UNIVERSITE DU QUEBEC

MEMOIRE PRESENTE A

L'UNIVERSITE DU QUEBEC A TROIS-RIVIERES

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE ES SCIENCES (PHYSIQUE)

PAR

JEAN GAUTHIER

CONTRAINTES SUR LES EXTENSIONS NON LINEAIRES DU GROUPE DE LORENTZ

DECEMBRE 1986

RESUME

Nous investiguons des extensions non linéaires du groupe de Lorentz avec comme hypothèse fondamentale que l'ensemble de toutes les transformations inclut le groupe de Lorentz et est un groupe d'invariance.

Dans la déduction des transformations de Lorentz, on fait souvent appel à certains principes généraux comme l'isotropie de l'espace et l'homogénéité de l'espace-temps. Nous montrons que la linéarité n'est pas une conséquence de ces principes et qu'on peut ainsi envisager des extensions non linéaires.

Comme les transformations de Lorentz relient des systèmes de référence en mouvement relatif uniforme, cela nous permet de considérer deux approches possibles. Dans la première, nous considérons le plus vaste ensemble de transformations conservant la linéarité dans l'espace-temps: le groupe fractionnaire linéaire. Nous montrons que ce groupe n'est pas un groupe d'invariance.

Dans la seconde approche, tenant compte du fait que les transformations de Lorentz transforment le repos en mouvement rectilique uniforme, nous déduisons le plus vaste ensemble de transformations ayant cette propriété. Nous montrons que si on exige que cet ensemble forme un groupe incluant le groupe de Lorentz, tout élément de ce groupe est le produit d'une transformation linéaire et d'une translation dans l'espace-temps.

REMERCIEMENTS

Je tiens particulièrement à remercier le Docteur Louis Marchildon qui m'a dirigé dans cette recherche avec beaucoup de patience et de disponibilité. Son aide et ses conseils toujours judicieux m'ont considérablement aidé à organiser et clarifier ce travail.

TABLE DES MATIERES

Page

LISTE DES FIGURES

AVERTISSEMENTS

Nous avons adopté dans ce travail le systèmes d'unités rationalisées dans lequel la vitesse de la lumière est égale à l'unité, sauf à la page 16, où l'on parle d'une vitesse de la lumière égale à c et qui pourrait changer.

Quand nous parlons de la vitesse de la lumière, il s'agit de la vitesse de la lumière dans le vide.

A moins d'indication contraire, nous utilisons la convention d'Einstein, où l'on somme sur toute la portée d'un indice répété. Cette convention ne s'applique pas, cependant, aux éléments à l'intérieur d'un commutateur, comme au chapitre IV, et au chapitre V où il nous a semblé préférable de ne pas l'utiliser.

Nous entendons par espace euclidien tout espace métrique de courbure nulle et par R^4 l'espace vectoriel de quatre dimensions.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Il est incontestable que l'une des préoccupations des physiciens depuis plusieurs décennies a été d'élargir le plus possible la classe des systèmes équivalents. Deux systèmes de référence sont équivalents si les lois de la physique sont les mêmes dans les deux systèmes et évoluent de la même manière. Une première extension a été obtenue par Einstein (1905) lorsqu'il obtint les transformations de Lorentz.

En fait, cette extension était devenue nécessaire parce que les transformations de Galilée n'arrivaient pas à expliquer certains résultats expérimentaux. Une autre façon d'exprimer ce fait serait de dire qu'en conservant les transformations de Galilée, les lois (nouvelles) de la physique n'étaient plus les mêmes dans différents systèmes de référence. Ainsi une connaissance plus approfondie de la nature avait mis en évidence le fait que deux systèmes reliés par les transformations de Galilée ne sont pas équivalents.

Plus tard, Einstein développa la relativité générale et énonça le principe d'équivalence qui stipule que dans une région suffisamment petite de l'espace-temps, les lois de la physique ont la même forme et que deux systèmes de référence équivalents sont localement reliés par des transformations de Lorentz. Ainsi, dans une région suffisamment petite de l'espace-temps ou en l'absence d'un champ gravitationnel important, le plus vaste ensemble de transformations reliant des systèmes de référence équivalents, connu à ce jour, est le groupe de Poincaré, c'est-à-dire, le groupe de Lorentz orthochrone propre augmenté des translations. Connaît-on de plus vastes ensembles? Oui: par exemple le groupe conforme SO (4,2). Mais dans cette extension du groupe de Poincaré, l'équivalence n'a lieu qu'en regard des phénomènes électromagnétiques. Le groupe conforme est le plus vaste groupe continu laissant invariantes les équations de Maxwell. Nous remarquons que dans la recherche d'une extension du groupe de Poincaré, il est bien important de préciser en regard de quels phénomènes ou lois l'extension se fait.

Dans la recherche de cette extension, l'une des voies utilisées consiste à introduire des systèmes de référence supraluminaux. Ce sont des systèmes de référence dont la vitesse relative est plus grande que la vitesse de la lumière. L'hypothèse qu'il existe des systèmes de référence équivalents reliés par des transformations supraluminales est appelée "Principe de relativité élargie". Le concept de systèmes de référence équivalents impose à tout ensemble de transformations d'être un groupe. En effet, il est évident que si K est équivalent à K' et si K' est équivalent à K'', alors K est équivalent à K'', d'où la propriété de fermeture. Les autres propriétés de groupe sont aussi évidentes. La propriété de groupe a une conséquence très restrictive: elle implique que toute transformation générée par le groupe de Poincaré composée avec une transformation supraluminale relie deux systèmes équivalents.

Le postulat fondamental de la théorie de la relativité stipule que les phénomènes physiques se produisant dans un système fermé sont indépendants de tout mouvement non accéléré du système ou encore que le mouvement rectiligne uniforme d'un système matériel n'a aucune influence sur la forme des lois physiques. Dans le domaine de la mécanique, ce principe était connu sous le nom de "Principe de relativité galiléen" selon lequel le mouvement rectiligne uniforme d'un objet dans un système apparaissait également rectiligne uniforme dans tout autre système, contrainte qui mène directement aux transformations de Galilée. De tels systèmes, au sens mécanique du terme, sont appelés inertiels. Ce que fit Einstein, c'est d'étendre le concept d'équivalence aux autres phénomènes et d'abord aux phénomènes électromagnétiques: il exigea, en plus de la conservation du mouvement inertiel, que les équations décrivant les phénomènes électromagnétiques aient la même forme dans tout système, ce qui le mena directement aux transformations de Lorentz.

Les transformations linéaires ont l'importante propriété de conserver le mouvement inertiel, c'est-à-dire de transformer dans l'espace-temps un mouvement linéaire en un mouvement linéaire. Aussi, dans une extension du groupe de Lorentz par des transformations supraluminales, est-il naturel de considérer d'abord une extension linéaire. Or Marchildon, Antippa et Everett (1983) ont démontré qu'avec les hypothèses suivantes:

a) Les transformations supraluminales sont réelles.

b) Elles sont linéaires.

c) Avec le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_{+}^{\uparrow}$ elles forment un groupe.

alors une telle extension est impossible parce qu'elle implique de nouvelles symétries qui sont en conflit avec l'expérience. Plus précisément, ils ont démontré le théorème suivant. Soit SL (4,R) l'emsemble des transformations linéaires quadridimensionnelles de R^4 dans R^4 de déterminant égal à 1 et soit $\overline{SL}$ (4, R) l'ensemble analogue mais de déterminant égal à ± 1. Considérons S, un élément arbitraire de SL (4,R) qui ne préserve pas la métrique de Lorentz, c'est-à-dire $Sg^{T}s \neq g$; le plus petit groupe de Lie qui contient S et $L_{+}^{\uparrow}$ est, ou bien SL (4,R), ou bien $\overline{SL}$ (4,R), selon que dét(S) = 1 ou - 1. Et il est bien connu que SL (4,R) et $\overline{SL}$ (4,R) contiennent des symétries contredites par l'expérience. C'est un résultat dont nous aurons besoin et qui nous sera très utile pour démontrer qu'on ne peut retenir à la fois le principe de relativité élargie et la notion de système de référence supraluminal. Ajoutons que la condition d'invariance de la vitesse de la lumière n'apparaît pas dans les hypothèses de Marchildon et al. parce que le groupe de Lorentz est le plus vaste groupe de transformations linéaires laissant invariante la vitesse de la lumière.

Nous nous proposons d'investiguer des extensions non linéaires du groupe de Lorentz. Notre approche sera double.

Nous allons d'abord chercher une extension non linéaire à l'aide de transformations en particulier supraluminales, non linéaires, avec les hypothèses suivantes:

a) L'ensemble des transformations (subluminales et supraluminales) reliant deux systèmes de référence équivalents forme un groupe de Lie.

b) Elles contiennent le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_{+}^{\uparrow}$.

c) Elles conservent le mouvement inertiel.

d) Elles sont réelles.

La première hypothèse nous semble naturelle parce qu'elle semble correspondre à la continuité du monde physique. Toutefois elle restreint fortement les possibilités d'extension. En fait, nous verrons qu'elle a des conséquences dévastatrices. La troisième hypothèse signifie que les éléments de notre groupe de Lie doivent transformer un mouvement rectiligne uniforme en un mouvement rectiligne uniforme. C'est le sens habituel qu'on donne au principe de conservation de l'inertie. L'hypothèse de réalité vient du fait que les coordonnées spatio-temporelles ont le même sens physique dans les deux référentiels. Elles peuvent donc être paramétrisées de la même façon. Or Weyl (1923) suivi de V. Fock (1964) ont démontré que les transformations les plus générales conservant le mouvement rectiligne uniforme sont les transformations fractionnaires linéaires. Dans cette première approche, notre méthode sera la suivante: si on ajoute à $L_{+}^{\uparrow}$ une transformation fractionnaire linéaire quelconque, quel sera le plus petit groupe généré? C'est ce que nous déterminerons dans la section IV.

Les transformations linéaires ont la propriété de transformer le repos en un mouvement rectiligne uniforme. Ceci nous suggère immédiatement une nouvelle définition du mouvement relatif entre deux systèmes de référence ou à tout le moins la possibilité de le considérer sous un angle différent. Les transformations de coordonnées qui transforment le repos en mouvement rectiligne uniforme constituent certainement un ensemble différent et probablement plus vaste que celles qui conservent le mouvement rectiligne uniforme. Ce sera le point de départ de notre seconde approche. Nous allons déduire la forme la plus générale des transformations ayant cette propriété et nous verrons que cet ensemble ne forme pas un groupe. Nous répondrons à la question suivante: si nous imposons à cet ensemble de former un groupe, incluant bien sûr le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_{+}^{\uparrow}$, à quoi se réduit-il? Ce sera l'objet de la section V.

En laissant tomber la linéarité, nous nous attaquons à des postulats considérés jusqu'ici comme fondamentaux dans la dérivation des transformations de Lorentz. Par exemple, on croit généralement que l'homogénéité de l'espace-temps implique la linéarité des transformations. Alors la non-linéarité implique-t-elle la non-homogénéité? Faut-il écarter définitivement une extension non linéaire du groupe de Lorentz? Une revue approfondie des diverses voies qui mènent au groupe de Lorentz s'impose. C'est ce que nous ferons dans la section II.

Dans la section III, nous allons scruter la notion d'homogénéité et il nous apparaîtra qu'on peut très bien concevoir un espace homogène et des transformations non linéaires avec une définition appropriée de l'homogénéité. Nous verrons qu'il est loin d'être évident que l'homogénéité de l'espace-temps implique la linéarité et que la notion elle-même d'homogénéité n'est pas entendue de la même manière par bien des auteurs.

Finalement, nous apporterons nos conclusions dans la section VI.

CHAPITRE II

LES DIVERSES VOIES EMPRUNTEES POUR DEDUIRE LES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

Malgré l'apparente diversité dans les différentes voies généralement utilisées pour déduire les transformations de Lorentz, en réalité, du côté cinématique, ces voies peuvent se ramener à quelques-unes: une première voie caractérisée par la condition de l'invariance de la vitesse de la lumière, une seconde voie, la voie de la causalité, et une troisième voie basée uniquement sur des principes généraux, par exemple l'homogénéité de l'espace-temps, sans faire appel à l'invariance de la vitesse de la lumière ou à la causalité.

A. Première voie: La vitesse de la lumière est invariante

Les hypothèses fondamentales sont le principe de relativité et l'invariance de la vitesse de la lumière, exprimée par l'invariance de l'équation

$$ds^2 \equiv dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 = 0 \qquad (2.1)$$

ou par l'invariance de ds^2, c'est-à-dire

$$ds^2 = ds'^2 \tag{2.2}$$

où $ds'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 - dx_0'^2$, cette dernière condition étant plus restrictive que la première. L'hypothèse de l'invariance de la vitesse de la lumière peut être aussi simplement une condition énoncée dont les auteurs tiennent compte par la suite dans les calculs. Cependant, avant d'entrer dans les détails, il est essentiel de parler du groupe conforme.

La propagation de la lumière dans un système de référence $(x_0 x_1 x_2 x_3)$ peut s'exprimer par l'équation

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 = 0 \tag{2.3}$$

E. Cunningham (1910) a mis en lumière le fait que (2.3) est invariant sous une transformation conforme stricte dans l'espace-temps quadridimensionnel. Une transformation conforme stricte est la composition d'une inversion par rapport à une hypersphère et de translations. Ces transformations forment un groupe, noté S_4, le groupe conforme spécial. Comme (2.3) est également invariant pour les transformations de Lorentz et les dilatations, on obtient que (2,3) est invariant pour l'ensemble des transformations résultats de compositions d'inversions, de translations, de transformations de Lorentz et de dilatations ($x_\alpha = \lambda x_\alpha$, $\lambda > 0$), ensemble qui forme un groupe appelé groupe conforme, habituellement noté C_4. S_4, le groupe conforme spécial, est un sous-groupe de C_4. Explicitement une transformation de S_4 peut s'écrire

$$f_\alpha(x) = \frac{x_\alpha + (x \cdot x)\, a_\alpha}{1 + 2(x \cdot a) + (x \cdot x)(a \cdot a)} \tag{2.4}$$

où a^2 est un quadrivecteur constant, $x.x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$, et $a.a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_0^2$. On peut démontrer que certaines transformations du type (2.4) ne conservent pas le mouvement linéaire (Briginshaw, 1980).

Le groupe conforme C_4 est le plus vaste groupe continu laissant invariantes les équations de Maxwell, résultat dû à Cunningham (1910) et Bateman (1910). Il peut être utile de citer les générateurs composant l'algèbre de ce groupe, lorsque celle-ci est représentée par des opérateurs différentiels. On peut les calculer à l'aide de la condition (2.1):

$$P_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0},\ P_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_1},\ P_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_2},\ P_3 \equiv \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{: générateurs de translations}$$

$$S \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{: générateur de dilatation}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{12} \equiv x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},\ M_{13} \equiv x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ M_{23} \equiv x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3},\ M_{01} \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} \\ M_{02} \equiv x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_2},\ M_{03} \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} \end{array}\right\} \text{: générateurs du groupe } L_+^\uparrow$$

$$C_0 \equiv (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_0} + 2x_0 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_0 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_0 x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \equiv 2X_1X_0\dfrac{\partial}{\partial X_0} + (X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_0^2)\dfrac{\partial}{\partial X_1} + 2X_1X_2\dfrac{\partial}{\partial X_2} + 2X_1X_3\dfrac{\partial}{\partial X_3} \\[2ex] C_2 \equiv 2X_2X_0\dfrac{\partial}{\partial X_0} + 2X_2X_1\dfrac{\partial}{\partial X_2} + (X_2^2 - X_1^2 - X_3^2 + X_0^2)\dfrac{\partial}{\partial X_2} + 2X_2X_3\dfrac{\partial}{\partial X_3} \\[2ex] C_3 \equiv 2X_3X_0\dfrac{\partial}{\partial X_0} + 2X_3X_1\dfrac{\partial}{\partial X_1} + 2X_3X_2\dfrac{\partial}{\partial X_2} + (X_3^2 - X_1^2 - X_2^2 + X_0^2)\dfrac{\partial}{\partial X_3} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{générateurs} \\ \text{correspondant à des} \\ \text{transformations} \\ \text{non linéaires}\end{array}$$

Le groupe conforme est un groupe à 15 paramètres. Si on définit en général

$$M_{k\ell} \equiv X_\ell \frac{\partial}{\partial X_k} - X_k \frac{\partial}{\partial X_\ell} \tag{2.5}$$

$$M_{0k} \equiv X_0 \frac{\partial}{\partial X_k} + X_k \frac{\partial}{\partial X_0} \equiv -M_{k0} \quad , \quad M_{00} \equiv 0 \tag{2.6}$$

les règles de commutation sont

$$\left.\begin{array}{l} [P_\alpha, P_\beta] = 0 \\[2ex] [M_{\alpha\beta}, M_{\delta\gamma}] = \eta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} - \eta_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} \\[2ex] [M_{\alpha\beta}, P_\gamma] = \eta_{\alpha\gamma} P_\beta - \eta_{\beta\gamma} P_\alpha \\[2ex] [M_{\alpha\beta}, S] = 0 \\[2ex] [P_\alpha, S] = P_\alpha \\[2ex] [C_\alpha, P_\beta] = 2(M_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} S) \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

$$[C_\alpha , M_{\beta\gamma}] = \eta_{\alpha\beta} C_\gamma - \eta_{\alpha\gamma} C_\beta$$

$$[S, C_\alpha] = C_\alpha$$

$$[C_\alpha , C_\beta] = 0$$

où $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0k} = \eta_{k0} = 0$, $\eta_{k\ell} = \delta_{k\ell}$, $k, \ell = 1, 2, 3$. Nous verrons qu'en greffant des hypothèses supplémentaires à l'invariance de $ds^2 = 0$, nous sommes généralement conduits au groupe de Lorentz.

Einstein (1905) part avec deux hypothèses: le principe de relativité, qui postule l'équivalence de tous les systèmes inertiels en ce qui a trait à la formulation des lois de la nature, et l'invariance de la vitesse de la lumière. Mais il écrit: "En premier lieu, il est clair que les équations doivent être linéaires si nous attribuons à l'espace et au temps la propriété d'homogénéité." En fait, Einstein introduit ici une troisième hypothèse, la linéarité, qui, jointe au principe de relativité et à l'invariance de la vitesse de la lumière, est suffisante pour conduire au groupe de Lorentz.

Indiquons brièvement une façon simple d'obtenir les transformations de Lorentz à l'aide de ces trois postulats. Soient deux systèmes de référence S et S' tels que S' se déplace avec une vitesse constante V par rapport à S dans la direction OX_1. L'invariance de la vitesse de la lumière dans S donne

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 = 0 \tag{2.8}$$

D'autre part, le principe de relativité implique

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_0'^2 = 0 \qquad (2.9)$$

La linéarité et le fait que si $X_1 = VX_0 +$ constante, alors X_1' est constant, donnent

$$x_1' = A(x_1 - vx_0) \qquad x_2' = x_2$$

$$(2.10)$$

$$x_0' = Bx_0 + Cx_1 \qquad x_3' = x_3$$

où A, B et C sont des constantes telles que si $V \to 0$, alors $A \to 1$, $B \to 1$, $C \to 0$.

Les équations (2.8), (2.9) et (2.10) impliquent

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = \gamma(x_1 - vx_0) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \\ x_0' = \gamma(x_0 - vx_1) \end{array}\right\} \gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.11)$$

Plus tard, Einstein (1922), à partir de l'invariance de l'équation $ds^2 = 0$, conclut à l'équation $ds'^2 = \lambda ds^2$. Le principe de relativité implique $\lambda = 1$. Voir par exemple Gomez (1935), Landau et Lifchitz (1966).

L'argument de Gomez pour obtenir $\lambda = 1$ est particulièrement simple: soit $ds'^2 = \lambda\, ds^2$. Le principe de relativité implique $ds^2 = \lambda ds'^2$, d'où $\lambda = \pm 1$. La valeur $\lambda = -1$ est à rejeter car, lorsque la vitesse entre les deux systèmes de référence est nulle, auquel cas on doit avoir $dx_0' = dx_0$, il faut que $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2$.

Rappelons comment l'équation $ds'^2 = ds^2$ avec l'hypothèse de la linéarité, nous conduit au groupe de Lorentz.

Soient deux systèmes de référence reliés par la transformation

$$X'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} X_\beta + D_\alpha \tag{2.12}$$

où $\Lambda_{\alpha\beta}$ et D_α sont des constantes. La condition $ds'^2 = ds^2$ donne

$$\Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta}\, \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \tag{2.13}$$

où

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ -1 & \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{2.14}$$

De l'équation (2.13), il vient:

$$(D_\ell \tau \Lambda)^2 = 1 \tag{2.15}$$

et $D_\ell \tau \Lambda = \pm 1$.

Si on fait $\gamma = \delta = 0$ dans l'équation (2.13), il suit:

$$(\Lambda_{00})^2 = 1 + \sum_{i=1,2,3} (\Lambda_{i0})^2 \Longrightarrow (\Lambda_{00})^2 \geqslant 1 \tag{2.16}$$

L'ensemble des transformations (2.12) est un groupe appelé groupe de Poincaré ou groupe de Lorentz non homogène. Son sous-ensemble obtenu en faisant $D_\alpha = 0$ est appelé groupe de Lorentz et est noté L. Des contraintes supplémentaires, $\Lambda_{00} > 1$, $D_\ell \tau \Lambda = +1$, définissent le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_+^\uparrow$. Les autres possibilités ($D_\ell \tau \Lambda = -1$), $\Lambda_{00} \leq -1$ ou $\Lambda_{00} \geqslant 1$) conduisent à des symétries (inversions temporelles et parité) qui sont très probablement inexactes.

Mais l'invariance de l'équation $ds^2 = 0$ implique-t-elle $ds'^2 = ds^2$? Einstein ne le démontre pas.

Cette lacune est comblée par Mimura et Iwatsuki (1931) à l'aide d'une condition physique supplémentaire. Soient deux systèmes de référence $(x_1 x_2 x_3 x_0)$ et $(x'_1 x'_2 x'_3 x'_0)$ tels que le second se déplace avec une vitesse V par rapport au premier dans la direction de X_1; si Ox_1 et $O'x'_1$ ont même direction, alors un rayon lumineux qui se propage suivant la direction $0x_1$ dans le système $(x_1x_2x_3x_0)$ apparaîtra dans l'autre système se déplacer dans la direction $0'x_1'$.

Elle est également comblée par Gomez (1935) pour qui le fait que l'invariance de l'équation $ds^2 = 0$ implique $ds'^2 = ds^2$ est une conséquence du principe de relativité.

Chez Fock (1964), les hypothèses sont la conservation du mouvement inertiel et l'invariance des équations de Maxwell, cette dernière condition signifiant en fait l'invariance de l'équation $ds^2 = 0$. Nous reviendrons plus tard à l'approche de Fock.

Stiégler (1952) part avec quatre hypothèses:

a) L'homogénéité de l'espace-temps.

b) L'isotropie de l'espace.

c) Le fait que la propagation de la lumière est soumise à l'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2\, x_0^2 = 0$ où c est la vitesse de la lumière qui pourrait changer quand on change de système de référence.

d) Le principe de relativité.

Sans le démontrer, l'auteur affirme que les hypothèses a) et b) impliquent la linéarité et il démontre que la linéarité et les hypothèses c) et d) conduisent au fait que la vitesse de la lumière est la même dans tous les systèmes de référence. Nous retrouvons ainsi les hypothèses d'Einstein (1905): Principe de relativité, invariance de la vitesse de la lumière et linéarité. On voit que, lorsque les transformations sont linéaires, la condition de l'invariance de la vitesse de la lumière n'est pas indépendante du principe de relativité.

Weinstock (1964) utilise les hypothèses suivantes:

a) La constance de la vitesse de la lumière dans toutes les directions.

b) La relation de réciprocité.

c) L'isotropie de l'espace.

Weinstock démontre que a) et b) impliquent la linéarité. La condition b) signifie que si le système $(x'_1 x'_2 x'_3 x'_0)$ se déplace par rapport au système $(x_1 x_2 x_3 x_0)$ avec une vitesse relative V tel que vu dans $(x_1 x_2 x_3 x_0)$ et si W est la vitesse relative de $(x_1 x_2 x_3 x_0)$ par rapport à $(x'_1 x'_2 x'_3 x'_0)$ tel que vu dans $(x'_1 x'_2 x'_3 x'_0)$, alors $V = -W$. Cette hypothèse n'est pas nécessaire. En effet, le principe de relativité implique l'invariance de la relation entre V et W: $V = \Phi(W) \Longrightarrow W = \Phi(V)$. Or Berzi et Gorini (1969) ont démontré que lorsque les transformations sont linéaires, l'isotropie de l'espace implique $W = -V$ et encore une fois nous retrouvons les hypothèses d'Einstein (1905).

Gorini (1971) démontre que dans un espace à $(n+1)$ dimensions, où $n \geq 3$, les seuls groupes cinématiques linéaires non triviaux compatibles avec l'isotropie de l'espace sont le groupe de Lorentz et le groupe de Galilée. Une exigence supplémentaire, comme l'invariance de la vitesse de la lumière, élimine le groupe de Galilée. Précisons que l'isotropie est entendue ici dans un sens bien particulier: seules les rotations relient deux systèmes de référence relativement immobiles. Cette formulation du principe de l'isotropie diffère par exemple de celle de Weinstock (1964) et de celle de Stiegler (1952).

Il faut faire la remarque ici que les principes généraux comme l'invariance de la vitesse de la lumière, l'isotropie de l'espace et l'homogénéité ont des formulations qui varient d'un auteur à l'autre. De plus, ils ne sont pas en général indépendants: tel principe est souvent une conséquence des autres. Il peut même arriver qu'on se serve d'un principe en particulier sans que ce soit explicitement reconnu. Par exemple, la forme des équations (2.10) est un vague appel à l'isotropie de l'espace qui nous dit que x_1' et x_0' ne dépendent pas de x_2 et x_3 et que x_2' et x_3' sont proportionnels, avec le même coefficient de proportionalité, aux coordonnées correspondantes x_2 et x_3. Dans plusieurs publications les équations (2.10) sont posées sans qu'on mentionne explicitement le principe de l'isotropie.

Cependant, il ressort que lorsqu'on démontre la linéarité ou lorsqu'on la postule parce que découlant d'autres principes, l'invariance de la vitesse de la lumière ou l'homogénéité de l'espace interviennent toujours. Le fait que la linéarité puisse découler de l'invariance de la vitesse de la lumière n'est pas un obstacle à l'étude d'extensions du groupe de Lorentz par des transformations non linéaires (pouvant être supraluminales) puisque de telles transformations ne conservent pas nécessairement la vitesse de la lumière. Quant au fait que l'homogénéité implique la linéarité, nous y reviendrons plus loin (section II - C).

Comme souligné précédemment, certains éléments du groupe conforme ne conservent pas le mouvement inertiel. Et il n'est pas dit que toutes les transformations conservant le mouvement inertiel font partie du groupe conforme. En effet, Weyl (1923) suivi de Fock (1964) ont démontré que le plus vaste groupe conservant le mouvement inertiel est le groupe fractionnaire linéaire, dont les éléments ont la forme

$$f(x) = \frac{Ax + B}{1 + W_\alpha x_\alpha} \quad , \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad B = (B_0, B_1, B_2, B_3) \qquad (2.15)$$

où $A \in GL(4, R)$, l'ensemble des transformations linéaires réelles quadridimensionnelles; les B_α et W_γ sont constants. C'est un résultat remarquable car dans la littérature, on reconnaît plus ou moins explicitement que la conservation de l'inertie implique la linéarité. Ce résultat ouvre une voie nouvelle qui, à notre connaissance, n'a pas encore été exploitée. Le groupe de Lorentz orthochrone propre $L_+^\uparrow$ est un sous-groupe du groupe fractionnaire linéaire. La question suivante vient naturellement à l'esprit: qu'arrive-t-il si on ajoute à $L_+^\uparrow$ un élément du groupe de Fock? Nous répondrons à cette question à la section IV.

B. Deuxième voie: La causalité

Dans un remarquable article, publié en 1964, E.C. Zeeman démontre que le groupe de tous les automorphismes qui préservent l'ordre partiel que constitue la causalité génère le groupe de Poincaré et les dilatations, un groupe noté $P^{\uparrow *}$. Résumons l'article de Zeeman.

Soit M l'espace de Minkowski, c'est-à-dire l'espace-temps réel quadridimensionnel de la relativité restreinte et soit Q la forme caractéristique quadratique sur M définie par

$$Q(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{2.16}$$

où $x = (x_0 x_1 x_2 x_3)$. Il existe un ordre partiel sur M donné par $x < y$ si un événement à x peut influencer un événement à y. Plus précisément $x < y$ si $y - x$ est un quadrivecteur du genre temps, c'est-à-dire $Q(y - x) > 0$, orienté vers le futur, $x_0 < y_0$. Soit $f: M \rightarrow M$ une fonction biunivoque, pas nécessairement linéaire ou continue. f est dit automorphisme causal si f et f^{-1} préservent tous les deux l'ordre partiel; en d'autres termes, f est un automorphisme causal si

$$x < y \Longleftrightarrow fx < fy$$

pour tout $x, y \in M$. On peut montrer que l'ensemble des automorphismes causals forment un groupe, que nous appelons le groupe de causalité. Soit $P^{\uparrow *}$ le groupe généré par i) le groupe de Lorentz orthochrone $L^{\uparrow}$ (groupe qui laisse Q invariant et préserve l'orientation du temps), ii) les translations dans M, iii) les dilatations dans M: $x'_\alpha = \lambda x_\alpha, \lambda > 0$.

Théorème: Le groupe de causalité $\simeq P^{\uparrow *}$

Rappelons les groupes de transformation standards en relativité et les générateurs de leur algèbre de Lie, d'après la notation donnée en début de section:

L : Le groupe de Lorentz, c'est-à-dire l'ensemble des transformations qui préservent ds^2. $\{M_{\alpha\beta}\,;\ \alpha,\beta = 0, 1, 2, 3\}$.

$L^{\uparrow}$: Le groupe de Lorentz orthochrone, sous-groupe de L, dont les éléments préservent le signe de x_0.

$L_+^{\uparrow}$: Le groupe de Lorentz orthochrone propre, un sous-groupe de $L^{\uparrow}$, dont les éléments excluent les inversions spatiales.

P : Le groupe de Poincaré, l'ensemble des transformations affines qui préservent ds^2. $\{M_{\alpha\beta}, P_\alpha\}$.

$P^{\uparrow}$: Le groupe de Poincaré orthochrone (comme $L^{\uparrow}$).

$P_+^{\uparrow}$: Le groupe de Poincaré orthochrone propre (comme $L_+^{\uparrow}$).

P^* : Le groupe de Poincaré augmenté, l'ensemble des éléments de P augmenté d'une dilatation uniforme positive . $\{M_{\alpha\beta}, P_\alpha, S\}$.

$P^{\uparrow *}, P_+^{\uparrow *}$: Le groupe de Poincaré augmenté orthochrone (orthochrone propre).

C_4 : Le groupe conforme pour M_4. Ce groupe est généré par les inversions et les éléments de P^*. C'est le plus vaste groupe continu qui laisse invariantes les équations de Maxwell.

S_4 : Le groupe conforme spécial pour M_4.

Nous rappelons que les groupes L, $L^\uparrow$ et $L_+^\uparrow$, correspondent aux possibilités suivantes, d'après la notation adoptée plus haut:

L	$L^\uparrow$	$L_+^\uparrow$
$\Lambda_{00}^2 \geq 1,\ \mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$	$\Lambda_{00} \geq 1,\ \mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$	$\Lambda_{00} \geq 1,\ \mathrm{Det}\,\Lambda = +1$

Il est clair que L et $L^\uparrow$ se subdivisent en des ensembles qui ne peuvent être reliés par une variation continue de tous les paramètres. Ces deux groupes sont dits non connexes (connectivité dans l'espace des paramètres). Correspondant aux possibilités $\Lambda_{00} \leq -1, \Lambda_{00} \geq 1, \mathrm{Det}\,\Lambda = \pm 1$, on voit que L et $L^\uparrow$ se subdivisent respectivement en quatre et deux composantes. La composante comprenant l'identité est appelée la composante connexe et forme un groupe continu. Seule la composante connexe peut être générée par composition d'éléments voisins de l'identité (pour plus de détails sur les groupes continus, voir le début de la section IV). Les groupes L, $L^{\uparrow}$ et $L_{+}^{\uparrow}$ sont dits localement isomorphes: leur composante connexe est la même et ils ont ainsi la même algèbre. Pour les mêmes raisons, on dit que P, $P^{\uparrow}$ et $P_{+}^{\uparrow}$ ont la même algèbre.

Sans entrer dans les méandres de la preuve, nous pouvons en donner les étapes essentielles. Soit G le groupe de causalité.

1) $P^{\uparrow *} \subset G$: il est évident que tout $f \in P^{\uparrow *}$ préserve la relation de causalité $x < y$ car par définition tout $f \in P^{\uparrow *}$ préserve cette relation et le fait de multiplier par une constante positive les X_{α} ne change rien.

2) $G \subset P^{\uparrow *}$: soit $f \in G$. On peut démontrer que si $f \in G$, alors f est une transformation affine. Voir par exemple Zeeman (1964), Nanda (1976), Briginshaw (1979). Maintenant si $f \in G$, alors $f \in C_4$ car tout $f \in G$ préserve $ds^2 = 0$ ($ds^2 = 0 \Rightarrow ds'^2 = 0$) (Briginshaw, 1979). Or Frank (1911) a démontré que le plus vaste sous-groupe affin de C_4 est P^*. Donc $f \in P^*$, ce qui implique $f \in P^{\uparrow *}$ puisque par définition f maintient l'ordre temporel.

Nous obtenons donc $G = P^{\uparrow *}$. Si on exige du groupe de causalité de préserver l'orientation des axes $(x_1 x_2 x_3)$, alors il vient $G = P_{+}^{\uparrow *}$. Une contrainte supplémentaire (Pauli, 1958) peut être apportée pour rendre le facteur de dilatation égal à l'unité: $G = P_+^\uparrow$.

Mais qu'est-ce qui garantit le caractère affin de tout élément E de G? C'est la préservation de la relation $<$ jointe à l'hypothèse que f est biunivoque. Ainsi lorsqu'on dérive les transformations de Lorentz via le principe de causalité, la linéarité qui en découle est une conséquence de la préservation de la causalité. Ceci n'empêche pas une investigation des transformations supraluminales non linéaires, car celles-ci par définition s'appliquent à des événements qui ne peuvent s'influencer, c'est-à-dire entre lesquels il n'y a pas de causalité qui puisse être établie par la lumière. Notons enfin qu'en soi une violation de la causalité au sens de Zeeman ne conduit pas nécessairement à des anomalies causales, comme le paradoxe de Tolman: une boucle causale suppose par exemple, en plus d'une inversion cause-effet, un retour dans l'espace.

Cette voie constitue une remarquable simplification en ce qui concerne les hypothèses utilisées pour en arriver au groupe de Lorentz.

C. Troisième voie: Principes généraux

Dans cette voie, la dérivation des transformations de Lorentz est basée uniquement sur des principes généraux, comme l'homogénéité, l'isotropie ou le principe de relativité, sans faire intervenir des conditions reliées à l'invariance de la vitesse de la lumière.

Frank et Rothe (1911) ont été les premiers à démontrer que l'hypothèse d'une vitesse invariante n'est pas nécessaire pour en arriver aux transformations de Lorentz. Leurs seules hypothèses, le principe de relativité, l'isotropie de l'espace et l'homogénéité de l'espace-temps, conduisent à l'existence d'une constante universelle qui a la signification d'une vitesse invariante. Plus tard, Pars (1921) fit le même travail en insistant surtout sur le fait que le principe de relativité implique que les transformations reliant des systèmes de référence équivalents doivent former un groupe.

Dans plusieurs publications, on suppose la linéarité sans démonstration parce qu'on la juge nécessaire ou évidente. C'est le cas de Lee et Kalotas (1975), Strauss (1946), Landau et Sampanthar (1972), Temple (1938), Pars (1921). La plupart du temps, la linéarité découle, dit-on, de l'homogénéité de l'espace-temps. Nous n'insisterons pas davantage sur ces articles.

Ce qui nous intéresse vraiment, ce sont les publications où l'on démontre la linéarité. Schwartz (1962) procède comme suit. Soit le mouvement rectiligne uniforme d'une particule dans un référentiel S, décrit par

$$\frac{d^2 x_i}{d x_0^2} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.17}$$

soient $x'_\alpha = f'(x_\alpha)$ les coordonnées dans un second système de référence S'. Nous exigeons que le mouvement correspondant dans S' soit également un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire un mouvement linéaire dans l'espace-temps. En supposant que les transformations sont biunivoques, une invariance similaire tient pour des hyperplans. En effet, un hyperplan est défini par trois droites non parallèles se rencontrant en trois points différents. Considérons quatre hyperplans linéairement indépendants dans S' :

$$A_{\alpha\beta}\, x'_{\beta} + B_{\alpha} = 0 \tag{2.18}$$

$$\mathrm{DeT}\,|A_{\alpha\beta}| \neq 0 \tag{2.19}$$

Par hypothèse:

$$A_{\alpha\beta}\, x'_{\beta} + B_{\alpha} = A_{\alpha\beta}\, f(x) + B_{\alpha} = K_{\alpha\beta}\, x_{\beta} + D_{\alpha} \tag{2.20}$$

où les $K_{\alpha\beta}$ et les D_{α} sont des constantes. Il vient:

$$A_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 f_{\beta}}{\partial x_{\gamma}\,\partial x_{\delta}} = 0 \tag{2.21}$$

Puisque $\mathrm{DeT}\,|A_{\alpha\beta}| \neq 0$, les $f_{\beta}(x)$ sont linéaires. Cette démonstration est valable à la condition que deux droites non parallèles dans S soient également non parallèles dans S', ou encore que deux droites parallèles dans S' soient parallèles dans S et inversement (principe de relativité). Ainsi f doit laisser invariante la vitesse relative entre deux objets, ce qui laisse une porte ouverte: existe-t-il des transformations non linéaires qui conservent le mouvement rectiligne uniforme en ne préservant pas la vitesse relative? Oui: le groupe fractionnaire linéaire.

Quant à Baird (1975), la linéarité y est démontrée pour des transformations qui conservent la vitesse de la lumière, donc inapplicables pour des transformations supraluminales.

CHAPITRE III

LINEARITE ET HOMOGENEITE

Nous allons maintenant considérer quelques publications où la linéarité est démontrée à partir de l'homogénéité.

C'est le cas de Drake (1966) selon lequel un dx' causé par dx et dt est indépendant de x et t si l'espace-temps est homogène. Alors, si on suppose $x = 0$, $t = 0$ quand $x' = 0$, $t' = 0$, on doit avoir:

$$x' = ax + ht \tag{3.1}$$

où a et h sont constants et dépendent de v seulement. Ici v est la vitesse relative entre les deux référentiels. On retrouve dans Levy-Leblond (1975) une définition plus générale de l'homogénéité: "We assume first that space-time is homogeneous in that it has everywhere and every time the same properties". C'est une définition difficilement contestable, mais il ajoute: "More precisely, the transformation properties of a spatiotemporal interval ($\Delta x, \Delta \tau$) depend only on that interval and not on the location of its end points (in the considered reference frame).

In other words, the transformed interval ($\Delta x', \Delta \tau'$) obtained through an inertial transformation is independent of these end points".

Suivant le raisonnement de Levy-Leblond, si nous considérons une transformation

$$\begin{aligned} x' &= F(x, \tau, a) \\ \tau' &= G(x, \tau, a) \end{aligned} \tag{3.2}$$

où a représente un ensemble de paramètres, alors les variations dx' et dt', données par

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau \\ d\tau' &= \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \tag{3.3}$$

doivent être indépendantes de x et t (s'il y a homogénéité). Par conséquent, F et G doivent être linéaires, en supposant que les origines des deux systèmes coïncident.

Ce résultat nous semble incorrect. Considérons un espace sphérique bi-dimensionnel dont la métrique en termes des coordonnées x, y et θ, φ, définies dans la figure 3.1 est donnée par

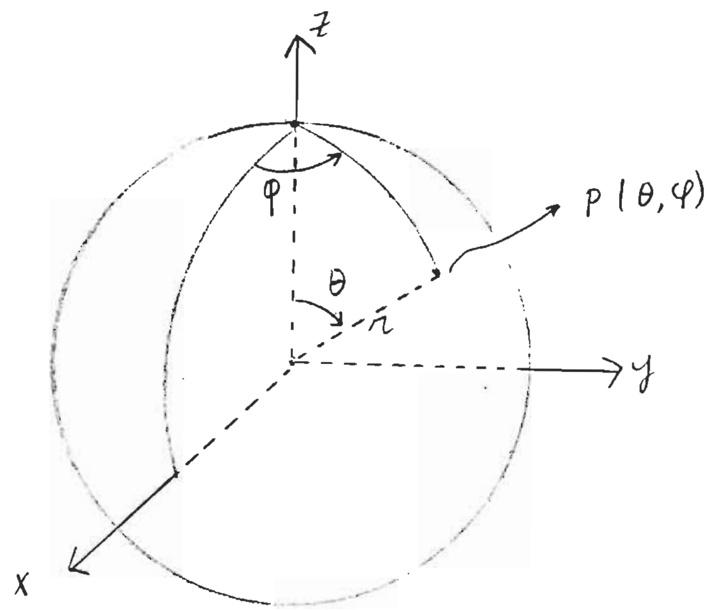

Figure 3.1 Espace sphérique bi-dimensionnel.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x\,dx + y\,dy)^2}{r^2 - x^2 - y^2} \tag{3.4}$$

$$ds'^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{3.5}$$

Cet espace est homogène (au sens où l'on entend l'homogénéité dans un espace métrique). Cependant la relation entre les deux systèmes de coordonnées (x, y) et (θ, φ) n'est pas linéaire. D'autre part, ds^2 et ds'^2 sont tous deux fonctions des coordonnées.

Pour Berzi et Gorini (1969), l'homogénéité de l'espace-temps exige qu'une translation spatio-temporelle T n'affecte pas la relation entre deux observateurs et laisse invariante la transformation

$$x' = f(x) \qquad x = (x_0, x_1, x_2, x_3), x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \tag{3.6}$$

entre les deux observateurs. Soient T_α et $T_{\alpha'}$ les représentations de T relativement à S et S', deux systèmes de référence reliés par la transformation (3.6). Berzi et Gorini expriment la propriété d'homogénéité par la relation:

$$f(T_\alpha x) = T_{\alpha'} f(x) \tag{3.7}$$

ou encore

$$f(x + \alpha) = f(x) + \alpha' \tag{3.8}$$

où $\alpha \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un vecteur constant, $\alpha' \equiv (\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ dépend de f et α mais non de x. On retrouve dans Lalan (1937) une interprétation semblable de l'homogénéité. Soit C l'opération ~~qui~~ consiste à changer de référentiel:

$$C: \quad x' = f(x, V) \tag{3.9}$$

où $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ et V est la vitesse relative entre les deux systèmes de référence. Lalan postule que l'opération C jouit de la propriété suivante: si, avant d'effectuer l'opération C, on change l'origine du système S, il est possible, en effectuant un changement d'origine convenable dans le système S', de ramener l'expression de l'opération C à sa forme primitive. Autrement dit, si on appelle $T_{\alpha'}: x \longrightarrow x' - \alpha'$ et $T_\alpha: x \longrightarrow x - \alpha$ les deux changements d'origine respectivement dans S' et S, la propriété d'homogénéité signifie que

$$T_{\alpha'} C \, T_\alpha = C \tag{3.10}$$

c'est-à-dire

$$f(x - \alpha, V) + \alpha' = f(x, V) \tag{3.11}$$

Remarquons ici que, à moins de considérer un espace euclidien et un système particulier de coordonnées, une translation ne consiste pas à remplacer x par $x - \alpha$ ou x' par $x' - \alpha'$. En effet, considérons les deux espaces bi-dimensionnels de la figure (3.2).

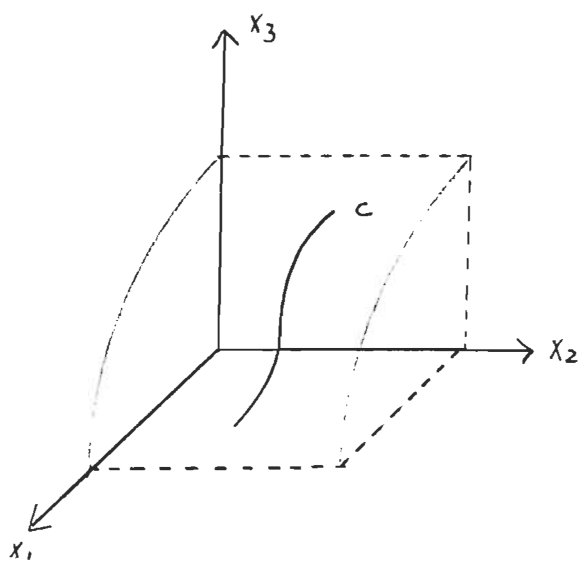

Figure 3.2a Espace cylindrique bi-dimensionnel.

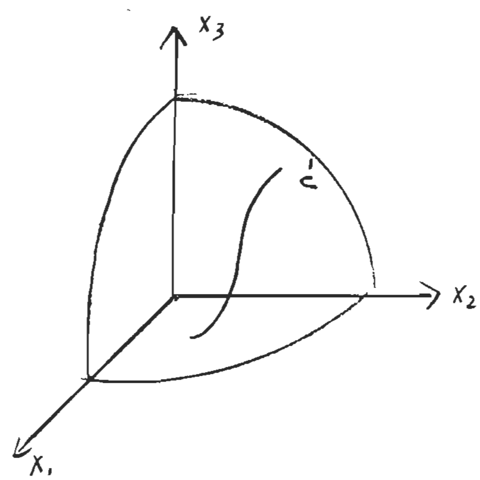

Figure 3.2b Espace sphérique bi-dimensionnel.

Le premier, correspondant à la figure 3.2a, est plan, en ce sens que toutes les composantes du tenseur de Riemann sont nulles. Le second est un espace à courbure constante. Il est clair que si on fait subir aux courbes c et c' une translation vers les x croissants, la variation de x n'est pas la même pour toutes les parties de la courbe. Lorsque deux référentiels dans un espace quelconque sont reliés par une transformation

$$x' = f(x) \tag{3.12}$$

le fait de remplacer x par $x-\alpha$ et x' par $x'-\alpha'$ où α' est indépendant de x n'est pas une translation. La confusion vient du fait que dans un espace euclidien muni d'un système de coordonnées cartésien, une translation s'opère en remplaçant x par $x-\alpha$ et x' par $x'-\alpha'$. Opérer une translation de cette manière revient à supposer que l'espace est euclidien.

Il semble que ces diverses définitions de l'homogénéité ne sont pas correctes. Comment définir l'homogénéité? De façon très générale, on pourrait la définir de la manière suivante: en tout temps, n'importe où dans l'univers, les lois de la physique sont toujours les mêmes. Mais sous cette définition générale, qui fait d'ailleurs l'accord de tous, il existe des définitions plus précises qui diffèrent passablement.

A. Homogénéité dans un espace métrique

Considérons un espace quadri-dimensionnel muni d'une métrique $g_{\mu\nu}(x)$ où $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Cette métrique est dite de forme invariante sous une transformation des coordonnées $x \longrightarrow x'$ lorsque la dépendance fonctionnelle de la métrique transformée $g'_{\mu\nu}(x')$ en termes de x' est la même que celle de $g_{\mu\nu}(x)$ en termes de x, c'est-à-dire:

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \tag{3.13}$$

pour tout y. On sait qu'en tout point, la relation entre les deux métriques est donnée par

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \; g_{\rho\sigma}(x) \tag{3.14}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \; g'_{\rho\sigma}(x') \tag{3.15}$$

Les équations (3.13) et (3.15) donnent:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \; g_{\rho\sigma}(x') \tag{3.16}$$

Toute transformation $x \longrightarrow x'$ telle que la relation (3.16) est satisfaite est appelée isométrie. Pour le cas particulier où la transformation est infinitésimale:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon\, \xi^{\mu} \qquad\qquad |\varepsilon| \ll 1 \tag{3.17}$$

l'équation (3.16) devient

$$0 = \frac{\partial \xi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}}\, g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}}\, g_{\rho\nu}(x) + \xi^{\mu}(x)\, \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\mu}} \qquad (3.18)$$

A l'aide de l'équation

$$\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma}\, \xi^{\mu} \qquad (3.19)$$

reliant les composantes covariantes et contravariantes du vecteur ξ, on démontre aisément que l'équation (3.18) devient:

$$0 = \xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} \qquad (3.20)$$

où, rappelons-le,

$$\xi_{\sigma;\rho} = \frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\rho}\, \xi_{\alpha} \qquad (3.21)$$

est la dérivée covariante de ξ_{σ}, les $\Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\rho}$ étant les symboles de Christoffel:

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\mu}} \right) \qquad (3.22)$$

Tout quadri-vecteur satisfaisant à l'équation (3.20) est dit vecteur de Killing de la métrique $g_{\mu\nu}(x)$ et la transformation infinitésimale

$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon\xi^{\mu}(x)$ est appelée isométrie infinitésimale. On peut montrer (voir Weinberg, 1972) qu'il y a au plus $N(N+1)/2$ vecteurs de Killing indépendants dans un espace à N dimensions. Certaines isométries, au plus N dans un espace à N dimensions, correspondent à des translations infinitésimales, les autres correspondent à des rotations autour d'un point.

Un espace à N dimensions est dit homogène s'il existe N isométries qui transportent tout point X en tout autre point X + dx situé dans son voisinage, c'est-à-dire que, quelle que soit la direction indiquée par la transformation $x' = x + \epsilon\xi$, la métrique demeure la même. Par exemple, l'espace sphérique bi-dimensionnel de la figure 3.1 est homogène car il possède deux vecteurs de Killing indépendants. Par contre, l'espace constitué par un tore n'en possède qu'un (figure 3.3).

Il est clair que le déplacement a) ne change pas la métrique mais que le déplacement b) la change. Il apparaît que l'homogénéité dans un espace métrique n'implique pas que $g_{\mu\nu}$ soit indépendant de x.

Il est important de remarquer, quoiqu'il y ait changement dans la métrique dans le déplacement b), qu'il reste qu'on est toujours soumis aux équations d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G \, T_{\mu\nu} \tag{3.23}$$

Dans un sens, la direction b) n'implique pas de changement dans les

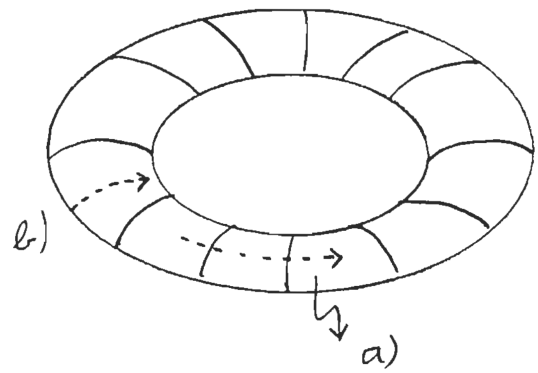

Figure 3.3 Espace formé par un tore.

lois de la physique mais un changement dans les conditions initiales, c'est-à-dire la répartition de la matière et de l'énergie, dans l'espace. Il semble que l'on puisse définir l'homogénéité à différents niveaux. Mais la véritable homogénéité ne consiste-t-elle pas à s'abstraire des conditions initiales?

B. Homogénéité relativement à un observateur

Soit un observateur 0 dans un référentiel S. On dira que l'espace-temps est homogène si, pour toute expérience E_0 accomplie par 0 avec un appareillage A_0 et caractérisée par des coordonnées spatio-temporelles $(\vec{x}, \tau)$ et pour toute translation caractérisée par le quadri-vecteur $(\vec{a}, \tau_0)$, 0 peut accomplir en principe une expérience copie géométriquement caractérisée par les coordonnées $(\vec{x} + \vec{a}, \tau + \tau_0)$ avec un appareillage $A_{\vec{a}}$ identique.

Cette définition, due à Lugiato et Gorini (1972) soulève aussi des difficultés. A moins d'admettre l'existence de l'espace-temps absolu, une véritable translation ne peut s'opérer sans changer les conditions initiales, ce qui risque de perturber les résultats d'une expérience. Par exemple, si l'expérience consiste à mesurer le carré de la distance entre deux points, loin de toute masse importante, le résultat sera, dans un système de coordonnées cartésiennes,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \equiv \eta_{k\ell}\, dx_k\, dx_\ell$$

Par contre, au voisinage d'une masse importante, il pourrait être, après une translation $\vec{a}$,

$$ds^2 = (\eta_{k\ell} + h_{k\ell})\, dx_k\, dx_\ell$$

où les $h_{k\ell} \longrightarrow 0$ si $\vec{a} \longrightarrow 0$.

C. <u>L'homogénéité relativement à deux observateurs</u>

Cette conception de l'homogénéité, qui est en fait celle de Lalan et Berzi et Gorini, a été énoncée par Lugiato et Gorini (1972) (énoncé qu'ils appellent axiome d'homogénéité):

Axiome d'homogénéité: soient deux systèmes de référence S et S' reliés par une transformation $x' = f(x)$. Soit a un quadri-vecteur arbitraire constant et considérons dans S la translation $x \longrightarrow x + a$, alors il existe un quadri-vecteur b constant tel que $f(x + a) = f(x) + b$.

Cette définition doit être rejetée parce que, comme nous l'avons vu, une translation en général ne consiste pas à remplacer x par x − a. Cependant, elle a en plus un grave défaut: la détermination de la relation entre S et S' est faite sans référence à un changement dans les conditions initiales. Elle ressemble beaucoup plus à une opération mathématique, une contrainte sur la transformation f qui mène à sa linéarité (à la condition qu'elle soit continue). Comme souligné plus haut, il ne peut y avoir de véritable homogénéité que lorsque, sous l'effet d'une translation quelconque, c'est-à-dire, n'importe où et n'importe quand dans l'univers, et quel que soit le changement dans les conditions initiales, il y a symétrie de toutes les lois physiques.

Cette conception de l'homogénéité nous semble plus cohérente et n'a rien à voir, bien sûr, avec la linéarité. Nous proposons donc comme définition de l'homogénéité:

D. Homogénéité de l'espace-temps : Partout et en tout temps, les symétries des lois physiques sont les mêmes.

Le message des deux dernières sections est clair: rien dans les diverses voies qui mènent au groupe de Lorentz n'interdit de considérer des extensions non linéaires de ce groupe.

CHAPITRE IV

TRANSFORMATIONS PRESERVANT LE MOUVEMENT INERTIEL

Considérons l'ensemble des points de l'espace-temps. Un système de référence est une correspondance biunivoque entre cet ensemble et R^4, l'espace réel continu à quatre dimensions. Trois dimensions sont associées à des coordonnées spatiales, la quatrième étant associée à une coordonnée temporelle. Nous supposons qu'on peut faire naturellement la distinction entre l'espace et le temps et qu'on peut caractériser un événement quelconque par les trois coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle. Physiquement, un système de référence est constitué de règles à mesurer et d'horloges réparties dans l'espace et identiques.

Une ligne droite dans R^4 représente un mouvement rectiligne uniforme dans l'espace. Soient (x_0, x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un événement, x_0 étant la coordonnée temporelle, les trois autres étant les coordonnées spatiales. Ainsi que l'a démontré Fock, d'après Weyl, le plus vaste ensemble de transformations préservant le mouvement linéaire dans R^4, c'est-à-dire transformant une droite en une droite, est le groupe linéaire fractionnaire:

$$x'_\alpha = \frac{A_{\alpha\beta} x_\beta + E_\alpha}{B + W_\gamma x_\gamma} \qquad A_{\alpha\beta} \in GL(4R) \tag{4.1}$$

où B, les E_α et les W_γ sont constants. GL(4,R) est l'ensemble des transformations linéaires réelles, quadri-dimensionnelles. C'est un groupe à 24 paramètres indépendants.

Ce résultat n'entre pas en contradiction avec celui de Schwartz, que nous avons étudié dans la section II. Schwartz a démontré que les transformations qui transforment une droite en une droite et qui préservent la vitesse relative entre deux objets sont nécessairement linéaires. Or il est clair que les transformations (4.1) ne préservent pas la vitesse relative. En effet, soient x_0 le temps et x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un événement. Soient x_{0i} et V_i ($i = 1, 2, 3$) six constantes arbitraires. L'ensemble des trois équations

$$x_i = x_{0i} + V_i x_0 \tag{4.2}$$

représente un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$. On peut vérifier sans difficulté que si on substitue ces équations dans (3.1), il suit:

$$x'_i = x'_{0i} + V_i x'_0 \tag{4.3}$$

où X'_{0i} et V'_i sont des constantes qui dépendent de X_{0i} et V_i. Le fait que V'_i soit fonction de X_{0i} implique que deux lignes droites parallèles, c'est-à-dire des mouvements rectilignes uniformes de même vitesse, sont transformées en deux lignes droites non parallèles, c'est-à-dire, deux mouvements rectilignes uniformes de vitesses différentes. On peut démontrer facilement que V'_i est indépendant de X_{0i} si et seulement si le dénominateur dans (3.1) est constant.

Il peut être utile de résumer brièvement ce qu'est un groupe continu de transformations. Considérons un groupe de transformations fonctions de n paramètres a :

$$x'_\alpha = f_\alpha(x; a) \qquad \begin{array}{l} a \equiv (a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ x \equiv (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ \alpha = (0, 1, 2, \cdots m) \end{array} \tag{4.4}$$

où l'on suppose que chaque transformation est définie pour un ensemble de paramètres a et où la transformation identité est obtenue en faisant tous les a nuls. En supposant les fonctions f_α dérivables par rapport aux x_α et aux paramètres a, ce qui définit un groupe continu, les transformations infinitésimales du groupe sont obtenues en développant les fonctions f_α en série de puissance des paramètres, ne gardant que les termes du premier ordre:

$$x'_\alpha = x_\alpha + \left.\frac{\partial f_\alpha(x; a)}{\partial a_\mu}\right|_{a=0} a_\mu \qquad \begin{array}{l} |a_\mu| \ll 1 \\ \mu = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{4.5}$$

Ces transformations infinitésimales sont voisines de l'identité. Pour le cas où $n = 1$ et $m = 1$, il vient:

$$x' = x + \frac{\partial f(x;a)}{\partial a}\bigg|_{a=0} a = \left(1 + a \frac{\partial f}{\partial a}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x}\right) x \qquad (4.6)$$

La transformation infinitésimale (4.6) est associée à l'opérateur différentiel

$$a \frac{\partial f}{\partial a}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x} \qquad (4.7)$$

L'expression

$$\frac{\partial f}{\partial a}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x} \qquad (4.8)$$

est appelée générateur de la transformation. Pour le cas général à n paramètres et m coordonnées, on peut montrer que l'opérateur différentiel associé à la transformation (4.4) est

$$\begin{aligned} a_\mu \frac{\partial f_\alpha}{\partial a_\mu}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = {} & a_1 \left[\frac{\partial f_1}{\partial a_1}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial a_1}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \\ & + a_2 \left[\frac{\partial f_1}{\partial a_2}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial a_2}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \\ & + \cdots + a_n \left[\frac{\partial f_1}{\partial a_n}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial a_n}\bigg|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \end{aligned} \qquad (4.9)$$

de sorte que, correspondant à chaque paramètre a_μ , on définit un générateur

$$\left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial a_\mu}\right|_{a=0} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{4.10}$$

On peut montrer qu'il y a autant de générateurs linéairement indépendants que de paramètres. L'ensemble des générateurs forme un espace vectoriel sur lequel on définit l'algèbre du groupe.

Lorsque les fonctions $f_\alpha(x;a)$ sont analytiques dans tout leur domaine de définition, le groupe continu est dit groupe de Lie. Un résultat fondamental, dû à Sophus Lie, est que toute transformation finie d'un groupe de Lie connexe est obtenue par une exponentiation d'une combinaison linéaire des générateurs de l'algèbre, c'est-à-dire que toute transformation finie peut être obtenue à partir de transformations voisines de l'identité.

Nous allons calculer les générateurs du groupe fractionnaire linéaire. La première étape consiste à exprimer les équations ((4.1) sous la forme

$$x'_\alpha = \frac{(a_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta})\, x_\beta + E_\alpha}{1 + B' + W_\gamma x_\gamma} \tag{4.11}$$

de sorte que pour chaque transformation, l'identité est obtenue en faisant tous les $a_{\alpha\beta}$, les E_α , les W_γ et B' nuls. L'étape suivante consiste à développer les x'_α en séries de puissances des paramètres $a_{\alpha\beta}$, E_α , W_γ et B' :

$$x'_\alpha = x_\alpha + a_{\alpha\beta}\,\xi_{\alpha\beta} + W_\beta\,\lambda_{\alpha\beta} + E_\alpha\,\rho_\alpha + B'\,\omega_\alpha \qquad (4.12)$$

où les $\xi_{\alpha\beta}$, les $\lambda_{\alpha\beta}$, les ρ_α et les ω_α sont calculés à l'aide des équations (4.2). Il n'y a pas de sommation sur α dans le terme de droite de l'équation (4.12). Par exemple:

$$\xi_{00} = \left.\frac{\partial x'_0}{\partial a_{00}}\right|_{a_{\alpha\beta},\,E_\alpha,\,B',\,W_\gamma = 0} = x_0$$

Après calcul des $\xi_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha\beta}$, ρ_α et ω_α , et réexprimant en termes des $A_{\mu\nu}$ et de $B \equiv 1 + B'$, il vient pour le générateur (4.9) du groupe linéaire fractionnaire

$$(A_{00}-1)\,x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + A_{01}\,x_1\frac{\partial}{\partial x_0} + A_{02}\,x_2\frac{\partial}{\partial x_0} + A_{03}\,x_3\frac{\partial}{\partial x_0}$$

$$+ A_{10}\,x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + (A_{11}-1)\,x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + A_{12}\,x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + A_{13}\,x_3\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$+ A_{20}\,x_0\frac{\partial}{\partial x_2} + A_{21}\,x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + (A_{22}-1)\,x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + A_{23}\,x_3\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$+A_{30}x_0\frac{\partial}{\partial x_3}+A_{31}x_1\frac{\partial}{\partial x_3}+A_{32}x_2\frac{\partial}{\partial x_3}+(A_{33}-1)x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$+E_0\frac{\partial}{\partial x_0}+E_1\frac{\partial}{\partial x_1}+E_2\frac{\partial}{\partial x_2}+E_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$-W_0x_0\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_0}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$-W_1x_1\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_0}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$-W_2x_2\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_0}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$-W_3x_3\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_0}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$-(B-1)\left(x_0\frac{\partial}{\partial x_0}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{4.13}$$

Correspondant aux paramètres E_α , on obtient les générateurs de translation $\partial/\partial x_\alpha$. Correspondant au paramètre B, on obtient le générateur de dilatation:

$$S \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{4.14}$$

que l'on peut éliminer sans perte de généralité en faisant $B = 1$. Si on considère l'équation (4.2) ou encore l'équation (4.16), on voit qu'une dilatation est encore possible. Nous imposons $D_\varepsilon \tau |A_{\alpha\beta}| = 1$. Cette contrainte supplémentaire et l'élimination des translations nous laissent avec dix-neuf paramètres linéairement indépendants: elles rendent impossible l'obtention du générateur de dilatation. Les générateurs de translation et de dilatation peuvent être exclus dans l'établissement du groupe cinématique puisqu'ils correspondent à des transformations entre référentiels au repos.

Les générateurs $x_\alpha \partial/\partial x_\beta$ forment l'algèbre de GL(4,R), c'est-à-dire génèrent des transformations linéaires. Les autres, facteurs des W_α, génèrent des transformations de la forme

$$x'_\alpha = \frac{x_\alpha}{1 + W_\gamma x_\gamma} \tag{4.15}$$

Donc, si nous faisons coïncider les origines ($E_\alpha = 0$), l'équation (4.1) devient:

$$x'_\alpha = \frac{A_{\alpha\beta} x_\beta}{1 + W_\gamma x_\gamma} \tag{4.16}$$

SL(4,R) est l'ensemble des transformations réelles linéaires quadri-dimensionnelles de déterminant égal à l'unité. Les transformations (4.16) forment un groupe de Lie, que nous appelons G, dont l'algèbre A comprend les éléments des deux ensembles:

$$L = \left\{ x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right\} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

$$F = \left\{ x_\alpha \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \equiv B_\alpha \right\}, \alpha = 0, 1, 2, 3$$

L est l'algèbre de SL(4,R), si on exclut l'opérateur de dilatation S. On vérifie aisément que

$$[B_\alpha, B_\beta] \equiv B_\alpha B_\beta - B_\beta B_\alpha = 0 \tag{4.17}$$

pour tout α et β, de sorte que F est l'algèbre d'un groupe commutatif.

Rappelons une autre propriété fondamentale d'une algèbre de Lie: le commutateur de deux éléments de l'algèbre est une combinaison linéaire des éléments de l'algèbre:

$$[A_\alpha, A_\beta] = C_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma \tag{4.18}$$

où les $C_{\alpha\beta\gamma}$ sont constants. Ainsi, lorsqu'on ajoute à une algèbre un nouvel élément, pour voir quelle est la nouvelle algèbre qui pourrait être générée, il suffit de commuter cet élément avec ceux de l'algèbre jusqu'à fermeture. C'est essentiellement la démarche que nous allons suivre dans le reste de cette section: si on ajoute à l'algèbre du groupe de Lorentz des générateurs des algèbres L et F, quel est le plus petit groupe généré?

L'algèbre M du groupe de Lorentz orthochrone propre $L_+^\uparrow$ comprend les générateurs:

$$M = \Big\{ M_{12} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \,,\ M_{13} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$M_{23} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \,,\ M_{01} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_0}$$

$$M_{02} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} \,,\ M_{03} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} \Big\} \qquad (4.19)$$

Cet ensemble n'est qu'une base parmi d'autres mais c'est la base utilisée habituellement. A l'aide de la règle de commutation suivante, obtenue au moyen de la forme explicite des $M_{\mu\nu}$ et B_α ,

$$[M_{k\ell}, B_m] = \eta_{km} B_\ell - \eta_{\ell m} B_k \,,\ [M_{0k}, B_\alpha] = \delta_{k\alpha} B_0 + \delta_{0\alpha} B_k \qquad (4.20)$$

où les $\eta_{\mu\nu}$ sont ceux définis dans l'équation (2.14), on vérifie sans peine que si l'on ajoute à M l'un quelconque des B_α , les autres sont générés et que l'ensemble $M \oplus F$ est une algèbre.

Théorème 1: soit M l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Si on ajoute à M une combinaison linéaire quelconque des éléments de

M et $F = (B_0, B_1, B_2, B_3)$, alors l'algèbre $M \oplus F$ est recouvrée.

Preuve: soit la combinaison linéaire

$$d_1 M_{01} + d_2 M_{02} + d_3 M_{03} + d_4 M_{12} + d_5 M_{13} + d_6 M_{23}$$

$$+ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 \equiv P_1 \tag{4.21}$$

où les d_j et les a_j sont constants, avec au moins l'un des $a_j \neq 0$. Il vient:

$$[M_{12}, P_1] = d_1 M_{02} - d_2 M_{01} - d_5 M_{23} - d_6 M_{13} + a_1 B_1 - a_2 B_2 \equiv P_2 \tag{4.22}$$

$$[M_{23}, P_2] = d_1 M_{03} + d_6 M_{12} + a_1 B_3 \equiv P_3 \tag{4.23}$$

$$[M_{03}, P_3] = a_1 B_0 \tag{4.24}$$

ce qui implique que l'algèbre $M \oplus F$ est recouvrée si $a_1 \neq 0$. Il est évident qu'il en est de même pour toute combinaison linéaire avec au moins l'un des $a_j \neq 0$.

Théorème 2: soit M l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Si on ajoute à M un générateur quelconque de la forme $x_\alpha \partial/\partial x_\beta$ ou un générateur quelconque compris dans l'ensemble

$$N = \left\{ N_{12} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},\ N_{13} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right.$$

$$N_{23} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3},\ N_{01} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$N_{02} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_2},\ N_{03} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$N_{0-1} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_0},\ N_{0-2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}$$

$$N_{0-3} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_0},\ N_{1-2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$\left. N_{1-3} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},\ N_{2-3} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$$

alors, l'algèbre L de SL(4,R) est recouvrée, c'est-à-dire SL(4,R) est générée.

Preuve: La preuve s'obtient par calculs directs. Par des commutations successives et après un calcul assez long, on obtient neuf nouveaux générateurs linéairement indépendants. Par exemple, si on ajoute à M le générateur

$$T_1 \equiv x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

il vient:

$$[T_1, M_{01}] = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \equiv T_2 \tag{4.25}$$

$$[T_1, M_{13}] = -\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \equiv T_3 \tag{4.26}$$

$$[T_1, M_{12}] = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \equiv T_4 \tag{4.27}$$

$$[M_{13}, T_3] = 2\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \equiv 2\,T_5 \tag{4.28}$$

$$[T_4, M_{13}] = -\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \equiv T_6 \tag{4.29}$$

$$[T_4, M_{12}] = 2\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \equiv 2\,T_7 \tag{4.30}$$

$$[T_3, M_{01}] = x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv T_8 \tag{4.31}$$

$$[M_{03}, T_6] = x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} \equiv T_9 \tag{4.32}$$

$$[T_8, M_{03}] = 2\left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}\right) \equiv 2\,T_{10} \tag{4.33}$$

Ainsi, neuf autres générateurs, éléments de SL(4,R) et linéairement indépendants, s'ajoutent à M. Il en est de même si on ajoute un générateur quelconque de la forme $x_\alpha\, \partial/\partial x_\beta$ ou un générateur de N .

Faisons la remarque que l'opérateur $T_1 = x_1 \partial/\partial x_1$, n'est pas un élément de l'algèbre de SL(4,R). En effet, si on applique l'opérateur $\varepsilon x_1 \partial/\partial x_1$ où ε est infinitésimal, il suit

$$\left(1 + \varepsilon x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) x_\alpha = x_\alpha + \varepsilon x_1 \delta_{1\alpha}$$

ce qui correspond, sous forme matricielle, à la transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv I + \delta M$$

Or, on peut montrer que la condition pour que T_1 soit un élément de l'algèbre de Lie de SL(4,R) est que $\mathrm{Trace}(\delta M) = 0$ (Gilmore, chapitre VI). On peut vérifier de cette manière que tous les générateurs de la forme $x_\alpha \partial/\partial x_\beta$, avec $\alpha \neq \beta$, font partie de l'algèbre de SL(4,R) et que tous les générateurs de l'ensemble N défini dans l'énoncé du théorème (2) font partie de l'espace vectoriel quotient L/M (l'espace vectoriel des opérateurs non compris dans M et compris dans L). Pour obtenir une base de l'espace L/M, il suffit de choisir neuf éléments de N linéairement indépendants.

Théorème 3: soient M l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz et L l'algèbre de Lie de SL(4,R). Soit l'espace vectoriel L/M. Si on ajoute à M une combinaison linéaire quelconque des générateurs de L/M, alors L est recouvrée.

Preuve: L'ensemble des générateurs de l'ensemble N défini dans l'énoncé du théorème 2 recouvre entièrement L/M car on peut trouver dans N neuf générateurs linéairement indépendants et ces générateurs sont tous linéairement indépendants de ceux de M. Considérons une combinaison linéaire des éléments de N:

$$c_1\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + c_2\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + c_3\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

$$+ c_4\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + c_5\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + c_6\left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

$$+ c_7\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + c_8\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) + c_9\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \equiv Q_1 \quad (4.34)$$

Par des commutations successives avec des éléments de M, on peut réduire cette somme à un seul élément. Observons d'abord que les commutations d'un élément de M avec un élément de N suivent les règles suivantes:

i) Lorsque les coordonnées impliquées dans $M_{\alpha\beta}$ sont toutes les deux différentes de celles impliquées dans l'élément de N, la commutation donne un résultat nul, c'est-à-dire

$$[M_{\alpha\beta}, N_{\gamma\delta}] = 0 \quad , \quad [M_{\alpha\beta}, N_{\gamma-\delta}] = 0 \qquad \gamma, \delta \neq \alpha, \beta$$

Par exemple $[M_{12}, N_{3-4}] = 0$

ii) Lorsque les deux générateurs ont en commun au moins une coordonnée, le résultat est un élément de N à un facteur constant près. Par exemple:

$$[M_{12}, N_{23}] = -N_{13}$$

Ceci peut se vérifier facilement. Par conséquent, chaque fois qu'une commutation d'un élément de M avec un terme de (4.34) donne un résultat nul, le nombre de générateurs de N restant diminue. Par exemple:

$$\begin{aligned}[M_{12}, Q_1] = & -2c_1\left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) + c_2\left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_3} + X_3 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) \\ & - c_3\left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_3} + X_3 \frac{\partial}{\partial X_1}\right) + c_4\left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_0} - X_0 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) \\ & - c_5\left(X_1 \frac{\partial}{\partial X_0} - X_0 \frac{\partial}{\partial X_1}\right) + (2c_7 + c_8 - c_9)\left(X_2 \frac{\partial}{\partial X_1} + X_1 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) \qquad (4.35)\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que, lorsque nous sommes en présence de deux générateurs quelconque de N, il est toujours possible, par des commutations avec des éléments de M, d'éliminer l'un ou l'autre des deux termes (mais non les deux). Considérons la somme

$$\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 \tag{4.36}$$

où N_1 et N_2 sont deux éléments de N, et α_1 , α_2 sont deux constantes. Les possibilités sont les suivantes:

1) N_1 et N_2 impliquent des coordonnées toutes différentes, par exemple $N_1 = N_{12}$, $N_2 = N_{3-4}$. Il est clair, d'après i), que l'on peut toujours éliminer l'un ou l'autre des deux termes.

2) N_1 et N_2 impliquent une coordonnée commune, par exemple: $N_1 = N_{12}$, $N_2 = N_{2-3}$. La même conclusion que pour le cas 1) s'impose.

3) N_1 et N_2 impliquent les mêmes coordonnées. La situation est nécessairement la suivante:

$$\alpha_1 N_{\alpha\beta} + \alpha_2 N_{\alpha-\beta} \tag{4.37}$$

Une commutation avec $M_{\alpha\gamma}$, où $\gamma \neq \alpha$ ou β , nous ramène au cas précédent (ici, l'indice α n'est pas sommé)

$$[M_{\alpha\gamma} , \alpha_1 N_{\alpha\beta} + \alpha_2 N_{\alpha-\beta}] = \pm \alpha_1 N_{\beta\gamma} \pm \alpha_2 N_{\alpha\gamma} \tag{4.38}$$

où les $\pm$ dépendent de la valeur des indices α, β et γ .

Nous constatons que lorsque nous sommes en présence d'une somme arbitraire de deux éléments de N, on peut toujours, en commutant avec un élément de M, réduire cette somme à un seul terme, ce qui permet de réduire toute combinaison linéaire quelconque d'éléments de N à un seul terme. Le théorème précédent implique alors que L est recouvrée et le théorème (3) est démontré.

Théorème 4: soit L l'algèbre de Lie de SL(4,R) et soit M l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Soit l'espace vectoriel quotient L/M. Si on ajoute à M une combinaison linéaire quelconque des générateurs de M et L/M, L est recouvrée.

Preuve: Soit la combinaison linéaire

$$d_1 M_{01} + d_2 M_{02} + d_3 M_{03} + d_4 M_{12} + d_5 M_{13} + d_6 M_{23} + c_1 N_{01}$$

$$+ c_2 N_{02} + c_3 N_{03} + c_4 N_{12} + c_5 N_{13} + c_6 N_{23} + c_7 N_{1-2} + c_8 N_{1-3} + c_9 N_{0-1} \equiv P_1 \quad (4.39)$$

Compte tenu de la règle de commutation (2.7)

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\delta\gamma}] = \eta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} - \eta_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta}$$

il est facile de vérifier qu'en commutant (4.39) successivement avec les générateurs $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\gamma}$ et $M_{\gamma\delta}$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$, on élimine les éléments de M, quelle que soit la suite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (voir la démonstration du théorème 1):

$$[M_{\gamma\delta}, [M_{\beta\gamma}, [M_{\alpha\beta}, \sum M]]] = 0 \quad (4.40)$$

Les règles de commutation suivantes:

$$[M_{\alpha\gamma}, N_{\alpha\beta}] = \pm N_{\beta\gamma} , \quad \gamma \neq \beta \tag{4.41}$$

$$[M_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}] = 2 N_{\alpha-\beta} \tag{4.42}$$

$$[M_{\alpha\gamma}, N_{\alpha-\beta}] = \pm N_{\alpha\gamma} , \quad \gamma \neq \beta \tag{4.43}$$

$$[M_{\alpha\beta}, N_{\alpha-\beta}] = 2 N_{\alpha\beta} \tag{4.44}$$

où le $\pm$ dépend de la valeur des indices, montrent bien que les éléments de N ne seront jamais tous éliminés si nous considérons un $N_{\alpha\beta}$ ou un $N_{\alpha-\beta}$ présent dans (4.39) et si nous commençons les commutations par $M_{\alpha\gamma}$. Le théorème précédent implique alors que L est recouvrée. Ce théorème correspond au résultat obtenu par Marchildon et al. (1983): si on ajoute à $L_+^\uparrow$ une transformation linéaire quelconque, SL(4,R) est généré.

Théorème 5: soit A l'algèbre de Lie du groupe G de transformations définies par l'équation (4.16). Si on ajoute à M une combinaison linéaire quelconque des générateurs de M, L/M et F, A est recouvrée, c'est-à-dire G est généré.

Preuve: soit la combinaison linéaire

$$d_1 M_{01} + d_2 M_{02} + d_3 M_{03} + d_4 M_{12} + d_5 M_{13} + d_6 M_{23}$$

$$+ c_1 N_{01} + c_2 N_{02} + c_3 N_{03} + \cdots + c_9 N_{0-1}$$

$$+ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 \tag{4.45}$$

avec au moins l'un des $c_i \neq 0$ et au moins l'un des $a_i \neq 0$. Les règles de commutation (4.20) impliquent

$$[M_{\ell j}, [M_{k\ell}, B_m]] = [M_{\ell j}, \eta_{km} B_\ell - \eta_{\ell m} B_k]$$

$$= \eta_{km}(\eta_{\ell\ell} B_j - \eta_{\ell j} B_\ell) - \eta_{\ell m}(\eta_{\ell k} B_j - \eta_{jk} B_\ell)$$

$$= \eta_{km} B_j = \delta_{km} B_j \qquad , \quad j \neq k \tag{4.46}$$

$$[M_{k\ell}, [M_{0k}, B_\alpha]] = \delta_{0\alpha} B_\ell \tag{4.47}$$

$$[M_{0m}, [M_{k0}, B_\alpha]] = \delta_{0\alpha} B_m \qquad k \neq m \tag{4.48}$$

Les équations (4.46), (4.47) et (4.48) donnent:

$$[M_{\nu\delta}, [M_{\mu\nu}, B_\lambda]] = \delta_{\mu\lambda} B_\delta \qquad \mu \neq \delta \tag{4.49}$$

Il n'y a pas de sommation sur ν dans le terme de droite de l'équation 4.49. Il vient:

$$[M_{\nu\delta}, [M_{\mu\nu}, a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4]] = a_\mu B_\delta \tag{4.50}$$

$$\mu \neq \delta$$

où il n'y a pas de sommation sur μ et ν . Les équations (4.41) et (4.43) impliquent

$$[M_{\nu\delta},[M_{\mu\nu},N_{\mu\sigma}]]=\pm[M_{\nu\delta},N_{\nu\sigma}]=\pm N_{\delta\sigma} \quad , \quad \sigma\neq\delta\neq\mu \tag{4.51}$$

$$[M_{\nu\delta},[M_{\mu\nu},N_{\mu-\sigma}]]=\pm[M_{\nu\delta},N_{\mu\nu}]= N_{\delta\mu} \quad , \quad \sigma\neq\nu\neq\delta \tag{4.52}$$

Tenant compte de (4.50), (4.51) et (4.52), il suit:

$$[M_{\sigma\lambda},[M_{\nu\delta},[M_{\mu\nu},cN_{\mu\sigma}+a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3+a_4B_4]]]=\pm cN_{\lambda\delta} \tag{4.53}$$

$$[M_{\nu\mu},[M_{\nu\delta},[M_{\mu\nu},cN_{\mu-\sigma}+a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3+a_4B_4]]]=\pm cN_{\nu\delta} \tag{4.54}$$

où c est constant, $\sigma\neq\nu\neq\delta\neq\lambda$ pour l'équation (4.53). $\sigma\neq\nu\neq\delta\neq\mu$ pour l'équation (4.54).

Les deux dernières équations montrent qu'on peut éliminer les B_α sans éliminer les éléments de N: il suffit, en considérant un $N_{\mu\sigma}(N_{\mu-\sigma})$ présent dans (4.45) d'opérer les commutations indiquées par l'équation (4.53) ((4.54)). D'après le théorème 4, L est recouvrée. De plus, il est toujours possible d'éliminer les générateurs de L sans éliminer les B_α . En effet, soit la combinaison linéaire

$$c_1x_0\frac{\partial}{\partial x_0}+c_2x_0\frac{\partial}{\partial x_1}+c_3x_0\frac{\partial}{\partial x_2}+c_4x_0\frac{\partial}{\partial x_3}+c_5x_1\frac{\partial}{\partial x_0}+c_6x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$+c_7x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+c_8x_1\frac{\partial}{\partial x_3}+c_9x_2\frac{\partial}{\partial x_0}+c_{10}x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+c_{11}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+c_{12}x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$+ c_{13} x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} + c_{14} x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + c_{15} x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + c_{16} x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$+ a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 \equiv R_1$$

Puisque L est recouvrée, nous pouvons commuter avec des générateurs de L:

$$\left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, R_1 \right] = - c_2 x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} - c_6 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + c_{10}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$+ c_{11} x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + c_{12} x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - c_{14} x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_1 B_2 \equiv R_2$$

$$\left[x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, R_2 \right] = - c_{10} x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - c_{12} x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_1 B_3 \equiv R_3$$

$$\left[x_0 \frac{\partial}{\partial x_3}, R_3 \right] = - c_{10} x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_1 B_0 \equiv R_4$$

$$\left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_0}, R_4 \right] = c_{10}\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + a_1 B_2 \equiv R_5$$

$$\left[x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}, R_5 \right] = a_1 B_2$$

Ceci signifie que l'algèbre F est aussi recouvrée. Donc A est recouvrée. Le théorème 5 est démontré.

Hormis le résultat de Marchildon et al., il ressort de ces théorèmes, en particulier des théorèmes 1 et 5, deux autres résultats essentiels:

a) Si on ajoute au groupe $L_+^{\uparrow}$ une transformation de la forme

$$x'_\alpha = \frac{\Lambda_{\alpha\beta}\, x_\beta}{1 + W_\gamma\, x_\gamma}$$

où $\Lambda_{\alpha\beta} \in L_+^{\uparrow}$, on génère un groupe à dix paramètres indépendants. On vérifie facilement que les lois de la commutation sont les mêmes que celles du groupe de Poincaré, c'est-à-dire que les deux groupes sont localement isomorphes.

b) Si on ajoute à $L_+^{\uparrow}$ une transformation de la forme

$$x'_\alpha = \frac{A_{\alpha\beta}\, x_\beta}{1 + W_\gamma\, x_\gamma}$$

où $A_{\alpha\beta} \in SL(4,R)$, on génère un groupe à dix-neuf paramètres indépendants dont SL(4,R) est un sous-groupe. Remarquons que la contrainte plus large $\mathrm{Det}\,|A_{\alpha\beta}| = \pm 1$ implique que SL(4,R), l'ensemble des transformations linéaires de déterminant égal à $\pm$ 1, est généré.*

Nous verrons dans la section VI quelles conclusions découlent de ces résultats.

---

* Ces résultats ont fait l'objet d'un article par J. Gauthier et L. Marchildon, "Constraints on Nonlinear Extensions of the Lorentz Group" (soumis pour publication). Les résultats de cette section y sont déduits d'une manière différente.

CHAPITRE V

TRANSFORMATIONS TRANSFORMANT LE REPOS EN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

Le résultat de Schwartz (1962) que nous avons résumé à la section II, révèle que si on exige des transformations entre deux référentiels S et S' qu'elles conservent la vitesse relative entre deux objets, c'est-à-dire qu'elles transforment tout mouvement rectiligne uniforme de vitesse V dans S en un mouvement rectiligne uniforme de vitesse V' dans S', avec V' fonction de V seulement, alors ces transformations doivent être linéaires. Cette propriété définit habituellement ce qu'on entend par mouvement relatif uniforme entre deux systèmes de référence S et S'.

Une importante propriété des transformations linéaires est qu'elles transforment le repos dans S en un mouvement rectiligne uniforme à vitesse V' dans S', avec V' indépendant de la position du point considéré dans S, et fonction de V seulement. Les transformations ayant cette propriété forment certainement un ensemble différent et plus vaste que les transformations linéaires. Cette propriété, moins contraignante que la première (préservation de la vitesse relative entre deux objets) semble également correspondre au concept de mouvement relatif uniforme entre deux systèmes de référence.

Nous proposons donc une nouvelle définition du mouvement relatif uniforme entre deux systèmes de référence S et S': nous dirons que S et S' se déplacent l'un par rapport à l'autre à une vitesse constante si la ligne d'univers de tout point au repos dans S est transformée dans S' en un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse V indépendante de la position du point dans S.

Nous exigeons bien sûr que ces transformations soient invertibles, c'est-à-dire que tout point au repos dans S' soit transformé dans S en un mouvement rectiligne uniforme à vitesse u indépendante de la position du point dans S', en ne supposant au départ aucune relation entre u et V.

Considérons deux systèmes S et S'. Soient $x_i\,(i = 1,2,3)$ et τ respectivement les coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle d'un événement dans S et $x'_i\,(i = 1,2,3)$ et τ' les coordonnées dans S'. Les transformations les plus générales entre S et S' peuvent s'écrire

$$
\begin{aligned}
x'_i &= f_i(x_j, \tau) \\
\tau' &= g(x_j, \tau)
\end{aligned}
\qquad (5.1)
$$

Nous voulons trouver les fonctions f_i et g les plus générales telles que

i) $\vec{x}' = \vec{c}'$ implique $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}\tau$ où $\vec{c}'$, $\vec{x}_0$ et $\vec{v}$ sont constants.

ii) $\vec{x} = \vec{c}$ implique $\vec{x}' = \vec{x}'_0 + \vec{u}\tau'$ où $\vec{c}$, $\vec{x}'_0$ et $\vec{u}$ sont constants.

Pour satisfaire au concept de mouvement relatif uniforme, nous imposons que $\vec{v}$ soit indépendant de $\vec{c}'$ et $\vec{u}$ indépendant de $\vec{c}$. Notons qu'il n'y a aucune relation à priori entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La condition i) signifie que $dx'_i = 0$ implique $d(x_j - v_j\tau) = 0$. Soit $\vec{r} = \vec{x} - \vec{v}\tau$ et posons

$$f_i(x_j, \tau) = f^*(r_j, \tau) \tag{5.2}$$

Les équations (5.1), (5.2) et $dx_i = 0$ donnent

$$\sum_j \frac{\partial f_i^*}{\partial r_j} dr_j + \frac{\partial f_i^*}{\partial \tau} d\tau = 0 \tag{5.3}$$

On voit que $dr_j = 0$ pour tout j si et seulement si

$$\frac{\partial f_i^*}{\partial \tau} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Det}\left|\frac{\partial f_i^*}{\partial r_j}\right| \neq 0 \tag{5.4}$$

Nous avons donc

$$x'_i = f_i^*(r_j) = f_i^*(x_j - v_j\tau) \tag{5.5}$$

Les équations (5.1) deviennent

$$x'_i = f_i(x_j - v_j \tau)$$
$$\tau' = g(x_j, \tau) \tag{5.6}$$

D'autre part, la condition ii) signifie que $\vec{x} = \vec{c}$ implique $d\vec{x}'/d\tau' = \vec{u}$. Nous avons

$$\left(\frac{dx'_i}{d\tau'}\right)_{\vec{x}=\vec{c}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \tau}\right)_{\vec{x}=\vec{c}} \left(\frac{\partial g}{\partial \tau}\right)^{-1}_{\vec{x}=\vec{c}} = u_i \tag{5.7}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \tau}\right)_{\vec{x}=\vec{c}} = u_i^{-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \tau}\right)_{\vec{x}=\vec{c}} \tag{5.8}$$

Il n'y a pas de sommation sur i et (5.8) est valide pour $i = 1, 2, 3$. L'intégration de (5.8) donne

$$g(x_j, \tau) = u_i^{-1} f_i(x_j - v_j \tau) + F_i(x_j) \tag{5.9}$$

Comme cette équation est valide pour $i = 1, 2, 3$, il y a des contraintes sur les fonctions $F_i(x_j)$. Par exemple:

$$u_1^{-1} f_1(\vec{x} - \vec{v}\tau) - u_2^{-1} f_2(\vec{x} - \vec{v}\tau) = F_2(x) - F_1(x) \tag{5.10}$$

Une remarque s'impose: on voit que si dans (5.10) on fait varier

$\vec{x} - \vec{v}\tau$ en gardant $\vec{x}$ constant et en faisant varier τ , f_1 et f_2 varient alors que $F_1(x)$ et $F_2(x)$ doivent rester constants. Cette contradiction ne peut être levée qu'en imposant aux F_i d'être fonctions seulement de $\vec{x}_\perp$, la composante de $\vec{x}$ perpendiculaire à $\vec{V}$. En effet quand τ varie dans l'expression $\vec{x} = \vec{a} + \vec{v}\tau$ ou $\vec{a}$ est un vecteur constant, seule la composante parallèle à $\vec{v}$, $\vec{x}_{\parallel}$, varie. Les fonctions f_i peuvent être considérées comme des fonctions de $\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}\tau$ et $\vec{x}_\perp$. Nous pouvons donc écrire:

$$u_2^{-1} f_2(\vec{x} - \vec{v}\tau) = u_1^{-1} f_1(\vec{x} - \vec{v}\tau) + F(\vec{x}_\perp) \tag{5.11}$$

et de façon similaire

$$u_3^{-1} f_3(\vec{x} - \vec{v}\tau) = u_1^{-1} f_1(\vec{x} - \vec{v}\tau) + F^*(\vec{x}_\perp) \tag{5.12}$$

$F(\vec{x}_\perp)$ et $F^*(\vec{x}_\perp)$ sont deux fonctions arbitraires de $\vec{x}_\perp$. Les fonctions f_1, f_2 et f_3 peuvent être considérées comme les composantes d'un vecteur:

$$\vec{f}(\vec{x} - \vec{v}\tau) = f_1\hat{i} + f_2\hat{j} + f_3\hat{k} \tag{5.13}$$

Substituant les équations (5.11), (5.12) dans (5.13), il vient:

$$\vec{f}(\vec{x} - \vec{v}\tau) = u_1^{-1}\vec{u} f_1(\vec{x} - \vec{v}\tau) + u_2\hat{j}F(\vec{x}_\perp) + u_3\hat{k}F^*(\vec{x}_\perp) \tag{5.14}$$

La composante du vecteur $u_2\hat{j}F + u_3\hat{k}F^*$ qui est parallèle à $\vec{u}$ peut être incorporée au premier terme du côté droit de l'équation (5.14). Nous obtenons:

$$\vec{f}(\vec{x}-\vec{v}\tau) = \hat{u}\, f(\vec{x}-\vec{v}\tau) + \vec{F}(\vec{x}_\perp) \tag{5.15}$$

où $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{x}_\perp$ est perpendiculaire à $\vec{v}$. Le Jacobien $[\partial f_i/\partial x_j]$ est différent de 0 si et seulement si $\partial f/\partial x_\parallel \neq 0$ et le Jacobien de $\vec{F}$ par rapport à $\vec{x}_\perp$ est différent de 0.

Il est possible d'exprimer plus simplement la fonction $g(x_j,\tau)$ donnée par l'équation (5.9), laquelle implique

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1^2\, g(x_j,\tau) &= \hat{u}_1^2 \left[u_1^{-1} f_1(\vec{x}-\vec{v}\tau) + F_1 \right] \\
\hat{u}_2^2\, g(x_j,\tau) &= \hat{u}_2^2 \left[\hat{u}_2^{-1} f_2(\vec{x}-\vec{v}\tau) + F_2 \right] \\
\hat{u}_3^2\, g(x_j,\tau) &= \hat{u}_3^2 \left[u_3^{-1} f_3(\vec{x}-\vec{v}\tau) + F_3 \right]
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Faisant la somme des équations 5.16, il suit:

$$\hat{u}^2\, g(x_j,\tau) = u^{-1}(\hat{u}_1 f_1 + \hat{u}_2 f_2 + \hat{u}_3 f_3) + \hat{u}_1^2 F_1 + \hat{u}_2^2 F_2 + \hat{u}_3^2 F_3 \tag{5.17}$$

$$g(x_j,\tau) = u^{-1}\hat{u}\cdot\vec{f} + G(\vec{x}) \tag{5.18}$$

où $G(\vec{x})$ est une fonction quelconque de $\vec{x}$.

Les transformations (5.1) deviennent finalement:

$$\vec{x}' = \hat{u}\, f(\vec{x} - v\vec{\tau}) + \vec{F}(\vec{x}_\perp)$$
$$\tau' = u^{-1} f(\vec{x} - \vec{v}\tau) + G(\vec{x}) \qquad (5.19)$$

Ici u est la grandeur du vecteur $\vec{u}$, $\hat{u}$ est un vecteur unitaire dans la direction de $\vec{u}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs constants arbitraires. Pour que les transformations (5.19) aient une inverse, il faut que $\partial G / \partial x_\parallel \neq 0$. En effet, posons $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}\tau$ et $\partial G/\partial x_\parallel = 0$. Alors $dx_\perp = 0$. Les équations (5.19) impliquent $dx' = d\tau' = 0$, ce qui donne une vitesse $\vec{u} = d\vec{x}'/d\tau'$ non définie. On peut montrer que le Jacobien est nul quand $\partial G/\partial x_\parallel = 0$.

Les seules contraintes sur les fonctions f, G et $\vec{F}$ sont $\partial f/\partial x_\parallel \neq 0$, $\partial G/\partial x_\parallel \neq 0$, et $[\partial \vec{F}/\partial \vec{x}_\perp] \neq 0$, où $[\partial \vec{F}/\partial \vec{x}_\perp]$ est le Jacobien de $\vec{F}$ par rapport à $\vec{x}_\perp$. Hormis ces contraintes, f et G sont deux fonctions arbitraires de trois variables et $\vec{F}$ est une fonction vectorielle (à deux dimensions) arbitraires de deux variables $\vec{x}_\perp$.

Les transformations (5.19) sont les transformations les plus générales qui transforment le repos en mouvement rectiligne uniforme à vitesse fixe. Cependant en général, elles ne transforment pas le mouvement rectiligne uniforme en mouvement rectiligne uniforme. En effet, on peut montrer que toutes les transformations du type (4.16) transforment le mouvement rectiligne uniforme en mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse fonction de la position (fixe) quand tous les w_γ sont nuls. La plupart des éléments non linéaires de (5.19) ne transforment pas le mouvement rectiligne uniforme en mouvement rectiligne uniforme.

Qu'arrive-t-il si on ajoute au groupe de Lorentz une transformation du type (5.19)? Soit Σ l'ensemble des transformations (5.19). Il est clair que $L_+^\uparrow$ est un sous-ensemble de Σ . Existe-t-il un sous-ensemble H de Σ formant un groupe et contenant $L_+^\uparrow$? Non, d'après le théorème suivant:

Théorème: Soit Σ l'ensemble de toutes les transformations des coordonnées qui font correspondre au repos un mouvement rectiligne uniforme. Soit $\mathscr{S}$ un élément de Σ . Si le produit de $\mathscr{S}$ avec un élément arbitraire de $L_+^\uparrow$ appartient à Σ , alors $\mathscr{S}$ est le produit d'une transformation linéaire et d'une translation dans l'espace-temps.

Preuve: Soit $\vec{X}_0$ et $\vec{V}_1$ deux vecteurs constants. Soit $\mathscr{S}\{\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{V}_1\tau\}$ l'ensemble des points de l'espace-temps qui sont l'image sous $\mathscr{S}$ d'un point appartenant à la droite $\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{V}_1\tau$. Supposons $|\vec{V}_1| < c$. Précisons que $\vec{V}_1$ n'est pas le paramètre de la transformation $\mathscr{S}$, lequel peut être supraluminal. $\vec{V}_1$ n'est que le paramètre d'une droite dans l'espace-temps. Il existe une transformation $M^{-1} \in L_+^\uparrow$ qui fait correspondre à la droite $\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{V}_1\tau$ un point au repos, $\vec{X}'' = \vec{X}_0''$, de sorte que

$$M^{-1}\left\{\vec{X} = \vec{X}_0 + \vec{V}_1\tau\right\} = \left\{\vec{X}'' = \vec{X}_0''\right\} \qquad (5.20)$$

Par hypothèse, $\mathcal{S}M$ appartient à Σ. Il existe donc un vecteur constant $\vec{w}$ tel que $\mathcal{S}M$ transforme le repos en un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse $\vec{w}$:

$$\mathcal{S}M\{\vec{x}'' = \vec{x}_0''\} = \{\vec{x}' = \vec{x}_0 + \vec{w}\tau\} \tag{5.21}$$

Les équations (5.20) et (5.21) impliquent:

$$\mathcal{S}\{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_1\tau\} = \mathcal{S}MM^{-1}\{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_1\tau\}$$

$$= \mathcal{S}M\{\vec{x}'' = \vec{x}_0''\} = \{\vec{x}' = \vec{x}_0' + \vec{w}\tau\}$$

Le résultat est que $\mathcal{S}$ transforme toute ligne droite avec $|\vec{v}_1| < c$ en une autre ligne droite avec une vitesse $\vec{w}$. Par conséquent, $\mathcal{S}$ est de la forme 4.1, c'est-à-dire qu'elle fait partie du groupe fractionnaire linéaire. De plus, $\mathcal{S}$ transforme toutes les droites ayant une même vitesse $\vec{v}_1$, en des droites ayant la même vitesse $\vec{w}$, c'est-à-dire préserve le mouvement relatif entre deux objets. Soit, en effet, Λ l'élément de $L_+^\uparrow$ qui transforme la droite $\vec{x} = \vec{x}_{01} + \vec{v}\tau$ en un point. Il vient:

$$\mathcal{S}\{\vec{x} = \vec{x}_{01} + \vec{v}_1\tau\} = \mathcal{S}\Lambda\Lambda^{-1}\{\vec{x} = \vec{x}_{01} + \vec{v}_1\tau\} = \mathcal{S}\Lambda\{\vec{x}' = \vec{a}\} = \{\vec{x}'' = \vec{x}_{01}'' + w\tau''\}$$

$$\mathcal{S}\{\vec{x} = \vec{x}_{02} + \vec{v}_1\tau\} = \mathcal{S}\Lambda\Lambda^{-1}\{\vec{x} = \vec{x}_{02} + \vec{v}_1\tau\} = \mathcal{S}\Lambda\{\vec{x}' = \vec{a} + \vec{h}\} = \{\vec{x}'' = \vec{x}_{02}'' + \vec{w}\tau''\}$$

où $\vec{h}$ est un vecteur constant. Donc $\mathcal{S}$ est de la forme (4.1) avec $W_\alpha = 0$ pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$. C.Q.F.D.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

Voyons maintenant les conséquences de cette étude. Le principe de relativité stipule que le groupe cinématique est un groupe de transformations reliant des systèmes équivalents. Le groupe de Lorentz a cette propriété, mais relie des systèmes subluminaux. Notre hypothèse fondamentale, dans ce travail, a été de postuler que toutes les transformations du groupe cinématique relient des systèmes équivalents, qu'elles soient subluminales ou supraluminales. Nous avons essayé de répondre à la question suivante: existe-t-il un groupe cinématique de transformations réelles, non linéaires et quadri-dimensionnelles reliant des systèmes équivalents, qu'ils soient subluminaux ou supraluminaux, et incluant $L_+^\uparrow$?

Une telle extension incluant $L_+^\uparrow$ ne nous permet pas de rechercher des transformations complètement arbitraires. Les transformations du groupe de Lorentz relient des systèmes de référence se déplaçant l'un par rapport à l'autre avec une vitesse constante. Une propriété de ces transformations est qu'elles conservent la rectilinéarité dans l'espace-temps. Une autre propriété est qu'elles transforment le repos en mouvement rectiligne uniforme entre deux systèmes de référence.

La première propriété nous a conduit au groupe fractionnaire linéaire, le plus vaste ensemble de transformations conservant la linéarité dans l'espace-temps. Avec l'hypothèse additionnelle que l'ensemble de toutes les transformations, subluminales ou supraluminales, forment un groupe de Lie, nous avons démontré que si on ajoute à $L_+^\uparrow$ une transformation quelconque du groupe fractionnaire linéaire, les plus petits groupes générés sont, ou bien un groupe (A) à dix paramètres, localement isomorphe au groupe de Poincaré, c'est-à-dire ayant les mêmes relations de commutations algébriques, ou bien un groupe (B) à dix-neuf paramètres, incluant SL(4,R) et le groupe (A).

Le groupe (A) n'est pas le groupe de Poincaré, bien que les relations de commutation soient les mêmes. Les éléments de ce groupe non compris dans $L_+^\uparrow$ correspondent aux paramètres W_γ des transformations (4.15). Les transformations non linéaires de ce groupe violent certaines symétries en physique comme les symétries de jauge, c'est-à-dire que les théories de jauge ne sont pas invariantes sous ce groupe.

Le groupe (B) à dix-neuf paramètres n'est pas plus acceptable car il comprend le groupe (A) et SL(4,R) et ce dernier implique de la même manière des symétries qui ne sont pas réalisées expérimentalement dans la mesure où les lois physiques telles que nous les connaissons sont correctes.

La seconde voie, dans laquelle nous avons considéré les transformations les plus générales transformant le repos en mouvement rectiligne uniforme, n'offre aucune possibilité d'extension non linéaire. Cet ensemble ne forme pas un groupe et inclut le groupe de Lorentz. Or nous avons démontré que si on exige de cet ensemble qu'il forme un groupe incluant $L_+^\uparrow$, tout élément de ce groupe est le produit d'une transformation linéaire et d'une translation dans l'espace-temps.

Certes, l'hypothèse que l'ensemble des transformations subluminales et supraluminales forment un groupe de Lie est très limitative, mais le principe de relativité élargie implique une exigence encore plus contraignante. Postuler que toutes les transformations, qu'elles soient subluminales ou supraluminales, relient des systèmes équivalents signifie non seulement que les lois gouvernant les tachyons (particules plus rapides que la lumière) dans leurs systèmes sont les mêmes que celles gouvernant les bradyons (particules moins rapides que la lumière) dans les leurs, mais aussi que chaque transformation, supraluminale ou subluminale, relie des systèmes équivalents. Autrement dit, c'est d'exiger que les symétries soient les mêmes pour tout le groupe.

Nos résultats apportent des contraintes qui limitent fortement les possibilités d'extension. Il faudrait peut-être affaiblir ou éliminer le principe de relativité élargie.

CHAPITRE VII

REFERENCES

Baird, L.C. (1976). Am. J. Phys., 44, 167.

Bateman, H. (1910). Proc. Lon. Math. Soc., 8, 223.

Berzi, V. et Gorini, V. (1969). J. Math. Phys., 10, 1518.

Briginshaw, A.J. (1980). Int. J. Math. Phys., 19, no 5, 329.

Cunningham, E. (1910). Proc. Lon. Math. Soc., 8, 77.

Drake, E. (1966). Am. J. Phys., 34, 899.

Einstein, A. (1905). "On the Electrodynamics of Moving Bodies", dans The Principle of Relativity (Dover, New-York, 1952).

Einstein, A. (1922). "The Meaning of Relativity", 5e édition (Princeton V. Press, Princeton, 1956).

Fock, V. (1964). "The Theory of Space-time and Gravitation", Ed. Permamon-Macmillan, New-York.

Frank, P. et Rothe, H. (1911). Am. Phys., 34, 825.

Gauthier, J. et Marchildon, L. "Constraints on Nonlinear Extensions of the Lorentz Group". XI^{e} congrès international de relativité générale et gravitation, Stockholm, 6-12 juillet 1986.

Gilmore, R. (1974). "Lie Groups, Lie Algebra, and Some of their Applications", John Wiley and Sons, New-York.

Gomes, L.R. (1935). Lincei Rend., 21, 433.

Gorini, V. (1971). Commun. Math. Phys., 21, 150.

Lalan, M.V. (1937). Bull. Soc. Math. Fr., 65, 83.

Landau, L. et Lifchitz, E. (1966). "Théorie du champ", Ed. Mir, Moscou.

Landau, R.V. et Sampanthar, S. (1972), Am. J. Phys., 44, 599.

Lee, A.R. et Kalotas, T.M. (1975), Am. J. Phys., 43, 434.

Levy-Leblond, J.M. (1976). Am. J. Phys., 13, 665.

Marchildon, L., Antippa, A.F., Everett, A.E. (1983), Phys. Rev. D, 27, 1740.

Mimura, Y. et Iwatsuki, T. (1931). J. Sc. Hiro. Univ. Al, 111.

Nanda, S. (1976). Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 79, 533.

Pauli, W. (1958). "Theory of Relativity", Ed. Perg., New-York.

Pars, L.A. (1921). Phil. Mag. S. 6, 42, 249.

Schwartz, H.M. (1962). Am. J. Phys., 30, 697.

Stiegler, K.D. (1952). Comptes rendus, 234, 1250.

Strauss, M. D. H. (1946). Nature, 157, 516.

Temple, G. (1938). Quat. J. Math., 9, 283.

Weinberg, S. (1972). "Gravitation and Cosmology", Wiley.

Weinstock, R. (1964). Am. J. Phys. 32, 261.

Weyl, H. "Mathematische Analyse des Raumproblems" (Berlin, Springer, 1923).

Zeeman, E.C. (1964). J. Math. Phys., 5, 490.