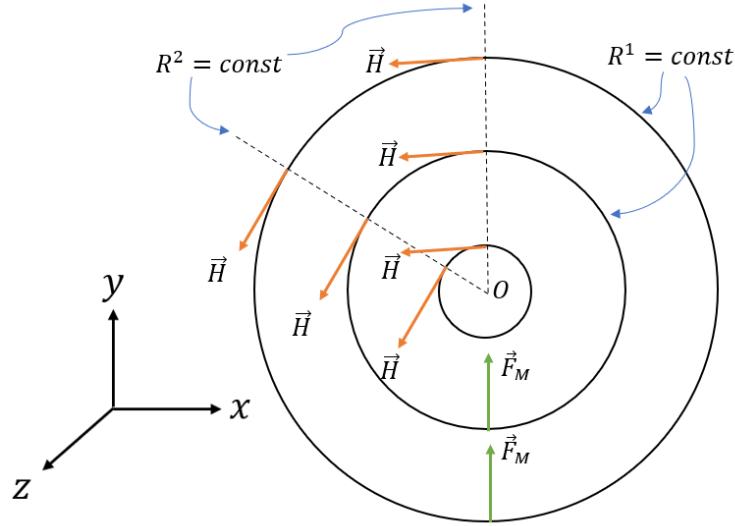


FIGURE 6.7 – Le champ magnétique \vec{H} et la force magnétique \vec{F}_M sont définis le long des courbes déterminées par les deux invariants R^1 et R^2 .

L'équation (6.27c) admet la solution

$$R^2 = \psi^2 (x + y \tan R^2), \quad (6.28)$$

où $\psi^2 (x + y \tan R^2)$ est une fonction arbitraire. De l'équation (6.28), on voit que l'invariant R^2 est sous forme implicite. En effet, le terme $\tan R^2$ nous empêche d'isoler R^2 explicitement. Pour contourner cela, on remarque que l'équation (6.27c) admet la solution triviale

$$R^2(z) = \psi^2(z), \quad (6.29)$$

où $\psi^2(z)$ est une fonction arbitraire. Dans ce cas, l'équation (6.27b) admet la solution

$$R^1(x, y, z) = \psi^1 (y - x \tan[\psi^2(z)]), \quad (6.30)$$

où $\psi^1 (y - x \tan[\psi^2(z)])$ est une fonction arbitraire.

Nous allons maintenant considérer la superposition linéaire entre une onde entropique et une onde d'Alfvén. Les ondes E et A^ε peuvent être superposées linéairement seulement lorsque $\vec{v} \parallel \vec{H}$. Cette superposition est donnée par la solution

$$\mathbf{EA}^\varepsilon : \quad \rho = \rho(R^1), \quad p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2, \quad (6.31a)$$

$$\vec{H} = \mathcal{H}(R^1) \left(\cos[\varphi(R^2)], \sin[\varphi(R^2)], 0 \right)$$

Les éléments intégraux simples sont donnés par

$$\lambda_E = (0, \vec{e}_0), \quad \lambda_A = (0, \cos[\varphi(R^2)], \sin[\varphi(R^2)], b(R^2)),$$

et donc les invariants de Riemann sont donnés par

$$R^1 = \psi^1(z), \quad R^2 = \psi^2(\cos[\varphi(R^2)]x + \sin[\varphi(R^2)]y + b(R^2)z) \quad (6.31b)$$

où R^1 est l'invariant de Riemann associé à l'onde E et R^2 est l'invariant de Riemann associé à l'onde A^ε et où $\mathcal{H}(R^1), \rho(R^1), \varphi(R^2), b(R^2), \psi^1(z)$ et $\psi^2(\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y + bz)$ sont des fonctions arbitraires. Pour $b(R^2) = 0$, on illustre la solution sur le plan x, y à la figure 6.8. La solution est constante sur les droites perpendiculaires aux vecteurs $\vec{\lambda}_A = (\cos[\varphi(R^2)], \sin[\varphi(R^2)], b(R^2))$. Pour différentes valeurs constantes de z , la direction du champ magnétique \vec{H} reste constante pour un même point (x, y) , tandis que les longueurs de \vec{v} et \vec{H} et ρ et p vont varier. Puisqu'il s'agit d'une superposition linéaire, les deux ondes n'interagissent pas. En effet, l'onde E va varier sur l'axe z (car son invariant est $R^1(z) = \psi^1(z)$) tandis que l'onde A^ε reste constante sur l'axe z lorsque $b(R^2) = 0$ (car son invariant est $R^2(x, y) = \psi^2(\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y)$). Le vecteur $\vec{\lambda}_A$ est tangent au cercle, le champ magnétique \vec{H} est tangent aux spirales et la force magnétique \vec{F}_M est perpendiculaire aux spirales.

De l'équation (6.31b) pour R^2 , on remarque que cette solution est implicite en R^2 .

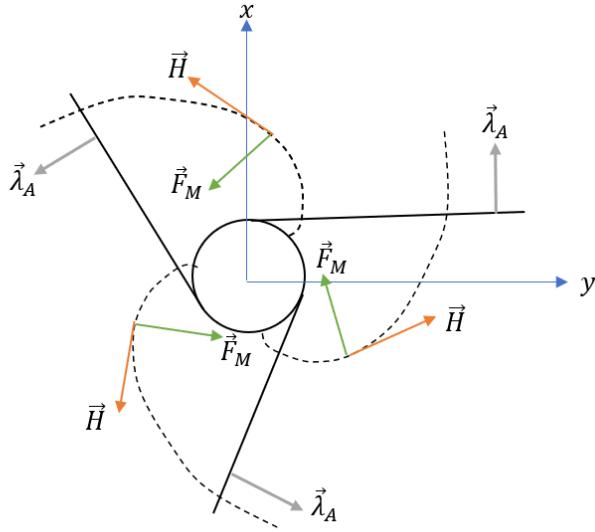


FIGURE 6.8 – Le champ magnétique \vec{H} et le vecteur $\vec{\lambda}_A$ sont situés dans le plan xy .

6.6 Superpositions entre les ondes entropiques et les ondes magnétoacoustiques

Commençons par présenter quelques propriétés pour les superpositions avec les ondes entropiques E et les ondes magnétoacoustiques rapides F et lentes S . Pour la discussion qui suit sur les ondes doubles entropiques et magnétoacoustiques (donc EF ou ES), l'invariant R^1 sera associé à la première onde, c'est-à-dire l'onde E et l'invariant R^2 sera associé à la deuxième, c'est-à-dire une onde rapide ou lente, qu'on appellera F, S .

1. Considérons le cas où $\vec{\lambda}_E = \vec{\phi}(R^1)$ est un vecteur arbitraire. Dans ce cas, la propagation de l'onde E ne sera pas affectée par l'onde magnétoacoustique (car $\vec{\lambda}_E$ ne dépend pas de R^2). Pour $|\vec{\phi}| = 1$, les éléments simples entropiques satisfont les équations

$$\vec{H} \cdot \vec{\phi} = 0, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial R^1} \cdot \vec{\phi} = 0 \implies \vec{H} \cdot \dot{\vec{\phi}} = 0, \quad \vec{H} \parallel \vec{\phi} \times \dot{\vec{\phi}}, \quad (6.32)$$

où $\dot{\vec{\phi}} = \frac{d\vec{\phi}}{dR^1}$. On voit que la direction du champ magnétique n'est pas influencée par l'onde magnétoacoustique lors de la superposition. De l'équation (6.32), on a

$$\vec{H} \cdot \vec{\lambda}_{F,S} = 0. \quad (6.33)$$

Du théorème 4.2.1, on voit que l'onde magnétoacoustique est rapide.

De la condition de compatibilité $\frac{\partial \lambda_E}{\partial R^2} \in \text{span} \{ \lambda_E, \lambda_F \}$, on a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial R^2} \cdot \vec{\phi} = 0 \implies \vec{\phi} \cdot \vec{\lambda}_F = 0, \quad (6.34)$$

et des équations (6.32) et (6.34) on obtient que la direction dépend seulement d'un seul invariant

$$\vec{\lambda}_F = \dot{\vec{\phi}}(R^1), \quad (6.35)$$

de sorte que, de la condition de compatibilité $\frac{\partial \lambda_E}{\partial R^1} \in \text{span} \{ \lambda_E, \lambda_F \}$, on a finalement

$$\det \left(\vec{\phi}, \dot{\vec{\phi}}, \ddot{\vec{\phi}} \right) = 0, \quad (6.36)$$

c'est-à-dire que $\vec{\phi}$ se situe dans un plan fixe. Supposons que la direction du champ magnétique \vec{H}_0 est constante et perpendiculaire à ce plan. Alors le champ magnétique sera donné par

$$\vec{H} = C(R^1) \rho \vec{H}_0. \quad (6.37)$$

De la forme des vecteurs caractéristiques γ_E et γ_F , on a

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial R^1} \cdot \vec{\phi} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial R^2} = \frac{\partial}{\partial R^2} \mathcal{J}(\rho, R^1) \dot{\vec{\phi}}, \quad (6.38)$$

où

$$\mathcal{J}(\rho, R^1) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R^2} \sqrt{\frac{C(R^2)^2 \rho}{4\pi} + A(R^1) \rho^{\kappa-1}},$$

et C et A sont des fonctions arbitraires. Pour satisfaire l'équation (6.38), il faut avoir

$$\vec{v} = +\mathcal{J}(\rho, R^1) \dot{\vec{\phi}} + \vec{\psi}(R^1), \quad (6.39)$$

où $\vec{\psi}$ est arbitraire et $\mathcal{J}(\rho, R^1) = \vec{\psi} \cdot \dot{\vec{\phi}} \implies \rho = \rho(R^1) \implies \gamma_F = 0$. Il n'y a donc pas d'invariants de Riemann pour la superposition entre les ondes E et F lorsque $\lambda_E = \vec{\phi}(R^1)$ dépend seulement de l'invariant R^1 .

2. Considérons un sous-cas du cas précédent : $\vec{\lambda}_E = \vec{e}_0$ est un vecteur constant et unitaire. L'onde entropique se propage avec une direction constante. De la forme du vecteur γ_E , nous avons

$$\vec{H} \cdot \vec{e}_0 = 0, \quad (6.40)$$

c'est-à-dire que le vecteur \vec{H} est dans un plan perpendiculaire à \vec{e}_0 . Aussi, on peut définir $\vec{H} \cdot \vec{e}_0$ de sorte que

$$\vec{\lambda}_E \parallel \vec{H} \times \vec{H}_{R^1} \parallel \vec{e}_0, \quad (6.41)$$

et donc $\vec{\lambda}_E = \vec{e}_0 \implies \vec{H} \cdot \vec{e}_0 = 0$, où \vec{e}_0 est un vecteur constant et unitaire. De l'équation (6.40) et de la forme du vecteur $\gamma_{F,S}$, il s'en suit que $\vec{\lambda}_{F,S} = \vec{H}_{R^2} \times \vec{e}_0$, où $\vec{\lambda}_{F,S} = \vec{\beta} \times \vec{e}_0$, où $\vec{\beta}$ est un vecteur constant. De $\frac{\partial \vec{\lambda}_{F,S}}{\partial R^1} \in \text{span} \{ \lambda_E, \lambda_{F,S} \}$, nous avons

$$\det(\vec{\beta}, \vec{\beta}_{R^1}, \vec{e}_0) = 0, \quad (6.42)$$

c'est-à-dire que pour $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, 0)$, on a $\beta_1 = a(R^2)\beta_2$, où $a(R^1)$ est une fonction arbitraire. Dans ce cas, on a que $\vec{\lambda}_{F,S} = \vec{\lambda}(R^2)$ est arbitraire. Si $\vec{\lambda}_E \parallel \vec{\lambda}_{F,S}$,

il s'agit de l'onde EF décrite à page 107. Autrement, les ondes E et F, S sont linéairement indépendantes, ce qui correspond à la superposition linéaire présentée à la page 109.

3. Si le champ magnétique a une direction constante \vec{H}_0 , nous avons deux possibilités :

(a) $\vec{H} \cdot \vec{\lambda}_{F,S} = 0$ ce qui correspond à la superposition linéaire EF de la page 109.

(b) $\vec{H} \parallel \vec{\lambda}_{F,S}$.

Dans les deux cas, il n'y a pas d'ondes doubles en termes des invariants de Riemann.

4. Considérons le cas pour une onde entropique stationnaire. À partir des conditions sur $\frac{\partial \lambda_E}{\partial R^2} \in \text{span} \{\lambda_E, \lambda_{F,S}\}$, nous avons

$$\mu_2 \left(\delta |\vec{\lambda}_{F,S}| - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}_{F,S} \right) = 0, \quad \frac{\partial \vec{\lambda}}{\partial R^2} = \mu_1 \vec{\lambda}_E + \mu_2 \vec{\lambda}_{F,S}, \quad (6.43)$$

où μ_1 et μ_2 sont des fonctions arbitraires. De l'équation (6.43), on voit qu'il y a deux possibilités :

(a) Les ondes F ou S sont stationnaires

(b) $\vec{\lambda}_E = \vec{\phi}(R^1)$.

Nous allons maintenant présenter les superpositions entre les ondes entropiques et les ondes magnétoacoustiques.

1. Le cas où $\vec{\lambda}_E \parallel \vec{\lambda}_{F,S}$

Dans ce cas, l'onde magnétoacoustique doit être rapide. Pour un indice adiabatique $\kappa \neq 2$, on a la superposition

$$\mathbf{EF} : \quad \rho = \rho(R^2), \quad p = C_2 \rho^\kappa, \quad \vec{v} = \vec{\alpha}(R^1) \times \vec{e}_0 + a(R^2) \vec{e}_0, \quad \vec{H} = \rho C_1 \vec{e}(R^1), \quad (6.44a)$$

où

$$\begin{aligned}\vec{e}(R^1) &= (\cos R^1, \sin R^1, 0), & \dot{\vec{e}}(R^1) \cdot \vec{e}_0 &= 0, & \vec{e}_0 &= (0, 0, 1), \\ a(R^2) &= -\varepsilon \int \sqrt{\frac{C_1^2}{4\pi} + C_2 \kappa \rho^{\kappa-2}} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} + a_0, \\ \delta_F &= \varepsilon \sqrt{\frac{C_1^2 \rho}{4\pi} + C_2 \kappa \rho^{\kappa-1}}.\end{aligned}$$

Les éléments intégraux simples sont donnés par

$$\lambda_E = (-a(R^2), 1), \quad \lambda_F = (\delta_F - a, 1), \quad (6.44b)$$

et donc les invariants de Riemann sont donnés par

$$\frac{\partial R^1}{\partial t} + a(R^2) \frac{\partial R^1}{\partial z} = 0, \quad R^2 = \psi^2 ((\delta_F - a)t + z), \quad (6.44c)$$

où R^1 est l'invariant de Riemann associé à l'onde E et R^2 est l'invariant de Riemann associé à l'onde F et où $\rho(R^2)$, $\vec{e}(R^1)$ et ψ^2 sont arbitraires et C_1, C_2, a_0 et \vec{e}_0 sont constants. Pour un $\kappa \neq 2$, cette solution est implicite. Pour une solution explicite, on a la superposition lorsque $\kappa = 2$. La solution (6.44) devient donc

$$\mathbf{EF} : \quad \rho = \rho(R^2), \quad p = C_2 \rho^\kappa, \quad \vec{v} = \vec{e}(R^1) \times \vec{e}_0 + a(R^2) \vec{e}_0, \quad \vec{H} = \rho C_1 \vec{e}(R^1), \quad (6.45a)$$

où

$$\begin{aligned}\vec{e}(R^1) &= (\cos R^1, \sin R^1, 0), & \dot{\vec{e}}(R^1) \cdot \vec{e}_0 &= 0, & \vec{e}_0 &= (0, 0, 1), \\ a(R^2) &= -\varepsilon \int \sqrt{\frac{C_1^2}{4\pi} + C_2 \kappa \rho^{\kappa-2}} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} + a_0 = -2\beta \sqrt{\rho(R^2)} + b_0, & \varepsilon &= \pm 1, \\ \delta_F &= \varepsilon \sqrt{\frac{C_1^2 \rho}{4\pi} + C_2 \kappa \rho^{\kappa-1}} = \beta \sqrt{\rho(R^2)},\end{aligned}$$

où b_0 est une constante d'intégration et $\beta := \varepsilon \sqrt{\frac{C_1^2}{4\pi} + 2C_2}$. Les invariants de Riemann sont maintenant donnés par

$$\frac{\partial R^1}{\partial t} + \left(b_0 - 2\beta \sqrt{\rho(R^2)} \right) \frac{\partial R^1}{\partial z} = 0, \quad R^2 = \psi^2 \left(\left[3\beta \sqrt{\rho(R^2)} - b_0 \right] t + z \right), \quad (6.45b)$$

où R^1 est l'invariant de Riemann associé à l'onde E et R^2 est l'invariant de Riemann associé à l'onde F et où $\rho(R^2)$, $\vec{a}(R^1)$ et ψ^2 sont arbitraires et C_1, C_2, a_0 et \vec{e}_0 sont constants.

Hypothèse : Pour écrire l'invariant R^2 sous forme explicite, on choisit les fonctions arbitraires

$$\psi^2 \left(\left[3\beta \sqrt{\rho(R^2)} - b_0 \right] t + z \right) = \left(\left[3\beta \sqrt{\rho(R^2)} - b_0 \right] t + z \right)^2, \quad \rho(R^2) = R^2, \quad b_0 = 0. \quad (6.45c)$$

L'équation (6.45b) devient donc

$$\frac{\partial R^1}{\partial t} - \frac{2\beta z}{1 - 3\beta t} \frac{\partial R^1}{\partial z} = 0, \quad R^2 = \frac{z^2}{(1 - 3\beta t)^2}, \quad t \neq \frac{1}{3\beta} \quad (6.45d)$$

d'où on trouve la solution

$$R^1(z, t) = \psi^1 \left(\frac{z}{(1 - 3\beta t)^{2/3}} \right), \quad R^2(z, t) = \frac{z^2}{(1 - 3\beta t)^2}, \quad z > 0, t < \frac{1}{3\beta} \quad (6.45e)$$

où ψ^1 est une fonction arbitraire de l'argument $\frac{z}{(1 - 3\beta t)^{2/3}}$. Des éléments intégraux simples donnés à l'équation (6.44b), on voit que les deux ondes se propagent dans la même direction (leurs deuxièmes composantes sont égales à 1), mais avec des vitesses différentes. On voit aussi que la nature de la superposition varie selon l'indice adiabatique du fluide ($\kappa \neq 2$ ou $\kappa = 2$). De l'équation (6.44), on voit que les fonctions ρ, a et ψ^2 dépendent de l'onde F (car ils dépendent de R^2 tandis

que les directions des champs de vecteurs \vec{e} et $\vec{\alpha}$ dépendent de l'onde E (car ils dépendent de R^1). On remarque que lors de la superposition, le champ de vitesse \vec{v} est la somme de deux vitesses : $\vec{\alpha}(R^1) \times \vec{e}_0$ qui dépend de l'onde E et $a(R^2)\vec{e}_0$ qui dépend de l'onde F .

Le gradient de pression et la force magnétique

$$\nabla p = C_2 \kappa \rho^{\kappa-1} \rho_{R^2} \vec{e}_0, \quad \vec{F}_M = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) = \frac{C_1^2}{4\pi} \rho \rho_{R^2} \vec{e}_0,$$

dépendent seulement de l'invariant R^2 et agissent dans la direction \vec{e}_0 . Le fluide sera donc accéléré dans la direction \vec{e}_0 par l'onde F .

2. Superposition linéaire entre E et F pour $\vec{H} \cdot \vec{\lambda}_F = 0$

Pour $\kappa = 2$, on a la solution

$$\mathbf{EF} : \quad \rho = \sqrt{\frac{\chi(R^2)}{C_2}}, \quad p = A(R^1) \rho^2, \quad \vec{H} = \rho C(R^1) \vec{H}_0, \quad (6.46a)$$

$$\vec{v} = C_1 \vec{e}_1 - 2\sqrt{C_2 \rho} \vec{e}_2 + \phi(R^1) \vec{H}_0,$$

avec

$$\frac{C(R^1)^2}{4\pi} + 2A(R^1) = C_2.$$

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{H}_0$ sont constants et arbitraires, de sorte que

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{H}_0 = 0, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad (6.46b)$$

et C_1, C_2 sont des constantes et $\chi(R^2), \phi(R^1)$ sont des fonctions arbitraires. Les éléments intégraux simples sont donnés par

$$\lambda_E = (-C_1, \vec{e}_1), \quad \lambda_F = (3\sqrt[4]{C_2 \chi(R^2)}, \vec{e}_2). \quad (6.46c)$$

c'est-à-dire que les invariants de Riemann sont donnés par

$$R^1 = \psi^1(-C_1 t + \vec{e}_1 \cdot \vec{x}), \quad R^2 = \psi^2(3\sqrt[4]{C_2 \chi(R^2)} t + \vec{e}_2 \cdot \vec{x}), \quad (6.46d)$$

où l'invariant R^1 est associé à l'onde E et l'invariant R^2 est associé à l'onde F . Les fonctions ψ^1 et ψ^2 sont des fonctions arbitraires de leurs arguments. Du terme $\vec{e}_1 \cdot \vec{x}$ de l'invariant R^1 et du terme $\vec{e}_2 \cdot \vec{x}$ de l'invariant R^2 , on voit que les deux ondes se propagent dans des directions perpendiculaires, sans interagir entre elles (il s'agit d'une superposition linéaire). On remarque aussi que l'onde F interagit avec elle-même puisque la vitesse de phase dépend de R^2 :

$$\lambda_0 = \lambda_0(R^2) = 3\sqrt[4]{2\chi(R^2)},$$

contrairement à l'onde E où $\lambda_0 = -C_1 = \text{const.}$

Hypothèse : Pour satisfaire les contraintes de l'équation (6.46b), on pose

$$\vec{H}_0 = (0, 0, 1), \quad \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad (6.46e)$$

et pour écrire l'invariant R^2 donné par l'équation (6.46d) sous forme explicite, on pose

$$\chi(R^2) = (R^2)^4, \quad \psi^2 = \text{id}, \quad (6.46f)$$

de sorte que l'équation (6.46d) nous donne les expressions pour les invariants R^1 et R^2

$$R^1(x, t) = \psi^1(x - C_1 t), \quad R^2(y, t) = \frac{y}{1 - 3\sqrt[4]{C_2} t}, \quad t \neq \frac{1}{3\sqrt[4]{C_2}} \quad (6.46g)$$

où ψ^1 est une fonction arbitraire de l'argument $x - C_1 t$.

3. Onde entropique E_2 avec onde magnétoacoustique

Pour l'onde E_2 , il y a seulement une superposition avec l'onde magnétoacoustique rapide.

Pour l'onde double E_2F , on a la solution pour $\kappa \neq 2$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{F} : \quad p = C_2\rho^\kappa, \quad \vec{H} = C_1\rho(R^2)\vec{e}_0, \quad \vec{v} = a(R^1)\vec{e}_0 + \vec{\psi}(R^2) \times \vec{e}_0 \quad (6.47a)$$

où $\rho(R^2)$ satisfait l'équation

$$\left| \frac{\delta_F}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R^2} \right| = |\dot{\vec{\psi}}|, \quad \text{avec} \quad \delta_F = \sqrt{C_2\kappa\rho^{\kappa-1} + \frac{C_1^2\rho}{4\pi}},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires, $a(R^1)$ une fonction arbitraire et \vec{e}_0 un vecteur constant unitaire. Le vecteur $\vec{\psi}$ satisfait l'équation

$$(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 X)(\dot{\psi}_1 X - \dot{\psi}_2) = \frac{\partial X}{\partial R^2} \delta |\dot{\vec{\psi}}|, \quad \text{où} \quad X = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad X = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Les fonctions ψ_1, α_i et β_i , pour $i = 1, 2$ sont les composantes arbitraires des vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{\psi}(R^2) &= (\psi_1(R^2), \psi_2(R^2), 0), \\ \vec{\alpha}(R^2) &= (\alpha_1(R^2), \alpha_2(R^2), 0), \quad \vec{\beta}(R^2) = (\beta_1(R^2), \beta_2(R^2), 0). \end{aligned}$$

Les éléments simples sont donnés par

$$\lambda_{E_2^{(1)}} = (-\vec{\psi} \cdot \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \times \vec{e}_0), \quad \lambda_{E_2^{(2)}} = (-\vec{\psi} \cdot \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{e}_0), \quad (6.47b)$$

$$\lambda_F = (\delta_F |\dot{\vec{\psi}}| - \vec{\psi} \cdot \dot{\vec{\psi}}, \dot{\vec{\psi}} \times \vec{e}_0) \quad (6.47c)$$

Pour $\kappa = 2$, on a la même solution, mais $C_1 \rightarrow C_1(R^1)$ et $C_2 \rightarrow C_2(R^1)$, c'est-à-dire que les constantes C_1 et C_2 deviennent des fonctions de l'invariant R^1 . Ces deux fonctions sont liées par l'intégrale première

$$C_2(R^1) + \frac{C_1(R^1)^2}{8\pi} = C = \text{const.} \quad (6.47d)$$

Cette solution sera donc plus générale que le cas $\kappa \neq 2$. Dans les deux cas, l'invariant R^1 est associé à l'onde E_2 et l'invariant R^2 est associé à l'onde F .

Cette superposition n'est pas une superposition linéaire puisque les éléments simples $\lambda_{E_2^{(1)}}$ et $\lambda_{E_2^{(2)}}$, associés à R^1 , dépendent de l'invariant R^2 (par les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$).

Pour $\kappa \neq 2$, l'hodographie est décrit par

$$u(R^1, R^2) = u^1(R^1) + u^2(R^2),$$

où

$$u^1(R^1) = (0, 0, a(R^1)\vec{e}_0, 0), \quad u^2(R^2) = (\rho(R^2), C_2\rho^\kappa, \vec{\psi}(R^2) \times \vec{e}_0, C_1\rho\vec{e}_0).$$

Lors de la superposition, l'onde E_2 est influencée par l'onde F (puisque les $\lambda_{E_2^{(i)}}$, $i = 1, 2$ dépendent de R^2) tandis que l'onde F n'est pas influencée par l'onde E (aucune dépendance en R^1 dans λ_F).

Nous allons maintenant considérer un cas particulier de la solution E_2F . Supposons que

$$\vec{\psi}(R^2) \times \vec{e}_0 = b(R^2)\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_0 = 0,$$

où $b(R^2)$ est une fonction arbitraire de R^2 , et \vec{e}_1 et \vec{e}_0 sont des vecteurs unitaires constants. Dans ce cas, la solution (6.47) prend la forme

$$\mathbf{E}_2\mathbf{F} : \quad p = C_2\rho^\kappa, \quad \vec{H} = C_1\rho(R^2)\vec{e}_0, \quad \vec{v} = a(R^1)\vec{e}_0 + b(R^2)\vec{e}_1 \quad (6.48a)$$

où $\rho(R^2)$ satisfait l'équation

$$\left| \frac{\delta_F}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R^2} \right| = \frac{\partial b}{\partial R^2}, \quad \text{avec} \quad \delta_F = \sqrt{C_2\kappa\rho^{\kappa-1} + \frac{C_1^2\rho}{4\pi}}, \quad (6.48b)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires et $a(R^1)$ est une fonction arbitraire

Les éléments simples sont donnés par

$$\lambda_{E_2^{(i)}} = \left(-b, \alpha^{(i)}(R^1)\rho, -1, 0 \right), \quad i = 1, 2 \quad (6.48c)$$

$$\lambda_F = \left(\frac{\delta_F^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R^2}, b \frac{\partial b}{\partial R^2}, \frac{\partial b}{\partial R^2} \vec{e}_1 \right), \quad (6.48d)$$

où les $\alpha^{(i)}(R^1)$, $i = 1, 2$ sont des fonctions arbitraires de R^1 . Dans ce cas, les invariants de Riemann seront donnés par

$$\frac{\partial R^1}{\partial t} + b(R^2) \frac{\partial R^1}{\partial x} = 0, \quad (6.48e)$$

$$R^2 = \psi^2 \left(- \left[\left(C_2 \kappa \rho^{\kappa-2} + \frac{C_1^2}{4\pi} \right) \frac{\partial \rho}{\partial R^2} + b \frac{\partial b}{\partial R^2} \right] t + \frac{\partial b}{\partial R^2} \vec{e}_1 \cdot \vec{x} \right), \quad (6.48f)$$

où ψ^2 est une fonction arbitraire de son argument.

Pour $\kappa = 2$, on a la même solution, mais $C_1 \rightarrow C_1(R^1)$ et $C_2 \rightarrow C_2(R^1)$ sont des fonctions arbitraires de R^1 liées par l'intégrale première de l'équation (6.47d).

Hypothèse : Pour $\kappa = 2$, les fonctions

$$\rho(R^2) = (R^2)^2, \quad b(R^2) = 2\sqrt{2C}R^2,$$

satisfont la contrainte (6.48b), où C est donnée par l'équation (6.47d). Pour expliciter l'invariant R^2 , on pose $\psi^2 = id$ telle que l'équation (6.48e) devient

$$\frac{\partial R^1}{\partial t} + \frac{8Cx}{1+12Ct} \frac{\partial R^1}{\partial x} = 0, \quad R^2 = \frac{2\sqrt{2Cx}}{1+12Ct}, \quad (6.48g)$$

dont la solution est

$$R^1(x, t) = \psi^1 \left(\frac{[1+12Ct]^{2/3}}{x} \right), \quad R^2(x, t) = \frac{2\sqrt{2Cx}}{1+12Ct}, \quad t \quad (6.48h)$$

où ψ^1 est une fonction arbitraire de l'argument $\frac{[1+12Ct]^{1/3}}{\sqrt{x}}$. Pour $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et

$\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$, la densité de courant est donnée par

$$\vec{j} = -\frac{C_1}{4\pi} \frac{\partial \rho}{\partial R^2} \frac{\partial b}{\partial R^2} \vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0). \quad (6.49)$$

Cette solution peut décrire un écoulement entre deux plaques conductrices, telle qu'illustrée à la figure 6.9

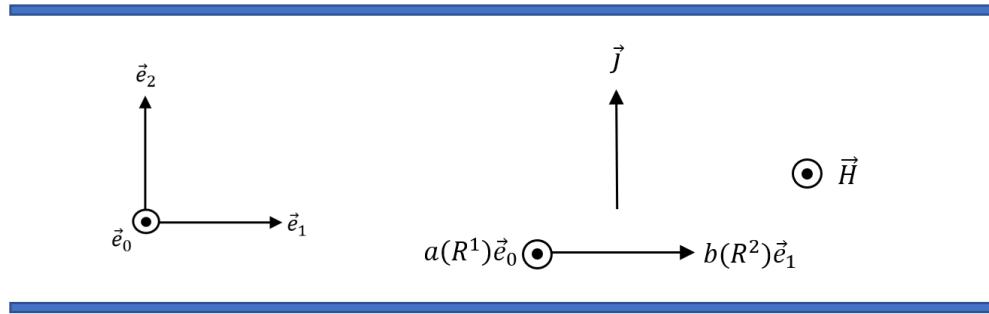


FIGURE 6.9 – Le champ magnétique \vec{H} , la densité de courant \vec{j} et les deux composantes du champ de vitesse $a(R^1)\vec{e}_0$ et $b(R^2)\vec{e}_1$ pour un écoulement entre deux plaques conductrices fixes. Le symbole \odot correspond à un vecteur orthogonal aux vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 .

4. L'onde triple *EEF*.

La superposition de k ondes entropiques *E* et une onde magnétoacoustique se ramène à l'onde triple *EEF*. En effet, les k ondes entropiques se ramènent à une onde double *EE*, d'où l'onde triple *EEF*. Pour $\kappa \neq 2$, l'onde triple *EEF* est donnée par

$$\text{EEF :} \quad \rho = \alpha(R^3) + C_3, \quad p = C_2 \rho^\kappa, \quad \vec{H} = C_1 \rho \vec{e}_0, \quad (6.50a)$$

$$\vec{v} = a(R^1, R^2) \vec{e}_0 + \psi(R^3) \times \vec{e}_0$$

où $\alpha(R^3)$ et $\vec{\psi}(R^3)$ sont arbitraires et satisfont l'équation

$$|\frac{\delta_F}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R^3}| = |\dot{\vec{\psi}}| \quad (6.50b)$$

avec

$$\delta_F = \sqrt{C_2 \kappa \rho^{\kappa-1} + \frac{C_1^2 \rho}{4\pi}},$$

où C_1, C_2 et C_2 sont des constantes arbitraires et $a(R^1, R^2)$ est une fonction arbitraire. Le vecteur $\vec{\psi}$ satisfait l'équation

$$(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 X)(\dot{\psi}_1 X - \dot{\psi}_2) = \frac{\partial X}{\partial R^3} \delta |\dot{\vec{\psi}}|, \quad \text{où} \quad X = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad X = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Les fonctions ψ_1, α_i et β_i , pour $i = 1, 2$ sont les composantes arbitraires des vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{\psi}(R^3) &= (\psi_1(R^3), \psi_2(R^3), 0), \\ \vec{\alpha}(R^3) &= (\alpha_1(R^3), \alpha_2(R^3), 0), \quad \vec{\beta}(R^3) = (\beta_1(R^3), \beta_2(R^3), 0). \end{aligned}$$

Les éléments simples sont donnés par

$$\lambda_1 = (-\vec{\psi} \cdot \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \times \vec{e}_0), \quad \lambda_2 = (-\vec{\psi} \cdot \vec{\beta}, \vec{\beta} \times \vec{e}_0), \quad (6.50c)$$

$$\lambda_3 = (\delta_F |\dot{\vec{\psi}}| - \vec{\psi} \cdot \dot{\vec{\psi}}, \dot{\vec{\psi}} \times \vec{e}_0), \quad (6.50d)$$

où λ_1 et λ_2 sont respectivement associés aux invariants R^1 et R^2 des deux ondes entropiques et λ est associé à l'invariant R^3 de l'onde rapide.

Pour $\kappa = 2$, on a la même solution, mais $C_1 \rightarrow C_1(R^1, R^2)$ et $C_2 \rightarrow C_2(R^1, R^2)$ sont des fonctions arbitraires de R^1 et R^2 liées par l'intégrale première

$$C_2(R^1, R^2) + \frac{C_1(R^1, R^2)^2}{8\pi} = C = \text{const.}$$

Hypothèse : Pour $\kappa = 2$, les fonctions

$$\rho(R^3) = \frac{(R^3)^3}{8C}, \quad \vec{\psi}(R^3) = (R^3, \zeta, 0),$$

où ζ est une constante arbitraire, satisfont la contrainte (6.50b). Pour $\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$, on trouve, de l'équation (6.50d), que l'invariant R^3 est donné par

$$R^3(y, t) = -\frac{2y}{2 + 3t}. \quad (6.50e)$$

On remarque qu'il y a une discontinuité, lorsque $t = -2/3$, qui correspond à la catastrophe du gradient. Plutôt que d'utiliser l'équation (6.50c) pour trouver les invariants R^1 et R^2 , nous allons substituer les solutions implicites (6.48a) dans les équations de la MHD, telles qu'on trouve que les invariants R^1 et R^2 sont donnés par l'équation différentielle

$$\frac{\partial R^i}{\partial t} + \zeta \frac{\partial R^i}{\partial x} - R^3 \frac{\partial R^i}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2.$$

En résolvant par la méthode des caractéristiques, on trouve la solution générale

$$R^i(x, y, t) = \psi^i \left(x - \zeta t, \frac{(2 + 3t)^{2/3}}{y} \right), \quad i = 1, 2, \quad y \neq 0, \quad (6.50f)$$

où les fonctions ψ^i , $i = 1, 2$ sont des fonctions arbitraires des arguments $x - \zeta t$ et $\frac{(2+3t)^{2/3}}{y}$.

Un résumé des solutions d'ondes multiples obtenues dans ce chapitre est présenté à l'annexe A.

Chapitre 7

Représentations graphiques et problème de Cauchy

Dans le chapitre 6, nous avons présenté plusieurs solutions d'ondes doubles (solutions de rang 2) et d'ondes triples (solutions de rang 3) pour les équations de la MHD (2.1). Lorsque possibles, ces solutions ont été données sous une forme explicite, c'est-à-dire que nous avons été en mesure d'écrire les invariants de Riemann comme des fonctions des variables indépendantes x, y, z et t . Ces solutions sont présentées en détail tout au long du chapitre 6, mais les tables A.3, A.4, A.5, A.6 et A.7 figurant à l'annexe A offrent un résumé des résultats du chapitre 6.

Dans ce chapitre, des représentations graphiques sont présentées pour l'onde double entropique-Alfvén $E_2 A_2^\varepsilon$ de la page 92, l'onde triple entropique-entropique-Alfvén $E_2 E_2 A_2^\varepsilon$ de la page 99 et l'onde double entropique-magnétoacoustique rapide EF de la page 107. Ces représentations graphiques correspondent à la superposition des ondes qui forme ces k -ondes. Ensuite, la signification de ces superpositions est discutée pour le problème de Cauchy.

7.1 Représentations graphiques pour quelques solutions explicites de types solitoniques

Les solutions explicites trouvées dans le chapitre 6 dépendent de fonctions arbitraires qui sont exprimées en fonction des invariants de Riemann. Le choix de ces fonctions est complètement arbitraire, mais nous allons les choisir de manière à ce qu'elles soient de type solitonique, ce qui leur donnera une signification physique intéressante. Par exemple, ces fonctions devront assurer que la densité ρ soit bornée. Pour les fonctions arbitraires associées aux solutions obtenues (par exemple la densité du fluide $\rho = \rho(R^1)$, où $\rho(R^1)$ est une fonction arbitraire de l'invariant R^1), nous allons choisir des fonctions doublement périodiques, principalement les fonctions de Jacobi cn, sn et dn

$$-1 \leq \text{cn}(r, k) \leq 1, \quad -1 \leq \text{sn}(r, k) \leq 1, \quad \sqrt{1 - k^2} \leq \text{dn}(r, k) \leq 1, \quad (7.1)$$

où le module k est tel que

$$0 < k^2 < 1, \quad (7.2)$$

et r est l'argument de la fonction. La figure 7.1 illustre ces trois fonctions lorsque $k = 0.95$.

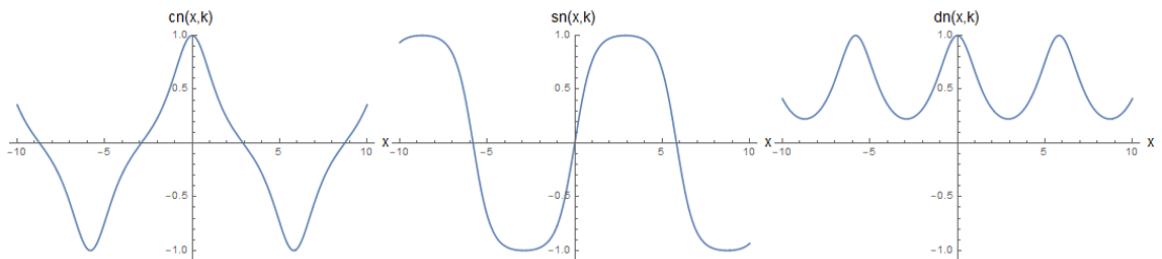


FIGURE 7.1 – Graphiques des fonctions doublement périodiques de Jacobi $\text{cn}(r, k)$, $\text{sn}(r, k)$ et $\text{dn}(r, k)$ pour $k = 0.95$.

7.1.1 Solution explicite pour l'onde double entropique-Alfvén

$E_2 A_2^\varepsilon$ (page 92)

En imposant les conditions initiales pour $t = t_0$ pour les fonctions arbitraires

$$\begin{aligned}\psi^1(x^2 + y^2 - 2y) &= \exp \left[-(x^2 + y^2 - 2y^2)^2 / 15 \right] \cos(x^2 + y^2 - 2y), \\ \rho(R^1) &= \operatorname{cn} \left[(1 + \cosh(\arctan R^1))^{-1}, k \right], \\ \mathcal{H}(R^1) &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sn}[R^1, k]^2}} \right],\end{aligned}$$

la solution pour l'onde double entropique-Alfvén $E_2 A_2^\varepsilon$ prend la forme

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \operatorname{cn} \left[(1 + \cosh(\arctan R^1(x, y)))^{-1}, k \right], \\ p(x, y) &= p_0 - \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 + \operatorname{sn}[R^1(x, y), k]^2} \right], \\ \vec{v}(x, y) &= \frac{\varepsilon \vec{H}(x, y)}{\sqrt{4\pi \rho(x, y)}}, \\ \vec{H}(x, y) &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sn}[R^1(x, y), k]^2}} \right] \begin{pmatrix} \varepsilon \sqrt{1 - R^2(x, y)^2} \\ R^2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{7.3}$$

où les invariants de Riemann sont donnés par

$$\begin{aligned}R^1(x, y) &= \exp \left[-(x^2 + y^2 - 2y^2)^2 / 15 \right] \cos(x^2 + y^2 - 2y), \\ R^2(x, y) &= \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(y-1)^2 + x^2}}.\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = p_0 = 1$ et un module de $k = 0.9$ pour les fonctions de Jacobi, on obtient les représentations graphiques pour la solution (7.3) dans le plan xy . Notons que le champ de vitesse \vec{v} est parallèle au champ magnétique \vec{H} . Pour les troisièmes composantes de ces vecteurs, elles sont nulles, c'est-à-dire constantes dans le plan xy .

Par le choix de la fonction arbitraire ψ^1 pour l'invariant R^1 , cet invariant est une perturbation ondulatoire et localisée (solitonique). Puisque la densité ρ et la pression p dépendent seulement de l'invariant R^1 , leurs représentations graphiques sont similaires à l'invariant, c'est-à-dire une perturbation ondulatoire qui devient constante quand on s'éloigne du point $(0, 1)$ sur le plan xy . De plus, on n'observe aucune discontinuité pour ces deux solutions, car R^1 est continu partout.

Pour l'invariant R^2 , on remarque qu'il y a une catastrophe du gradient lorsque son dénominateur est nul, c'est-à-dire au point $(0, 1)$ du plan xy . Puisque la direction du champ magnétique \vec{H} dépend de l'invariant R^2 , on retrouve la discontinuité au point $(0, 1)$ de R^2 sur le plan xy , mais avec une ondulation engendrée par le module du champ magnétique \vec{H} puisque celui-ci dépend de l'invariant R^1 .

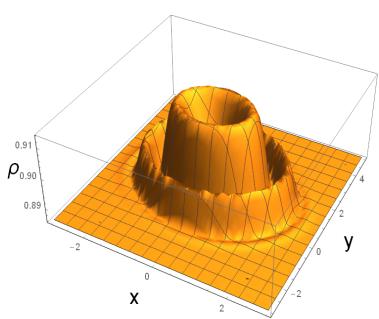


FIGURE 7.2 – Représentation graphique de la densité $\rho(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.

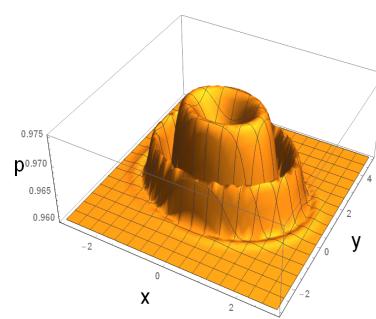


FIGURE 7.3 – Représentation graphique de la pression $p(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.

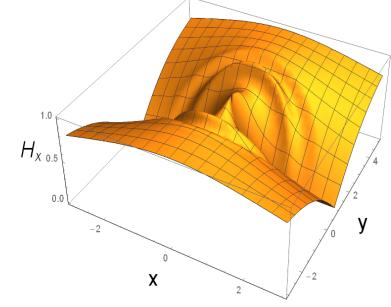


FIGURE 7.4 – Représentation graphique de la première composante du champ magnétique $\vec{H}(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.

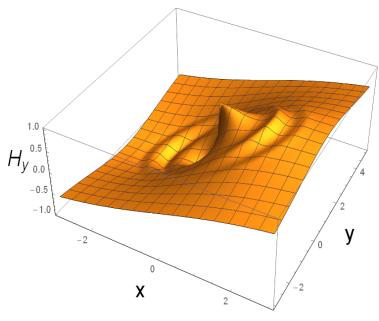


FIGURE 7.5 – Représentation graphique de la deuxième composante du champ magnétique $\vec{H}(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.

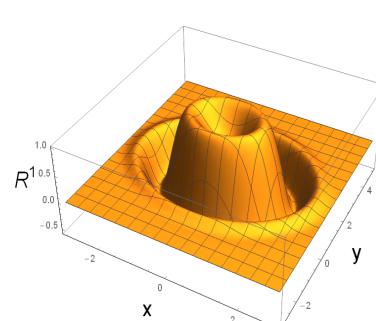


FIGURE 7.6 – Représentation graphique de l'invariant $R^1(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.

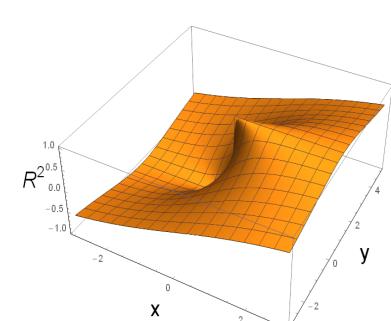


FIGURE 7.7 – Représentation graphique de l'invariant $R^2(x, y)$ pour l'onde double $E_2A_2^\varepsilon$.

7.1.2 Solution explicite pour l'onde triple entropique-entropique-Alfvén $E_2E_2A_2^\varepsilon$ (page 99)

En imposant les conditions initiales pour $t = t_0$ pour les fonctions arbitraires

$$\begin{aligned}\psi^1 \left(x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}} \right) &= \cos \left(x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}} \right), \\ \psi^2 \left(x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}} \right) &= \operatorname{sech} \left(x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}} \right), \\ \psi^3(z) &= \frac{1}{2} \tanh(z), \\ \rho(R^1, R^2) &= \operatorname{cn} \left[\left(1 + \cosh(\arctan(R^1 R^2)) \right)^{-1}, k \right], \\ \mathcal{H}(R^1, R^2) &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{sn}[R^1 R^2, k]^2}} \right],\end{aligned}$$

la solution pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$ prend la forme

$$\begin{aligned}\rho(x, y, z) &= \operatorname{cn} \left[\left(1 + \cosh(\arctan(R^1(x, y, z) R^2(x, y, z))) \right)^{-1}, k \right], \\ p(x, y, z) &= p_0 - \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{sn}[R^1(x, y, z) R^2(x, y, z), k]^2}} \right]^2, \\ \vec{v}(x, y, z) &= \frac{\varepsilon \vec{H}(x, y, z)}{\sqrt{4\pi \rho(x, y, z)}}, \\ \vec{H}(x, y, z) &= \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{sn}[R^1(x, y, z) R^2(x, y, z), k]^2}} \right] \begin{pmatrix} R^3(z) \\ \sqrt{1 - R^3(z)^2} \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{7.4}$$

où les invariants de Riemann sont donnés par

$$\begin{aligned}R^1(x, y, z) &= \cos \left(x - y \frac{\tanh z}{\sqrt{4 - \tanh^2 z}} \right), \\ R^2(x, y, z) &= \operatorname{sech} \left(x - y \frac{\tanh z}{\sqrt{4 - \tanh^2 z}} \right), \\ R^3(z) &= \frac{1}{2} \tanh(z).\end{aligned}$$

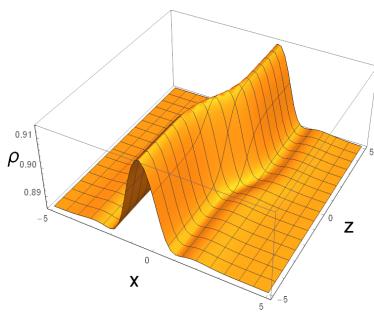


FIGURE 7.8 – Représentation graphique de la densité $\rho(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.

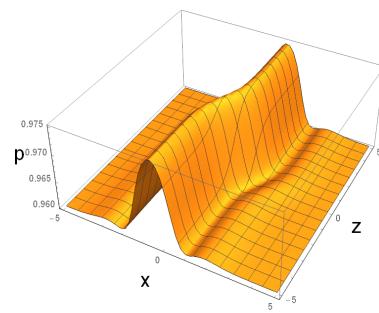


FIGURE 7.9 – Représentation graphique de la pression $p(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.

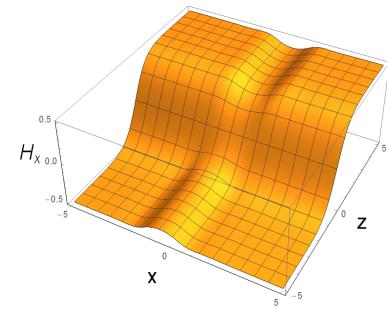


FIGURE 7.10 – Représentation graphique de la première composante du champ magnétique $\vec{H}(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2A_2^\varepsilon$.

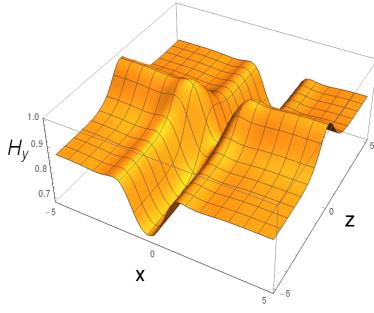


FIGURE 7.11 – Représentation graphique de la deuxième composante du champ magnétique $\vec{H}(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.

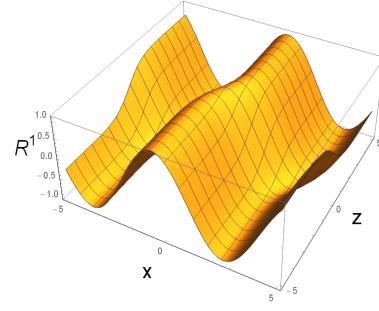


FIGURE 7.12 – Représentation graphique de l'invariant $R^1(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.

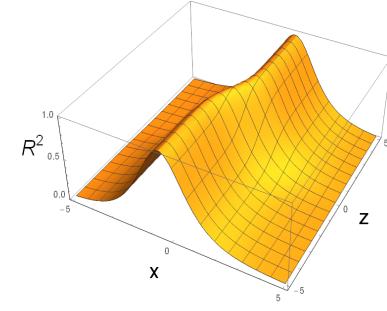


FIGURE 7.13 – Représentation graphique de l'invariant $R^2(x, 1, z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.

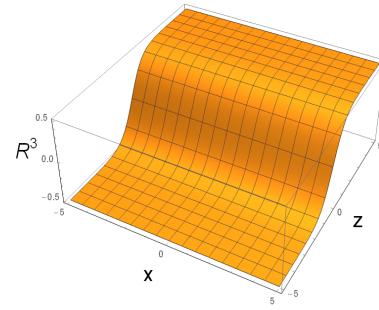


FIGURE 7.14 – Représentation graphique de l'invariant $R^3(z)$ pour l'onde triple $E_2E_2A_2^\varepsilon$.

Puisque cette solution dépend des trois variables (x, y, z) , il faut qu'une de ces variables soit constante afin de pouvoir visualiser cette solution sur un plan formé des deux autres variables. Pour $\varepsilon = p_0 = 1$, un module de $k = 0.9$ pour les fonctions de Jacobi et pour une coupe en $y = 1$, on obtient les représentations graphiques suivantes pour quelques éléments de cette solution dans le plan xz . On note que le champ de vitesse \vec{v} est parallèle au champ magnétique \vec{H} . Pour les troisièmes composantes de ces vecteurs, elles sont nulles.

Les invariants R^1 et R^2 sont associés aux deux ondes entropiques E_2 . De l'équation (7.4), on voit que chaque élément de la solution dépend de ces deux invariants, et donc des deux ondes E_2 . L'invariant R^1 est donné par une fonction ondulatoire tandis que l'invariant R^2 est donné par un bump, tel qu'illustré dans les figures 7.12 et 7.13. Chacun des éléments de la solution sera donc une combinaison de ces deux comportements, par exemple la densité ρ de la figure 7.8 qui comprend un bump et une légère oscillation.

Pour cette solution, seule la direction du champ magnétique dépend de l'invariant R^3 . Cet invariant est donné par un kink, comme on peut le voir à la figure 7.14. En analysant la première composante du champ magnétique \vec{H} , on voit le kink de la tangente hyperbolique de R^3 , tel qu'illustré à la figure 7.10.

On remarque finalement que puisque les invariants sont continus partout, les solutions le sont aussi. Cette solution n'admet pas de catastrophe du gradient.

7.2 Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'évolution

Nous allons maintenant présenter le problème de Cauchy, qui nous permettra de confirmer si une solution non stationnaire (qui dépend de la variable t) correspond bien à une superposition d'ondes de Riemann, et ce avant que se produise la catastrophe du gradient. Cette section s'inspire de l'article [28].

Considérons l'équation différentielle homogène quasi linéaire aux dérivées partielles d'évolution en t

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad (7.5)$$

où $\vec{x} = (t, x) \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$, $u(\vec{x}) = (u^1(\vec{x}), \dots, u^\ell(\vec{x})) \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^\ell$ et $A(u)$ est une matrice de dimension $\ell \times \ell$ qui dépend de $u(\vec{x})$. Les éléments simples de l'équation (7.5) sont donnés par

$$(Iv_s - A)\gamma_s = 0, \quad \lambda^s = (v_s, -1) \quad (7.6)$$

avec $s = 1, \dots, k$ et où v_s et γ_s correspondent respectivement aux valeurs propres et aux vecteurs propres de la matrice A .

Définition 7.2.1. Une onde simple sera du i -ième type si $\gamma = \frac{df}{dR}$ est le i -ième vecteur propre de la matrice A , où R est un invariant de Riemann.

Soit la propagation de deux ondes simples. À l'aide d'une normalisation appropriée des vecteurs γ_1, γ_2 , il est possible d'obtenir le commutateur $[\gamma_1, \gamma_2] = 0$. Dans ce cas, nous pouvons paramétriser la surface u de telle sorte que

$$u = f(R^1, R^2),$$

est tangente aux champs γ_i de sorte que

$$\gamma_s = \frac{\partial f}{\partial R^s}, \quad s = 1, 2.$$

Nous avons donc

$$du = \sum_{s=0}^2 \frac{\partial u}{\partial R^s} dR^s.$$

Mais puisque nous avons aussi la relation $du = \sum_{s=0}^2 \xi(x)\gamma_s \otimes \lambda^s$, nous pouvons

conclure, en supposant que les champs γ_s sont linéairement indépendants, que

$$dR^s = \xi(x)^s \lambda^s, \quad s = 1, 2. \quad (7.7)$$

Des équations (7.6) et (7.7), on peut écrire que $dR^s = \xi^s \lambda_0^s dt - \xi^s dx = R_t^s dt + R_x^s dx$.

On voit que

$$R_t^s = \xi^s \lambda_0^s \quad \text{et} \quad R_x^s = -\xi^s.$$

En éliminant la fonction ξ^s , on obtient les systèmes en termes des invariants de Riemann

$$R_t^s + \lambda_0^s(R^1, R^2)R_x^s = 0, \quad s = 1, 2. \quad (7.8)$$

Ce système permettra de décrire la superposition d'ondes. Pour des conditions initiales suffisamment petites, il existe un intervalle de temps $[t_0, T[$, où T est la catastrophe du gradient, dans lequel on exclut la catastrophe du gradient pour les solutions $R^s(t, x)$, $s = 1, 2$ [29]. Puisque les fonctions $R^s(t, x)$ sont constantes sur les lignes caractéristiques $C^{(s)} : \frac{dx}{dt} = v_s$ du système (7.8), il est possible de choisir des conditions initiales de l'espace \mathcal{E} de sorte que les dérivées R_x^s ont des supports compacts disjoints, c'est-à-dire

$$\text{supp}R_x^s(t_0, x) \subset [a_s, b_s], \quad s = 1, 2, \quad (7.9)$$

$$\text{supp}R_x^1(t_0, x) \cap \text{supp}R_x^2(t_0, x) = \emptyset,$$

pour tout $a_s, b_s \in \mathbb{R}^1$ avec $s = 1, 2$. Ces supports seront tels que pour un intervalle $[t_0, T[$, le support $R_x^s(t, x)$ sera confiné entre les caractéristiques aux extrémités de l'intervalle $[a_s, b_s]$. Il a aussi été démontré que si les conditions initiales sont suffisamment petites, alors la condition

$$\bigwedge_{c>0} \bigvee_{(t,x), (t,x') \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^1} \lambda_0^1(t, x) - \lambda_0^2(t, x) \geq C > 0 \quad (7.10)$$

est satisfaite [30]. Cette condition signifie que chaque courbe caractéristique de la famille $C^{(1)}$ a une tangente d'inclinaison inférieure (angle par rapport à l'axe x) à toutes les autres courbes caractéristiques de la famille $C^{(2)}$. L'espace \mathcal{E} est représenté à la figure 7.15. Soit les temps t_1 et t_2 , délimitant la région de superposition (l'interaction se produit entre les temps t_1 et t_2). Pour un temps $t \in (t_0, t_1)$, nous avons $\text{supp}R_x^1(t, x) \cap \text{supp}R_x^2(t, x) = \emptyset$, c'est-à-dire que la solution $R^s(t, x)$ correspond à la propagation de deux ondes qui n'interagissent pas. Pour un temps $t \in [t_1, t_2]$, les caractéristiques de $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ se croisent, c'est-à-dire $\text{supp}R_x^1(t, x) \cap \text{supp}R_x^2(t, x) \neq \emptyset$ et nous avons donc une superposition entre les deux ondes. Pour un temps $t > t_2$ nous avons à nouveau $\text{supp}R_x^1(t, x) \cap \text{supp}R_x^2(t, x) = \emptyset$, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de superposition et que les ondes se séparent.

Lorsque les ondes se séparent (après le temps t_2), il est à nouveau question d'ondes simples du même type (entropique, Alfvén ou magnétoacoustique) qu'avant la superposition, mais avec des amplitudes et des fréquences différentes. Il s'agit donc d'une interaction élastique. Pour $T > t_2$, on s'approche de la catastrophe du gradient, si elle a lieu. Dans ce cas, les caractéristiques d'un support donné vont se croiser, comme on peut le voir à la figure 7.15.

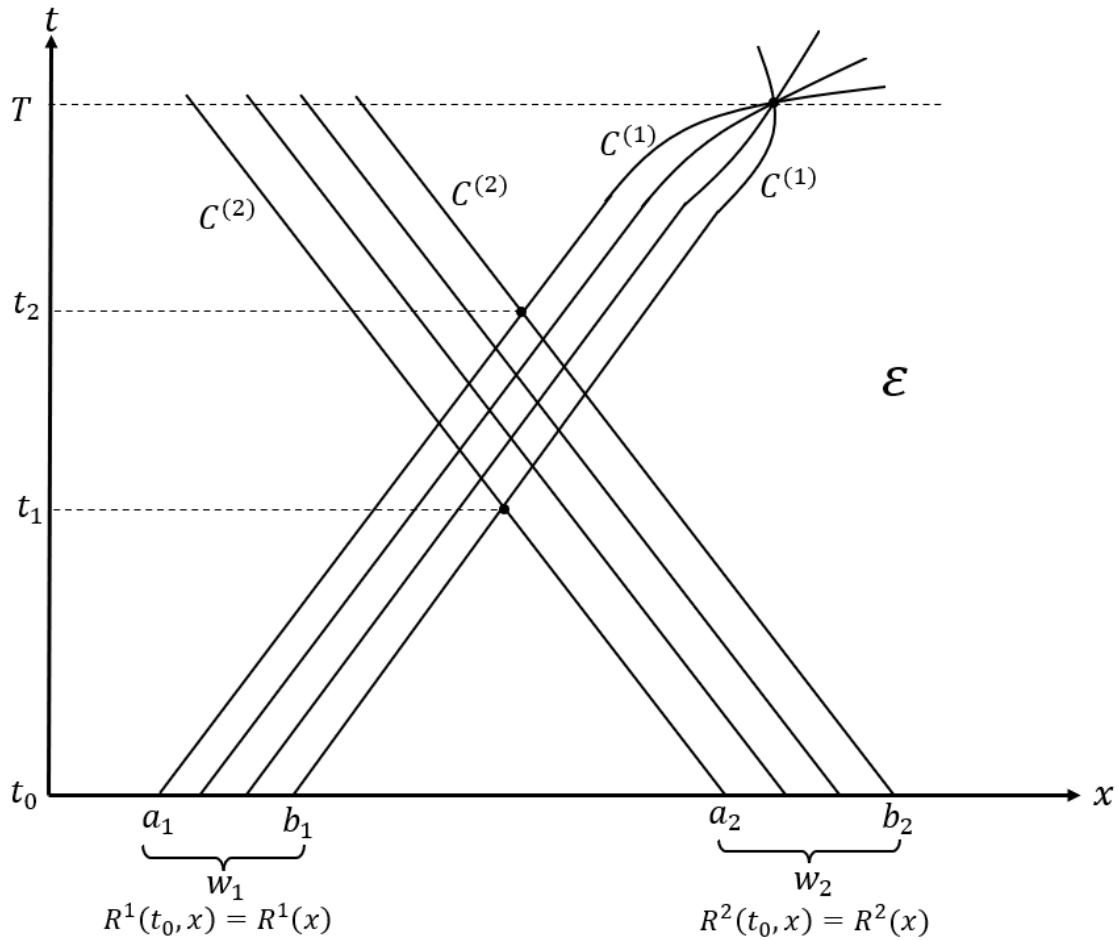


FIGURE 7.15 – Propagation de deux ondes simples w_1 et w_2 ainsi que leur superposition, représentées par le croisement de leurs courbes caractéristiques $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ dans l'intervalle $[t_1$ et $t_2]$.

7.2.1 Solution explicite non stationnaire et problème de Cauchy pour l'onde double entropique-magnétoacoustique rapide EF (page 107)

En imposant les conditions initiales pour $t = 0$

$$R^1(z, 0) = z^3,$$

$$\vec{v}(z, 0) = \left(\operatorname{dn} [z^3, k], -\operatorname{dn} [z^3, k], -2\beta z^2 \right),$$

on trouve, par extension analytique, que les fonctions arbitraires pour l'onde EF sont

$$\begin{aligned}\psi^1\left(\frac{z}{(1-3\beta t)^{2/3}}\right) &= \frac{z^3}{(1-3\beta t)^2}, \\ \vec{\alpha}(R^1) &= (\operatorname{dn}[R^1, k], \operatorname{dn}[R^1, k], 0).\end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution pour l'onde double entropique-magnétoacoustique rapide EF prend la forme

$$\begin{aligned}\rho(z, t) &= R^2(z, t), \\ p(z, t) &= C_2(R^2(z, t))^2, \\ \vec{v}(z, t) &= (\operatorname{dn}[R^1(z, t), k], -\operatorname{dn}[R^1(z, t), k], -2\beta R^2(z, t)), \\ \vec{H}(z, t) &= C_1 R^2(z, t) (\cos[R^1(z, t)], \sin[R^1(z, t)], 0),\end{aligned}$$

où les invariants de Riemann sont donnés par (7.11)

$$R^1(z, t) = \frac{z^3}{(1-3\beta t)^2}, \quad R^2(z, t) = \frac{z^2}{(1-3\beta t)^2},$$

et

$$\beta := \varepsilon \sqrt{\frac{C_1^2}{4\pi} + 2C_2}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Pour $\varepsilon = 1$, un module de $k = 0.2$ pour la fonction dn , $C_1 = \sqrt{\pi}/10$, $C_2 = 1/450$, et donc $\beta = \varepsilon \sqrt{C_1^2/(4\pi) + 2C_2} = 1/12$, on obtient les représentations graphiques suivantes pour cette solution dans le plan zt . Cette solution est non stationnaire et évolue selon le temps t sur l'axe z . Pour cette solution, on doit se restreindre à $z > 0$ et $t < 1/(3\beta) = 4$, tel qu'expliqué à la page 107.

Pour cette solution, seuls le champ de vitesse \vec{v} et le champ magnétique \vec{H} dépendent de l'invariant R^1 , tandis que ρ, p, \vec{v} et \vec{H} dépendent des deux invariants. Tels qu'illustrés aux figures 7.23 et 7.24, les invariants R^1 et R^2 admettent une catastrophe du gradient à $t = 1/(3\beta) = 4$. C'est pourquoi ces deux fonctions divergent lorsque $t \rightarrow 1/(3\beta) = 4$.

Puisque la densité ρ est égale à R^2 , elle diverge donc aussi vers la catastrophe du

gradient, comme on le voit à la figure 7.16. On doit donc se restreindre à des temps plus petits que 4 pour que la densité reste finie. En effet, on ne peut pas avoir de fluide infiniment dense. Le même raisonnement s'applique à la pression p , comme on le voit à la figure 7.17.

Pour le champ de vitesse \vec{v} , les deux premières composantes dépendent de R^1 mais ne divergent pas lorsque $t \rightarrow 4$. Ceci est causé par le terme

$$\operatorname{dn} [R^1, k] = \operatorname{dn} [z^3/(3(1-3\beta t)^2), k],$$

qui ne diverge pas lorsque z et t augmentent. Cependant, la fonction dn oscille très rapidement entre $\sqrt{1-k^2} \approx 0.98$ et 1, telle que définie à l'équation (7.1). La troisième composante est proportionnelle à R^2 et on observe donc qu'elle diverge lorsqu'on approche la catastrophe du gradient.

Pour le champ magnétique \vec{H} , il s'agit d'une oscillation dans le plan zt qui diverge lorsque $t \rightarrow 1/(3\beta) = 4$. Le comportement ondulatoire des deux premières composantes provient de sa direction qui comporte des fonctions périodiques. Même si R^1 diverge lorsque $t \rightarrow 1/(3\beta) = 4$, cet invariant ne cause pas de divergence puisque les fonctions \cos et \sin oscillent entre -1 et 1 . La divergence pour le champ magnétique provient donc de son module, qui est proportionnel à R^2 .

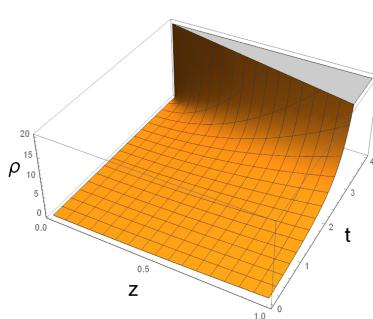


FIGURE 7.16 – Représentation graphique de la densité $\rho(z, t)$ pour l'onde double EF .

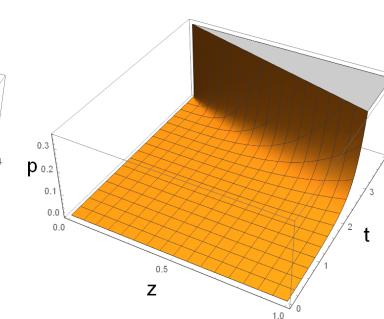


FIGURE 7.17 – Représentation graphique de la pression $p(z, t)$ pour l'onde double EF .

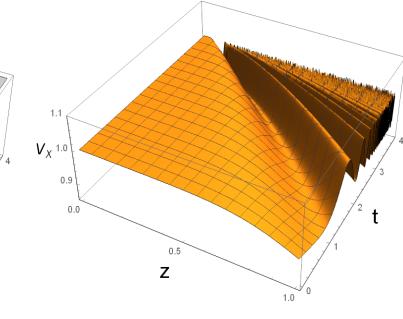


FIGURE 7.18 – Représentation graphique de la première composante du champ de vitesse $\vec{v}(z, t)$ pour l'onde double EF .

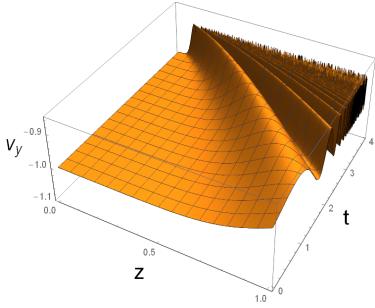


FIGURE 7.19 – Représentation graphique de la deuxième composante du champ de vitesse $\vec{v}(z, t)$ pour l'onde double EF .

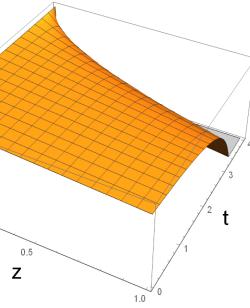


FIGURE 7.20 – Représentation graphique de la troisième composante du champ de vitesse $\vec{v}(z, t)$ pour l'onde double EF .

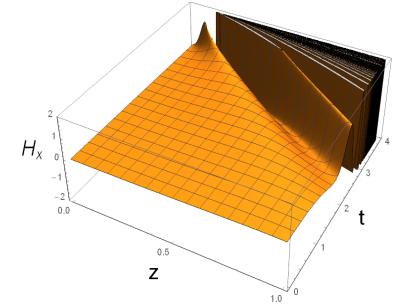


FIGURE 7.21 – Représentation graphique de la première composante du champ magnétique $\vec{H}(z, t)$ pour l'onde double EF .

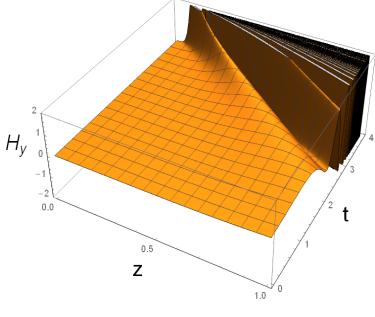


FIGURE 7.22 – Représentation graphique de la deuxième composante du champ magnétique $\vec{H}(z, t)$ pour l'onde double EF .

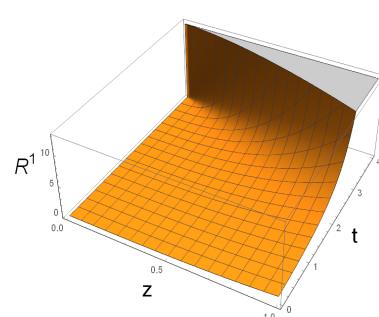


FIGURE 7.23 – Représentation graphique de l'invariant $R^1(z, t)$ pour l'onde double EF .

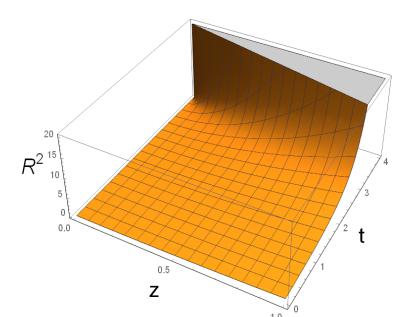


FIGURE 7.24 – Représentation graphique de l'invariant $R^2(z, t)$ pour l'onde double EF .

Nous allons maintenant appliquer le problème de Cauchy à l'équation (7.11) pour $t_0 = 0$ afin de confirmer qu'il y a bien une superposition d'ondes pour l'onde double EF . De l'équation (6.44b), on a

$$v_1 = 2\beta\sqrt{R^2}, \quad v_2 = 3\beta\sqrt{R^2},$$

où $v_s = \lambda_0^s/\lambda^s$, $s = 1, 2$. Pour $a_1 = 5, b_1 = 6, a_2 = 6.5$ et $b_2 = 7$, on a bien deux supports distincts comme dans l'équation (7.9), c'est-à-dire

$$\text{supp}R_z^1(0, z) \subset [5, 6], \quad \text{supp}R_z^2(0, z) \subset [6.5, 7]$$

$$\text{supp}R_z^1(0, z) \cap \text{supp}R_z^2(0, z) = \emptyset,$$

où $R_z^1(0, z) = 3z^2$ et $R_z^2(0, z) = 2z$. La figure 7.25 illustre la superposition des deux supports. Les temps t_1 et t_2 ont été obtenus en trouvant les intersections des droites caractéristiques. On sait que ces droites ont des pentes qui correspondent aux termes $v_s(0, z)$, $s = 1, 2$. Par exemple, la droite $C^{(1)}$ à l'extrême gauche est donnée par

$$t(z) = 2\beta a_1 z - 2\beta a_1^2.$$

On trouve donc que la superposition débute à $t_1 = 1.3$ et qu'elle se termine à $t_2 = 35/11$. Puisque cette superposition se produit de manière à ce que $t_1 < t_2 < T$, où $T = 4$ est la catastrophe du gradient, on sait que la superposition se produit bien avant la catastrophe du gradient, c'est-à-dire que les deux ondes E et F sont bien entrées en superposition dans l'intervalle $[t_1, t_2]$.

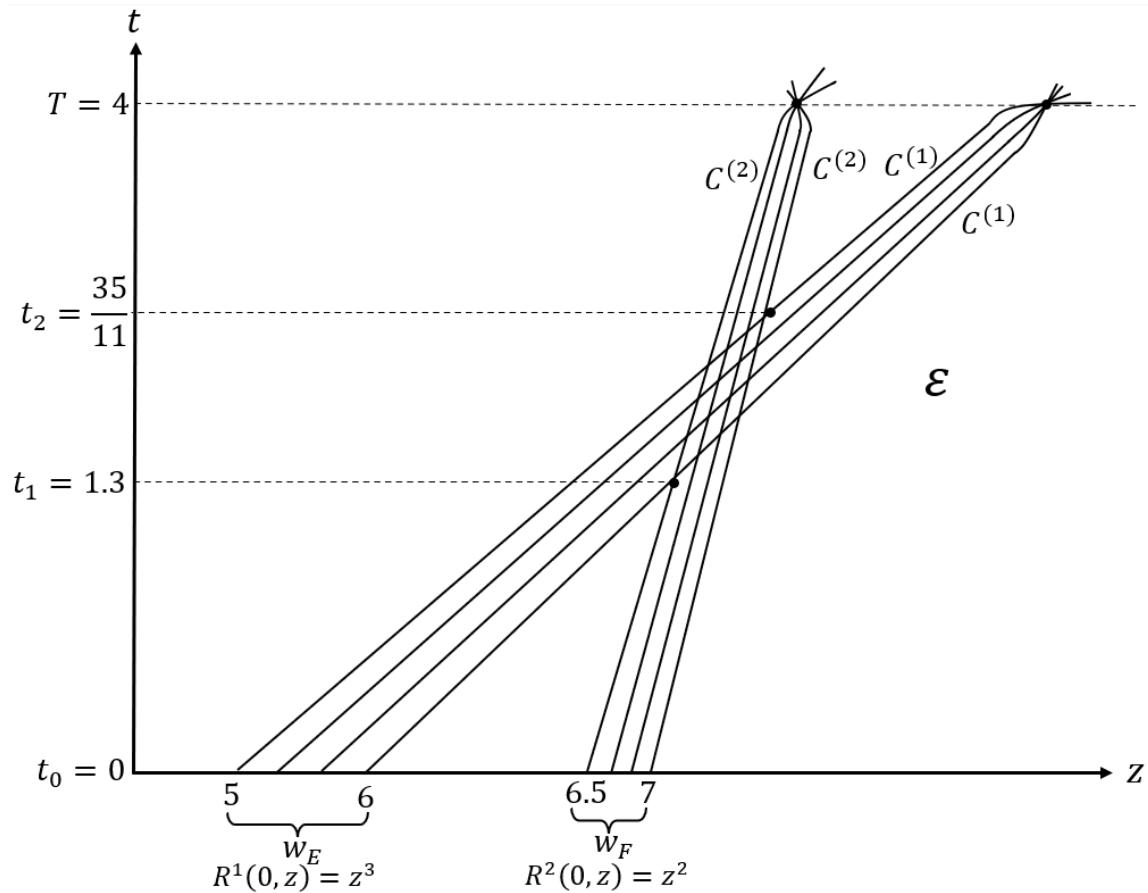


FIGURE 7.25 – Propagation de deux ondes simples w_E (l'onde entropique) et w_F (l'onde magnétoacoustique rapide) ainsi que leur superposition, représentées par le croisement de leurs courbes caractéristiques $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ dans l'intervalle $[1.3, 35/11]$.

Chapitre 8

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode des caractéristiques généralisées pour trouver de nouvelles solutions explicites en termes des invariants de Riemann pour les équations de la MHD idéale (2.1) en (3+1) dimensions pour l'écoulement d'un fluide idéal, compressible et avec conductivité infinie. Nous avons démontré que le système (2.1) admet quatre types de superpositions, à savoir : les superpositions entropique-entropique, Alfvén-Alfvén, entropique-Alfvén et entropique-magnétoacoustique. La table 6.1 illustre les superpositions possibles. Parmi ces quatre types, nous avons été en mesure de trouver 15 nouvelles classes de solutions explicites pour la superposition des ondes simples sous forme solitonique (algébrique, trigonométrique et elliptique). L'annexe A résume ces nouveaux résultats. Parmi ces solutions, nous avons donné des représentations graphiques pour l'onde double stationnaire $E_2A_2^\varepsilon$, l'onde triple stationnaire $E_2E_2A_2^\varepsilon$ et l'onde double non stationnaire EF , à laquelle nous avons appliqué le problème de Cauchy. En ce qui concerne la table 6.1, on note que les superpositions où les invariants existent correspondent à des interactions élastiques. Pour l'onde EF , il s'agit d'une interaction élastique entre les ondes E et F . En effet, on retrouve les deux ondes E et F après superposition (mêmes types d'ondes qu'initialement). En ce qui concerne les superpositions linéaires où les inva-

riants n'existent pas (dans la table 6.1), il est possible que l'onde multiple existe, mais sous forme d'interaction non élastique. Dans ce cas, les ondes d'avant l'interaction ne seraient pas du même type que celles d'après l'interaction, par exemple, comme dans l'interaction

$$F_+ + F_- \rightarrow F'_+ + S'_+ + S'_- + F'_-,$$

où les indices + et - correspondent aux deux valeurs de $\varepsilon = \pm 1$ dans (4.17), les ondes non primées sont celles d'avant l'interaction et les ondes primées sont celles après l'interaction [18], [28], [27].

8.1 Perspectives de recherche et certains domaines d'application

Dans ce mémoire, nous avons présenté plusieurs classes de solutions d'ondes de la MHD idéale. Dans de futures recherches, il serait intéressant d'étudier ces classes de solutions dans des domaines d'applications en physique où la conductivité est finie. Par exemple, les configurations fermées s'apparentent aux écoulements de plasma dans les tokamaks tandis que les ondes d'Alfvén permettent d'expliquer comment sont produites les aurores boréales.

De plus, le système d'équations de la MHD (2.1) peut être modifié afin d'étudier d'autres types d'écoulement que ceux présentés dans ce mémoire. Dans le cas d'un champ gravitationnel relativiste, on utilise plutôt la magnétohydrodynamique relativiste générale (MHDRG) qui permet d'expliquer des phénomènes astronomiques intenses, par exemple l'explosion et l'effondrement d'une étoile. De plus, la MHDRG pourrait être appliquée aux configurations fermées et aux aurores boréales. La MHDRG est particulièrement intéressante, car il est possible d'utiliser la méthode des

caractéristiques généralisées afin de trouver des solutions d'ondes multiples en fonctions des invariants de Riemann.

8.1.1 Configurations fermées d'un fluide dans un tore

Les configurations fermées d'un fluide (plus précisément un plasma) dans un tore ont été étudiées en ce qui concerne le tokamak. Le tokamak est très important puisqu'il s'agit du réacteur de fusion thermonucléaire le plus prometteur à ce jour [31]. Le terme tokamak désigne un système toroïdal avec symétrie axiale dans lequel circule un plasma chaud (fluide avec conductivité finie) maintenu par le champ magnétique H_ϕ d'un courant J circulant dans une famille de tores asymétriques. De plus, il doit y avoir un champ magnétique H_θ parallèle au courant qui circule dans le tore afin d'annuler les instabilités magnétohydrodynamiques. Le champ magnétique longitudinal H_θ doit être beaucoup plus puissant que le champ azimuthal H_ϕ produit par le courant J [32]. Le champ magnétique résultant, c'est-à-dire la combinaison de H_θ et de H_ϕ , a une structure hélicoïdale dans un tore, telle qu'illustrée à la figure 8.1 tirée de l'article d'Artsimovich [32].

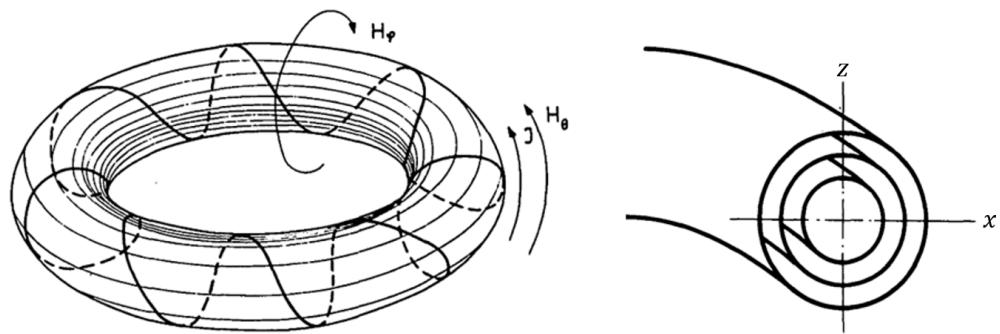


FIGURE 8.1 – Structure hélicoïdale du champ magnétique dans un tokamak [32].

Le tokamak tire son intérêt du fait qu'il peut générer de puissants champs magnétiques axisymétriques (avec une symétrie axiale) par effet dynamo, ce qui permet la fusion nucléaire. Cet effet dynamo permet au champ magnétique résultant d'être

autosuffisant (il se maintient par lui-même, comme le champ magnétique terrestre) [33]. À cause du théorème d'anti-dynamo de Cowling, un champ magnétique axisymétrique ne peut pas être généré par un courant (ici un écoulement) qui est aussi axisymétrique [34]. Une preuve du théorème de Cowling est donnée par James et al. (1980) [35].

En ce qui concerne la MHD idéale, nous avons obtenu des configurations fermées de champ magnétique pour un fluide idéal pour les tores (voir la solution d'onde double $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ de la page 75). Ce type d'écoulement est semblable aux écoulements de plasma qu'on retrouve dans les tokamaks. Cependant, l'écoulement entre des tores pour l'onde $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ suppose que l'écoulement est axisymétrique. En vertu du théorème d'anti-dynamo de Cowling, il ne peut pas y avoir de champ magnétique généré par l'effet dynamo. La solution $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ ne peut donc pas s'appliquer à l'écoulement dans un tokamak. De plus, ce mémoire traite des écoulements idéaux, ce qui n'est pas présent dans l'écoulement de plasma chaud dans les tokamaks, car le plasma y circulant doit avoir une conductivité finie.

Dans de futures recherches, il serait intéressant de modifier les équations de la MHD pour pouvoir décrire l'écoulement du plasma en fonction des invariants de Riemann. Pour s'y prendre, il faudra considérer la conductivité comme une fonction finie $\sigma = \sigma(\rho, \vec{H})$. Dans ce cas, les équations de la MHD (2.1) vont être différentes (nous avons fait plusieurs simplifications dans le chapitre 2 en utilisant que $\sigma \rightarrow \infty$) [36]. De plus, la conductivité fera maintenant partie des variables dépendantes à trouver.

8.1.2 Les ondes d'Alfvén et les aurores boréales

L'étude des aurores boréales est une application physique très intéressante de la MHD, plus précisément en ce qui concerne les ondes d'Alfvén. Dans un article publié récemment, Schroeder et al. (2021) [37] ont été en mesure de mesurer en laboratoire

le transfert d'énergie entre des ondes d'Alfvén et des électrons aurorales sous des conditions correspondant à ce qu'on retrouve dans l'ionosphère terrestre. Ces résultats démontrent donc que les ondes d'Alfvén pourraient être à l'origine des aurores boréales. Voici une brève description de ce phénomène.

Lors d'éruptions solaires, le soleil émet des vents solaires (plasma composé d'électrons et de protons) qui voyagent jusqu'à la terre. Lorsque ce plasma interagit avec le champ magnétique terrestre, les queues des lignes de champ magnétique peuvent se rapprocher au point de se fendre et de se reconnecter, phénomène appelé reconnexion magnétique. Ces perturbations des lignes de champ magnétique génèrent des ondes d'Alfvén. Parmi les électrons libres se trouvant autour de la terre, ceux qui voyagent parallèlement aux ondes d'Alfvén vont être accélérés par les ondes (comme un surfeur qui accélère s'il se déplace dans la même direction qu'une vague). Cette accélération des électrons libres par les ondes d'Alfvén (appelée amortissement de Landau [7]), permet aux électrons de voyager à une vitesse de 20 000 km/s, soit une vitesse supérieure à celle des ondes d'Alfvén engendrées par la reconnexion magnétique. Comme nous l'avons vu dans ce mémoire, les ondes d'Alfvén se propagent parallèlement aux lignes de champ magnétique (voir équation (4.34)), ce qui signifie que les électrons accélérés par les ondes d'Alfvén voyagent aussi parallèlement aux lignes de champ magnétique terrestre. Puisque les lignes de champ magnétique terrestre se dirigent vers les pôles terrestres, les électrons vont donc être projetés vers les pôles magnétiques de la Terre. En arrivant dans l'atmosphère terrestre, les électrons vont éventuellement rencontrer les molécules d'azote et d'oxygène qui se trouvent dans l'air. Au contact des électrons à hautes énergies, ces molécules émettent de la lumière, ce qui correspond aux aurores boréales. Afin de mieux conceptualiser le phénomène, voir la figure 8.2, inspirée d'une figure faite par Howes [38], dans laquelle les lignes bleues correspondent aux lignes du champ magnétique terrestre.

Il s'agit ici d'une application récente des ondes d'Alfvén, ondes dont nous avons traité dans ce mémoire. Cependant, Schroeder et al. (2021) précisent que ces ondes

d'Alfvén ne sont pas identiques aux ondes d'Alfvén qu'on retrouve dans la MHD idéale. En effet, la MHD idéale néglige l'impact du champ électrique dans le mouvement du fluide. En ce qui concerne les ondes d'Alfvén qui sont responsables des aurores boréales, il faut considérer une composante du champ électrique parallèle au champ magnétique. C'est cette contribution du champ électrique qui permet l'amortissement de Landau, c'est-à-dire l'accélération des électrons par les ondes d'Alfvén. Dans de futures recherches, il serait intéressant de modifier les équations de la MHD (2.1) de façon à considérer la contribution du champ électrique. Par la suite, il serait intéressant de trouver des solutions d'ondes multiples d'Alfvén en fonction des invariants de Riemann décrivant les aurores boréales.

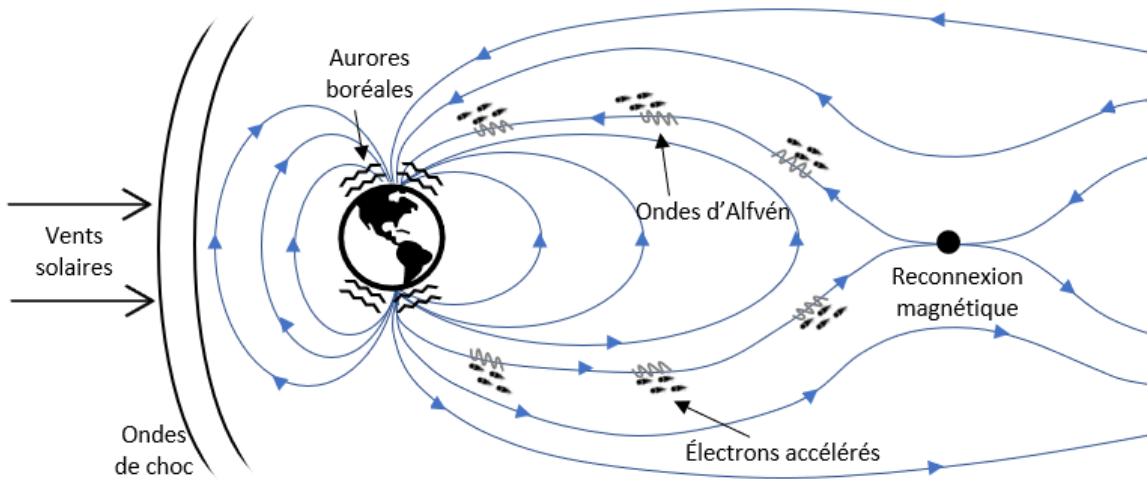


FIGURE 8.2 – Schéma de la reconnexion magnétique et de l'amortissement de Landau causés par le vent solaire.

L'analyse présentée dans ce mémoire pour l'onde double entropique-Alfvén EA^c de l'équation (6.31) pourrait s'appliquer à l'analyse du comportement du soleil près de la photosphère. Une discussion détaillée à ce sujet est présentée par Abraham et Feldman en ce qui concerne les vents solaires [39].

8.1.3 La magnétohydrodynamique relativiste générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes concentrés sur les équations classiques de la MHD idéale telles que la gravité a été considérée de manière *newtonienne*. Comme futur sujet de recherche, il serait intéressant de considérer la gravité de manière *relativiste*, en utilisant plutôt la magnétohydrodynamique relativiste générale (MHDRG). On utilise la MHDRG lorsqu'il est question de plasma non maxwellien en présence d'un champ gravitationnel relativiste et d'un fort champ électromagnétique, par exemple pour étudier des quasars, des noyaux galactiques et les effondrements de supernovae [40].

Nous allons maintenant présenter les équations de la MHDRG. La discussion qui suit s'inspire du livre d'André Lichnerowicz [41]. Supposons un fluide parfait, relativiste et thermodynamique avec une perméabilité magnétique constante μ et une conductivité infinie σ . Le tenseur d'énergie totale est la somme du tenseur d'énergie dynamique du fluide et du tenseur d'énergie du champ électromagnétique

$$T_{\alpha\beta} = \left(r f v_\alpha v_\beta - \frac{p}{c^2} g_{\alpha\beta} \right) + \tau_{\alpha\beta}, \quad (8.1)$$

où r est la densité de matière propre, p est la pression du fluide, v est la vitesse unitaire, c est la vitesse de la lumière, $g_{\alpha\beta}$ est le potentiel gravitationnel (tenseur métrique) et f est l'indice du fluide

$$f = 1 + \frac{i}{c^2},$$

où i est l'enthalpie spécifique. En définissant

$$|\vec{h}|^2 = -h_\nu h^\nu \geq 0,$$

le tenseur du champ électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ prend la forme

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left[\left(v_\alpha v_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) |\vec{h}|^2 - h_\alpha h_\beta \right], \quad (8.2)$$

où \vec{h} est le champ magnétique. Des équations (8.1) et (8.2), le tenseur d'énergie totale est donc donné par

$$T_{\alpha\beta} = \left(r f + p |\vec{h}|^2 \right) v_\alpha v_\beta - \left(\frac{p}{c^2} + \frac{1}{2} \mu |\vec{h}|^2 \right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta, \quad (8.3)$$

tel que

$$T_{\alpha\beta} v^\beta = \left(r f + \frac{1}{2} \mu |\vec{h}|^2 - \frac{p}{c^2} \right) v_\alpha.$$

La densité d'énergie propre du fluide est

$$r f - \frac{p}{c^2} + \frac{1}{2} \mu |\vec{h}|^2 = \rho + \frac{1}{2} \mu |\vec{h}|^2,$$

où ρ est la contribution dynamique et $\frac{1}{2} \mu |\vec{h}|^2$ la contribution magnétique. Si T est la température propre du fluide et S est l'entropie spécifique, alors

$$T dS = di - \frac{dp}{r},$$

et donc

$$dp = c^2 r df - r T dS,$$

ce qui signifie que

$$r = r(f, S),$$

où nous avons ajouté l'hypothèse que r est conservatif dans le mouvement du fluide.

Pour un tel système physique, on a que les équations de la MHDRG ont la forme

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= \chi T_{\alpha\beta}, & \text{Équations d'Einstein,} \\ \nabla_\alpha (v^\alpha h^\beta - v^\beta h^\alpha) &= 0, & \text{Équations de Maxwell,} \end{aligned} \tag{8.4}$$

où le tenseur d'énergie totale $T_{\alpha\beta}$ est donné par l'équation (8.3), $S_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'Einstein, χ est la constante gravitationnelle d'Einstein et ∇_α est la dérivée covariante basée sur la métrique de Minkowski $g_{\alpha\beta}$ [41]. Sans entrer dans des détails complexes, on note que les indices grecs α et β prennent des valeurs de 0 à 3. L'indice 0 correspond à la composante temporelle t et les indices 1, 2 et 3 correspondent aux composantes spatiales x, y et z . Les termes avec un indice covariant ou contravariant (par exemple h^α) correspondent à des composantes de vecteurs à 4 composantes tandis que les termes à deux indices (par exemple $S_{\alpha\beta}$) correspondent à des composantes de matrices de dimension 4×4 . L'espace des variables indépendantes $\vec{x} = (t, x, y, z)$ est $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{3+1}$ et l'espace des variables dépendantes $\vec{u} = (p, S, \vec{v}, \vec{h})$ est l'espace hodographe $\mathcal{H} = \mathbb{R}^{10}$ avec $\vec{v} = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ et $\vec{h} = (h^0, h^1, h^2, h^3)$. Il s'agit donc d'un système de 20 équations différentielles surdéterminées pour 10 variables dépendantes et 4 variables indépendantes.

En plus d'être un système qui contient plus d'équations différentielles et plus de variables dépendantes que le système de la MHD (2.1), le système d'équations pour la MHDRG n'est pas nécessairement hyperbolique [42]. Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode des caractéristiques généralisées pour les systèmes hyperboliques, mais il est possible de l'appliquer pour d'autres types de systèmes, comme celui de la MHDRG [43]. On note finalement que les ondes simples (entropique, Aflvén et magnétoacoustique) ont déjà été étudiées pour la MHDRG [44].

Bibliographie

- [1] A. M. GRUNLAND et P. J. VASSILIOU, « On the solvability of the cauchy problem for riemann doublewaves by the monge-darboux method », *Analysis*, vol. 11, no. 2-3, p. 221–280, 1991.
- [2] S. D. POISSON, « Memoir on the theory of sound », *J. Ecole Polytech. Paris*, vol. 7, p. 319–370, 1808.
- [3] B. RIEMANN, « Über die fortpflanzung ebener luftwellen von endlicher schwingungsweite göttingen abhandlunger », *Bd. VIII, S*, vol. 43, p. 157, 1858.
- [4] R. COURANT et K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves*, vol. 21. Springer Science & Business Media, 1999.
- [5] R. COURANT et D. HILBERT, *Methods of mathematical physics : partial differential equations*. John Wiley & Sons, 2008.
- [6] A. M. GRUNLAND et A. HARITON, « Supersymmetric version of a hydrodynamic system in riemann invariants and its solutions », *Journal of mathematical physics*, vol. 49, no. 4, p. 043502, 2008.
- [7] L. LANDAU, J. BELL, M. KEARSLEY, L. PITAEVSKII, E. LIFSHITZ et J. SYKES, *Electrodynamics of Continuous Media*. Course of Theoretical Physics, Elsevier Science, 2013.
- [8] L. LANDAU et E. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics : Volume 6*. No. v. 6, Elsevier Science, 1987.

- [9] B. ROZHDESTVENSKI et N. I. ANENKO, *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics*. Translations of mathematical monographs, American Mathematical Society, 1983.
- [10] J. FREIDBERG, *Ideal Magnetohydrodynamics*. Cellular Organelles, Plenum Press, 1987.
- [11] N. G. van KAMPEN, B. U. FELDERHOF et A. N. KAUFMAN, « Theoretical methods in plasma physics », *American Journal of Physics*, vol. 36, no. 12, p. 1175–1178, 1968.
- [12] I. E. TAMM, *Fundamentals of the Theory of Electricity*. International Academic Corporation of Science and Technology, 1979.
- [13] J. JACKSON et P. JACKSON, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1962.
- [14] N. H. IBRAGIMOV, *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations*, vol. 3. CRC press, 1995.
- [15] A. M. GRUNLAND et L. LALAGUE, « Lie subgroups of symmetry groups of fluid dynamics and magnetohydrodynamics equations », *Canadian Journal of Physics*, vol. 73, p. 463, jan. 1995.
- [16] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis*. Read Books Ltd, 2011.
- [17] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Books on Physics Series, Dover Publications, 1981.
- [18] A. M. GRUNLAND et R. ŹELAZNY, « Simple waves in quasilinear hyperbolic systems. ii. riemann invariants for the problem of simple wave interactions », *Journal of mathematical physics*, vol. 24, no. 9, p. 2315–2328, 1983.
- [19] A. M. GRUNLAND et R. ŹELAZNY, « Simple waves in quasilinear hyperbolic systems. i. theory of simple waves and simple states. examples of applications », *Journal of mathematical physics*, vol. 24, no. 9, p. 2305–2314, 1983.
- [20] A. M. GRUNLAND, « Algebraic properties of nonhomogeneous equations of magnetohydrodynamics in the presence of gravitational and coriolis forces. examples of solutions simple states », 1975.

- [21] W. ZAJCZKOWSKI, « Riemann invariants interaction in mhd. double waves », *Demonstratio Mathematica*, vol. 12, no. 3, p. 543–564, 1979.
- [22] M. BURNAT, « Hyperbolic double waves », *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences - Série des Sciences Techniques*, vol. 16, no. 10, p. 827, 1968.
- [23] M. BURNAT, « Method of riemann invariants for multi-dimensionel non-elliptic system », *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences - Série des Sciences Techniques*, vol. 17, no. 11-1, p. 1019, 1969.
- [24] Z. PERADZYNISKI, « Nonlinear plane k-waves and riemann invariants », *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences - Série des Sciences Techniques*, vol. 19, no. 9, p. 625, 1971.
- [25] E. CARTAN, « Les systemes differentiels exterieure et leur applications geometriques », *Les systèmes différentiels extérieure et leur applications géométriques*, p. 1, 1945.
- [26] W. ŚLEBODZIŃSKI, « Formes exterieures et leurs applications. vol. i.(1954), vol. ii (1963) », *Monografie matematyczne*, Warszawa.
- [27] Z. PERADZYNISKI, « Geometry of interactions of riemann waves », *Advances in Nonlinear waves*, vol. 2, p. 244–285, 1985.
- [28] A. M. GRUNLAND et R. ŻELAZNY, *Simple Waves and Their Interactions in Quasilinear Hyperbolic Systems*. Publications of the Institute of Geophysics, Państwowe Wydawn. Nauk., 1982.
- [29] B. L. ROZHDESTVENSKII et A. SIDORENKO, « Impossibility of the gradient catastrophe for slightly non-linear systems », *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7, no. 5, p. 282–287, 1967.
- [30] K. FRIEDRICH, « Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables », *American Journal of Mathematics*, vol. 70, no. 3, p. 555–589, 1948.
- [31] J. MENARD, T. BROWN, L. EL-GUEBALY, M. BOYER, J. CANIK, B. COLLING, R. RAMAN, Z. WANG, Y. ZHAI, P. BUXTON *et al.*, « Fusion nuclear science

- facilities and pilot plants based on the spherical tokamak », *Nuclear Fusion*, vol. 56, no. 10, p. 106023, 2016.
- [32] L. ARTSIMOVICH, « Tokamak devices », *Nuclear Fusion*, vol. 12, no. 2, p. 215, 1972.
- [33] A. M. GRUNDLAND, « Hypotheses of the origin of the magnetic field : Hydrodynamic dynamo », in *Continuum Theories in Solid Earth Physics* (R. TEISSEYRE, W. BIELSKI et A. DZIEMBOWSKA, éds), chap. 9, Elsevier, 1986.
- [34] T. G. COWLING, « The magnetic field of sunspots », *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 94, p. 39–48, 1933.
- [35] R. JAMES, P. ROBERTS et D. WINCH, « The cowling anti-dynamo theorem », *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 15, no. 1, p. 149–160, 1980.
- [36] R. DAVIDSON, R. DAVIDSON et E. S. . T. (FIRM), *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Annual Proceedings of the Phytochemical Society of Europe, Academic Press, 1972.
- [37] J. W. SCHROEDER, G. HOWES, C. KLETZING, F. SKIFF, T. CARTER, S. VINCENA et S. DORFMAN, « Laboratory measurements of the physics of auroral electron acceleration by alfvén waves », *Nature communications*, vol. 12, no. 1, p. 1–9, 2021.
- [38] G. HOWES, « Auroral electron acceleration ». <https://homepage.physics.uiowa.edu/~ghowes/research/aurora.html>, 2021.
- [39] B. ABRAHAM-SHRAUNER et W. FELDMAN, « Nonlinear alfvén waves in high-speed solar wind streams », *Journal of Geophysical Research*, vol. 82, no. 4, p. 618–624, 1977.
- [40] C. F. GAMMIE, J. C. MCKINNEY et G. TÓTH, « Harm : a numerical scheme for general relativistic magnetohydrodynamics », *The Astrophysical Journal*, vol. 589, no. 1, p. 444, 2003.
- [41] A. LICHNEROWICZ, L. ANDRE et S. C. for ADVANCED STUDIES, *Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics : Lectures on the Existence of Solu-*

- tions. Lectures given at the Southwest Center for Advanced Studies, Dallas, Tex., Oct.-Nov., 1965, W. A. Benjamin, 1967.
- [42] B. GIACOMAZZO et L. REZZOLLA, « The exact solution of the riemann problem in relativistic magnetohydrodynamics », *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 562, p. 223–259, 2006.
 - [43] A. M. GRUNDLAND et V. LAMOTHE, « Multimode solutions of first-order quasilinear systems obtained from riemann invariants. part i. », *arXiv preprint arXiv:1201.4799*, 2012.
 - [44] A. LICHNEROWICZ, *Magnetohydrodynamics : waves and shock waves in curved space-time*, vol. 14. Springer Science & Business Media, 2013.

Annexe A

Résumé des solutions d'ondes simples et d'ondes multiples

Les tables suivantes résument les solutions obtenues dans ce travail selon leur ordre d'apparition. Les tables A.1 et A.2 contiennent les solutions d'ondes simples du chapitre 4 tandis que les tables A.3 à A.7 contiennent les solutions d'ondes multiples (doubles et triples) du chapitre 6.

TABLE A.1 – Solutions explicites des équations de la MHD (2.1) pour les ondes simples : l'onde simple entropique E_3 de la page 48, l'onde simple entropique E_1 de la page 49, l'onde simple entropique E_1 de la page 50 et l'onde simple entropique E_2 de la page 51.

Ondes	Conditions	Solutions et invariant de Riemann	Fonctions et paramètres arbitraires
Ondes entropiques			
E_3	$\vec{\gamma} = 0$	$\rho = \rho(R), p = p_0,$ $\vec{v} = \vec{v}_0, \vec{H} = \vec{H}_0,$ $R(x, y, z) = \phi(x, y, z)$	$\rho(R), \phi(x, y, z)$ $p_0, \vec{v}_0, \vec{H}_0$
E_1	$\left(\vec{v} \times \dot{\vec{H}} \right) \cdot \vec{H} = 0$ $\vec{\lambda} = \vec{H} \times \dot{\vec{H}}$	$\rho = \rho(R), p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0,$ $\vec{v}(R) = (v^1(R), v^2(R), v_3),$ $\vec{H}(R) = (\cos(R), \sin(R), 0),$ $R(z) = \phi(z - v_3 t)$	$v^1(R), v^2(R), \rho(R)$ $\phi(z - v_3 t)$ p_0, v_3
E_1	$\vec{H} \parallel \vec{v}$ $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ ont une composante nulle $\vec{e}_0^2 = 1$	$\rho = \rho(R), p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0,$ $\vec{v}(R) = \vec{\alpha}(R) \times \vec{e}_0,$ $\vec{H}(R) = \vec{\beta}(R) \times \vec{e}_0,$ $R(x, y, z) = \phi(\vec{e}_0 \cdot \vec{x})$	$\phi(\vec{e}_0 \cdot \vec{x}), \vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ p_0, \vec{e}_0
E_2	$\vec{v} \parallel \vec{H}$ $\vec{H}_0 = (0, 0, 1)$	$\rho = \rho(R), p + \frac{\vec{H}^2}{8\pi} = p_0,$ $\vec{v}(R) = \alpha(R) \vec{H}_0,$ $\vec{H}(R) = \beta(R) \vec{H}_0,$ $R(x, y) = \phi(x, y)$	$\alpha(R), \beta(R), \phi(x, y)$ p_0

TABLE A.2 – Solutions des équations de la MHD (2.1) pour les ondes simples : l'onde simple d'Alfvén A^ε de la page 52, les ondes simples magnétoacoustiques rapides F et lentes S de la page 53.

Ondes	Conditions		Solutions et invariants de Riemann	Fonctions et paramètres arbitraires
	Ondes d'Alfvén			
A_ε	$\vec{\lambda} \cdot \frac{d\vec{H}}{dR} = 0$ $\vec{v} \parallel \vec{H}$ $\vec{H}^2 = \text{const}$	$\rho = \rho_0, \quad p = p_0,$ $\vec{v}(R) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$ $\vec{H}(R) = (\cos(\alpha(R)), \sin(\alpha(R)), 0)$ $R(z) = \phi(z)$	$\alpha(R), \phi(z)$ p_0, ρ_0 $\vec{\lambda} = (0, 0, 1)$	
Ondes magnétoacoustiques				
F	κ arbitraire $\vec{\lambda} \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{\lambda}^2 = 1$	$\rho = \rho(R), \quad p(R) = A\rho(R)^\kappa,$ $\vec{v}(R) = k(\cos(\alpha(R)), \sin(\alpha(R)), 0),$ $\vec{H}(R) = C\rho(R)\vec{H}_0$	$\rho(R)$ A, C	$\alpha(R) = \frac{\varepsilon}{k} \int \sqrt{A\kappa\rho^{\kappa-1} + \frac{C^2\rho}{4\pi}} \frac{d\rho}{\rho}$ $\vec{\lambda}(R) = (-\sin(\alpha(R)), \cos(\alpha(R)), 0)$
S et F	$\delta = \rho$	$R(x, y, z, t) = \phi \left[\varepsilon \sqrt{A\kappa\rho^{\kappa-1} + \frac{C^2\rho}{4\pi}} t + \vec{\lambda} \cdot \vec{x} \right]$ $\rho(R) = R^2, \quad p(R) = A\rho(R)^2,$ $\vec{v}(R) = -2\varepsilon \sqrt{\rho(R)} \sqrt{2A + \frac{C^2}{4\pi}} \vec{\lambda},$ $\vec{H}(R) = C\rho(R)\vec{H}_0$ $R(x, y) = \frac{\vec{\lambda} \cdot \vec{x}}{1 - 3\varepsilon t \sqrt{2A + \frac{C^2}{4\pi}}}$	$\rho(R)$ A, C	$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ $\vec{H}_0 = (0, 0, 1)$
		$\rho = \delta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 + \frac{a_2^2 + C_1^2}{4\pi\rho}} + \frac{2a_1 C_1}{\sqrt{4\pi\rho}} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a_2^2 + C_1^2}{4\pi\rho} - \frac{2a_1 C_1}{\sqrt{4\pi\rho}}} \right],$ $p(\rho) = A\rho^\kappa,$ $\vec{v}(\rho) = -\rho \vec{e}_o + a_1(\rho) \vec{e}_1,$ $\vec{H}(\rho) = a_2(\rho) \vec{e}_1 + C_1 \vec{e}_o$ $R(z, t) = \phi(2\rho t + z)$	ϕ A, C_1	$\vec{e}_0 = (0, 0, 1), \quad \vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ $a^2 = \frac{\rho}{\kappa\rho}$ $\dot{a}_1(\rho) = \frac{C_1 \dot{a}_2}{4\pi\rho^2}$ $a_2(\rho) = 4\pi\varepsilon \left(\rho - \frac{C_1^2}{4\pi\rho^2} \right) \sqrt{\frac{\rho^2(\rho^2 - A\kappa\rho^{\kappa-1})}{4\pi\rho^3 - C_1^2}}$

TABLE A.3 – Solutions explicites des équations de la MHD (2.1) pour les ondes multiples : l'onde double entropique-entropique $E_2 E_2$ de la page 73, la superposition linéaire (s.l) entropique-entropique $E_2 E_2$ de la page 74 et la superposition linéaire (s.l) Alfvén-Alfvén $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ de la page 75.

Ondes	Conditions	Solutions et invariants de Riemann		Fonctions et paramètres arbitraires
		Ondes entropiques	Ondes entropiques	
$E_2 E_2$	$\vec{v} \parallel \vec{H}$ $\vec{H}_0 = (0, 0, 1)$	$\rho = \rho(R^1, R^2),$ $p(R^1, R^2) = p_0 - \frac{\vec{H}^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1, R^2) = \alpha(R^1, R^2) \vec{H}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2) = \beta(R^1, R^2) \vec{H}_0,$ $R^i = \psi^i(x, y), \quad i = 1, 2$		$\rho(R^1, R^2), \alpha(R^1, R^2),$ $\beta(R^1, R^2), \psi^i(x, y), \quad i = 1, 2,$ p_0
$E_2 E_2$ (s.l)	$\vec{v} \parallel \vec{H}$ $y \neq 0, 4x + y^2 > 0,$ $x^2 + 4y > 0,$ $\vec{H}_0 = (0, 0, 1)$	$\rho = \rho(R^1, R^2),$ $p(R^1, R^2) = p_0 - \frac{\vec{H}^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1, R^2) = \alpha(R^1, R^2) \vec{H}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2) = \beta(R^1, R^2) \vec{H}_0,$ $R^1(x, y) = \frac{y + \varepsilon \sqrt{4x + y^2}}{2},$ $R^2(x, y) = \frac{-x + \varepsilon \sqrt{x^2 + 4y}}{2y}$		$\rho(R^1, R^2), \alpha(R^1, R^2),$ $\beta(R^1, R^2), \quad p_0$
$A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ (s.l)	$\vec{H} \parallel \vec{v}$ $\vec{H}^2 = H_0$ $x, y \neq 0$		Ondes d'Alfvén	$f(R^1), g(R^2),$ ρ_0, p_0, H_0

TABLE A.4 – Solutions explicites des équations de la MHD (2.1) pour les ondes multiples : l'onde double entropique-Alfvén EA^ε de la page 83, l'onde triple entropique-Alfvén-Alfvén $EA^\varepsilon A^\varepsilon$ de la page 85 et l'onde double entropique-Alfvén EA^ε de la page 87.

Ondes	Conditions	Solutions et invariants de Riemann	Fonctions et paramètres arbitraires
EA^ε	$\vec{v} \nparallel \vec{H}$ $\vec{H}(R^1, R^2)^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$ $x \neq 1$ \vec{e}_0 unitaire et constant	$\rho = \rho(R^1),$ $p(R^1) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + a(R^1) \vec{e}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2) = \left(H_1, b(R^2) H_1, \frac{\mathcal{H}(R^1)}{H_1 \sqrt{1+b(R^2)^2}} \right),$ où $H_1(R^1, R^2) = \varepsilon \sqrt{\frac{\mathcal{H}(R^1)^2 + \varepsilon \sqrt{\mathcal{H}(R^1)^2 (\mathcal{H}(R^1)^2 - 4)}}{2 + 2b(R^2)^2}},$ et $b(R^2) = \frac{1}{R^2},$ $R^1(x, y) = \psi^1(x^2 - 2x + y^2),$ $R^2(x, y) = \frac{y}{1-x}$	$\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1), a(R^1),$ $\psi^1(x^2 - 2x + y^2),$ p_0
$EA^\varepsilon A^\varepsilon$	$\vec{v} \nparallel \vec{H}$ $\vec{H}(R^1, R^2, R^3)^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$ $x \neq 1, y \neq 0$ \vec{e}_0 unitaire et constant	$\rho = \rho(R^1),$ $p(R^1) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + a(R^1) \vec{e}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2, R^3) = \left(H_1, b H_1, \frac{\mathcal{H}(R^1)}{H_1 \sqrt{1+b^2}} \right),$ où $H_1(R^1, R^2, R^3) = \varepsilon \sqrt{\frac{\mathcal{H}(R^1)^2 + \varepsilon \sqrt{\mathcal{H}(R^1)^2 (\mathcal{H}(R^1)^2 - 4)}}{2 + 2b(R^2)^2 R^3 / \sqrt{R^2 R^3}}},$ et $b(R^2) = \frac{1}{R^2 R^3},$ $R^1(x, y) = \psi^1(x^2 - 2x + y^2),$ $R^2(x, y) = \frac{y^2}{(1-x)^2},$ $R^3(x, y) = \frac{1-x}{y}$	$\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1), a(R^1),$ $\psi^1(x^2 - 2x + y^2),$ p_0
EA^ε	$\vec{v} \nparallel \vec{H}$ $\vec{H}(R^1, R^2)^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$ $y \neq 1$ $\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$	$\rho = \rho(R^1),$ $p(R^1) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + a(R^1) \vec{e}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2) = \frac{\mathcal{H}(R^1)}{\sqrt{1+(R^2)^2}} (1, R^2, 0),$ $R^1(x, y) = \psi^1(x^2 + y^2 - 2y),$ $R^2(x, y) = \frac{x}{1-y}$	$\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1), a(R^1),$ $\psi^1(x^2 + y^2 - 2y),$ p_0

TABLE A.5 – Solutions explicites des équations de la MHD (2.1) pour les ondes multiples : l'onde double entropique-Alfvén $E_2 A_2^\varepsilon$ de la page 92, l'onde double entropique-Alfvén EA^ε de la page 94 et l'onde triple entropique-Alfvén $E_2 A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ de la page 83.

Ondes	Conditions	Solutions et invariants de Riemann	Fonctions et paramètres arbitraires
$E_2 A_2^\varepsilon$	$\vec{H} \parallel \vec{v}$ $\vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$ $y < 1$	$\rho = \rho(R^1),$ $p(R^1) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1, R^2) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$ $\vec{H}(R^1, R^2) = \mathcal{H}(R^1) \left(\varepsilon \sqrt{1 - (R^2)^2}, R^2, 0 \right),$ $R^1(x, y) = \psi^1(x^2 + y^2 - 2y),$ $R^2(x, y) = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(y-1)^2 + x^2}}$	$\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1),$ $\psi^1(x^2 + y^2 - 2y),$ p_0
EA^ε	$\vec{H} \parallel \vec{v}$ $\vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$ $x^2 + (1-y)^2 > 0$ $y \neq 1$	$\rho = \rho(R^1),$ $p(R^1) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1, R^2) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$ $\vec{H}(R^1, R^1) = \frac{\mathcal{H}(R^1)}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(R^2)^2}}, \frac{R^2}{\sqrt{1+(R^2)^2}}, 1 \right),$ $R^1(x, y, z) = \psi^1(f(x^2 + (1-y)^2) \Omega(x, y, z)),$ $R^2(x, y) = \frac{x}{1-y},$ où $\Omega(x, y, z) = \exp \left[\zeta \left\{ \sqrt{x^2 + (1-y)^2} \arctan \left(\frac{x}{1-y} \right) - z \right\} \right],$	$\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1),$ $\psi^1(f(x^2 + (1-y)^2) \Omega(x, y, z)),$ $f(x^2 + (1-y)^2),$ p_0, ζ
$E_2 A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$	$\vec{H} \parallel \vec{v}$ $\vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$ $x^2 + y^2 > 1, x \neq 0$	$\rho = \rho(R^1),$ $p(R^1) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1, R^2, R^3) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$ $\vec{H}(R^1, R^2, R^3) = \mathcal{H}(R^1) \left(R^2, R^3, \sqrt{1 - (R^2)^2 - (R^3)^2} \right),$ $R^1(x, y, z) = \psi^1 \left(x^2 + y^2, \arctan \frac{y}{x} - \frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right),$ $R^2(y) = -y,$ $R^3(x) = x$	$\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1),$ $\psi^1 \left(x^2 + y^2, \arctan \frac{y}{x} - \frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right),$ p_0

TABLE A.6 – Solutions explicites des équations de la MHD (2.1) pour les ondes multiples : l'onde triple entropique-entropique-Alfvén $E_2 E_2 A^\varepsilon$ de la page 99, l'onde double entropique-Alfvén $E_2 A_2^\varepsilon$ de la page 100 et l'onde double entropique-magnétoacoustique lente EF de la page 107.

Ondes	Conditions	Solutions et invariants de Riemann	Fonctions et paramètres arbitraires
Ondes entropiques et d'Alfvén			
$E_2 E_2 A_2^\varepsilon$	$\vec{H} \parallel \vec{v}$ $\vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1, R^2)^2$ $\psi^3(z) < 1$	$\rho = \rho(R^1, R^2),$ $p(R^1, R^2) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1, R^2, R^3) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$ $\vec{H}(R^1, R^2, R^3) = \mathcal{H}(R^1, R^2) \left(R^3, \sqrt{1 - (R^3)^2}, 0 \right),$ $R^i(x, y, z) = \psi^i \left(x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}} \right), \quad i = 1, 2,$ $R^3(z) = \psi^3(z)$	$\rho(R^1, R^2), \mathcal{H}(R^1, R^2),$ $\psi^i \left(x - y \frac{\psi^3(z)}{\sqrt{1 - \psi^3(z)^2}} \right), \quad i = 1, 2,$ p_0
$E_2 A_2^\varepsilon$	$\vec{H} \parallel \vec{v}$ $\vec{H}^2 = \mathcal{H}(R^1)^2$	$\rho = \rho(R^1),$ $p(R^1) = p_0 - \frac{\mathcal{H}(R^1)^2}{8\pi},$ $\vec{v}(R^1, R^2) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}},$ $\vec{H}(R^1, R^1) = \mathcal{H}(R^1) (\cos R^2, \sin R^2, 0),$ $R^1(x, y, z) = \psi^1 (y - x \tan \psi^2(z)),$ $R^2(z) = \psi^2(z)$	$\rho(R^1), \mathcal{H}(R^1),$ $\psi^1 (y - x \tan \psi^2(z)), \psi^2(z)$ p_0
Ondes entropiques et magnétoacoustiques			
EF	$\vec{\lambda}_E \parallel \vec{\lambda}_F$ $\kappa = 2$ $z > 0, t < \frac{1}{3\beta}$ $\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$	$\rho(R^2) = R^2,$ $p(R^2) = C_2 \rho^2,$ $\vec{v}(R^1, R^2) = \vec{a}(R^1) \times \vec{e}_0 - 2\beta \sqrt{\rho} \vec{e}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2) = \rho C_1 (\cos R^1, \sin R^1, 0),$ $R^1(z, t) = \psi^1 \left(\frac{z}{(1-3\beta t)^{2/3}} \right),$ $R^2(z, t) = \frac{z}{(1-3\beta t)^2},$	$\vec{a}(R^1),$ $\psi^1 \left(\frac{z}{(1-3\beta t)^{2/3}} \right),$ C_1, C_2 où $\beta := \varepsilon \sqrt{\frac{C_1^2}{4\pi} + 2C_2}$

TABLE A.7 – Solutions explicites des équations de la MHD (2.1) pour les ondes multiples : la superposition linéaire (s.l) entropique-magnétoacoustique lente EF de la page 109, l'onde double entropique-magnétoacoustique lente E_2F de la page 111 et l'onde triple entropique-entropique-magnétoacoustique lente EEF de la page 114.

Ondes	Conditions	Solutions et invariants de Riemann	Fonctions et paramètres arbitraires	
Ondes entropiques et magnétoacoustiques				
EF (s.l)	$\vec{H} \cdot \vec{\lambda}_F = 0$ $\kappa = 2$ $z > 0, t < \frac{1}{3\beta}$ $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ $\vec{H}_0 = (0, 0, 1)$ $t \neq \frac{1}{3\sqrt{C_2}}$	$\rho(R^2) = \frac{(R^2)^2}{\sqrt{C_2}},$ $p(R^2) = \frac{A(R^1)\rho^2}{\sqrt{C_2}},$ $\vec{v}(R^1, R^2) = C_1 \vec{e}_1 - 2\sqrt{C_2} \rho \vec{e}_2 + \phi(R^1) \vec{H}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2) = \rho C(R^1) \vec{H}_0,$ où $\frac{C(R^1)^2}{4\pi} + 2A(R^1) = C_2$	$A(R^1), C(R^1), \phi(R^1),$ $\psi^1(x - C_1 t),$ C_1, C_2	
E_2F	$\vec{\lambda}_E \parallel \vec{\lambda}_F$ $\kappa = 2$ $t \neq -\frac{1}{12C}$ $\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$ $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$	$R^1(x, t) = \psi^1(x - C_1 t),$ $R^2(y, t) = \frac{y}{1 - 3\sqrt{C_2}t}$	$\rho(R^2) = (R^2)^2,$ $p(R^2) = C_2(R^1)\rho^2,$ $\vec{v}(R^1, R^2) = a(R^1) \vec{e}_0 + 2\sqrt{2C} R^2 \vec{e}_1,$ $\vec{H}(R^1, R^2) = C_1(R^1) \rho \vec{e}_0,$ où $C_2(R^1) + \frac{C_1(R^1)^2}{8\pi} = C,$ $R^1(x, t) = \psi^1\left(\frac{1 + 12Ct}{x}\right),$ $R^2(x, t) = \frac{2\sqrt{2C}x}{1 + 12Ct}$	$a(R^1), C_1(R^1), C_2(R^1),$ $\psi^1\left(\frac{1 + 12Ct}{x}\right),$ C
EEF	$\kappa = 2$ $t \neq -2/3$ $y \neq 0$ $\vec{e}_0 = (0, 0, 1)$	$\rho(R^2) = \frac{(R^2)^2}{8C},$ $p(R^2) = C_2(R^1, R^2)\rho^2,$ $\vec{v}(R^1, R^2, R^3) = a(R^1, R^2) \vec{e}_0 + \vec{\psi}(R^3) \times \vec{e}_0,$ $\vec{H}(R^1, R^2, R^3) = C_1(R^1, R^2) \rho \vec{e}_0,$ où $C_2(R^1, R^2) + \frac{C_1(R^1, R^2)^2}{8\pi} = C,$ $\vec{\psi}(R^3) = (R^3, \zeta, 0),$ $R^i(x, y, t) = \psi^i\left(x - \zeta t, \frac{(2 + 3t)^{\frac{2}{3}}}{y}\right), \quad i = 1, 2,$ $R^3(y, t) = -\frac{2y}{2 + 3t}$	$a(R^1, R^2), C_1(R^1, R^2), C_2(R^1, R^2),$ $\psi^i\left(x - \zeta t, \frac{(2 + 3t)^{\frac{2}{3}}}{y}\right), \quad i = 1, 2,$ C, ζ	

Annexe B

Programme Mathematica pour vérifier les solutions

Dans ce mémoire, plusieurs solutions explicites ont été trouvées pour le système d'équations différentielles de la MHD (2.1)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (\text{B.1a})$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) = 0, \quad (\text{B.1b})$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) = 0, \quad (\text{B.1c})$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (\text{B.1d})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\kappa} \right) = 0. \quad (\text{B.1e})$$

Chacune de ces solutions a été vérifiée à l'aide d'un programme sur le système de calcul formel *Mathematica* qui sera présenté dans cette annexe. Ainsi, les lecteurs et lectrices de ce mémoire pourront vérifier l'exactitude des résultats présentés dans ce mémoire. De plus, on présente à la fin de cette annexe la procédure pour produire les représentations graphiques d'une solution explicite. Notons que cette démarche

fonctionne seulement pour les solutions explicites. Pour illustrer le programme, nous allons vérifier si la solution d'onde Alfvén-Alfvén $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ de la page 75

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0, \quad p = p_0, \quad \vec{v}(R^1, R^2) = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \\ \vec{H}(R^1, R^2) &= H_0 \left(f(R^1), g(R^2), \varepsilon \sqrt{1 - f(R^1)^2 - g(R^2)^2} \right), \\ R^1(y) &= \frac{1-y}{y^2}, \quad R^2(x) = \frac{1+x}{x^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où ρ_0, p_0 et H_0 sont des constantes arbitraires et $f(R^1)$ et $g(R^2)$ sont des fonctions arbitraires de R^1 et R^2 respectivement, est bien une solution du système (B.1).

Premièrement, on définit les invariants et les variables ρ, p, \vec{v} et \vec{H} comme des fonctions des variables indépendantes x, y, z et t , comme illustré à la figure B.1.

```
R1[x_, y_, z_, t_] := (1 - y)/y^2
R2[x_, y_, z_, t_] := (1 + x)/x^2
ρ[x_, y_, z_, t_] := ρ0
H[x_, y_, z_, t_] := H0 (f[R1[x, y, z, t]], g[R2[x, y, z, t]], Sqrt[1 - f[R1[x, y, z, t]]^2 - g[R2[x, y, z, t]]^2])
v[x_, y_, z_, t_] := (ε / Sqrt[4 * Pi * ρ[x, y, z, t]]) H[x, y, z, t]
p[x_, y_, z_, t_] := p0
```

FIGURE B.1 – Solution pour l'onde $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ correspondant à l'équation (B.2)

Notons que les termes arbitraires n'ont pas besoin d'être définis. Pour les fonctions arbitraires, on spécifie seulement leurs dépendances, c'est-à-dire les invariants de Riemann. Si ces fonctions sont bien des solutions du système (B.1), alors, en les remplaçant dans les côtés gauches des équations du système (B.1), on doit avoir que les côtés droits sont égaux à 0. Sur Mathematica, le système (B.1) s'écrit comme à la figure B.2

```

FullSimplify[(D[ρ[x, y, z, t], t] + v[x, y, z, t].Grad[ρ[x, y, z, t], {x, y, z}] + ρ[x, y, z, t]*Div[v[x, y, z, t], {x, y, z}]) /. {ε → {-1, 1}}]
[simplifie complètement] [dérivée d] [gradient grad]
FullSimplify[
[simplifie complètement]
(ρ[x, y, z, t] (D[v[x, y, z, t], t] + v[x, y, z, t].{D[v[x, y, z, t], x], D[v[x, y, z, t], y], D[v[x, y, z, t], z]}) +
[gradient grad] [dérivée d] [dérivée d] [dérivée d]
Grad[p[x, y, z, t], {x, y, z}] + (1/(4*Pi)) * (Cross[H[x, y, z, t], H[x, y, z, t], {x, y, z}])) /. {ε → {-1, 1}}]
[gradient grad] [nombre] [produit vectoriel] [rotationnel]
FullSimplify[(D[H[x, y, z, t], t] - Curl[Cross[v[x, y, z, t], H[x, y, z, t], {x, y, z}]] /. {ε → {-1, 1}})]
[simplifie complètement] [dérivée d] [rotat] [produit vectoriel]
FullSimplify[(Div[H[x, y, z, t], {x, y, z}]) /. {ε → {-1, 1}}]
[simplifie complètement] [divergence div]
FullSimplify[(D[p[x, y, z, t] / ρ[x, y, z, t]^κ, t] + v[x, y, z, t].Grad[p[x, y, z, t] / ρ[x, y, z, t]^κ, {x, y, z}]) /. {ε → {-1, 1}}]
[simplifie complètement] [dérivée d] [gradient grad]

```

FIGURE B.2 – Les côtés gauches des équations du système (B.1).

On utilise la commande `FullSimplify` pour simplifier les expressions à leurs formes les plus simples. Le terme $\epsilon \rightarrow \{-1, 1\}$ permet de vérifier pour les deux branches de $\varepsilon = \pm 1$ simultanément. En compilant, on obtient les résultats de la figure B.3.

```

0
{{0, 0}, {0, 0}, {0, 0}}
{0, 0, 0}
0
0

```

FIGURE B.3 – Résultats lorsque nous remplaçons les solutions (B.2) dans les côtés gauches des équations du système (B.1).

La première ligne, la quatrième ligne et la cinquième ligne signifient que les équations scalaires (B.1a), (B.1d) et (B.1e) sont bien égales à 0 lorsqu'on y remplace les solutions (B.2). La deuxième ligne et la troisième ligne signifient que les équations vectorielles (B.1b) et (B.1c) sont bien égales au vecteur nul $(0, 0, 0)$ lorsqu'on y remplace les solutions (B.2). Dans la deuxième ligne, on observe des doublets $\{0, 0\}$ dans les composantes du vecteur nul. Ces doublets signifient qu'en compilant, le programme à dû vérifier les deux branches de $\varepsilon = \pm 1$. Pour les autres lignes, la valeur de ε n'avait pas d'importance et donc le programme n'a pas eu besoin de vérifier les deux branches. On conclut donc que la solution (B.2) est bien une solution du système des équations

de la MHD (B.1).

On note finalement que cette solution n'avait pas de contraintes au niveau des variables indépendantes x, y, z et t . Si on avait eu, par exemple, que cette solution est seulement définie pour $x > 0$ et $y > 0$, on aurait ajouté ces contraintes dans les équations de la figure (B.2) avec la commande `Assumptions` → $\{x > 0, y > 0\}$. Par exemple, la quatrième équation de la figure (B.2) (le quatrième `FullSimplify`) s'écrirait comme à la figure B.4.

```
FullSimplify[(Div[H[x, y, z, t], {x, y, z}]) /. {e → {-1, 1}}, Assumptions → {x > 0, y > 0}]
| simplifie complèt... | divergence div
| suppositions
```

FIGURE B.4 – Ajout de contraintes sur les variables indépendantes.

B.1 Représentations graphiques d'une solution sur Mathematica

Pour faire les graphiques de cette solution, il faut définir les paramètres arbitraires. Par exemple, on peut choisir les constantes et fonctions arbitraires comme à la figure B.5.

```
f[a_] := Tanh[a]
| tangente hy
g[a_] := Sech[a]
| sécante hy

H0 := 1
e := 1
rho0 := 1
p0 := 1
H0 := 1
```

FIGURE B.5 – Paramètres arbitraires pour les représentations graphiques de la solution $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$.

Par la suite, on utilise la commande Plot3D pour visualiser quelques éléments de cette solution dans un plan formé de deux variables indépendantes, ici le xy . Par exemple, on obtient le graphique de la deuxième composante du champ de vitesses \vec{v} en procédant comme à la figure B.6, où on spécifie la deuxième composante avec [[2]].

```
Plot3D[v[x, y, z, t][[2]], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
y", Black, FontSize -> 24]},
[titre d'axe   [style   [noir   [taille de police de c... [style   [noir   [taille de police de c... [style   [noir   [taille de police de caractè
PlotPoints -> 100]
[nombre de points du tracé
```

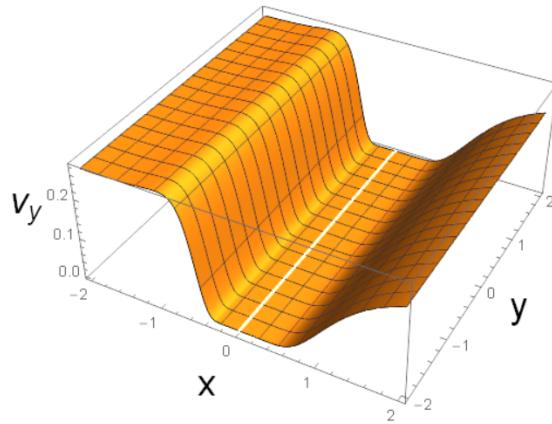


FIGURE B.6 – Représentation graphique pour la deuxième composante de \vec{v} pour l'onde $A_2^\varepsilon A_2^\varepsilon$ dans le plan xy .