La conjecture ²⁄₃

David Dugué

UQTR

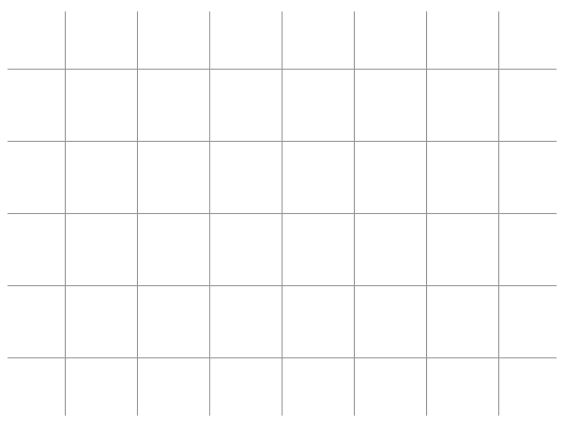
Département mathématiques et d'informatique

Introduction

Une **conjecture** est une hypothèse formulée suite à des observations expérimentales. La conjecture $2/3$ fût introduite pour mieux comprendre les objets **combinatoires** que sont les polyominos.

Plan discret

Définition. *Le* ***plan discret*** *est l'ensemble des points* $p \in \mathbb{Z}^2$. *On dira que deux points sont* ***connexes*** *si leur distance euclidienne est de 1. Ces points sont également appelés des* ***cellules*** *et on dénommera le* ***degré*** *d'une cellule comme le nombre de cellules connexes à celle-ci.*

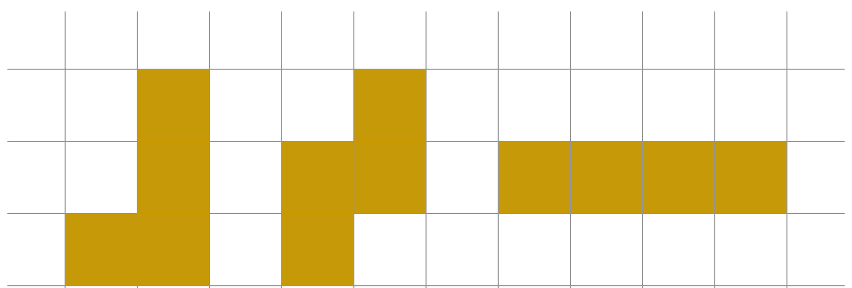


Exemple d'une partie du plan discret

On peut visionner le plan discret comme une grille quadrillée avec ses points, les cases de ladite grille.

Polyominos

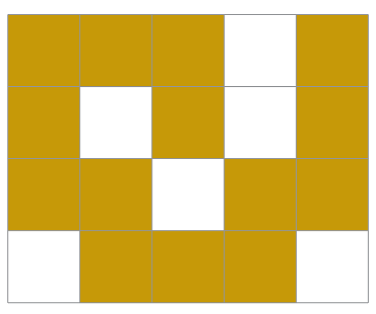
Définition. *Un* ***polyomino*** *est un ensemble de* ***cellules connexes*** *dans le plan discret. Un* ***polyomino serpent*** *est un polyomino de taille* n *composé de deux cellules de degré 1 et de* $n-2$ *cellules de degré 2.*



Exemple de polyominos serpents de taille 4

Problématique

Un des problèmes ouverts des polyominos serpents est celui du polyomino serpent maximal inscrit dans un rectangle $b \times h$.

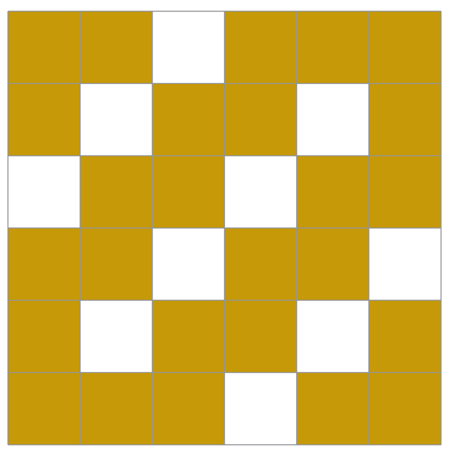


Polyomino serpent maximal inscrit dans un rectangle 5×4

Le manque de symétrie rendant l'objet difficile à comprendre mathématiquement, la conjecture $2/3$ a pour objectif d'établir une borne supérieure à cette question.

Exploration

Puisqu'un polyomino serpent est composé de cellules de degré 2, on peut établir une borne supérieure en déterminant le nombre maximal de cellules d'au plus degré 2 dans un rectangle inscrit.



Nombre maximal de cellules d'au plus degré 2 dans un rectangle 6×6

Via un programme conçu spécialement pour ce problème, on énumère les solutions pour des rectangles de plus en plus gros.

Conjecture

Soit un rectangle de taille $b \times h$ *avec* $b \geq 3$, *alors le nombre maximal de cellules de degré d'au plus 2 inscrit dans ce rectangle, dénoté* $m_{\leq 2}(b,h)$ *est égal à:*

$$2bh/3 + \begin{cases} 2 & \text{, si } b = 3 \text{ ou si } h \equiv_3 0 \text{ et } b \equiv_3 0 \\ 4/3 & \text{, si } b \geq 4, \text{ si } h \not\equiv_3 0 \text{ et } b \equiv_3 w \\ 1 & \text{, si } b \geq 4, h \equiv_3 0 \text{ et } h \not\equiv_3 w \\ 2/3 & \text{, sinon} \end{cases}$$

où $x \equiv_3 y$ signifie que $x \div 3 = c + \frac{y}{3}$.

Contre-exemple minimal

Définition. *Une* ***preuve par contre-exemple minimal*** *(PCM) est une forme de preuve par contradiction. On assume qu'une proposition est fausse et qu'il existe donc un contre-exemple minimal à celle-ci. On démontre alors que ce contre-exemple ne peut exister et que la proposition doit donc être vraie.*

Preuve

La preuve combinatoire de la conjecture $2/3$ est une preuve par cas qui se résume ainsi:

- On établit le maximum pour les cas de $b = 1$ à 6 et $h = 1$ à 6 et le cas $b = h = 7$
- Par PCM, on prouve la conjecture pour les cas où $b = 4$, puis $b = 5$, puis $b = 6$.
- Grâce aux deux étapes précédentes, on établit une borne supérieure pour $b > 6$
- Par construction, on arrive à démontrer cette borne supérieure atteignable, faisant d'elle un maximum.

Algèbre tropicale

L'**algèbre tropicale linéaire** opère sur un semi-anneau où l'addition est le maximum de deux éléments et la multiplication est l'addition au sens classique:

$$x \oplus y = \max\{x, y\} \quad x \odot y = x + y$$

La résolution d'équations matricielles dans cette algèbre revient à résoudre des systèmes d'inéquations linéaires sophistiqués.

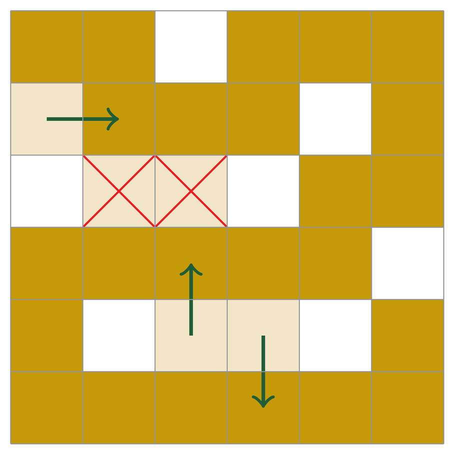
Modélisation

Dans la **théorie des langages formels**, on peut modéliser la problématique de la conjecture $2/3$ comme un problème de *mot maximal* en deux dimensions composé d'un alphabet binaire {□, ■}.

L'algèbre tropicale linéaire permet possiblement de modéliser ce problème et de le prouver algébriquement.

Borne inférieure

Un résultat intéressant de cette conjecture est qu'en plus d'établir une borne supérieure pour un polyomino serpent inscrit maximal, on peut, par construction, établir une borne inférieure pour ce maximum.



En déplaçant 3 cellules et en enlevant 2, on assure que le polyomino serpent maximal dans un rectangle 6×6 est entre

$$m_{\leq 2}(6,6) - 2 = 24 \text{ et } m_{\leq 2}(6,6) = 26$$

Autres perspectives

- Investiguer les cellules d'au plus degré n dans un espace discret de dimension m
- Faire le rapprochement entre cette problématique et certains problèmes d'empaquetage en optimisation.

Références

[1] Alain Goupil, Marie-Eve Pellerin, and Jérôme de Wouters d'oplinter. Partially directed snake polyominoes. *Discrete Applied Mathematics*, 236:223–234, 2018.

[2] Raphael L'Heureux Alexandre Blondin Massé, Alain Goupil and Louis Marin. Maximal 2-dimensional binary words of bounded degree. UQAM LACIM, UQTR LACIM, Université Gustave Eiffel LICM, 2025.

[3] Peter Butkovic. *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*. Springer, January 2010.