

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES.

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
APPLIQUÉES

PAR  
SOUFIA AMRANI

ESTIMATION DE LA VALEUR À RISQUE  
EN FINANCE

JUIN 2002

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

# Remerciements

J'aimerais avant tout exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche, le professeur Belkacem Abdous, pour avoir accepté de diriger ce travail et pour m'avoir encouragée et soutenue durant toutes ces années. Je le remercie aussi pour sa grande patience, son soutien financier et pour sa généreuse compréhension.

Je remercie également, le professeur Kilani Ghoudi pour ses bons conseils et son soutien surtout durant la dernière étape de mon travail, le professeur Mhamed Mesfioui pour sa gentillesse et ses encouragements ainsi que le professeur Ismaïl Biskri pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire et pour y avoir consacré autant de temps et d'attention.

Je désire présenter à la fin, ma reconnaissance à tous mes amis et collègues pour leur présence, leur aide et leur soutien dans mes moments les plus difficiles. Enfin un grand merci à mes très chers parents.

# Résumé

Introduite sur le marché en 1994 par la banque américaine JP Morgan, la Valeur à Risque a rapidement gagné la confiance des intervenants du monde bancaire et des marchés financiers. Cette méthodologie qui consiste à mesurer les risques de marché à l'aide des pertes potentielles, fait actuellement partie des outils standards de gestion des risques dans un grand nombre de banques. Cependant, sa dépendance de quelques hypothèses sur la distribution des rendements telle que l'hypothèse de normalité, a créé une certaine méfiance auprès des établissements financiers. Ce qui a encouragé la recherche de nouvelles techniques d'estimation de la Valeur à Risque.

Ce présent mémoire consiste à faire, dans un premier temps, une revue de littérature sur la méthodologie VaR, la problématique générale de sa construction, ainsi que les principales méthodes de son estimation. Par la suite, Nous introduirons une nouvelle technique d'estimation basée sur la méthode du noyau. Cette méthode est non paramétrique, elle permettra d'évaluer la Valeur à Risque quelque soit la nature de la distribution des rendements. La méthode du noyau dépend d'un paramètre de lissage qui joue un rôle important dans la qualité de l'estimation. Il existe de nombreuses méthodes pour choisir de façon optimale ce paramètre, nous en adapterons quelques unes au présent problème.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Avant-propos . . . . .	1
1.2 Quelques critiques . . . . .	2
1.3 Plan et contenu . . . . .	3
<b>2 La Valeur à Risque</b>	<b>5</b>
2.1 Définition . . . . .	5
2.2 Calcul de la Valeur à Risque . . . . .	6
2.2.1 Choix des paramètres . . . . .	8
2.2.2 Calcul de la VaR . . . . .	8
2.3 Problématique . . . . .	9
2.3.1 Modèles d'évaluation . . . . .	10
2.3.2 Historique . . . . .	12
2.3.3 Techniques d'estimation . . . . .	14
2.3.4 La distribution des pertes et profits . . . . .	14
<b>3 Techniques d'estimation</b>	<b>15</b>
3.1 La méthode paramétrique . . . . .	15
3.1.1 Méthodologie . . . . .	16
3.1.2 Estimation des paramètres . . . . .	20
3.1.3 Avantages et Inconvénients . . . . .	20
3.2 La méthode de simulation historique . . . . .	21
3.2.1 Principe de la méthode . . . . .	21
3.2.2 Estimation de la VaR par la méthode historique . . . . .	22
3.2.3 Avantages et inconvénients . . . . .	28
3.3 La méthode des valeurs extrêmes . . . . .	28
3.3.1 La méthode des extrêmes . . . . .	29
3.3.2 Théorie des valeurs extrêmes . . . . .	30
3.3.3 Estimation de la VaR par la méthode des extrêmes . . . . .	33
3.3.4 Estimation des paramètres . . . . .	35

3.3.5	Limitations de la théorie des valeurs extrêmes . . . . .	40
3.4	Méthode de simulation Monte Carlo . . . . .	41
3.4.1	Principe de la méthode . . . . .	41
3.4.2	Estimation de la VaR par la méthode Monte Carlo . . . . .	42
3.4.3	Avantages et inconvénients . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Méthode du noyau</b>	<b>46</b>
4.1	Définition . . . . .	46
4.2	Estimation du paramètre de lissage . . . . .	50
4.3	Estimation de la VaR par la méthode du noyau . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Étude comparative</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>66</b>
<b>7</b>	<b>Annexe</b>	<b>68</b>

# Liste des figures

2.1	Fonction de répartition de la variable perte $L_t$ . . . . .	7
2.2	Distribution des pertes et profits pour un niveau de confiance $\alpha = 95\%$ . . . . .	8
2.3	Problématique générale de l'obtention de la VaR . . . . .	9
3.1	Décomposition des flux financiers aux échéances standard . . . . .	18
3.2	Les séries historiques des variations des prix pour les obligations $O_1$ et $O_2$ . . . . .	25
3.3	Distribution des changements de valeur du portefeuille p. . . . .	28
3.4	Les fonctions de densités de Fréchet ( $\alpha = 1.5$ ), Gumbel ( $\alpha = 0$ ) et Weibull ( $\alpha = 1.5$ ) respectivement . . . . .	31
3.5	Convergence de la distribution exponentielle . . . . .	33
3.6	Convergence de la distribution exponentielle vers la distribution de Gumbel . . . . .	34
3.7	Quantiles de la distribution des valeurs extrêmes . . . . .	34
3.8	La fonction de distribution conditionnelle $F_u$ . . . . .	37
3.9	La distribution de Pareto généralisée $G_{\xi,\sigma}$ ( $\xi = -0.5, \xi = 0$ et $\xi = 0.5$ ) respectivement pour $\sigma = 1$ . . . . .	38
3.10	Simulation Monte Carlo . . . . .	41
4.1	Estimation à noyau de la densité basée sur cinq observations [54] . . . . .	47
4.2	La fonction quantile empirique. . . . .	54
4.3	Les rendements journaliers de l'indice S&P 500 . . . . .	58
5.1	Représentation des cinq lois de probabilité. . . . .	60
5.2	Les écarts absolus pour une loi Normale pour un seuil de confiance $p = 99\%$ . . . . .	61
5.3	Les écarts absolus pour une loi Student ( $v = 6$ ) pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ). . . . .	63
5.4	Les écarts absolus pour une loi Student ( $v = 3$ ) pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ). . . . .	64
5.5	Les écarts absolus pour une loi Pareto pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ). . . . .	64
5.6	Les écarts absolus pour une loi Gamma pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ). . . . .	65

# Liste des tableaux

2.1	Quantiles de la distribution normale . . . . .	10
2.2	Exemple d'un historique des taux de change USD/CAD . . . . .	13
3.1	Les variations relatives des prix. . . . .	24
3.2	Les changements des prix du portefeuille. . . . .	26
3.3	Les pertes et les niveaux de confiance correspondant . . . . .	27
4.1	Exemple de quelques poids $w_{i,n}$ . . . . .	55
5.1	Les moyennes des écarts absolus entre la VaR théorique et tous ces estimateurs, ainsi que les écarts-types correspondant présentés entre parenthèses. . . . .	62

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Avant-propos

La croissance des activités boursières et les exemples d'instabilité des marchés financiers comme les désastres financiers de Procter & Gamble, Barings et Orange County [33] ont encouragé grandement le développement de nouvelles techniques de mesure du risque.

En général, les risques auxquels les institutions financières peuvent faire face sont les suivants : le risque de liquidité, le risque de crédit, le risque de taux d'intérêt lié au désappariement des échéances, le risque de marché, le risque de change, les risques hors bilan et enfin le risque d'opération. Depuis une dizaine d'années et conformément à tous les développements de l'intermédiation financière<sup>1</sup>, la perception et la gestion des risques encourues par les institutions financières ont beaucoup changé.

La réflexion sur la mesure et le contrôle des risques a reçu une impulsion sur le plan de la supervision bancaire, avec la création du Comité de Bâle<sup>2</sup>, sous l'égide de la Banque des Règlements Internationaux (BRI).

En 1993, le Groupe des Trente, composé de banquiers, d'autorités de contrôle et d'académiciens, a publié un document qui recommandait notamment l'usage d'une nouvelle mesure de risque nommée Valeur à risque (*Value at Risk* en anglais) comme critère de mesure pour le risque de marché. Cet événement a concouru à l'adoption de cette nouvelle mesure sur le secteur financier et a favorisé son développement parmi les entreprises américaines.

En janvier 1996, le comité de Bâle a admis que les banques utilisent leurs propres modèles VaR internes et ce, dans le cadre des exigences réglementaires en fonds propres pour le risque de marché.

---

<sup>1</sup>Voir Annexe

<sup>2</sup>Voir Annexe

Très vite alors sont apparus de nouveaux fournisseurs de programmes de gestion des risques, exploitant *RiskMetrics<sup>TM</sup>*, un système qui a été mis à la disposition de tous sur Internet et gratuitement par la banque américaine J.P. Morgan, transformant ainsi cette méthodologie en référence incontournable.

En quelques années seulement, la VaR est devenue le plus populaire des outils de gestion du risque, et la réponse à la question que se posent la majorité des établissements financiers:

“Quelle serait la perte maximale que peut encourir  
une institution financière avec une probabilité  $\alpha$   
et pour un horizon de temps donné  $t$  ?.”

Dans le monde bancaire, la VaR permet d’optimiser la gestion des risques financiers dus aux opérations initiées par les salles de marché. Elle permet également de donner au client une image claire du risque qu’il peut encourir. Cette mesure de risque s’adresse ainsi :

- Aux professionnels de marchés : opérateurs de marché, gestionnaires de fonds privés, gestionnaires de fonds institutionnels et gestionnaires de fonds de pension,
- Aux gestionnaires des risques : responsables de la gestion des risques et du contrôle de la gestion des risques (middle-offices et back-offices),
- Aux institutionnels.
- Aux comptables.

En conclusion, nous pouvons dire que la VaR peut en théorie être utilisée pour la quantification des risques de marché, des risques de crédit, des risques de liquidité, des risques opérationnels. Toutefois, seule son application au risque de marché est aujourd’hui réellement opérationnelle.

## 1.2 Quelques critiques

La Valeur à Risque a été critiquée cependant par plusieurs auteurs : Tania Beder [6] a prouvé que le calcul de la Valeur à Risque est très dépendant des données, paramètres, hypothèses et méthodologies choisies.

Marshall et Siegel [37] montrent qu’un même modèle de la Valeur à Risque implanté par différents revendeurs donnent des résultats différents.

Philippe Jorion [33] confirme dans son étude que la plupart des séries financières présente une “kurtosis<sup>3</sup>” et propose d’utiliser la loi de Student à la place de la loi normale pour corriger cette “kurtosis”.

Selon McKay et Keefer [38], la Valeur à Risque ne tient pas compte des asymétries des marchés, e.g. un portefeuille peut être plus exposé aux profits qu’aux pertes, ou le contraire.

Duffie et Pan [18] critiquent l’hypothèse habituelle de la Valeur à Risque selon laquelle la distribution des variables est normale. Ils identifient des sauts et une volatilité stochastique comme causes possibles de la “kurtosis” de la distribution.

D’après Culp, Miller et Neves [14], la Valeur à Risque ne peut pas être utilisée pour tous les types d’entreprises. Ils soulignent que les firmes commerciales doivent se méfier de la Valeur à Risque, qui devrait être plutôt utile comme outil de diagnostic et de surveillance. Ils affirment aussi que la VaR ne représente pas un substitut pour une bonne gestion et un bon système d’information.

Toutes ces critiques ont participé au développement de la mesure VaR. En effet, elles ont contribué à la recherche de nouvelles approches, statistiques et économiques, afin d’obtenir une mesure de risque meilleure.

### 1.3 Plan et contenu

Dans ce mémoire nous allons définir la Valeur à Risque, la problématique générale de sa construction ainsi que les techniques classiques de son estimation. Au fur et à mesure, on va citer les forces et faiblesses de chacune de ces techniques. Ce travail est décomposé comme suit:

#### **Chapitre 2 : La Valeur à Risque**

Ce chapitre présente une revue de littérature portant sur la définition de la VaR ainsi que les différentes étapes associées à son calcul.

#### **Chapitre 3 : Techniques d’estimation**

Le chapitre 3 fera l’objet d’une étude détaillée des techniques d’estimation de la VaR. Des exemples seront présentés au besoin afin d’aider le lecteur à mieux comprendre la démarche de chaque méthode. Nous dévoileront au fur et à mesure les avantages ainsi que les limites de chacune de ces approches.

---

<sup>3</sup>Caractère de forme d’une courbe de distribution.

**Chapitre 4 : Techniques d'estimation**

Dans ce chapitre, nous introduirons la méthode du noyau. On va d'abord définir la méthode, ensuite on va l'appliquer pour l'évaluation de la VaR. Les limites de cette méthode seront présentées à la fin.

**Chapitre 5: Étude Comparative**

Cette partie consiste à faire une étude comparative des cinq techniques d'estimation présentées dans les chapitres précédent. Dans le cadre de cette étude, nous allons considérer différents cas de distributions suivant le niveau d'épaisseur des queues. La connaissance de la distribution va nous permettre de connaître la VaR théorique pour chaque loi étudiée. Ainsi, les écarts absolues de la vraie VaR(théorique) et de ces estimations vont nous donner une idée claire sur la pertinence de chacune de ces approches.

**Chapitre 5: Conclusion et perspectives**

Ce dernier chapitre consiste à donner une conclusion générale sur les méthodes d'estimation de la Valeur à Risque, ainsi qu'un résumé des résultats obtenus à partir de l'étude comparative.

## Chapitre 2

# La Valeur à Risque

### 2.1 Définition

La VaR, abréviation de Valeur à Risque, représente une méthodologie récente qui utilise des techniques statistiques, pour calculer la perte maximale probable due au risque de marché, sur un portefeuille donné.

À travers la littérature rattachée à notre sujet, la définition de la firme J.P. Morgan [34] est celle qui résume le mieux le concept de la VaR : *“La VaR est un estimé, avec un niveau de confiance prédéterminé, de combien peut-on perdre en gardant une position, durant un horizon donné”*.

Parmi les points positifs de la VaR, c’est qu’elle est une mesure adéquate pour différents types de risque, et tout particulièrement au risque de marché. En effet, elle peut être applicable non seulement pour un instrument financier tel qu’une action ou un swap de taux d’intérêt<sup>1</sup>, mais aussi pour un portefeuille qui peut contenir une variété d’instruments tout en tenant compte de leurs risques sous-jacents.

Il est aussi important de noter que la VaR tient compte de tous les facteurs de risques possibles (la volatilité, la corrélation, la convexité, le taux d’actualisation, etc.), sans oublier qu’elle est facile à comprendre pour les gestionnaires qui n’ont pas de connaissances précises sur le sujet.

Durant ces dernières années, la Valeur à Risque est devenue un indicateur de risque largement utilisé par les établissements financiers, elle permet en effet d’appréhender les risques de marchés de façon globale dans une unité de mesure commune; quelle que soit la nature des risques (taux, change, actions, ... etc.).

Cependant, la VaR est une mesure à très court terme et ne sert pas à déterminer la rentabilité d’une banque, mais plutôt à constituer des provisions, afin de pouvoir faire face aux éventuelles pertes journalières de la banque.

---

<sup>1</sup>Voir Annexe

## 2.2 Calcul de la Valeur à Risque

Comme il a été mentionné dans la section précédente, la VaR dépend de deux données essentielles : le niveau de confiance et l'horizon de temps :

- Le niveau de confiance représente la probabilité que le gestionnaire se fixe (en général supérieur à 95%) ce qui signifie que selon le modèle il y a 95% de chances que la perte encourue par la banque durant la période de détention soit inférieure au chiffre VaR.
- L'horizon de temps<sup>2</sup> représente la durée considérée, autrement : “le temps nécessaire pour déboucler des positions dans des univers dont la liquidité est assurée” (Demilie [46]).

L'équation générique de la Valeur à Risque peut être alors posée de la façon suivante:

$$\Pr[L_t \leq VaR] = \alpha, \quad (2.1)$$

où  $L_t$  représente la variable aléatoire perte. La VaR n'est alors que le quantile  $Q_\alpha$  de la variable perte  $L_t$ . L'équation (2.1) montre que la connaissance de la fonction de répartition est importante afin de déterminer la VaR. En effet :

$$VaR_\alpha = F_{L_t}^{-1}(\alpha)$$

où  $F_{L_t}(\cdot)$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $L_t$  et  $F_{L_t}^{-1}(\cdot)$  la fonction inverse associée, nommée aussi le quantile de  $L_t$ . Toutefois, la vraie distribution des rendements est rarement connue.

### Cas des rendements de loi normale

Dans le cas simple où les rendements d'un portefeuille sont distribués suivant une loi normale, la figure 2.1 montre que la VaR peut être extraite à partir du niveau de confiance requis. Il suffit d'associer pour chaque niveau de confiance, le quantile correspondant.

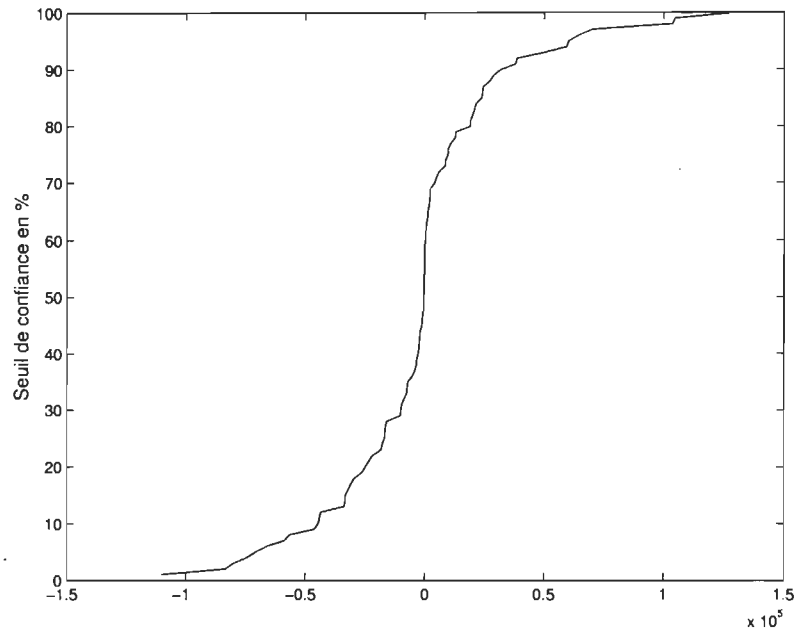
Cependant l'hypothèse de la normalité des rendements n'est pas toujours vérifiée, et les portefeuilles sont rarement linéaires. Si nous considérons le cas de portefeuilles non-linéaires comme le cas d'options, le calcul serait plus compliqué.

### Cas d'options

L'option est par définition un contrat donnant à l'acheteur le droit d'acheter ou de vendre, à un prix d'exercice stipulé d'avance, une certaine quantité d'un actif sous-jacent<sup>3</sup>, soit à une date déterminée, soit à n'importe quel moment avant une

<sup>2</sup>On trouve parfois l'appellation “période de détention” (holding period en anglais).

<sup>3</sup>Marchandise, valeur mobilière, titre, indice ou autre actif financier faisant l'objet d'un contrat d'option, d'un contrat à terme ou autre instrument financier dérivé.

Figure 2.1: Fonction de répartition de la variable perte  $L_t$ 

échéance préétablie.

L'ensemble des actifs sur lesquels peut porter un contrat d'option est très large (action, obligation, taux de change, matière première ou encore certains produits dérivés tels que les swaps ou les FRA).

Si nous prenons par exemple, la vente d'une option d'achat, cette opération est spéculative. En effet, le bénéfice se limitera à la prime si le prix du sous-jacent reste inférieur au prix d'exercice, alors que des pertes considérables pourront résulter d'une hausse plus importante du prix du sous-jacent. Cette opération n'est donc envisageable que si l'émetteur a une confiance absolue en la baisse du prix sous-jacent.

De plus, les options sont des instruments très volatiles et risqués. La relation qui existe entre la théorie des probabilités et le risque d'investissement donne la possibilité de quantifier le risque des options d'une façon précise.

De plus, tout changement d'une des variables des modèles d'évaluation (le taux d'intérêt, la volatilité du sous-jacent, ...) a une influence directe sur le prix de l'option. La sensibilité de la valeur de la prime à une variation des variables est une mesure de risque. C'est ce qu'on appelle généralement les "*grecques*" (*the greeks* en anglais).

### 2.2.1 Choix des paramètres

Le choix de l'horizon de temps correspond en principe aux intervalles d'évaluation de la performance de l'entreprise, ou aux périodes de décisions relatives à la gestion des risques. La Valeur à Risque peut être calculée pour différents horizons de risque (une journée, une semaine, un mois, un trimestre, etc.).

En pratique, le choix du niveau de confiance dépend de plusieurs facteurs. Nous pouvons citer parmi d'autres, le niveau d'aversion au risque des gestionnaires, la réserve en capital de la banque et la stratégie d'investissement.

Pour un horizon de temps donné et un niveau de confiance prédéterminé, le calcul de la VaR est relativement simple dans le cas où la distribution des rendements de l'instrument ou du portefeuille en question est connue. Ainsi, le calcul de la VaR dépend d'une bonne estimation de la fonction de répartition de la variable perte  $L_t$ .

### 2.2.2 Calcul de la VaR

Calculer la Valeur à Risque nécessite trois grandes étapes importantes:

- La spécification d'un horizon temporel, c'est à dire la période de temps utilisée pour l'échantillonnage des variables.
- L'identification des différents facteurs de risque auxquels s'expose le portefeuille.
- La génération de la distribution des changements des valeurs du portefeuille (distribution des pertes et profits).

La Valeur à Risque serait alors le point en deçà duquel se situent les pertes potentielles (voir Figure 2.2).

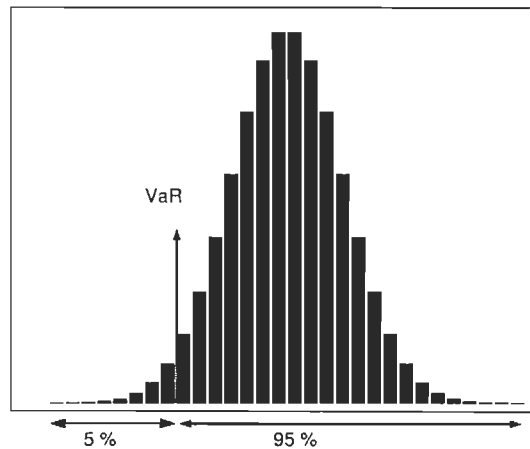


Figure 2.2: Distribution des pertes et profits pour un niveau de confiance  $\alpha = 95\%$ .

## 2.3 Problématique

L'étape critique dans la détermination de la VaR, est l'obtention de la distribution des changements de valeurs du portefeuille (i.e. la distribution des pertes et profits potentiels). La Figure 2.3 illustre la problématique générale du calcul de la VaR.

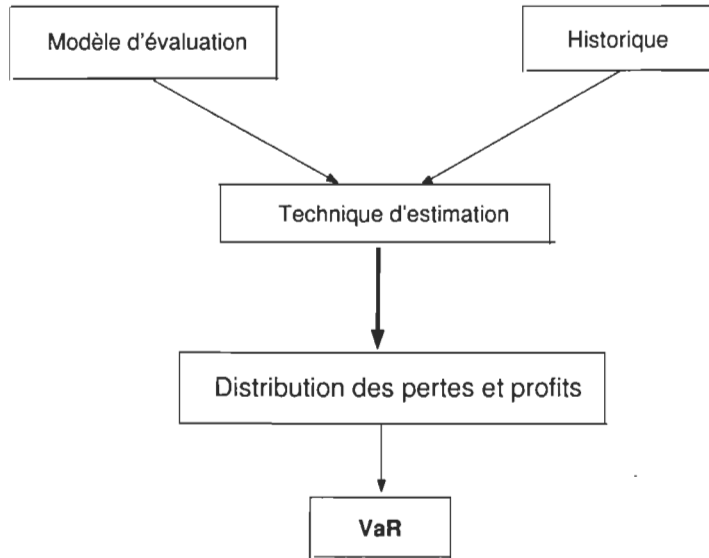


Figure 2.3: Problématique générale de l'obtention de la VaR

Dans ce qui suit, nous examinerons de plus près, les différentes étapes de cette problématique.

Étudions d'abord le cas simple où la variable aléatoire perte  $L_t$  suit une loi normale<sup>4</sup> de moyenne  $E(L_t)$  et de variance  $\sigma^2(L_t)$ . D'après la définition générale de la VaR, nous avons :

$$\Pr[L_t \leq VaR_\alpha] = \alpha,$$

nous pouvons aussi écrire :

$$\Pr \left[ \frac{L_t - E(L_t)}{\sigma(L_t)} \leq \frac{VaR_\alpha - E(L_t)}{\sigma(L_t)} \right] = \alpha$$

L'expression

$$\frac{VaR_\alpha - E(L_t)}{\sigma(L_t)}$$

<sup>4</sup>L'hypothèse de normalité n'est pas toujours valable. Pour les rendements quotidiens des actions tout particulièrement, des distributions leptocurtiques (Pareto ou de Student) auraient pu être mises en évidence.

représente le quantile de la distribution normale réduite, que nous allons noter dorénavant par  $z_\alpha$ :

$$z_\alpha = \frac{VaR_\alpha - E(L_t)}{\sigma(L_t)}$$

Ainsi

$$VaR_\alpha = E(L_t) + z_\alpha \sigma(L_t) \quad (2.2)$$

Les valeurs du quantile  $z_\alpha$  se trouvent dans les tables de la distribution normale [42], voici quelques exemples de ces valeurs:

$\alpha$	$z_q$
0.500	0.0000
0.600	0.2533
0.700	0.5244
0.800	0.8416
0.850	1.0364
0.900	1.2816
0.950	1.6449
0.960	1.7507
0.970	1.8808
0.975	1.9600
0.980	2.0537
0.985	2.1701
0.990	2.3263
0.995	2.5758

Tableau 2.1: Quantiles de la distribution normale

Considérons par exemple le cas d'un titre qui donne un bénéfice moyen d'une valeur égale à 100 \$ et un écart-type d'une valeur de 80 \$, nous aurions alors

$$VaR_{0.95} = -100 + (1.6449 \cdot 80) = 31.6.$$

Cela signifie, que la perte encourue par ce titre ne dépassera 31.6\$ que 5 fois sur 100.

### 2.3.1 Modèles d'évaluation

Les méthodes d'estimation de la distribution des pertes et profits utilisent souvent des modèles d'évaluation, exprimant le prix des actifs financiers  $p$  d'un portefeuille en fonction des différents facteurs de risque  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$p = f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \epsilon \quad (2.3)$$

Ces modèles d'évaluation peuvent être :

- Linéaires : actions (e.g. le modèle CAPM<sup>5</sup> (Capital Asset Pricing Model))
- Non-linéaires : bons, obligations, options, swaps<sup>6</sup> de taux d'intérêts.

### Modèles linéaires

Soit  $p_t$  le prix d'un actif à l'instant  $t$ . Dans le cas linéaire, la variation du prix  $\Delta^t p$  est une fonction du 1<sup>ier</sup> degré des variations  $(\Delta X_i)_{i=1,\dots,n}$  des différents facteurs de risque et de celle du résidu  $\Delta\epsilon$  :

$$\Delta p = a + b\Delta X + \Delta\epsilon.$$

En supposant que les  $(\Delta X_i)_{i=1,\dots,n}$  et  $\Delta\epsilon$  ne sont pas corrélés et que la moyenne  $E(\Delta\epsilon) = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} E(\Delta p) &= a + bE(\Delta X), \\ \text{var}(\Delta p) &= b^2 \text{var}(\Delta X) + \text{var}(\Delta\epsilon). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} E(\Delta X) &= E_X, \\ \text{var}(\Delta X) &= \sigma_X^2, \\ \text{var}(\Delta\epsilon) &= \sigma_\epsilon^2, \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(\Delta p) &= a + bE_X, \\ \text{var}(\Delta p) &= b^2\sigma_X^2 + \sigma_\epsilon^2. \end{aligned}$$

Si la variable perte, étant  $L_t = -\Delta p$ , suit une loi normale, alors la VaR pour un niveau de confiance  $\alpha$  est donnée par

$$\text{VaR}_\alpha = -a - bE_X + z_\alpha \sqrt{b^2\sigma_X^2 + \sigma_\epsilon^2}$$

### Exemple : le modèle Sharpe

Considérons l'exemple du modèle à indice simple de Sharpe pour les actions [48]. Ce modèle suppose que la variation du prix d'une action est une fonction du premier degré de la variation d'un indice général du marché  $X$  :

$$\Delta I = \alpha + \beta\Delta X + \Delta\epsilon,$$

où  $I$  représente l'indice. Le coefficient  $\beta$ <sup>7</sup> mesure la sensibilité de l'action par rapport à l'indice, cela signifie que plus  $\beta$  est grand, plus une variation sur le marché

---

<sup>5</sup>Voir annexe

<sup>6</sup>Voir Annexe

<sup>7</sup>Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  s'évaluent par une méthode de régression

sera répercutée sur le prix de l'action.

Avec ce modèle, on trouve facilement les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} E(\Delta I) &= \alpha + \beta E_X, \\ \text{var}(\Delta I) &= \beta^2 \sigma_X^2 + \sigma_\epsilon^2. \end{aligned}$$

Comme  $\Delta I = -L_t$ , la relation (2.2) nous permet d'avoir:

$$VaR_\alpha = -\alpha - \beta E_X + z_\alpha \sqrt{\beta^2 \sigma_X^2 + \sigma_\epsilon^2}$$

### Modèles non-linéaires

Dans le cas le plus général, où la fonction  $f$  de la relation (2.3) est non-linéaire, la détermination de la moyenne et l'écart-type devient plus complexe.

Lorsque le temps n'est pas pris en considération, l'évaluation est faite à l'aide d'un développement de Taylor:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \sum_{i=1}^n f'_{X_i}(X_1, X_2, \dots, X_n) \Delta X_i \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f''_{X_i X_j}(X_1, X_2, \dots, X_n) \Delta X_i \Delta X_j \\ &+ \dots + \Delta \epsilon. \\ \Delta p &\approx \sum_{i=1}^n f'_{X_i}(X_1, X_2, \dots, X_n) \Delta X_i + \Delta \epsilon. \end{aligned}$$

Lorsque les variations des facteurs de risque sont faibles, nous pouvons négliger les termes du second ordre et plus. Par conséquent, nous retrouvons le cas d'un modèle linéaire.

Dans le cas d'actifs qui dépendent du temps, il est nécessaire de construire des modèles spécifiques qui tiennent compte de cette composante supplémentaire. À titre d'exemple, nous pouvons citer le modèle de *Black & Scholes* [10] pour les actifs optionnels.

### 2.3.2 Historique

L'historique représente les observations des prix des différents titres, pour un certain nombre de périodes passées. Le tableau (2.2) illustre un exemple d'un historique des taux de change (USD/CAD) durant le mois de février 2002.

Date	USD/CAD
2002-02-28	1.605132
2002-02-27	1.606660
2002-02-26	1.605506
2002-02-25	1.597662
2002-02-24	1.590717
2002-02-23	1.590717
2002-02-22	1.590717
2002-02-21	1.588668
2002-02-20	1.590758
2002-02-19	1.589277
2002-02-18	1.590591
2002-02-17	1.591269
2002-02-16	1.591269
2002-02-15	1.591269
2002-02-14	1.589670
2002-02-13	1.595006
2002-02-12	1.591454
2002-02-11	1.593700
2002-02-10	1.596796
2002-02-09	1.596796
2002-02-08	1.596796
2002-02-07	1.604571
2002-02-06	1.601916
2002-02-05	1.598641
2002-02-04	1.590352
2002-02-03	1.588160
2002-02-02	1.588160
2002-02-01	1.588160

Tableau 2.2: Exemple d'un historique des taux de change USD/CAD

### 2.3.3 Techniques d'estimation

Une fois le modèle spécifié et les rendements historiques obtenus, nous passons à la deuxième étape qui est l'application d'une méthode d'estimation.

Trois grandes méthodes classiques ont été mises en œuvre pour l'estimation de la distribution des pertes et profits :

1. La méthode paramétrique ou la méthode de la matrice des variances-covariances.
2. La méthode de simulation historique.
3. La méthode des valeurs extrêmes.
4. La méthode de simulation Monte Carlo.

Chacune de ces méthodes utilise les données du passé pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. Ceci suppose implicitement, que le futur se comporte comme le passé.

Nous pouvons ajouter que le résultat de chacune de ces méthodes est la distribution des pertes et profits qui va nous servir de base pour la déduction de la valeur de la VaR.

### 2.3.4 La distribution des pertes et profits

Soit  $p_t$  la valeur du portefeuille à l'instant  $t$  ( $t$  peut être une journée, dix jours, etc...), alors la variable

$$\Delta p = p_t - p_{t-1} \quad \forall t = -T, \dots, 0$$

représente les variations ou les changements de valeurs du portefeuille durant une certaine période  $T$ .

Notons par  $f_{\Delta p}$  la densité de probabilité de la variable  $\Delta p$ , et  $\alpha$  un intervalle de confiance quelconque. D'après l'équation (2.1), nous avons

$$\Pr[\Delta p \leq VaR] = \alpha$$

i.e.

$$\int_{-\infty}^{VaR} f_{\Delta p}(x) dx = \alpha.$$

Dans *RiskMetric*, J.P Morgan suppose que les rendements d'un portefeuille suivent une loi normale. Cette hypothèse simplifie énormément le calcul de la VaR. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Un contre-exemple est le cas d'option.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les grandes méthodes d'estimation de la Valeur à Risque, des exemples seront présentés au besoin. Les limites de chacune de ces méthodes seront présentées au fur et à mesure.

## Chapitre 3

# Techniques d'estimation

La construction de la distribution des pertes et profits représente l'étape importante dans le calcul de la VaR, elle peut être vue comme un processus à deux étapes:

D'abord, On génère la distribution des rendements pour chaque titre individuel dans le portefeuille; ces distributions représentent les changements de valeurs possibles dans toutes les composantes des actifs sous l'horizon du risque.

Ensuite, les distributions individuelles doivent être agrégées dans une seule distribution en utilisant les mesures appropriées de covariance telle que la corrélation. La distribution résultante du portefeuille sert par la suite comme base pour la mesure de la VaR globale.

Les méthodes de génération des distributions des actifs individuels ou celle du portefeuille global, varient de la méthode la plus simple à la plus complexe. Les plus réalistes des approches de mesure de la VaR, sont issues d'une réévaluation de tous les actifs dans un portefeuille, pour les scénarios de risque de marché. Ces méthodes de réévaluation globales peuvent être par contre très coûteuses à réaliser.

D'un autre côté, il existe des méthodes plus simples, qui se basent sur des hypothèses statistiques leur permettant ainsi de diminuer la taille de la base de données et les coûts d'utilisation.

### 3.1 La méthode paramétrique

La méthode paramétrique ou la méthode des variances-covariances a été proposée et développée par J.P. Morgan en 1994. C'est un modèle statistique qui suppose que les changements des prix d'un portefeuille sont distribués selon une loi normale.

J.P Morgan et Reuters<sup>1</sup> ont simplifié énormément le calcul de la VaR avec la conception d'un algorithme nommé RiskMetrics basé sur la méthode des variances-

---

<sup>1</sup>le groupe d'information financière.

covariances.

En effet, le système RiskMetrics fournit trois collections de données : la première applicable pour les estimations de risque d'un horizon de plus de 24 heures, la deuxième pour un horizon d'un mois et la dernière est celle qui a été développée, pour satisfaire aux dernières propositions de la Banque de Règlements Internationaux (BRI), dans l'utilisation des modèles internes d'estimation du risque de marché.

En 1994, RiskMetrics a été mis gratuitement à la disposition du public sur Internet. Il fournissait les données financières et les outils nécessaires pour les calculs journaliers de la VaR d'un portefeuille.

Ainsi, Les entreprises et les établissements financiers avaient la possibilité d'utiliser le calculateur de la VaR, et même de télécharger les données sur leurs propres systèmes de gestion des risques. Cet événement a encouragé les institutions financières et tout particulièrement les banques, à l'utiliser et à approuver son développement.

### 3.1.1 Méthodologie

Les trois étapes importantes dans la méthode des variances-covariances sont

1. Le relevé des facteurs de risque;
2. La décomposition des flux financiers<sup>2</sup>(*Mapping* en anglais);
3. Le calcul de la Valeur à Risque.

Nous pouvons noter qu'un facteur de risque peut représenter n'importe quelle variable du marché dont la volatilité est une source de risque. On peut citer parmi d'autres:

- Taux de Change;
- Les taux d'intérêts;
- Les cours des actions;
- ...

#### Étape 1

La première étape consiste à relever les facteurs de risque auxquels s'expose le portefeuille et dans certain cas, les transformer en combinaisons linéaires d'un certain nombre de facteurs de risque, faciles à mesurer et pour lesquels la variance (et

---

<sup>2</sup>Cash flows

par suite la VaR) peut être aisément calculée.

Chacun de ces facteurs représente un flux financier, caractérisé par un certain montant, exprimé dans une certaine devise et payé à une date précise.

Le choix des facteurs de risque dans la méthode des variances-covariances est quelque peu arbitraire. Cependant, il est exposé au dilemme suivant : “la représentation d’un actif par de nombreux risques élémentaires, assure une grande précision des résultats, cependant c’est coûteux en moyens de calcul et en données nécessaires pour alimenter le modèle”.

## Étape 2

La connaissance de la variance de chacun des flux financiers et toutes les covariances deux à deux, est nécessaire dans le calcul de la VaR. Donc, si nous prenons en considération toutes les différentes dates possibles, le traitement des données serait beaucoup trop volumineux.

La deuxième étape consiste alors à la répartition des différents flux financiers sur un ensemble prédéterminé des 14 échéances<sup>3</sup> standard (1 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 7 ans, 9 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans et 30 ans).

Pour un flux financier survenant entre deux échéances standard, il convient de le répartir entre ces deux échéances.

## Exemple

Considérons en ce moment présent, un flux financier d’une valeur  $V = 10.000\$$ , et dont l’échéance est de  $t_0 = 11$  ans. Les échéances standards voisines sont  $t_1 = 10$  ans et  $t_2 = 15$  ans. Supposons que les taux d’intérêt pour ces deux durées sont  $r_{10} = 6\%$  et  $r_{15} = 7\%$  respectivement.

Par une interpolation linéaire, nous déterminons le taux d’intérêt qui correspond à l’échéance  $t_0 = 11$  ans ( $r_{11} = 6.4\%$ ). La valeur actuelle du flux financier  $V_0$  est donné par la relation suivante

$$\begin{aligned} V_0 &= V(1 + r_{11})^{-t_0} \\ &= 10.000(1 + 0.064)^{-11} \\ &= 5054.1. \end{aligned}$$

Les valeurs des flux financiers associés aux échéances  $t_1$  et  $t_2$  peuvent être calculées en procédant par une décomposition élémentaire, basée sur les principes les plus courants du calcul financier. Elle impose en effet les deux hypothèses suivantes:

---

<sup>3</sup>vertices en anglais.

- La conservation de la valeur actuelle

$$V_0 = V_1 + V_2$$

- La conservation de la durée<sup>4</sup>

$$t_0 V_0 = t_1 \cdot V_1 + t_2 \cdot V_2$$

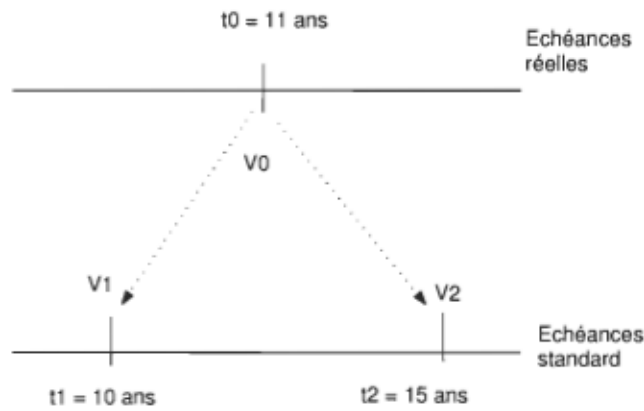


Figure 3.1: Décomposition des flux financiers aux échéances standard

À partir des deux formules précédentes nous retrouvons :

$$V_1 = \frac{t_2 - t_0}{t_2 - t_1} \cdot V_0 \quad V_2 = \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} \cdot V_0$$

ainsi, en appliquant ces deux formules à notre exemple nous obtiendrons :

$$V_1 = \frac{15 - 11}{15 - 10} \cdot 5054.1 = 4043.3$$

$$V_2 = \frac{11 - 10}{15 - 10} \cdot 5054.1 = 1010.8$$

### Étape 3

#### 1. Cas d'un seul facteur de risque

Prenons l'exemple d'un seul facteur de risque  $X$ , qui suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . D'après la relation (2.2) du premier chapitre nous avons

$$VaR = \mu + z_\alpha \sigma.$$

<sup>4</sup>Dans RiskMetrics J.P. Morgan utilise la conservation du risque i.e.:  $\sigma_0^2 V_0^2 = \sigma_1^2 V_1^2 + \sigma_2^2 V_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} V_1 V_2$ .

En pratique,  $\mu = 0$  et par conséquent

$$VaR = z_\alpha \sigma.$$

Ainsi pour un niveau de confiance de 95%

$$VaR(0.95) = 1.65\sigma.$$

## 2. Cas d'un portefeuille

Dans le cas d'un portefeuille, la VaR n'est autre que le produit de la volatilité du portefeuille et de sa valeur actuelle. Considérons par exemple un portefeuille  $p$  constitué de deux actifs A et B, nous avons

$$\sigma_P = \sqrt{a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2 + 2ab\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B},$$

où:

$\sigma_P$  = la volatilité du portefeuille.

$a, b$  = les proportions des actifs A et B dans le portefeuille.

$\sigma_A, \sigma_B$  = les volatilités des actifs A et B respectivement.

$\rho_{AB}$  = la corrélation entre les actifs A et B

Notons que  $a\sigma_A$  est la VaR de l'actif A<sup>5</sup>.

$$\begin{aligned}\rho_{AB} &= \text{corr}(A, B) \\ &= \frac{\text{cov}(A, B)}{\sigma_A \cdot \sigma_B}.\end{aligned}$$

Lorsque les deux actifs sont indépendants (i.e.  $\rho_{AB} = 0$ ), nous avons

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2}$$

Dans le cas général, la VaR d'un portefeuille P constitué de plusieurs actifs est donné par

$$p = \sqrt{\sum_i P_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_i \sum_j P_i P_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}$$

où  $i$  et  $j$  représentent l'ensemble des paires des actifs ou des facteurs de risque dans le portefeuille et  $P_i$ <sup>6</sup> la position du  $i^{\text{ième}}$  actif.

En pratique, la VaR d'un portefeuille est calculée par la formule suivante

$$VaR_p = \sqrt{V \cdot C \cdot V^T},$$

<sup>5</sup>D'après la définition de la VaR.

<sup>6</sup>Il peut aussi représenter la proportion.

où

$V$  : le vecteur des VaR de chacune des positions individuelles.

$C$  : la matrice des corrélations.

$V^T$  : la transposée de la matrice  $V$ .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.1.2 Estimation des paramètres

Parallèlement, il existe plusieurs façons d'estimer les variances dont on a besoin dans le calcul de la VaR, comme l'utilisation des méthodes des séries temporelles à variance conditionnelle. Le modèle le plus connu est le modèle ARCH [23], il est plus adapté au calcul de la volatilité changeante dans le temps. Ce genre de modèle a été construit pour dégager la persistance de la volatilité dans les séries temporelles.

Une autre façon d'estimer la variance, est l'approche de la moyenne mobile avec poids égaux (equally weighted moving average), les calculs dans cette méthode sont simples, puisque la variance est calculée en utilisant des poids égaux pour toutes les observations de la série historique.

J.P. Morgan dans son système *RiskMetrics<sup>TM</sup>* utilise la méthode de la moyenne mobile exponentielle (exponentially weighted moving average), qui permet aux récentes observations d'avoir plus d'influence dans le calcul que les observations du passé. Ceci a comme avantage de capter les chocs dans le marché avec une moindre volatilité de la variance.

La méthode de la moyenne mobile exponentielle utilisée par J.P. Morgan, n'est en fait qu'une dérivée de la méthode à variance conditionnelle ARCH pour estimer les variances. Plus précisément, cette méthode est l'équivalent de la méthode GARCH<sup>7</sup>(1,1) [16].

### 3.1.3 Avantages et Inconvénients

La méthode des variances-covariances est une approche simple, flexible et largement utilisée. Elle permet aussi d'ajouter les scénarios spécifiques et d'analyser la sensibilité des résultats tout en respectant les paramètres.

Cependant, elle est reliée complètement à l'hypothèse de normalité des paramètres du marché. Ainsi, dans le cas des portefeuilles non linéaires (constitués d'options

<sup>7</sup>Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

par exemple), cette méthode ne peut pas être directement utilisée.

Un autre problème avec l'application de cette approche est que la distribution historique des rendements du marché est loin d'être normale. Ce problème est bien connu et il est relié aux problèmes des queues épaisses.

La majorité des informations du marché utilisées dans cette approche se trouvent dans la matrice des variances-covariances. Toutes les données sont extraites à partir des données historiques. Une propriété importante de cette matrice est qu'elle doit être définie positive. Ainsi, à cause des hauts degrés des corrélations, chaque petite erreur dans les données peut lui faire perdre facilement cette propriété.

La procédure standard appliquée dans ce cas, est d'essayer de décomposer la matrice soit en valeurs propres, soit en valeurs singulières et de remplacer les petites valeurs négatives par des zéros.

Il existe des approches qui ne dépendent pas de l'hypothèse de la normalité des distributions. La simulation Monte Carlo et la simulation historique sont deux exemples d'approches alternatives à la méthode paramétrique.

## 3.2 La méthode de simulation historique

Contrairement à la VaR paramétrique, la VaR historique est entièrement basée sur les variations historiques des facteurs de risque. Supposons que nous disposions d'un historique de taille  $N$ . En  $t_0$ , on peut valoriser le portefeuille avec les facteurs de risque de l'historique, en calculant pour chaque date  $t = (t_0 - 1, \dots, t - N)$  une valeur potentielle du portefeuille. On détermine alors  $N$  variations potentielles.

Ainsi, à partir de l'historique, on construit implicitement une distribution empirique à partir de laquelle on peut extraire le quantile à  $x\%$ . Pour cela, il faut ranger les  $N$  pertes potentielles par ordre croissant et prendre la valeur absolue de la  $N^{(1-x)}$  i-ème plus petite valeur. Lorsque  $N^{(1-x)}$  n'est pas un nombre entier, il faut alors calculer la VaR par interpolation linéaire.

La méthode de simulation historique représente la méthode la plus simple des méthodes non-paramétriques. Elle a été introduite par *Chase Manhattan* [13] en 1995, avec les systèmes *Charisma<sup>TM</sup>* et *Risk<sup>TM</sup>*. Il s'agit d'une approche flexible et théorique qui exige peu d'hypothèses sur la distribution des rendements du portefeuille.

### 3.2.1 Principe de la méthode

Le principe consiste à observer d'abord le comportement historique de notre portefeuille durant les dernières années. Ensuite, mesurer les rendements journaliers

et les appliquer au portefeuille considéré. Enfin, mesurer les pertes et profits correspondants.

Plusieurs gestionnaires préfèrent utiliser les données historiques, plutôt que se baser sur un modèle statistique. Ainsi, au lieu d'utiliser les observations historiques pour calculer la variance du portefeuille, la simulation historique utilise les quantiles actuels comme mesure de la VaR.

Les changements des valeurs du portefeuille sont calculés pour chaque simulation, la VaR est donc calculée comme étant le fractile approprié des probabilités de la distribution des rendements du portefeuille.

Dans le cas d'un portefeuille constitué d'options, il n'est pas possible d'utiliser les prix historiques des options pour calculer la VaR, car par opposition aux actions, les options ont un terme limité dans le temps (échéance de vente ou d'achat d'actifs sous-jacents).

Une façon de remédier à ce problème, est d'essayer de construire un historique des prix d'une option ayant exactement les mêmes caractéristiques que l'option pour laquelle on veut calculer la VaR. La forme des rendements historiques doit s'appliquer aux options ayant le même temps d'expiration et le même prix d'exercice que l'option en question.

En pratique, il est difficile de trouver de telles séries temporelles. Il est nécessaire alors de trouver une relation entre le prix de l'option et le prix de l'actif sous-jacent. La formule de Black & Scholes [10] est un exemple d'une telle relation. Sauf que dans ce cas, la relation entre le prix de l'option et le prix de l'actif sous-jacent pourrait être une fonction très compliquée.

### 3.2.2 Estimation de la VaR par la méthode historique

La simulation historique considère les valeurs des actifs constituant un portefeuille donné en chaque instant  $t$ , ensuite elle réévalue le portefeuille, un certain nombre de fois dans le temps, en utilisant les historiques des prix des actifs. Ces réévaluations produisent la distribution des pertes et profits à partir de laquelle on peut déduire le chiffre VaR.

Il existe plusieurs façons de calculer la VaR en utilisant la simulation historique. La méthode la plus simple [8] consiste à réévaluer le portefeuille en utilisant l'historique des prix des actifs du portefeuille. Ainsi, pour chaque jour, les valeurs de ces actifs seront calculées et placées par ordre croissant, suivant les quantiles de la fonction de distribution. Par conséquent, le chiffre VaR peut être facilement déduit.

Une autre façon de calculer la VaR, est d'utiliser l'historique des variations relatives des prix des actifs, ensuite les appliquer à la valeur actuelle du portefeuille de

la façon suivante :

1. Obtenir les séries des variations relatives des prix pour chaque actif,
2. Appliquer ces variations au portefeuille afin de générer les séries historiques des rendements,
3. Classer les séries des rendements du portefeuille suivant les quantiles correspondant,
4. La VaR du portefeuille est la valeur qui correspond au niveau de confiance requis.

### Étape 1

Les séries historiques des variations des prix représentent les séries des changements de valeurs des actifs. Notons par  $X(t)$  la valeur de l'actif à l'instant  $t$ , Les variations des prix sont alors calculées par la relation suivante:

$$\Delta X(t) = \frac{X(t) - X(t-1)}{X(t-1)} \quad t = -T, \dots, 0$$

où  $T$  représente la taille de l'historique et ( $t = 0$ ) représente la valeur actuelle de l'actif.

Afin de mieux comprendre les étapes de cette méthode, considérons un portefeuille  $\mathbf{P}$ , constitué de deux obligations  $O_1$  et  $O_2$  en nombres respectifs  $n_1 = 5$  et  $n_2 = 3$ . Les cours historiques ainsi que les variations relatives des prix de ces deux obligations, pour une période de 20 jours, sont présentés dans le Tableau 3.1.

À partir des deux graphiques de la figure 3.2, nous pouvons remarquer la présence de l'effet de diversification. Cette méthode suppose alors que le futur peut être présenté à partir des historiques récents. Par conséquent, la taille des historiques a une grande importance dans cette approche. En pratique, la taille utilisée est souvent choisie par des gestionnaires praticiens.

### Étape 2

La deuxième étape consiste à appliquer les historiques des variations relatives des prix pour chaque actif. Les changements de valeurs du portefeuille sont calculés à partir de la relation suivante :

$$V = \sum_i f(\delta_i, \alpha_i),$$

où

$V$  : Changement de valeur du portefeuille;

t	$O_1$	$O_2$	$\Delta' O_1(t)$ (%)	$\Delta' O_2(t)$ (%)
-20	1120.12	2275.21		
-19	1118.54	2106.25	-0.0014	-0.0772
-18	1115.80	1908.86	-0.0025	-0.0984
-17	1118.86	2285.9	0.0027	0.1803
-16	1102.84	1956.14	-0.0144	-0.1558
-15	1087.20	1845.11	-0.0143	-0.0584
-14	1084.10	1720.1	-0.0029	-0.0702
-13	1059.78	1705.12	-0.0227	-0.0087
-12	1059.79	2680.78	0.0000	0.4525
-11	1078.30	1927.96	0.0173	-0.3296
-10	1104.61	2010.21	0.0241	0.0418
-9	1100.09	1487.56	-0.0041	-0.3011
-8	1085.20	1396.41	0.0136	-0.0632
-7	1084.78	1275.21	-0.0004	-0.0908
-6	1089.90	1725.58	0.0047	0.3025
-5	1073.48	1575.45	-0.0152	-0.0910
-4	1068.61	1210.25	0.0045	-0.2637
-3	1077.09	1195.23	0.0079	-0.0125
-2	1097.54	1320.36	0.0188	0.0996
-1	1089.98	1430.57	-0.0069	0.0802
0	1071.37	1480.35	-0.0172	0.0342

Tableau 3.1: Les variations relatives des prix.

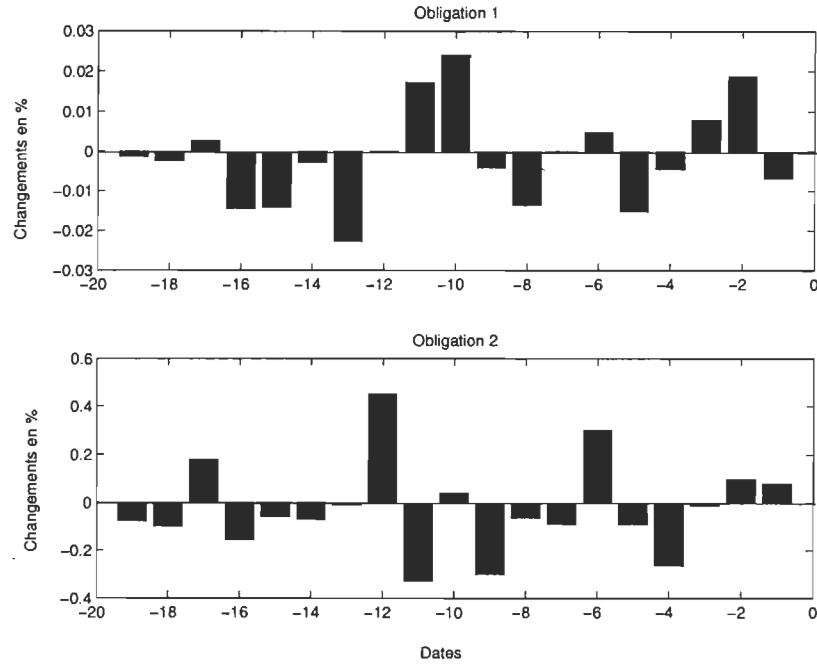


Figure 3.2: Les séries historiques des variations des prix pour les obligations  $O_1$  et  $O_2$

$f$  : La fonction qui détermine la valeur de la composante du portefeuille;

$\delta_i$  : Le changement de prix en pourcentage;

$\alpha_i$  : La sensibilité de la composante dans le portefeuille.

Dans l'exemple du portefeuille  $\mathbf{P}$ , nous avons

$$V = \frac{(-0.0014 \times 5000) + (-0.0772 \times 3000)}{100} = -2.385m\$$$

### Étape 3

Une fois les séries des changements de valeurs du portefeuille ont été générées, la VaR peut être alors déterminée. En effet, il suffit de les classer suivant les quantiles adéquats. Dans le cas du portefeuille  $\mathbf{P}$ , la VaR pour un seuil de confiance de 95% est

$$VaR_{95\%} = 9.0236m\$.$$

Le tableau 3.3 ainsi que la figure 3.3 montrent clairement la déduction du chiffre VaR.

$O_1(t)$ (%)	$O_2(t)$ (%)	V (en \$m)
-0.0014	-0.0772	-2.385
-0.0025	-0.0984	-3.075
0.0027	0.1803	5.545
-0.0144	-0.1558	-5.395
-0.0143	-0.0584	-2.467
-0.0029	-0.0702	-2.247
-0.0227	-0.0087	-1.397
0.0000	0.4525	13.575
0.0173	-0.3296	-9.024
0.0241	0.0418	2.459
-0.0041	-0.3011	-9.238
0.0136	-0.0632	-2.578
-0.0004	-0.0908	-2.743
0.0047	0.3025	9.309
-0.0152	-0.0910	-3.490
0.0045	-0.2637	-8.139
0.0079	-0.0125	0.021
0.0188	0.0996	3.927
-0.0069	0.0802	2.059
-0.0172	0.0342	0.165

Tableau 3.2: Les changements des prix du portefeuille.

Niveau de confiance (en %)	V (en \$m)
100	-9.2381
<b>95</b>	<b>-9.0236</b>
90	-8.1388
85	-5.3947
80	-3.4897
75	-3.0747
70	-2.7432
65	-2.5784
60	-2.4672
55	-2.3855
50	-2.2475
45	-1.3968
40	0.0206
35	0.1651
30	2.0595
25	2.4586
20	3.9274
15	5.5445
10	9.3090
5	13.5746

Tableau 3.3: Les pertes et les niveaux de confiance correspondant

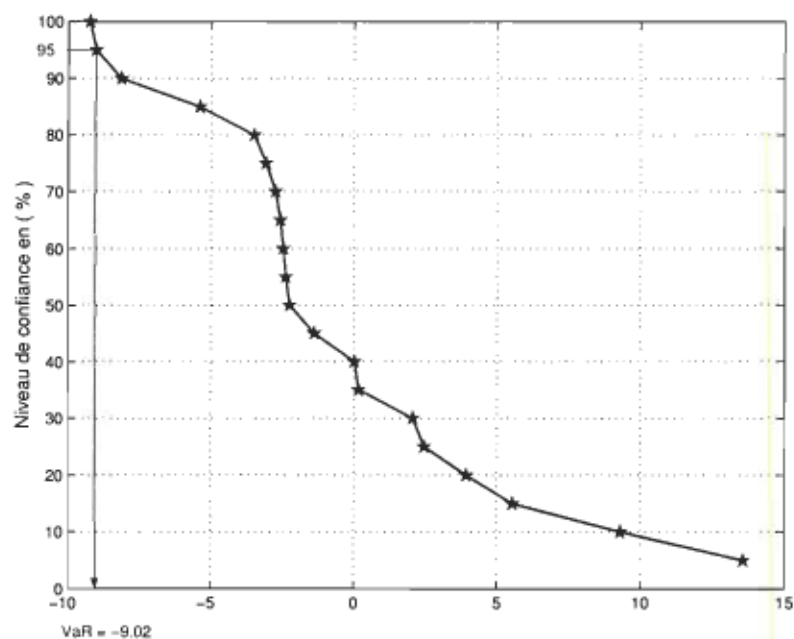


Figure 3.3: Distribution des changements de valeur du portefeuille p.

### 3.2.3 Avantages et inconvénients

La simulation historique est une approche relativement simple et n'exige aucune hypothèse sur la distribution des rendements du portefeuille. De plus, elle peut facilement incorporer des instruments non-linéaires tels que les options.

Cependant, cette approche pose un problème au niveau du choix des historiques. Comme nous pouvons le remarquer, elle utilise souvent des courts historiques, ce qui n'est pas vraiment intéressant puisque l'estimation de la VaR manquerait de précision pour des historiques de grandes tailles. En effet, avec plus de données on aurait la possibilité d'observer les événements critiques, et spécialement les cas des pertes extrêmes qui peuvent parfois surgir durant la période qui va suivre. La théorie des valeurs extrêmes peut être considérée comme une solution à ce genre de problème.

## 3.3 La méthode des valeurs extrêmes

En 1997, Artzner, Delbaen, Eber et Heath [4] ont montré que la Valeur à Risque n'est pas une mesure de risque pertinente. Ils ont prouvé en effet, qu'elle ne représente pas une mesure de risque cohérente (voir définition 1) puisqu'elle ne vérifie pas la condition de sous-additivité.

**Définition 1**

Soient  $V$  un ensemble de variables aléatoires et une fonction  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Une mesure de risque est dite cohérente si elle vérifie les conditions suivantes :

(i) **Monotone** :

$$X \in V, X \geq 0 \implies \rho(X) \leq 0,$$

(ii) **Sous-additive** :

$$\forall X, Y, X + Y \in V \implies \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),$$

(iii) **Positivement homogène** :

$$X \in V, h > 0, hX \in V \implies \rho(hX) = h\rho(X),$$

(iv) **Invariante par translation** :

$$X \in V, a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \quad \rho(X + a) = \rho(X) - a,$$

La sous-additivité représente en termes mathématiques, que la réduction du risque est associée au concept de la diversification. Ainsi, nous nous trouvons dans le cas d'une mesure de risque qui contredit le principe de ce concept.

Autrement, la condition de sous-additivité signifie que lorsque nous disposons d'un portefeuille  $P$  constitué de sous-portefeuilles,  $P$  va risquer un montant qui va être au plus, la somme des montants risqués (séparés) par ces sous-portefeuilles [9].

Nous pouvons remarquer que lorsque les variations des prix suivent une loi normale, la VaR est sous-additive. Par conséquent, la VaR n'est cohérente que dans le cas de portefeuilles linéaires<sup>8</sup>.

Dans ce qui suit, nous étudierons le cas des événements extrêmes où les pertes peuvent causer des catastrophes financières assez lourdes. Les événements extrêmes peuvent être définis comme étant des événements qui surviennent lorsque le risque prend ses valeurs au niveau de la queue de la distribution des rendements.

**3.3.1 La méthode des extrêmes**

Le problème des queues épaisses<sup>9</sup> a été l'objet de plusieurs recherches et travaux durant ces dernières années. Le problème était de savoir comment modéliser les événements extrêmes. Plusieurs critiques ont été faites à propos des systèmes de gestion des risques existants, ce qui a motivé plus les recherches sur d'autres méthodologies capables de prendre en considération les événements rares où les

<sup>8</sup>Ce qui n'est pas le cas des portefeuilles contenant des options.

<sup>9</sup>*fat tails* en anglais.

risques sont assez importants.

La théorie des valeurs extrêmes a été considérée comme l'outil le plus adapté à ce problème, puisqu'elle fournit un fondement théorique à partir duquel on peut construire des modèles statistiques décrivant les événements extrêmes. Elle consiste à analyser les occurrences qui présentent en théorie, des fréquences très faibles.

### 3.3.2 Théorie des valeurs extrêmes

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) de fonction de répartition  $F$ .

Le comportement des événements extrêmes peut être étudié d'une manière plus simple en considérant la variable aléatoire  $M_n$  définie par

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

Soit  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  une suite de  $n$  pertes observées.  $M_n$  représentera la plus grande perte. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Pr(M_n \leq x) &= \Pr(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= [F(x)]^n. \end{aligned}$$

Cependant, la fonction de répartition  $F$  n'est pas toujours connue, c'est la raison pour laquelle nous nous intéresserons plus au comportement asymptotique de la variable aléatoire  $M_n$ .

Le théorème des valeurs extrêmes<sup>10</sup> permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes.

#### Définition 2

Soient  $F$  et  $F^*$  deux fonctions de répartitions.  $F$  et  $F^*$  sont dites de même type si

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \quad F^*(ax + b) = F(x)$$

#### Théorème 1

S'il existe deux constantes  $a_n > 0$  et  $b_n$  telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left[ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] &= H(x) \\ \text{i.e.} \quad [F(a_n x + b_n)]^n &\xrightarrow{n} H(x) \end{aligned}$$

pour une fonction  $H$  non-dégénérée. Alors  $H$  appartient à l'un des trois types suivants

---

<sup>10</sup>Connu aussi sous le nom du théorème de Fisher-Tippett.

Type 1 : **Gumbel** :  $H(x) = e^{-e^{-x}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Type 2 : **Frechet** :  $\begin{cases} H(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ H(x) = \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$

Type 3 : **Weibull** :  $\begin{cases} H(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}) & \text{si } x \leq 0, \alpha > 0 \\ H(x) = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

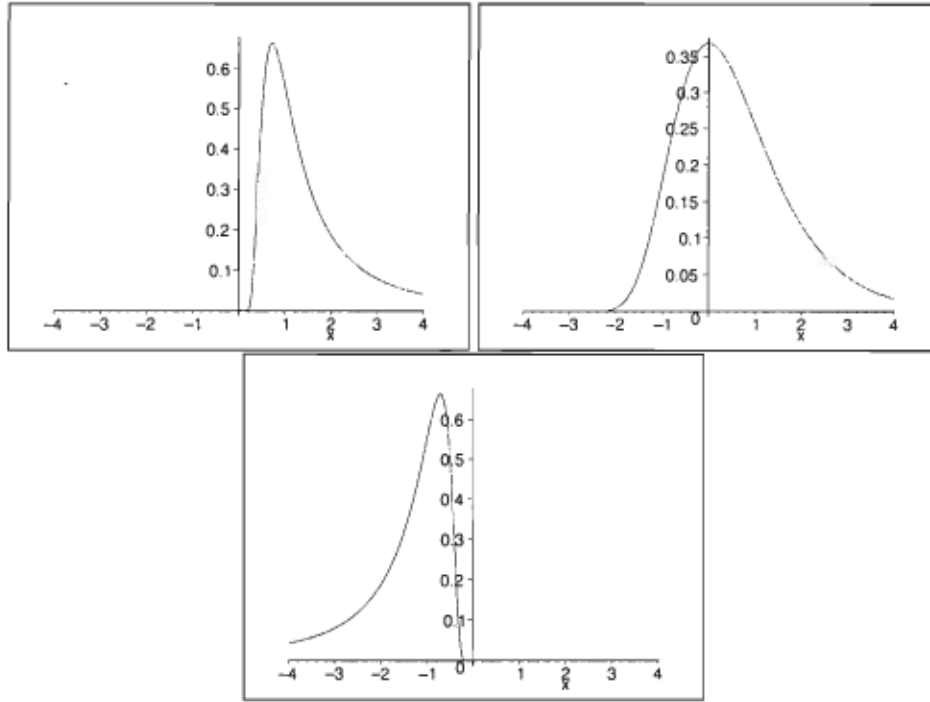


Figure 3.4: Les fonctions de densités de Fréchet ( $\alpha = 1.5$ ), Gumbel ( $\alpha = 0$ ) et Weibull ( $\alpha = 1.5$ ) respectivement

Les trois types de distribution mentionnés dans le théorème précédent peuvent être généralisés par

$$H(x) = \exp \left( - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{1-\xi}} \right) \quad (3.1)$$

définie sur le support  $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \xi(\frac{x-\mu}{\sigma}) > 0\}$ <sup>11</sup>. Nous retrouvons la distri-

<sup>11</sup>Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont en fait les limites de  $a_n$  et  $b_n$ .

bution de

$$\begin{aligned} \text{Frechet} & \quad \xi = \alpha^{-1} > 0 \\ \text{Weibull} & \quad \xi = -\alpha^{-1} < 0 \\ \text{Gumbel} & \quad \xi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La fonction de distribution  $H$  représente la distribution des valeurs extrêmes. Afin de mieux comprendre le concept, voici un exemple d'application exposant les différentes étapes de cette de cette théorie.

### Exemple 1

Soient  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1 de fonction de distribution  $F$  et  $M_n$  la variable définie précédemment. La fonction de distribution d'une loi exponentielle est donnée par

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0$$

Posons  $a_n = 1$  et  $b_n = \ln(n)$ . Appliquons maintenant le théorème 1.

$$\begin{aligned} F\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right) &= \Pr\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] \\ &= \Pr[M_n \leq a_n x + b_n] \\ &= \left(F(a_n x + b_n)\right)^n \\ &= \left(1 - e^{-a_n x - b_n}\right)^n \end{aligned}$$

En remplaçant  $a_n$  et  $b_n$  par leurs valeurs, nous obtiendrons

$$F(M_n - \ln(n)) = \left(1 - e^{-x - \ln(n)}\right)^n$$

Pour de grandes valeurs de  $n$ , la distribution exponentielle converge vers celle de Gumbel (figure 3.5). En effet, lorsque  $n$  tend vers l'infini nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x - \ln(n)})^n = e^{-e^{-x}}$$

La figure 3.6 montre que la distribution exponentielle est totalement confondue avec celle de Gumbel pour  $n = 50$ . Dans cet exemple, la convergence est rapide toutefois cela n'est pas toujours vérifié.

La fonction de densité  $h$  correspondant à la distribution des extrêmes est donnée par la relation suivante

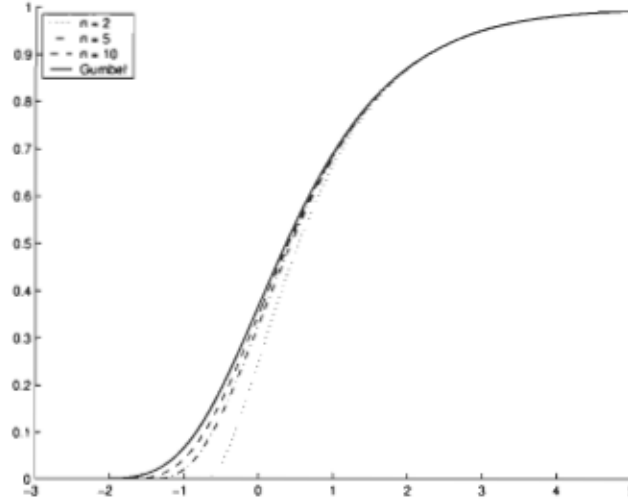


Figure 3.5: Convergence de la distribution exponentielle

$$h(x) = \frac{1}{\sigma} \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1+\xi}{\xi}} \exp \left( - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right) \quad (3.2)$$

Comme nous pouvons le remarquer, la fonction  $h$  dépend des trois paramètres  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\xi$ . Chacun de ces trois paramètres caractérise la fonction  $h$ . En effet,  $\mu$  est caractérisé comme étant un paramètre de localisation,  $\sigma$  comme un paramètre de dispersion (variance) et le paramètre  $\xi$  est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution  $F$ , c'est la raison pour laquelle il est considéré comme un indice de queue ou indice de valeur extrême [9].

### 3.3.3 Estimation de la VaR par la méthode des extrêmes

Une application de la théorie des valeurs extrêmes est l'estimation des quantiles extrêmes. Pour un niveau de confiance  $\alpha$ , nous avons

$$H(VaR_E) = \alpha$$

où  $VaR_E$  représente l'estimateur extrême de la VaR. Explicitons à présent la fonction  $H$

$$H(VaR_E) = \exp \left( - \left[ 1 + \xi \left( \frac{VaR_E - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right) \quad (3.3)$$

ainsi, en remplaçant  $H(VaR_E)$  par  $\alpha$ , nous déduisons l'estimateur extrême de la VaR

$$VaR_E = \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - (-\ln(\alpha))^{-\xi}].$$

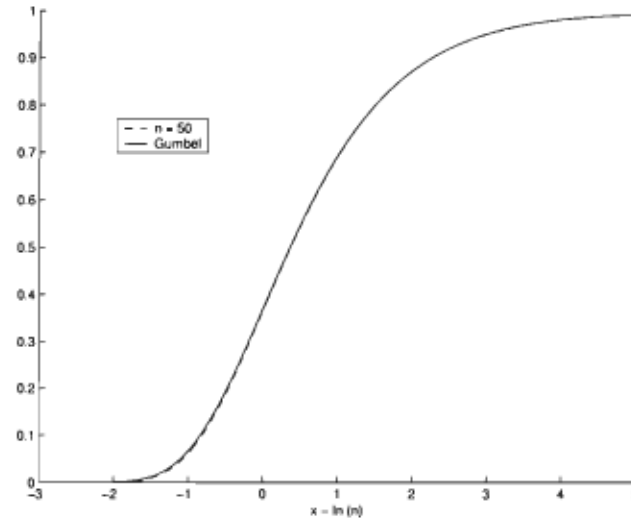


Figure 3.6: Convergence de la distribution exponentielle vers la distribution de Gumbel

L'estimateur de la VaR est influencé par les deux paramètres  $\sigma$  et  $\xi$ . La figure 3.7 illustre différentes courbes des quantiles (VaR) en fonction de  $\xi$ . Nous pouvons constater que, plus la fonction  $F$  possède de la variance, plus elle est leptocurtique<sup>12</sup> et plus le quantile (VaR) va être élevé.

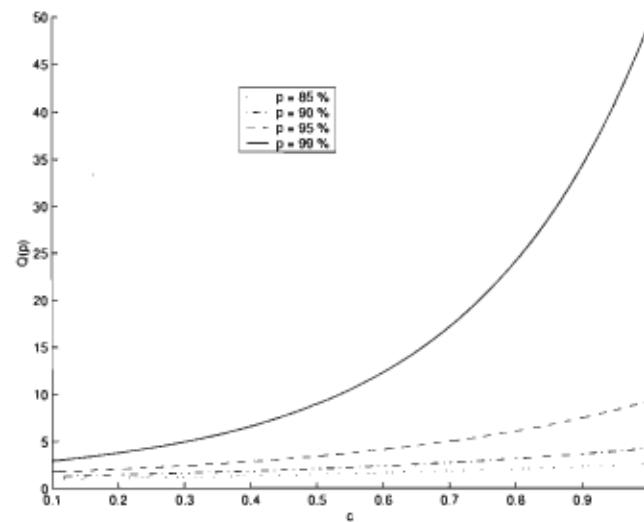


Figure 3.7: Quantiles de la distribution des valeurs extrêmes

<sup>12</sup>Caractère d'une courbe de fréquences plus pointue qu'une courbe normale (qui est dite mésocurtique) de même écart type.

### 3.3.4 Estimation des paramètres

IL existe plusieurs méthodes pour estimer les paramètres de la distribution des valeurs extrêmes. Nous pouvons citer parmi d'autres, les méthodes d'estimation de l'indice de queue, la méthode des moments ou encore les méthodes du seuil. Mais celle qui reste la plus populaire est la méthode du maximum de vraisemblance, et qui sous certaines conditions est considérée comme la plus efficace.

#### La méthode du maximum de vraisemblance

Soient  $M_{n,1}, \dots, M_{n,k}$  une suite de  $k$  maxima où  $n$  représente le nombre d'observations et  $\{X_t\}$  un échantillon de données de dimension  $T = kd$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Le principe de la méthode du maximum de vraisemblance consiste à diviser cet échantillon en  $n$  blocs. Soit une variable  $\chi_q^+$  défini par

$$\chi_q^+ = \max(X_{i+(q-1)d}, i = 1, \dots, d)$$

pour  $q = 1, \dots, k$ . L'expression de la vraisemblance de l'observation est

$$L(\chi_q^+; \theta) = \frac{1}{\sigma} [1 + \xi(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma})]^{-\frac{1+\xi}{\xi}} \exp(-[1 + \xi(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma})]^{-\frac{1}{\xi}}) \quad (3.4)$$

où

$$\theta = (\mu, \sigma, \xi)^t$$

La log-vraisemblance  $l(\chi_q^+; \theta)$  peut être déduite de la relation (3.4) et elle est définie par

$$l(\chi_q^+; \theta) = -\ln(\sigma) - \frac{1+\xi}{\xi} \ln(1 + \xi(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma})) - \left[1 + \xi(\frac{\chi_q^+ - \mu}{\sigma})\right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (3.5)$$

Nous obtenons alors l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{q=1}^N l(\chi_q^+; \theta)$$

où  $\Theta$  représente l'espace des paramètres.

En 1999, Hoeung, Riboulet et Roncalli [28] ont remarqué à partir de simulations faites sur plusieurs séries de données de loi H, que la taille de l'échantillon utilisée est d'une grande importance. La théorie des extrêmes peut poser des problèmes lors de son application à notre mesure VaR, puisque celle-ci nécessite un échantillon de taille assez importante afin d'avoir de bonnes estimations.

Dans le cas de la méthode des valeurs extrêmes, les pertes potentielles seront calculées de la même façon que la méthode historique et la méthode Monte Carlo.

Sauf qu'à la place de calculer directement les quantiles, nous estimons les maxima. Par exemple, si nous disposons d'un historique de 200 jours et que nous considérons des blocs de 20 jours pour définir  $\chi_q^+$ , l'estimation portera sur un échantillon de 10 extrema.

En 1997, une nouvelle approche alternative a été développée par Artzner et al. [4] qui a l'avantage d'utiliser plus de données, surtout celles qui dépassent un certain seuil  $u$  suffisamment élevé. Cependant, le seuil  $u$  ne doit pas être choisi trop grand car il faut suffisamment de données pour avoir des estimateurs de bonnes qualités.

Nous introduirons dans ce qui suit une nouvelle fonction qui servira d'outil afin dévaluer le seuil  $u$ . Il s'agit de la fonction des excès moyens (*mean excess function* en anglais).

### Définition 3

Soient  $X$  une variable aléatoire et  $u$  une variable positive. La fonction des excès moyens est définie par

$$e(u) = E[X - u | x > u] \quad u \geq 0$$

$e(\cdot)$  représente la fonction des excès moyens. Ainsi, pour un seuil  $u$ ,  $e(u)$  désigne la moyenne des excès au delà de  $u$ .

Un estimateur empirique de cette fonction est donné par

$$e_n(u) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u\}}} & \text{si } u < \max_{i=1, \dots, n} \{X_i\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.6)$$

### Exemple 2

Supposons que  $X$  soit une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , la fonction des excès moyens est définie par :

$$e(u) = \lambda^{-1}, \quad u > 0$$

Pour la distribution de Pareto généralisée, nous avons généralement

$$e(u) = E[X - u | x > u] = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}, \quad \sigma + \xi u > 0$$

La fonction des excès moyens pour une série de queues épaisses est situé entre la fonction (constante) des excès moyens pour une distribution exponentielle et une distribution de pareto généralisée (GPD). Cette fonction vérifie en fait

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e(u) = \infty$$

En finance ou en assurance,  $\xi$  est souvent choisi  $\xi < 1$ .

### Distribution des excès

Le théorème 1 s'appuie sur une approche qui considère la distribution des excès. Il s'agit en fait de la méthode du seuil (*peak over threshold* en anglais).

Soit  $F$  une fonction de distribution d'une variable aléatoire  $X$  et soit  $u$  un seuil. Nous désirons estimer la fonction de distribution  $F_u$  des valeurs de  $x$  qui dépassent un certain seuil  $u$ . Pour cela, nous ferons appel à une nouvelle fonction  $F_u$  (figure 3.8) connue sous le nom de la distribution conditionnelle des excès. Cette distribution est définie par

$$F_u(y) = P[X - u \leq y | X > u], \quad 0 \leq y \leq x_F - u \quad (3.7)$$

Où  $u$  est un seuil donné,  $y = x - u$  les valeurs qui dépassent le seuil  $u$  et  $x_F \leq \infty$  représente la borne supérieure du support de  $F$ .

$$x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$$

La fonction  $F_u$  peut s'écrire en fonction de  $F$  par la relation suivante

$$F_u(y) = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (3.8)$$

L'estimation de  $F$  sur l'intervalle  $[0, u]$  ne pose pas vraiment de problèmes. Par contre, l'estimation de  $F_u$  sera plus difficile puisqu'on dispose de peu d'observations sur cet intervalle (Evis K. et Manfred G.[21]).

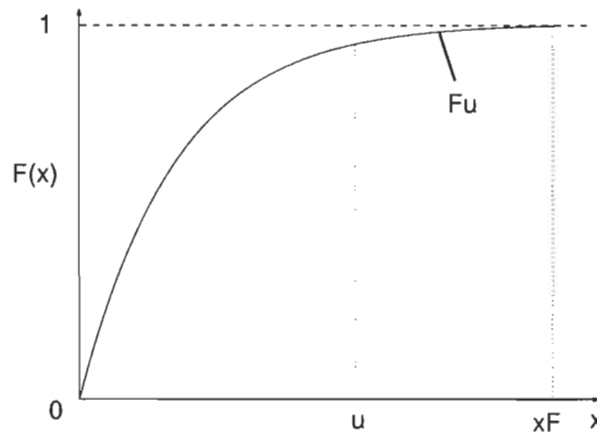


Figure 3.8: La fonction de distribution conditionnelle  $F_u$

**Théorème 2. (Pickands (1975), Balkema and de Haan (1974))**

Pour une grande classe de fonctions de distribution  $F$  et pour un seuil  $u$  assez grand, la fonction de distribution conditionnelle des excès  $F_u$  est bien approximée par

$$F_u(y) \approx G_{\xi,\sigma}(y), \quad u \rightarrow \infty$$

où

$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}y\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

pour  $0 \leq y \leq (x_F - u)$ .

Si nous remplaçons  $x$  par  $x = u + y$  dans le théorème 2, la fonction de distribution  $G_{\xi,\sigma}$  représentera alors la distribution de Pareto généralisée (*generalized Pareto distribution (GPD)* en anglais). Cette distribution peut s'exprimer aussi en fonction de  $x$

$$G_{\xi,\sigma}(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-u)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}.$$

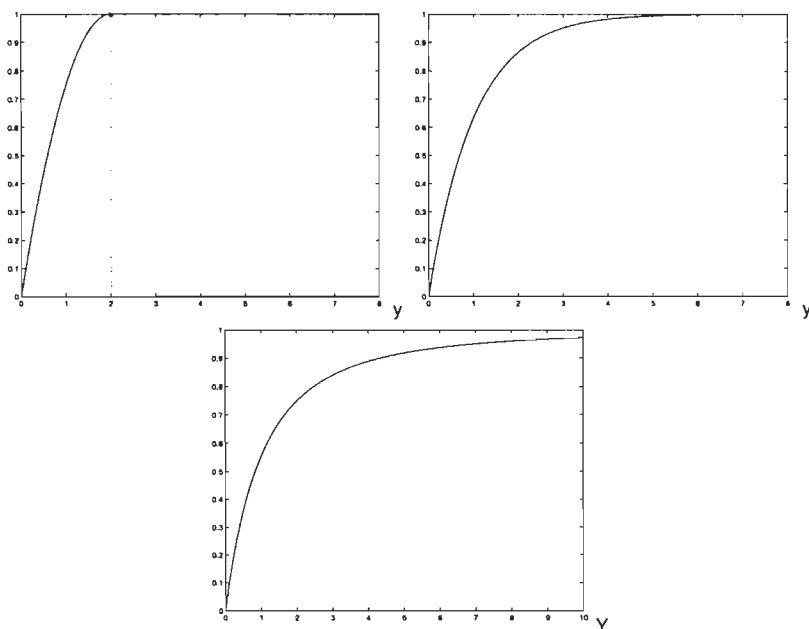


Figure 3.9: La distribution de Pareto généralisée  $G_{\xi,\sigma}$  ( $\xi = -0.5, \xi = 0$  et  $\xi = 0.5$ ) respectivement pour  $\sigma = 1$ .

La Figure 3.9 montre que seule la distribution ayant un indice de queue strictement positif peut modéliser les distributions de queues épaisses.

La fonction  $F$  peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(x) + F(u)$$

En remplaçant la fonction de distribution conditionnelle  $F_u$  par la distribution de Pareto généralisée  $G_{\xi, \sigma}$  et  $F(u)$  par l'estimateur historique  $(n - N_u)/n$ , où  $n$  est le nombre totale d'observations et  $N_u$  le nombre d'observations à partir d'un certain seuil  $u$ , nous obtenons la fonction de distribution  $F$

$$F(x) = \frac{N_u}{n} \left( 1 - \left( 1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - u) \right)^{-1/\xi} \right) + \left( 1 - \frac{N_u}{n} \right) \quad (3.10)$$

$$= 1 - \frac{N_u}{n} \left( 1 + \frac{\xi}{\sigma}(x - u) \right)^{-1/\xi}. \quad (3.11)$$

Avant d'appliquer cette méthodologie, nous définirons une nouvelle mesure cohérente qui sera une mesure alternative à la VaR. Il s'agit d'une mesure conditionnelle qui va permettre d'estimer la taille moyenne des pertes qui dépassent la valeur VaR. En fait, cette mesure représente la moyenne conditionnelle de queue (*expected short-fall* en anglais) que nous noterons dorénavant par (**ES**).

**ES** est définie par

$$\mathbf{ES} = E[X|X > VaR] \quad (3.12)$$

où  $X$  représente les pertes potentielles. D'après la définition générale de la VaR pour un niveau de confiance  $\alpha$  donné nous avons

$$VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$

Donc en inversant l'équation (3.10) nous obtenons

$$VaR_\alpha = u + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( \frac{n}{N_u} \alpha \right)^{-\xi} - 1 \right). \quad (3.13)$$

Ainsi, l'expression de **ES** s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{ES}_\alpha &= [VaR_\alpha + X - VaR_\alpha | X > VaR_\alpha] \\ &= VaR_\alpha + \underbrace{[X - VaR_\alpha | X > VaR_\alpha]}_y \end{aligned}$$

Le second terme représente la moyenne de la distribution des excès  $F(y)$  à partir du seuil  $VaR_\alpha$ . La fonction des excès moyens pour la distribution de Pareto généralisée avec  $\xi < 1$  est donnée par

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}, \quad \sigma + \xi u > 0$$

Ainsi,

$$\mathbf{ES}_\alpha = VaR_\alpha + \frac{\sigma + \xi(VaR_\alpha - u)}{1 - \xi}$$

i.e.

$$\mathbf{ES}_\alpha = \frac{VaR_\alpha}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1 - \xi}.$$

Le résultat général déduit concernant l'existence des moments, est que si  $X$  est une distribution de Pareto généralisée, alors pour tout entier  $r$  tel que  $r < 1/\xi$ , les premiers moments d'ordre  $r$  existent [20].

La méthode du maximum de vraisemblance offre l'avantage d'une estimation simultanée des trois paramètres  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\xi$ , et elle s'applique bien pour les séries des maximas par bloc. De plus, cette méthode donne une bonne estimation dans le cas de  $\xi > -1/2$ . Puisque la majorité des séries financières ont des indices de queue  $\xi > 0$ , cette dernière offre un bon outil d'estimation pour notre mesure.

### 3.3.5 Limitations de la théorie des valeurs extrêmes

La plupart des articles dans la littérature, utilisent la même approche. L'application de la théorie des valeurs extrêmes dans la plupart des cas fait face à un problème de base. Il n'existe pas de définition standard, d'ordre dans l'espace vectoriel avec une dimension plus grande que 1. Ainsi, il est difficile de définir les observations extrêmes pour des vecteurs de dimension  $n$  ( $n > 1$ ).

Comme solution à ce problème, Longuin [36] a proposé l'estimation des distributions marginales pour chaque titre en utilisant des maximas pour des courtes positions  $w_i$ , et des minimas pour des positions plus longue. Ainsi, il a résolu des  $\alpha$ -quantiles extrêmes  $VaR_i$ , calculant les corrélations  $\rho_{ij}$  entre les séries des maximas et des minimas, et calculant par la suite l'estimateur de la VaR par la méthode des extrêmes d'un portefeuille de  $N$  titres.

$$VaR_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} w_i w_j VaR_j}$$

Cependant, la distribution jointe des distributions extrêmes marginales, n'est pas nécessairement la distribution des extrêmes pour les positions agrégées. Autrement, les mouvements extrêmes des rendements des prix pour les différents actifs du portefeuille ne résultent pas nécessairement des mouvements extrêmes d'un portefeuille tout entier. En effet, cela dépend de la composition du portefeuille (position pour chaque instrument) et des corrélations (les relations dépendantes) entre les différents actifs du portefeuille.

En conclusion, la théorie des valeurs extrêmes peut être utilisée comme un supplément pour les méthodes d'estimation de la VaR, qui sont devenues standards pour mesurer les risques de marché.

### 3.4 Méthode de simulation Monte Carlo

La simulation Monte Carlo est une méthode numérique qui est utilisée lorsqu'il est difficile de déterminer la distribution d'un échantillon à partir d'un raisonnement mathématique. Elle est basée sur le tirage de nombres aléatoires. Généralement, nous utilisons des séries de nombres pseudo-aléatoires générées par des algorithmes spécialisés.

#### 3.4.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode consiste à générer des valeurs d'une variable aléatoire  $X$ , dont la fonction de distribution  $F_X$  est connue. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir des valeurs d'une *variable aléatoire uniforme* dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous pouvons par exemple utiliser des logiciels de génération de nombres pseudo-aléatoires<sup>13</sup>. La simulation Monte Carlo consiste alors à transformer ces valeurs, en utilisant la fonction réciproque de  $F_X$ <sup>14</sup> (Figure 3.10). Ainsi, pour chaque valeur  $u$  générée on calcule son quantile  $Q_X(u)$ .

Il faut noter que la variable  $Q_X(U)$  est distribuée suivant la loi de  $X$ . En effet:

$$\begin{aligned} \Pr[Q_X(U) \leq a] &= \Pr[F_X(Q_X(U)) \leq F_X(a)] \\ &= \Pr[U \leq F_X(a)] \\ &= F_X(a) \end{aligned}$$

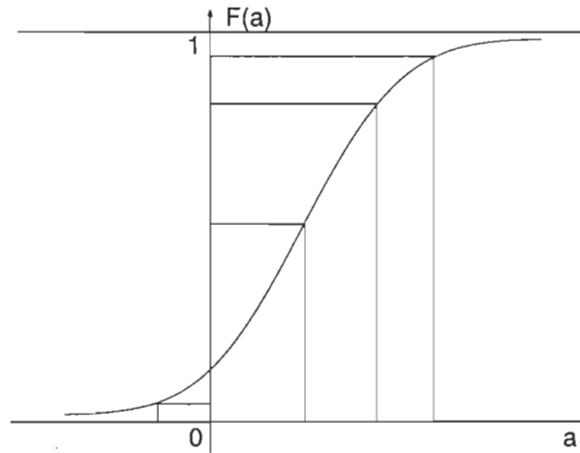


Figure 3.10: Simulation Monte Carlo

<sup>13</sup>Tous les langages de programmation possèdent des générateurs de nombres pseudo-aléatoires.

<sup>14</sup>Puisque l'ensemble des valeurs de la fonction  $F_X$  est l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 3.4.2 Estimation de la VaR par la méthode Monte Carlo

La méthode de simulation Monte Carlo a été adoptée par *Bankers Trust* avec son système RAROC<sup>15</sup>. L'estimation de la VaR par la méthode Monte Carlo, est basée sur la simulation des facteurs de risque dont on se donne une loi de distribution admissible avec l'historique. Cette méthode consiste à valoriser le portefeuille en appliquant ces facteurs simulés.

Il suffit alors de calculer le quantile correspondant tout comme pour la simulation historique. La seule différence entre ces deux approches est que la méthode historique utilise les facteurs passés, alors que la méthode Monte Carlo utilise des facteurs simulés.

#### Cas d'un seul facteur de risque

Étudions d'abord le cas simple d'un seul facteur de risque  $X$ . La méthode consiste à générer la variable  $\Delta X(t)$ <sup>16</sup> définie par

$$\Delta X(t) = \frac{X(t) - X(t-1)}{X(t-1)} \quad \forall t = -T, \dots, 0$$

où  $T$  correspond au nombre d'observations.

Le modèle adapté à cette variable peut être une distribution normale ou plus leptocurtique dans le cas où le facteur de risque ne dépend pas du facteur temps. Cependant, lorsque ce dernier est pris en considération, un processus stochastique adapté est utilisé, le mouvement brownien géométrique en est un exemple.

En effet, le mouvement brownien géométrique exprime la variation relative du cours de l'actif  $C_t$  à l'instant  $t$ , en fonction du rendement espérée  $E_R$  et de la volatilité  $\sigma_R$  par la relation suivante:

$$\frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{C_t} = E_R \Delta t + \sigma_R \Delta w_t,$$

où la variable  $\Delta w_t$  est distribuée suivant une loi normale  $N(0, \Delta t)$ .

Par une simulation Monte Carlo de la variable aléatoire  $\Delta X$  et par l'utilisation d'un modèle d'évaluation adapté, nous générons alors un grand nombre  $N$  d'observations  $(\Delta^k X)$  ( $k = 1, \dots, N$ ). À partir de cette étape, la suite des procédures est semblable à celle de la méthode historique.

#### Cas de plusieurs facteurs de risque

Étudions maintenant le cas où l'actif dépend de plusieurs facteurs de risque  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). La valeur  $v$  de cet actif s'exprime en fonction de ces facteurs par la

---

<sup>15</sup>Voir Annexe

<sup>16</sup>La variation relative des prix.

relation suivante :

$$v = f(X_1, \dots, X_n).$$

Les observations de ces facteurs de risque vont nous permettre d'estimer les paramètres des modèles d'évaluation et des processus stochastiques relatifs.

Dans ce cas, il est préférable de générer simultanément des variables  $\Delta X_i$ , tout en respectant les corrélations entre les différents facteurs de risque influençant le prix de l'actif.

### Exemple

Prenons l'exemple simple d'un actif qui dépend de deux facteurs de risque  $X_1$  et  $X_2$  tel que

$$\begin{aligned} E(\Delta X_i) &= \mu_i \quad \forall i = 1, 2, \\ \text{var}(\Delta X_i) &= \sigma_i^2 \quad \forall i = 1, 2, \\ \rho &= \text{corr}(\Delta X_1, \Delta X_2), \\ &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}, \end{aligned}$$

avec

$$\sigma_{12} = \text{cov}(\Delta X_1, \Delta X_2).$$

La procédure consiste à générer deux autres variables  $\tau_1$  et  $\tau_2$  indépendantes qui obéissent à la même loi théorique que celles de  $\Delta X_1$  et  $\Delta X_2$  et vérifiant

$$\begin{aligned} E(\tau_1) &= E(\tau_2) = 0 \\ \text{var}(\tau_1) &= \text{var}(\tau_2) = 1 \end{aligned}$$

À partir de ces conditions, nous pouvons définir une relation entre les variables  $\Delta X_1$ ,  $\Delta X_2$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ :

$$\begin{cases} \Delta X_1 &= \sigma_1 \tau_1 + \mu_1 \\ \Delta X_2 &= \sigma_2(\rho \tau_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \tau_2) + \mu_2 \end{cases}$$

Ces relations peuvent aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Cette forme matricielle peut être généralisée par la relation

$$\overrightarrow{\Delta X} = L \overrightarrow{\tau} + \overrightarrow{\mu},$$

où  $L$  représente la matrice de décomposition de Choleski<sup>17</sup> de la matrice des variances-covariances des variables  $\Delta X_i (i=1,2)$

$$LL^t = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Une fois ces variables générées, l'étape suivante consiste à les classe par ordre croissant. Le chiffre VaR serait déduit automatiquement à partir du niveau de confiance correspondant (comme pour la simulation historique).

### Cas d'un portefeuille

Considérons maintenant le cas général d'un portefeuille  $p$  constitué de  $K$  actifs en nombres respectifs  $n_1, \dots, n_K$ <sup>18</sup>. La valeur du portefeuille  $p$  s'exprime en fonction des valeurs des différents actifs  $p_i$  ( $i = 1, \dots, K$ ) par

$$V_p = \sum_{i=1}^K n_i p_i,$$

Dans le cas où les rendements des actifs suivent une loi normale, la VaR sera calculée à l'aide de la moyenne et l'écart type. La matrice des corrélations peut être beaucoup plus volumineuse que celle vue dans le cas de la méthode des variances-covariances.

$$var(\Delta V_p) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K n_i n_j cov(\Delta p_i, \Delta p_j).$$

### 3.4.3 Avantages et inconvénients

La méthode de simulation Monte Carlo a plusieurs avantages importants. En effet, elle n'exige pas de modèles spécifiques et peut être facilement ajustée aux prévisions économiques. Les résultats peuvent être améliorés en considérant un grand nombre de scénarios simulés. Pour les instruments non-linéaires et tout particulièrement les options, ils peuvent être facilement inclus dans un portefeuille.

Cependant, cette approche requiert une puissance et un temps de calcul considérables. Si nous considérons par exemple un actif qui dépend de  $n$  facteurs de risque et  $M$  le nombre de simulations nécessaires dans la méthode Monte Carlo. Alors, nous aurons  $nM$  simulations au total qui sont nécessaires pour cet actif. De plus, si la réévaluation du portefeuille se fait aussi par simulation, le nombre de calcul serait immense. C'est la raison pour laquelle la méthode Monte Carlo peut

<sup>17</sup>Il faut noter que cette décomposition n'est pas toujours possible, le nombre d'observations  $T$  doit être supérieur au nombre  $n$  des facteurs de risque.

<sup>18</sup>Les  $n_i$  représentent le poids des différents actifs dans le portefeuille. Dans le cas où les prix sont remplacés par les rendements, les nombres  $n_i$  doivent être remplacés par les proportions correspondantes aux capitalisations boursières respectives des différents titres.

être très lente. Une façon de résoudre ce problème est de compresser le portefeuille en question. L'idée consiste à représenter les instruments de même type d'un portefeuille par un seul instrument artificiel avec les mêmes caractéristiques des risques du portefeuille originel.

Un autre inconvénient de la simulation Monte Carlo est lorsque nous voulons connaître la distribution jointe de plusieurs composantes du marché. Si le nombre de composantes dépasse 4, il n'est pas facile de construire une distribution multidimensionnelle. Ceci est vrai spécialement dans le cas où les variables sont fortement corrélées.

Finalement, nous pouvons remarquer que la méthode Monte Carlo a l'avantage de pouvoir utiliser les résultats préliminaires des deux premières méthodes mentionnés précédemment. En effet, la simulation historique peut fournir une première approximation aux fonctions de distribution. La méthode des variances-covariances quant à elle, montre les connexions importantes qui doivent être utilisées entre les variables et celles qui doivent être négligées.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons une autre méthode d'estimation. Il s'agit de la méthode du noyau, une méthode complètement non paramétrique dont le plus grand avantage est son indépendance totale des hypothèses imposées par les méthodes classiques d'estimations qu'on vient de définir dans ce chapitre.

## Chapitre 4

# Méthode du noyau

### 4.1 Définition

La méthode du noyau a été introduite par Rosenblatt [44] dans le cadre de la densité et par Nadaraya [40] dans le cadre de la régression. Elle représente une approche qui fait référence à une classe de techniques générales d'estimation non-paramétrique de fonctions.

La méthode du noyau permet de trouver une structure dans l'ensemble des données, sans l'imposition d'un modèle spécifique. Dans ce cas, seules les observations peuvent suggérer un modèle.

#### Estimation d'une fonction de densité

Soient  $X_1, \dots, X_n$  une séquence de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d) de fonction de densité commune  $f$ . Un estimateur à noyau de la fonction de densité  $f$  en un point  $x$  est donné par

$$\hat{f}_{n,h}(x) = (nh_n)^{-1} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \quad (4.1)$$

où  $k$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  appelée noyau et  $h_n$  une suite de nombres réels positifs appelée largeur de fenêtre (*bandwidth* en anglais) ou tout simplement fenêtre. Dans ce qui suit, on notera cette fenêtre par  $h$ .

L'estimateur défini dans l'équation (4.1), peut aussi être vu comme la convolution de la suite de fonctions  $k_h(\cdot) = \frac{1}{h}k(\frac{\cdot}{h})$  avec la mesure empirique des observations. L'estimateur à noyau de  $f$  pourra être écrit aussi sous la forme

$$\hat{f}_{n,h}(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n k_h(x - X_i).$$

La figure (4.1) montre l'estimation à noyau d'une densité construite à partir de cinq observations et avec un noyau  $k$  normale  $N(0, 1)$ .

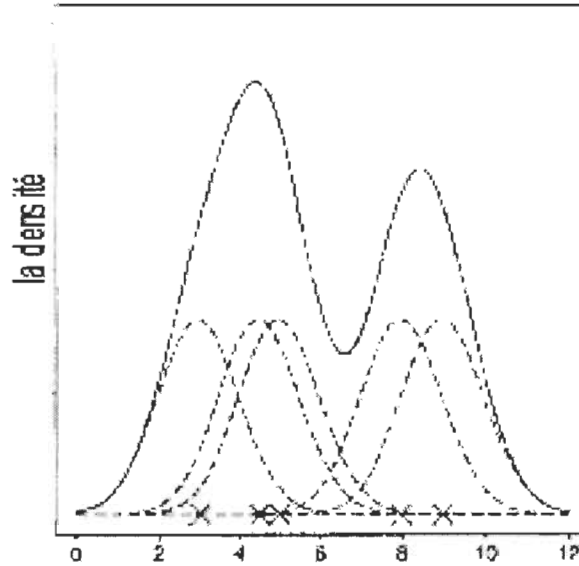


Figure 4.1: Estimation à noyau de la densité basée sur cinq observations [54]

Dans ce cas,  $k_h$  représente la densité normale de moyenne 0 et de variance  $h^2$ . Le paramètre  $h$  joue le rôle d'un facteur d'échelle déterminant la dispersion du noyau. L'estimateur à noyau est construit en centrant le noyau mesuré en chaque observation. La valeur de l'estimateur à noyau en un point  $x$  est simplement la moyenne de ces  $n$  noyaux en ce point.

Cependant, des contraintes ont été imposées sur ces deux paramètres, et certaines d'entre elles sont primordiales et intuitives:

(H1)  $h \rightarrow 0$  et  $nh \rightarrow +\infty$ .

(H2)  $k$  est positif, borné, symétrique,  $\int k(x)dx = 1$ ,  $\int x^2 k(x)dx < \infty$  et enfin  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x|k(x) = 0$ .

Les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  ainsi que d'autres hypothèses de régularité sur la fonction  $f$  assurent la convergence de  $\hat{f}_{n,h}$  vers  $f$ , selon plusieurs modes: convergence en probabilité, convergence en moyenne quadratique, convergence presque sûre, etc. Le noyau  $k$  est souvent une densité de probabilité et dans la plupart des cas, choisi à support compact.

De plus,  $h$  contrôle le lissage de la fonction  $\hat{f}_{n,h}$ , c'est la raison pour laquelle on l'appelle "paramètre de lissage". Le paramètre  $h$  est souvent choisi de façon à minimiser certains critères de performance. Le choix optimal de  $h$  a été étudié intensivement par plusieurs auteurs [43].

### Estimation de la fonction de distribution

Une estimation de la fonction de distribution  $F$  peut être obtenue par une simple intégration de la fonction  $\hat{f}_{n,h}$ . Ainsi, l'estimateur à noyau de  $F$  est donné par

$$\begin{aligned}\hat{F}_{n,h}(x) &= \int_{-\infty}^x \hat{f}_{n,h}(t) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\end{aligned}$$

où

$$K(x) = \int_{-\infty}^x k(t) dt$$

Il est important de noter que le paramètre de lissage  $h$ <sup>1</sup> contrôle aussi la “lissité” de  $\hat{F}$ . Cependant, la valeur optimale de  $h$  obtenue pour la fonction de distribution diffère de celle de  $\hat{f}_{n,h}$ .

### Critères d'optimalité

Le critère d'optimalité le plus utilisé dans l'estimation de la fonction de distribution  $F$ , est l'erreur quadratique intégrée (ISE), définie par

$$ISE(\hat{F}_{n,h}, w) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{F}_{n,h}(x) - F(x))^2 dx$$

Certes, la mesure  $ISE(\hat{F}_{n,h}, w)$  donne une évaluation globale sur la convergence de  $\hat{F}_{n,h}$  vers la vraie fonction  $F$ ; cependant, elle n'est appropriée que dans le cas où nous possédons l'ensemble des données. Ainsi, cette mesure ne tient pas compte des autres ensembles de données possible provenant de la fonction de densité  $f$ . C'est la raison pour laquelle il est mieux d'analyser sa moyenne, l'erreur quadratique intégrée moyenne (MISE). Cette nouvelle mesure est souvent utilisée comme une mesure moyenne de la performance de  $\hat{F}_{n,h}$ .

$$MISE(\hat{F}_{n,h}, w) = E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{F}_{n,h}(x) - F(x))^2 dx \right] \quad (4.2)$$

Soit  $h = h_n$  une séquence de paramètres de lissage vérifiant

- $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} nh = \infty$

---

<sup>1</sup>La fenêtre définie pour l'estimation à noyau de la densité.

Sous des conditions de régularité de la fonction  $f$ , Jones [29] a montré dans son étude que

$$MISE(\hat{F}_{n,h}) = n^{-1}v(F) - n^{-1}h\rho(k) + h^4\mu_2^2(k)R(f')/4 + o(n^{-1}h + h^4) \quad (4.3)$$

où

$$\begin{aligned} v(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(1 - F(x))dx, \\ R(f') &= \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x))^2 dx, \\ \mu_r &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^r k(t)dt, \\ \rho(k) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} xk(x)K(x)dx. \end{aligned}$$

D'après Jones [29], le choix du noyau  $k$  n'a pas beaucoup d'effet sur l'expression du MISE. Toutefois, le choix du paramètre de lissage  $h$  est d'une grande importance. La valeur optimale de  $h$  peut être déduite à partir de la minimisation asymptotique de la relation (4.3)

$$h_0 = \left[ \frac{\rho(k)}{n\mu_2^2(k)R(f')} \right]^{1/3}. \quad (4.4)$$

En posant  $h = h_0$ , l'équation (3.14) donne la formule du MISE

$$MISE(\hat{F}_{n,h}) = \frac{1}{n}v(F) - \frac{3}{4n^{4/3}}(\rho(k))^{\frac{4}{3}}[\mu_2^2(k)R(f')]^{-\frac{1}{3}} + o(n^{-\frac{4}{3}}). \quad (4.5)$$

Il s'agit du même taux que celui de la fonction de distribution empirique. Par conséquent, seul le lissage produit un effet de second ordre sur le MISE de la fonction de distribution  $F$  [43].

Le but, en utilisant toutes ces méthodes est d'obtenir un estimateur continu de  $F$  au lieu d'un estimateur discret. L'équation (4.5) et les résultats empiriques pour des échantillons finis, montrent que la performance reste adéquate [52]. Il suffit pour cela de choisir un  $h$  optimal.

D'après la relation (4.4), nous pouvons remarquer que le paramètre  $h_0$  dépend de la fonction  $f$  à travers l'expression de  $R(f')$ ,  $h_0$  doit être alors estimé en se basant sur les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ .

Dans la partie suivante, nous proposerons des méthodes d'estimation de  $h_0$ . Nous présenterons en premier lieu, des estimateurs simples, basés sur les distributions de référence, ensuite nous définirons la méthode "plug-in" qui est une technique souvent utilisée pour l'estimation des densités.

## 4.2 Estimation du paramètre de lissage

### Estimateurs simples

Il est possible que la méthode la plus simple pour estimer  $h_0$  est de supposer que  $f$  soit une forme paramétrique, et de choisir le paramètre de lissage, en remplaçant  $f$  par cette forme. Cette technique est connue dans la littérature, par la méthode de densité de référence.

Prenons l'exemple d'une densité normale  $f$  de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . La fonction  $f$  est défini par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

une dérivation simple donne

$$f'(x) = \frac{-(x-\mu)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Ainsi, une intégration de  $f'$  donne

$$\begin{aligned} R(f') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{2\pi\sigma^6} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (4.4). Le paramètre de lissage pour une densité normale serait

$$h_0^N = \left[ \frac{4\sigma^3 \rho(k) \pi^{1/2}}{n\mu_2^2(k)} \right]^{1/3}. \quad (4.6)$$

Dans le cas d'un noyau normal,  $h_0$  est donné par

$$h_0^N = (1.587)\sigma n^{-1/3} \quad (4.7)$$

En général, pour estimer le paramètre de lissage  $h_0$  (4.4) basé sur un échantillon donné, nous utilisons une estimation de l'écart-type  $\sigma$

$$\hat{h}_0^N = \left[ \frac{4\hat{\sigma}^3 \pi^{1/2}}{n\mu_2^2} \right]^{1/3} \quad (4.8)$$

Ainsi, pour un noyau normale, nous obtenons

$$\hat{h}_0^N = (1.587)\hat{\sigma} n^{-1/3} \quad (4.9)$$

$\hat{\sigma}$  peut être considéré, soit comme l'écart-type de l'échantillon, soit comme la mesure définie par

$$\hat{\sigma} = \min \left( S, \frac{IQR}{1.349} \right). \quad (4.10)$$

$S$  représente l'écart-type de l'échantillon et  $IQR$  l'intervalle interquartile<sup>2</sup>. Ce choix a été suggéré par Silverman [50]. D'un point de vue pratique, cette technique fonctionne relativement bien pour des densités unimodales.

Cependant, les expressions (4.8) et (4.9) ne sont valides que lorsque les données sont normalement distribuées;  $h_0$  serait très grand dans le cas contraire [41]. Pour montrer ceci, il suffit de calculer la borne supérieure de  $h_0$  en utilisant les résultats de Terrell [52]. En effet, si  $f$  est une densité quelconque de variance  $\sigma^2$ . D'après Terrell,

$$[R(f')]^{-1/3} \leq (2.052)\sigma$$

Ainsi la borne supérieure de  $h_0$  est donnée par

$$h_0 \leq (2.052)\sigma \left[ \frac{\rho(k)}{n\mu_2^2(k)} \right] = h_u.$$

Le paramètre de lissage  $h_u$  est connu sous le nom du paramètre de lissage "surlissé"<sup>3</sup>. Dans le cas d'une normale

$$\frac{h_0^N}{h_u} \approx 0.94$$

ce qui prouve que la distribution normale est assez lisse.

### Estimation "Plug-in"

Contrairement à la méthode précédente, nous utiliserons une méthode non-paramétrique pour l'estimation de  $R(f')$ . Soit la fonction  $\psi_r$  définie par

$$\psi_r = \int_{-\infty}^{+\infty} f^r(x)f(x)dx,$$

où  $r$  est un nombre entier supérieur à 2 ( $r \geq 2$ ). Sous des conditions de régularité de  $f$ , une simple intégration par parties donne

$$\begin{aligned} R(f^{(s)}) &= \int (f^{(s)}(x))^2 dx \\ &= (-1)^s \int f^{(2s)}(x)f(x)dx \\ &= (-1)^s \psi_{2s}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>L'intervalle interquartile est l'écart entre le troisième et le premier quartile.

<sup>3</sup>*Oversmoothing bandwidth* en anglais

Nous pouvons remarquer que la fonction  $\psi_{2s}$  et  $(-1)^s$  ont le même signe, et que  $\psi_r = 0$  dans le cas où  $r$  est impair. Nous pouvons écrire aussi

$$\psi_r = E[f^r(X)].$$

Un estimateur naturel de  $\psi_r$  serait

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_r(g) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_g^{(r)}(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_g^{(r)}(X_i - X_j) \\ &= \frac{1}{n^2 g^{r+1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L^{(r)}\left(\frac{X_i - X_j}{g}\right),\end{aligned}$$

où  $L$  représente un noyau qui n'est pas nécessairement identique à  $k^4$  et  $g$  un paramètre positif, souvent référé au paramètre de lissage qui peut lui aussi être différent de  $h$ . Le choix du paramètre de lissage  $g$  se fait sous les deux hypothèses suivantes:

- $g \rightarrow 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n g^{2r+1} = \infty$ .

La valeur de  $g$  qui minimise  $MISE(\hat{\psi}_r)$  [49] est donnée par

$$g_r = \left[ \frac{2L^{(r)}(0)}{-n\mu_2(L)\psi_{r+2}} \right]^{1/r+3}$$

Ces résultats peuvent être utilisés afin de déduire l'expression de l'estimateur de  $h_0$ . Ainsi d'après l'équation (4.4), nous avons

$$\hat{h}_0 = \left[ \frac{\rho(k)}{-n\mu_2(L)\hat{\psi}_2(g_2)} \right]^{1/3}$$

où

$$g_2 = \left[ \frac{2L^{(2)}(0)}{-n\mu_2(L)\psi_4} \right]^{1/5}$$

Notons que  $g_2$  dépend de  $f$  via la fonction  $\psi_4$  et doit également être estimé, ceci peut être fait en estimant  $\psi_4$  par  $\hat{\psi}_4(g_4)$ , pour lequel le paramètre de lissage  $g_4$  dépend de la fonction  $\psi_6$ , et ainsi de suite.

---

<sup>4</sup>Le noyau défini pour estimer la densité  $f$

Une suggestion pratique faite par Sheather et Jones [49] est qu'à un certain niveau, il est préférable d'estimer  $f$  en utilisant une distribution de référence, souvent normale. Dans le cas d'une fonction  $f$  normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ ; il est possible de montrer que

$$\psi_r = \frac{(-1)^{r/2} r!}{(2\sigma)^{r+1} (r/2)! \pi^{1/2}} \quad (4.11)$$

De ce fait, l'estimateur de  $\psi_r$  serait

$$\hat{\psi} = \frac{(-1)^{r/2} r!}{(2\hat{\sigma})^{r+1} (r/2)! \pi^{1/2}}, \quad (4.12)$$

où  $\hat{\sigma}$  peut être considéré, soit comme l'écart-type de l'échantillon, soit comme l'estimation donnée par l'équation (4.10).

### 4.3 Estimation de la VaR par la méthode du noyau

Il est important de rappeler que l'estimation de la VaR par la méthode du noyau, n'est autre que l'estimation à noyau du p-quantile<sup>5</sup>.

Soient  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de taille  $n$  et  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  le vecteur de ses statistiques d'ordre. La fonction quantile empirique de l'échantillon est la fonction  $\hat{Q}$  qui, pour tout  $i=1, \dots, n$ , vaut  $X_{(i)}$  sur l'intervalle  $]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ .

$$\forall u \in ]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], \quad \hat{Q}(u) = X_{(i)}$$

Alternativement, Reiss [44] a défini le quantile  $\hat{Q}$

$$\hat{Q}(u) = \begin{cases} X_{nu} & \text{si } nu \text{ entier} \\ X_{[nu]+1} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $[nu]$  désigne la partie entière de  $nu$ . Ainsi, on aurait

$$\hat{Q}(u) = X_{\langle nu \rangle}$$

où

$$\langle nu \rangle = \min\{m : m \geq nu\}.$$

$\hat{Q}$  génère des fonctions ayant des sauts aux points  $\frac{i}{n}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . En général, on définit  $\hat{Q}(0) = X_{(1)}$  et  $\hat{Q}(1) = X_{(n)}$ .

---

<sup>5</sup>Le p-quantile désigne le quantile d'un seuil de confiance  $p$ .

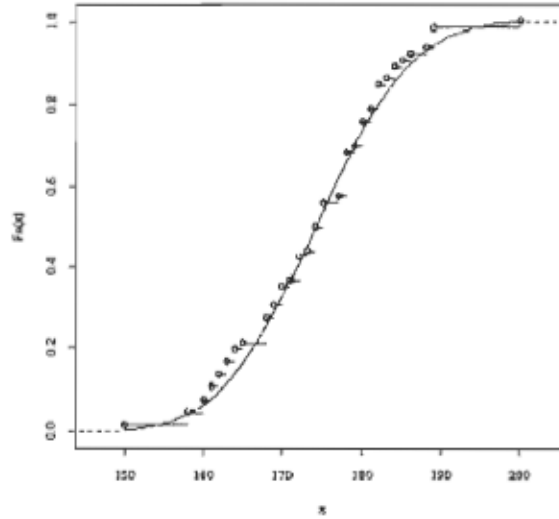


Figure 4.2: La fonction quantile empirique.

Au lieu de lisser la fonction quantile empirique par des échantillons de grande tailles, la discontinuité peut être enlevée en utilisant la moyenne. La VaR en un point  $p$  peut être estimée efficacement en utilisant des moyennes pondérées, où les poids optimisent la variance de l'estimateur.

Afin de simplifier l'estimation, Ridder [45] a suggéré dans son travail l'utilisation des poids suivants

$$w_{i,n}(p) = \begin{cases} 1 - (n+1)p + i & \text{si } i = [(n+1)p], \\ (n+1)p - i & \text{si } i = [(n+1)p] + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où  $[np]$  désigne le plus grand entier inférieur ou égale  $np$ . L'estimateur de la VaR est donné par l'expression suivante

$$VaR(p) = \sum_{i=1}^n w_i(p) L_i \quad (4.14)$$

où  $L_i$  désigne les statistiques d'ordre des variables pertes pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Le tableau (4.1) illustre quelques exemples de la fonction poids  $w_{i,n}$  pour différentes valeurs de  $n$  et  $p$ .

Les propriétés de ces estimateurs ont été étudiés par Parrish [41], Dielman, Lowry et Pfaffenberger [17]. Leurs résultats montrent que la performance de ces estimateurs peut être améliorée en les combinant à d'autres estimateurs.

n	p	i	$w_{i,n}$	$w_{i,n+1}$
50	0,95	47	-0,45	1,45
	0,99	49	-0,49	1,49
100	0,95	95	0,05	0,95
	0,99	99	0,01	0,99
150	0,95	143	0,55	0,45
	0,99	149	0,51	0,49

Tableau 4.1: Exemple de quelques poids  $w_{i,n}$ .

Néanmoins, les estimateurs de la VaR construits à partir de ces poids peuvent être interprétés comme une première étape pour des résultats plus stables et peuvent être calculés sans aucune difficulté lors des simulations.

### Exemple 1

Prenons l'exemple d'un échantillon de taille  $n = 100$ . D'après le tableau 4.1, l'estimateur de la VaR pour un niveau de confiance  $p = 95\%$  est donné par

$$\widehat{VaR}(0.95) = 0.05L_{95} + 0.95L_{96}.$$

Cette moyenne peut être remplacée par des fonctions noyaux à valeurs réelles  $k_n(p, x)$ , définies sur  $(0, 1) \times (0, 1)$ , pour  $n$  entier, par

$$\int_0^1 k_n(p, x) dx = 1,$$

l'estimateur quantile à noyau  $VaR(p)$  est donné alors par

$$\widehat{VaR}_{KQ}(p) = \int_0^1 k_n(p, x) \widehat{Q}(x) dx \quad (4.15)$$

$$= \sum_{i=1}^n w_{i,n}(p) L_i. \quad (4.16)$$

Les poids  $w_{i,n}$  s'expriment aussi sous la forme suivante

$$w_{i,n}(p) = \int_{(i-1)/n}^{i/n} k_n(p, x) dx$$

avec

$$\sum_{i=1}^n w_{i,n}(p) = 1.$$

Par conséquent,  $\widehat{VaR}_{KQ}$  est interprétée comme une fonction linéaire des statistiques d'ordre obtenues à partir d'un échantillon donné (e.g. les pertes et profits d'un portefeuille). Il est aussi important de noter que ces poids ne dépendent pas de l'échantillon. Ils peuvent par la suite être calculés, enregistrés et utilisés facilement pour n'importe quel autre échantillon de taille  $n$  dont on désire estimer la VaR.

### Exemple 2

Soit  $k_n$  la fonction noyau définie par

$$k_n(p, x) = \frac{1}{h_n} u\left(\frac{p - x}{h_n}\right),$$

où  $\int u(y)dy = 1$  et  $u(y) = 0$  pour  $|y| > 1$ <sup>6</sup>. Si la série des paramètres de lissage est choisie telle que l'inégalité suivante

$$h_n(p) \leq \min\{p, p - 1\}$$

soit toujours vérifiée; le nombre de lissage serait réduit lors de l'estimation des quantiles au voisinage des bornes de l'intervalle  $[0, 1]$ . Sous ces hypothèses, les deux équations (4.15) et (4.16) s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \widehat{VaR}_{KQ}(p) &= \int_{p-1/h_n}^{p/h_n} u(y) \widehat{Q}(p - yh_n(p)) dy \\ &= \sum_{i=1}^n w_{i,n}(p) L_i, \end{aligned}$$

où

$$w_{i,n}(p) = \int_{\frac{p-i/n}{h_n}}^{\frac{p-(i-1)/n}{h_n}} u(y) dy.$$

L'estimateur à noyau de la VaR, pour un niveau de confiance  $p$ , est donné alors par la formule suivante

$$\widehat{VaR}_{KQ}(p) = \sum_{i=1}^n \left[ U\left(\frac{1 - p - (i-1)/n}{h_n(p)}\right) - U\left(\frac{1 - p - i/n}{h_n(p)}\right) \right] L_i, \quad (4.17)$$

où

$$U(z) = \int_{-1}^z u(y) dy.$$

Il est important de noter que la fenêtre  $h_n$  doit être définie de telle façon que  $0 \leq p - h_n(p) < p + h_n(p) \leq 1$ . Une série  $h_n$  de paramètres de lissage a été proposée

<sup>6</sup>Voir Reiss [44] pour plus de détails

par Reiss [44]

$$h_n(p) = \begin{cases} p - p^2/4\beta_n & 0 < p < 2\beta_n \\ \beta_n & 2\beta_n \leq p \leq 1 - 2\beta_n \\ (1 - p) - (1 - p)^2/4\beta_n & 1 - 2\beta_n < p < 1, \end{cases}$$

où  $\beta_n \leq 1/4 \forall n \in \mathbb{N}$ . En combinant avec le noyau Epanechnikov

$$u(y) = 0.75(1 - y^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$

Nous obtenons

$$U(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}y^3 & \text{si } -1 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients dont on a besoin dans l'équation (4.17) peuvent être calculés facilement. Cependant, il est important de remarquer que  $h_n$  dépend du niveau de confiance  $p$  et du paramètre  $\beta_n$ , qui dépend à son tour de la taille de l'échantillon  $n$ . Nous pouvons résumer en disant que le choix de  $h_n$  dépend du choix de  $\beta$ . Ce choix peut dans certains cas influencer l'estimateur à noyau de la VaR.

Il est possible de trouver d'autres fonctions noyaux dans Härdle [25]. Ridder [45] a noté que les variables d'ordre  $i \leq n(p - h_n(p))$  et d'ordre  $i \geq n(p - h_n(p)) + 1$  auront des poids nuls lorsque toutes les hypothèses liées à  $h_n$  et à  $u(y)$  sont satisfaites. Il a ajouté que ceci montre que seulement un nombre restreint d'observations extrêmes sont utilisées lors de l'estimation de la VaR pour de grandes valeurs de  $p$  ou de  $1-p$ . La plupart des variables de l'échantillon recevront des poids nuls.

### Exemple d'application

Considérons les rendements journaliers de l'indice S&P500 pour une période de  $T = 200$  jours. Les changements des prix sont présentés dans la figure (4.3).

Dans cet exemple, nous allons considérer le noyau Epanechnikov  $U$  présenté précédemment, ainsi que la série des paramètres de lissage  $h_n$ , avec  $\beta = 0.15$ .

$$h_n(p) = \begin{cases} 1.67(p - (p)^2) & 0 < p < 0.3 \\ 0.15 & 0.3 \leq p \leq 0.7 \\ 1.67((1 - p) - (1 - p)^2) & 0.7 < p < 1, \end{cases}$$

Pour une probabilité  $p = 95\%$ , l'estimateur à noyau de la VaR est donné par

$$\widehat{VaR}_{KQ}(0.95) = 0.0186$$

La méthode du noyau est une approche non-paramétrique, flexible est très stable. L'avantage majeur de cette méthodologie, est son indépendance totale des hypothèses sur la distribution des rendements. De plus, les résultats de simulations de Ridder [45] montrent que la méthode du noyau donne de bons résultats même

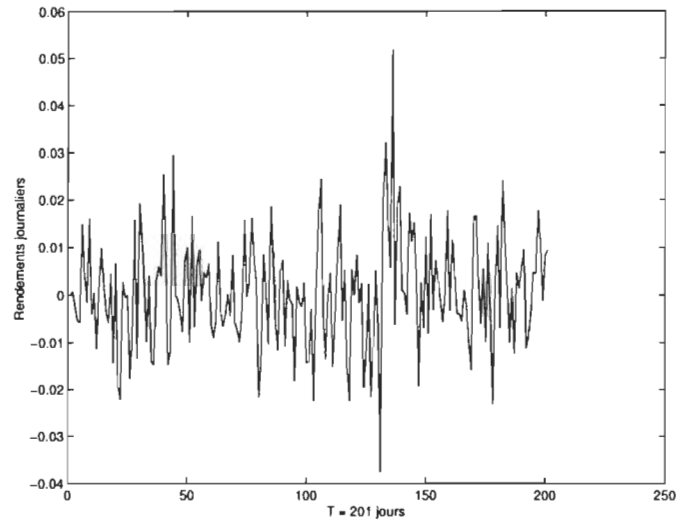


Figure 4.3: Les rendements journaliers de l'indice S&P 500

dans le cas de portefeuilles plus complexes. Cependant, le choix de ces paramètres surtout la fenêtre  $h$  est d'une grande importance, puisque la qualité de l'estimation en dépend.

Le chapitre suivant fera l'objet d'une étude comparative des cinq méthodes d'estimation présentées dans ce mémoire. Le but de cette étude est de prouver la performance de chaque méthode. Pour cela, nous allons considérer cinq distributions statistiques dont les queues de distribution varient selon l'épaisseur. La VaR théorique étant facile à déduire, les écarts absolues entre celle-ci et ses cinq estimations vont permettre d'avoir une idée claire sur la pertinence de chaque approche.

## Chapitre 5

# Étude comparative

On a choisi parmi toutes les lois statistiques connues, cinq lois dont les queues de distribution varient selon l'épaisseur (voir figure 5.1).

- La loi normale  $N(0,1)$ ;
- Les lois de Student  $T(v=3$  et  $v=6)$ ;
- La loi Gamma  $(2,1)$ ;
- La loi de Pareto  $(x_0 = 1, \alpha = 2.3)$ .

Nous pouvons noter que la loi de Student s'approche de la loi normale lorsque le degré de liberté  $v$  prend de grandes valeurs; et les queues de distribution deviennent plus épaisses et élevées pour des petits degrés de liberté.

La VaR théorique (la vraie valeur de la VaR) est facilement déduite à partir de ces cinq lois. En effet, la fonction de distribution étant connue, la VaR est simple à déterminer.

L'idée de cette étude consiste à générer des variables aléatoires à partir des cinq lois présentées ci dessus. Ensuite, calculer les cinq estimateurs de la VaR pour chaque loi; et enfin déterminer les écarts<sup>1</sup> en valeurs absolues  $\Delta$  données par

$$\Delta = |VaR(p) - \widehat{VaR}(p)|.$$

Nous répéterons cette opération 500 fois. Afin de mieux visualiser le comportement de chaque méthode, nous allons construire des diagrammes en boîtes<sup>2</sup> des écarts absolues  $\Delta$  pour chacune des cinq lois. Ces diagrammes en boîtes représentent en fait des outils d'analyse exploratoire des données. Ils fournissent des informations sur la dispersion, l'asymétrie ainsi que l'importance des valeurs extrêmes (valeurs

---

<sup>1</sup>Il s'agit de l'erreur ou la différence entre la vraie VaR et la valeur estimée de celle-ci.

<sup>2</sup>*Box plots* en anglais. Ils sont aussi connus sous le nom de "Boîtes-à-pattes" ou boîtes à moustaches.

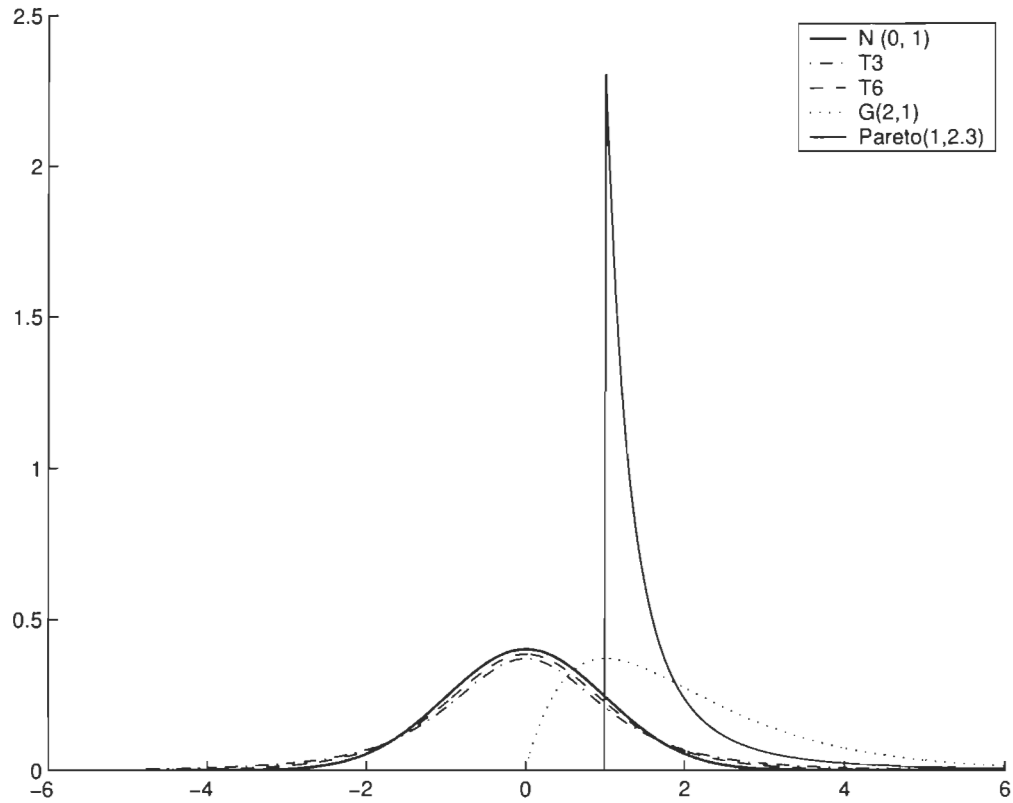


Figure 5.1: Représentation des cinq lois de probabilité.

aberrantes) de ces données. De plus, Ils sont très utilisés pour la comparaison des distributions sur plusieurs de ces critères.

La représentation des diagrammes en boîtes des cinq méthodes d'estimation permet de comparer et de suivre l'évolution des estimations pour différentes valeurs de  $n$ . Dans cette étude, nous allons considérer des échantillons de tailles  $n = 100$ ,  $1000$  et  $10000$ .

D'après les diagrammes des figures (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) et le tableau (5.1), nous pouvons remarquer que chaque méthode est meilleure dans un cas particulier de loi.

Par exemple, la méthode paramétrique (MP) est la meilleure lorsqu'il s'agit de la loi normale, les écarts sont plus petits et s'approchent d'avantage de zéro lorsque la taille de l'échantillon augmente. En effet, dans le cas où  $n = 10000$ , la valeur de la moyenne des écarts absolues se trouve aux alentours de 0.018. Cependant, elle est très mauvaise pour les autres lois où les distributions ne sont pas normales. En ce qui concerne la simulation historique (H) et la méthode Monte Carlo (MC), nous pouvons voir à travers toutes les figures représentant les diagrammes ainsi que le

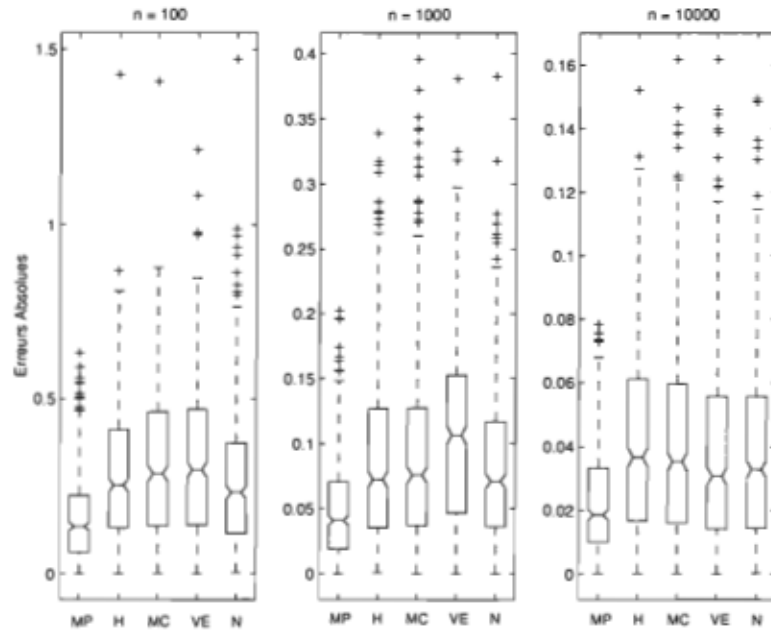


Figure 5.2: Les écarts absolus pour une loi Normale pour un seuil de confiance  $p = 99\%$ .

tableau (5.1) que ces deux approches donnent de bons résultats, la moyenne des écarts ainsi que les écarts-types<sup>3</sup> sont petits. Cependant, il est important de noter que dans notre cas d'étude les données sont stables, ce qui représente l'hypothèse majeure de la simulation historique.

Malgré la complexité des calculs théoriques qui se cachent derrière la méthode des valeurs extrêmes (VE), les résultats obtenus montrent que cette approche est assez bonne surtout dans le cas de distributions ayant des queues épaisses, telles que la distribution Gamma et la distribution Pareto.

Lors des simulations, nous avons remarqué que le choix de la longueur des blocs (d) influence énormément les résultats concernant la méthode des valeurs extrêmes, surtout dans le cas de la distribution Pareto. Nous pourrions même dire que le choix de d peut influencer la qualité de l'estimateur.

Les résultats des simulations montrent que la méthode du noyau (N) est plus stable en comparaison avec les autres techniques. En effet, les cinq figures et le tableau (5.1) illustrent clairement la stabilité des résultats pour les cinq lois.

De plus, elle représente une approche flexible et souple. Elle ne tient compte ni de la nature des rendements comme il est le cas de la méthode paramétrique, ni de

<sup>3</sup>Les écarts-types sont mis entre parenthèses dans le tableau (5.1).

p	Lois	MP	H	MC	VE	N
p=95% n = 100	N (0, 1)	0.1244(0.0935)	0.1760(0.1288)	0.1616(0.1258)	0.1701(0.1440)	0.1760(0.1284)
	T6	0.1964(0.1560)	0.2470(0.1851)	0.2413(0.1816)	0.2729(0.2029)	0.2456(0.1961)
	T3	0.5367(1.0368)	0.3905(0.3002)	0.3782(0.2939)	0.7227(1.7734)	0.3962(0.3257)
	G(2,1)	0.4831(0.2944)	0.4350(0.3161)	3.9094(1.3278)	0.4217(0.3076)	0.4270(0.3277)
	Pareto(1,2.3)	0.9785(2.0742)	0.5280(0.4937)	0.5438(0.4261)	0.5646(0.7997)	0.5484(0.5514)
n=1000	N (0, 1)	0.0393(0.0308)	0.0543(0.0412)	0.0546(0.0393)	0.0656(0.0491)	0.0524(0.0395)
	T6	0.0819(0.0603)	0.0772(0.0563)	0.0810(0.0607)	0.0798(0.0637)	0.0748(0.0548)
	T3	0.4334(0.3096)	0.1212(0.0934)	0.1198(0.0881)	0.2425(0.2123)	0.1202(0.0925)
	G(2,1)	0.4144(0.1120)	0.1233(0.0979)	1.8569(0.3911)	0.1324(0.0948)	0.1195(0.0970)
	Pareto(1,2.3)	0.9138(1.5213)	0.1737(0.1365)	0.1774(0.1295)	0.2933(0.2013)	0.1717(0.1366)
n=10000	N (0, 1)	0.0123(0.0094)	0.0160(0.0121)	0.0175(0.0139)	0.0452(0.0187)	0.0156(0.0119)
	T6	0.0707(0.0254)	0.0251(0.0192)	0.0252(0.0189)	0.0281(0.0204)	0.0244(0.0188)
	T3	0.4817(0.1900)	0.0409(0.0305)	0.0383(0.0301)	0.1799(0.0737)	0.0393(0.0297)
	G(2,1)	0.4208(0.0395)	0.0444(0.0333)	1.8324(0.3711)	0.0437(0.0327)	0.0432(0.0325)
	Pareto(1,2.3)	1.0964(1.1268)	0.0552(0.0418)	0.0569(0.0407)	0.2192(0.1222)	0.0545(0.0416)
p=99% n=100	N (0, 1)	0.1528(0.1148)	0.2881(0.1987)	0.2889(0.1983)	0.2954(0.2149)	0.2599(0.1973)
	T6	0.3894(0.2722)	0.5730(0.3812)	0.5625(0.4266)	0.5888(0.4029)	0.6049(0.4999)
	T3	0.9822(0.5800)	1.2509(1.0366)	1.1181(0.7596)	1.4388(1.2243)	1.4096(1.3606)
	G(2,1)	1.3830(0.4338)	0.8307(0.5457)	1.2052(1.0359)	0.9123(0.5861)	0.9692(0.6001)
	Pareto(1,2.3)	2.8619(1.4094)	1.2417(1.7734)	1.3254(1.9489)	1.0303(1.5255)	1.8009(1.3932)
n=1000	N (0, 1)	0.0462(0.0351)	0.0957(0.0718)	0.0955(0.0690)	0.1090(0.0759)	0.0831(0.0658)
	T6	0.2973(0.1074)	0.1979(0.1508)	0.1971(0.1422)	0.2300(0.2035)	0.2481(0.1660)
	T3	0.6940(0.4346)	0.4457(0.3496)	0.4175(0.3235)	0.5632(0.4062)	0.4971(0.4383)
	G(2,1)	1.3610(0.1447)	0.2832(0.1951)	1.7059(0.7525)	0.2769(0.2003)	0.5714(0.2815)
	Pareto(1,2.3)	2.3528(1.8423)	0.8091(0.6389)	0.7905(0.6032)	1.0907(1.6688)	1.1426(1.3898)
n=10000	N (0, 1)	0.0161(0.0127)	0.0293(0.0212)	0.0301(0.0230)	0.0281(0.0215)	0.0275(0.0200)
	T6	0.2939(0.0327)	0.0598(0.0462)	0.0610(0.0486)	0.0819(0.0537)	0.1822(0.0668)
	T3	0.5540(0.1689)	0.1316(0.1011)	0.1303(0.1035)	0.1674(0.1176)	0.1465(0.1139)
	G(2,1)	1.3459(0.0470)	0.0907(0.0671)	8.7609(0.3251)	0.0867(0.0667)	0.5297(0.0911)
	Pareto(1,2.3)	1.7619(1.2477)	0.2533(0.1908)	0.2530(0.1885)	0.5840(0.4568)	0.5509(0.4187)

Tableau 5.1: Les moyennes des écarts absolus entre la VaR théorique et tous ces estimateurs, ainsi que les écarts-types correspondant présentés entre parenthèses.

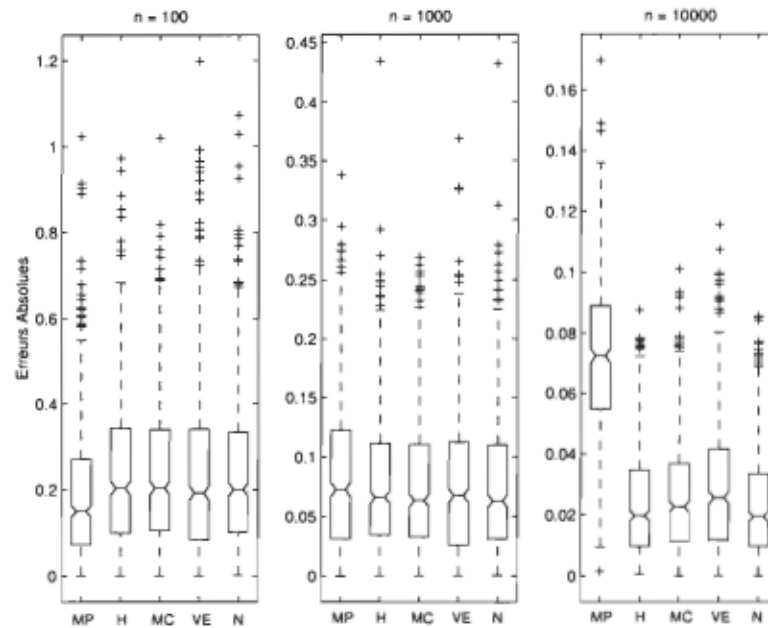


Figure 5.3: Les écarts absolus pour une loi Student ( $v = 6$ ) pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ).

la taille de l'échantillon comme il est le cas de la méthode historique. Les calculs sont simples et plus rapides que ceux de la méthode Monte Carlo, même dans des cas de portefeuilles plus complexes [45]. Cependant, le choix de ces paramètres est d'une très grande importance, surtout le choix de la fenêtre  $h$ . Ainsi, un bon choix du paramètre  $h$  peut donner des résultats meilleurs et prometteurs pour une mesure VaR plus précise.

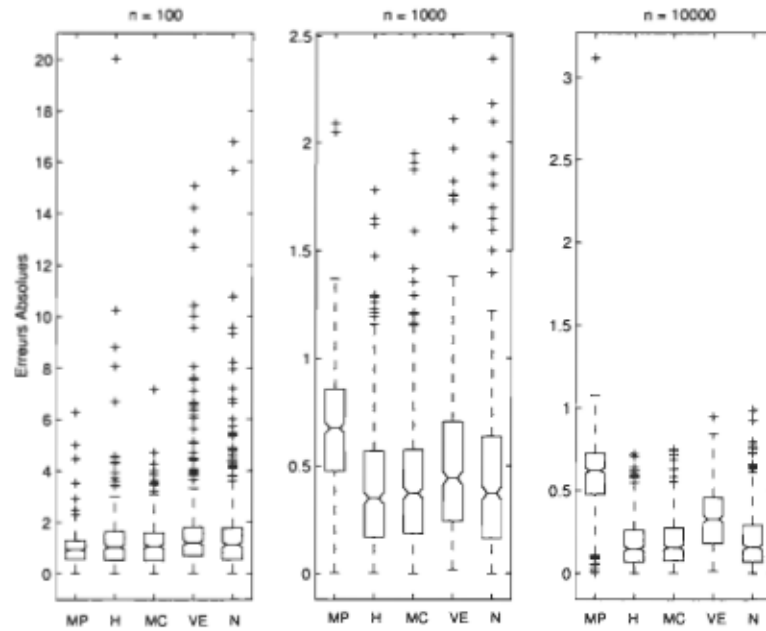


Figure 5.4: Les écarts absolus pour une loi Student ( $v = 3$ ) pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ).

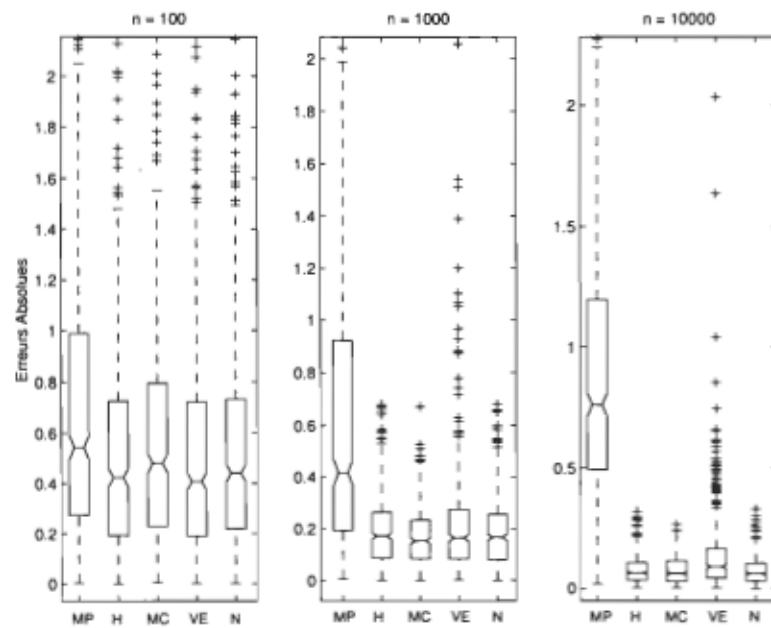


Figure 5.5: Les écarts absolus pour une loi Pareto pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ).

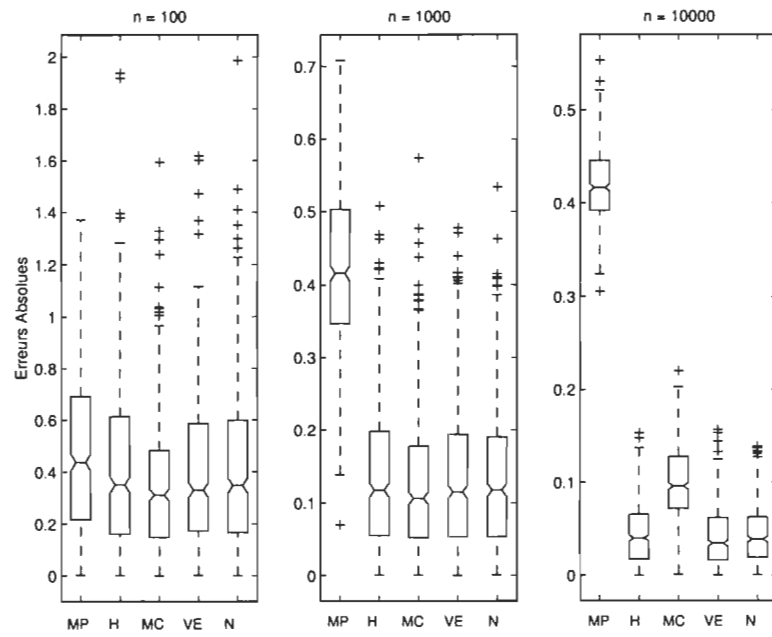


Figure 5.6: Les écarts absolus pour une loi Gamma pour un seuil de confiance ( $p = 99\%$ ).

## Chapitre 6

# Conclusion

Ce travail a compté cinq grandes parties. La première avait pour objectif de définir la méthodologie VaR et les paramètres liés à son calcul. Dans la deuxième partie nous avons défini la problématique générale de la Valeur à Risque ainsi que les différentes étapes associées.

Dans la troisième partie, nous avons voulu, à travers l'exposé des grandes méthodes classiques de l'estimation de la VaR, apprécier les estimations des pertes potentielles. De l'analyse est ressorti que, si certaines approches sont plus performantes que d'autres, tous les types de modélisation recèlent des carences importantes.

Nous avons introduit dans la quatrième partie la méthode du noyau qui a démontré la possibilité d'un raffinement au niveau de l'estimation de la VaR. En effet, cette approche a prouvé une certaine stabilité et une flexibilité en comparant avec les autres techniques d'estimation. Cependant, le choix de ces paramètres influence énormément sa performance.

La dernière partie avait pour but de comparer toutes les techniques d'estimation de la VaR. Les tests de comparaison entre les estimations de la VaR par les méthodes classiques d'estimations, la méthode des valeurs extrêmes et la technique du noyau, ont montré que la méthode du noyau présentait des résultats plus stables. De plus, elle n'est pas difficile à implanter. Le minimum requis est le matériel informatique de base et une certaine automatisation des procédures de calculs. L'élément le plus important à considérer est la fenêtre  $h$ .

Nous pouvons déduire à partir des chapitres précédents que chaque technique d'estimation donne une meilleure évaluation de la VaR dans certains contextes. La méthode des variances-covariances est meilleure lorsqu'il s'agit des rendements qui suivent une loi normale. Le calcul devient plus simple et le résultat est très bon. Cependant, l'hypothèse de normalité n'est pas toujours vérifiée, puisque les portefeuilles sont rarement linéaires (cas d'options). Malgré cela, cette méthode est très utilisée dans le secteur bancaire.

Contrairement à la méthode des variances-covariances, la méthode de simulation historique est indépendante de l'hypothèse de normalité des rendements. Elle représente une approche simple et flexible. De plus, elle peut facilement introduire des portefeuilles non-linéaires. Toutefois, le choix des historiques influence énormément la qualité de l'estimateur de la VaR. Cette méthode d'estimation donne de meilleurs résultats lorsqu'il s'agit de courts historiques.

Malgré la complexité des calculs qui se cachent derrière la méthode des valeurs extrêmes, cette technique a prouvé sa pertinence et sa fiabilité dans le cas des distributions ayant des queues épaisses. Cependant, le choix de ces paramètres est d'une grande importance. De plus, La méthode des valeurs extrêmes peut être considérée comme un supplément pour les méthodes d'estimation classique de la VaR.

Pareillement à la méthode de simulation historique, la méthode Monte Carlo n'exige aucune hypothèse sur la distribution des rendements. Cette approche donne de très bons résultats. Cependant, elle exige une puissance et un temps de calcul importants.

Lors des simulations du chapitre 5, la méthode du noyau a prouvé une stabilité remarquable. Contrairement aux méthodes d'estimation classique, cette méthode n'exige aucune hypothèse sur la distribution des rendements, elle ne tient pas compte de la taille des historiques et les calculs sont simple et rapide. Cependant, le choix de la fenêtre  $h$  est d'une grande importance et peut influencer grandement la qualité de l'estimateur.

Il n'est pas possible d'identifier une méthodologie universellement acceptée pour estimer la VaR, chacune présentant ses propres limites. L'une des limites fondamentales de n'importe quelle méthodologie, est le fait qu'elle soit le reflet de la subjectivité des hypothèses sous-jacentes.

Une période de raffinement semble être commencée. La méthode du noyau semble être une voie très intéressante. D'ici quelques années, il est probable que l'objectif à atteindre soit une gestion unifiée des risques. Mais avant d'y parvenir, il faudra que la gestion des risques soit bien maîtrisée.

## Chapitre 7

# Annexe

### Modèle CAPM

Le modèle CAPM (Capital Asset Pricing Model) est le modèle le plus utilisé au monde, tant pour le choix des titres que dans l'évaluation de la performance des portefeuilles. Il énonce quel devrait être le rendement d'un titre en fonction de son niveau de risque systématique, donné par le coefficient bêta.

Le coefficient bêta permet de connaître la variation (hausse ou baisse) de la valeur du titre sur le marché. Par exemple, si une action a un bêta égale à 1.2, ceci signifie que si le marché monte de 10%, l'action en question va augmenter de 12% ( $1,2 \times 10$ ); et inversement, si le marché chute de 10%, l'action perdra 12%.

### Comité de Bâle

Le Comité de Bâle sur la supervision bancaire est un comité d'autorités supervisorales bancaires qui a été établi par les gouverneurs des banques centrales du groupe des dix principaux pays industrialisés en 1975. Il consiste de hauts représentants des autorités supervisorales bancaires et des banques centrales de la Belgique, du Canada, de la France, de l'Allemagne, de l'Italie, du Japon, du Luxembourg, des Pays-Bas, de la Suède, de la Suisse, du Royaume-Uni et des Etats-Unis.

### Ex-post

Dans le langage des économistes, l'expression ex-post sert à distinguer les grandeurs découlant des projets et prévisions des agents économiques (ex-ante) des mêmes grandeurs telles qu'elles sont effectivement réalisées dans la vie économique (ex-post). Ces concepts ex-ante et ex-post ont été introduits par l'école suédoise (principalement par l'économiste Myrdal) et ne constituent qu'une formulation différente des notions bien connues d'a priori et d'a posteriori.

D'une manière générale, les grandeurs ex-ante relèvent de l'anticipation, les grandeurs ex-post de la mesure statistique. L'utilisation systématique de ces deux

concepts permet d'estimer la marge d'erreur des agents économiques et d'en mesurer les conséquences. En outre et surtout, les grandeurs ex-ante sont à considérer comme des facteurs économiques réels dans la mesure où les opinions et les intentions qu'elles traduisent constituent des éléments parfois déterminants de la conjoncture économique.

Le rapprochement des deux concepts permet ainsi de rendre compte de deux notions fondamentales: le facteur de temps et le facteur de conscience. L'un des objets de l'analyse économique est d'apprécier les conditions dans lesquelles les grandeurs ex-ante prennent les valeurs constatées ex-post, et plus précisément, d'établir le partage d'influence entre les trois éléments explicatifs suivants: les erreurs affectant la prévision ex-ante, les modifications de comportement par rapport aux intentions affirmées et les mouvements de prix qui règlent, en économie de marché, l'ajustement de comportements contradictoires.

### **Portefeuille de négociation**

Le portefeuille de négociation représente en fait les positions propres d'une banque sur des instruments financiers expressément détenues en vue de leur revente à court terme et/ou prises par celle-ci dans l'intention de réaliser des bénéfices à court terme, grâce aux écarts existants et/ou escomptés entre leurs prix d'achats et de vente ou à d'autres variations de prix ou de taux d'intérêt, et les positions sur instruments financiers résultant d'achats et de ventes simultanés et d'une activité de teneur de marché effectuée pour compte propre ou les positions constituées en vue de couvrir d'autres éléments du portefeuille de négociation.

### **Risques *delta***

Le risque delta mesure la sensibilité de la prime de l'option à une fluctuation du prix de l'actif sous-jacent (généralement exprimé en centimes pour un changement de une unité de l'actif).

### **Risques *gamma***

Comme le risque delta n'est pas une constante, on peut aussi mesurer la vitesse de réaction du risque delta à une variation d'une unité de l'actif sous-jacent, c'est ce qu'on appelle le risque gamma. Gamma peut tout aussi bien être positif que négatif. Les plus grandes valeurs de gamma se trouvent lorsque le prix du sous-jacent est proche du prix d'exercice de l'option.

### **Risques *véga***

La prime de l'option est aussi affectée par une variation de la volatilité implicite. C'est ce que mesure le risque kappa ou véga.

### Risque de marché

Le risque de marché peut se définir comme “le risque qu’un changement dans les prix des titres (obligations et actions) ou des produits dérivés dans lesquels la banque détient une position cause une perte”.

### Intermédiation financière

L’intermédiation financière est une opération financière effectuée par l’intermédiaire d’un établissement financier dans le but d’utiliser l’épargne disponible pour financer une activité.

### Swaps

Dans sa définition la plus globale, un swap (ou crédit croisé) consiste en l’échange, entre deux contreparties, de deux trésoreries libellées dans deux monnaies différentes sur une période donnée.

Un swap de taux d’intérêts est l’échange, entre deux contreparties (par exemple deux banques), des paiements d’intérêts de deux dettes généralement libellées dans la même monnaie, l’une étant à taux variable, l’autre à taux fixe. En principe, seul le différentiel d’intérêt est échangé.

### RAROC

L’approche RAROC (Risk Adjusted Return On Capital) est introduite dans les années 1970 par un groupe de *Bankers Trust*. En théorie, pour chaque transaction, on détermine la charge de la part incrémentale des fonds propres requis à la couverture des risques inhérents à l’engagement. Ce coût est à déduire du résultat opérationnel brut escompté. L’objectif principal de RAROC est de fournir une mesure permettant de comparer des résultats tirés sur des activités et instruments ayant des risques différents.

### Facteur de multiplication

Le facteur de multiplication est un nombre qui varie entre 3 et 4 et qui peut être multiplié à la mesure VaR calculée par la banque afin de servir d’assurance contre les mauvais fonctionnements des modèles internes. Donc, plus la banque respecte les règles et critères de la BRI et plus le modèle répond aux tests qui sont faits, plus le facteur appliqué se rapprochera de 3. Le risque de marché d’une institution est donc sa VaR calculée multipliée par ce facteur de multiplication. Le capital requis est ensuite déterminé à partir de cette nouvelle VaR.

# Références

- [1] Abdous, B. (1993). Note on the minimum mean integrated squared error of kernel estimates of a distribution function and its derivatives. *Communications in statistics. Theory and Methods*, **22**, 603-609.
- [2] Acerbi C., Dirk T. (2001). Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk. *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA*.**31(2)**, 1-10.
- [3] Artzner, A., F. Delbaen, J-M. Eber et D. Heath (1997). Thinking Coherently, *Risk magazine*, **10**, 68-71.
- [4] Artzner, A., F. Delbaen, J-M. Eber et D. Heath (1999). Coherent measures of risk, *textitMathematical Finance*, **9**, 203-228.
- [5] Azzalini A. (1981). *A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method*. *Biometrika* 68 , 1, 326-328.
- [6] Beder Tanya (1995). VaR : Seductive but Dangerous. *Financial Analysts Journal*, 12-24.
- [7] Beirlant J., Vynckier P. et Teugels J. (1996). Tail Index Estimation, Pareto Quantile Plots, and Regression Diagnostics., *Journal of the American Statistical Association*, **91**, 436.
- [8] Best P. (1999). *Implementing Value at Risk*. John Wiley & Sons Ltd, England.
- [9] Bezat A. et Nikeghbali A. (2000). La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché. Groupe de Travail ENSAE. Preprint <http://gro.creditlyonnais.fr>
- [10] Black F. et Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. **81**, pp. 637-659.
- [11] Butler J. S. et Schachter B. (1997). Estimating Value-at-Risk with a precision measure by combining kernel estimation with historical simulation. *Review of Derivatives Research*, **1**, 371-390.
- [12] Chapell David , and Kevin Dowd (1999.) Confidence Intervals for VaR *Financial Engineering News*. Preprint : <http://fenews.com/1999/Issue9/>.

- [13] Chase Manhattan Bank N.A. (1995). *The management of financial price risk*, London, 1995.
- [14] Culp C., Miller M. and Neves A. (1998). Value at risk : uses and abuses. *Bank of America-Journal of Applied Corporate Finance*, **10**, 4.
- [15] Danielson J., de Vries C. (2000) Value-at-Risk and Extreme Return, *Annales d'Economie et de Statistique*, **60**, 239-70.
- [16] De Schepper, Ann, Goovaerts, Marc J. (1997). The GARCH(1,1)-M model: results for the densities of the variance and the mean. *Insurance Math. Econom.*, **24**, no. 1-2, 83-94.
- [17] Dielman, T., Lowry C. et Pfaffenberger, R. (1994). A comparison of Quantile Estimators. *Communications in Statistics Simulation*.
- [18] Duffie, D. et J. Pan. (1997) An overview of value at Risk, *Journal of Derivatives*, **4**, 7-49.
- [19] Esch L., Kieffer R., Lopez T. (1997). *Value at Risk vers un Risk Management moderne*, De Boeck, Bruxelles.
- [20] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and T. Mikosch, (1999) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, *Applications of Mathematics*, **33**, 645.
- [21] Evis K. and Manfred G. (2000) Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures. Preprint : <http://www.unige.ch/ses/metri/gilli/>.
- [22] Falk M. (1985). Asymptotic Normality of the Kernel Quantile Estimator. *The Annals of statistics*, **13**, 428-433.
- [23] Gouriéroux C. (1997). ARCH models and financial applications. Springer Series in Statistics. *Springer-Verlag, New York*.
- [24] Hall, P., and Marron, J.S. (1987). Estimation of integrated squared density derivatives. *Statistics and Probability Letters*, **6**, 109-115.
- [25] Härdle, W. (1991). *Smoothing Techniques. With Implementations in S*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [26] Harrel F. E. et Davis C. E. (1982). A New Distribution-Free Quantile Estimator. *Biometrika*, **69**, 635-640.
- [27] Hill B.M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution *Annals of Statistics*, **3**, no. 5, 1163-1174.
- [28] Hoeung S., Riboulet G. et T. Roncalli (1999). Les risques de marché - Réglementations, mesures et pratiques. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *document interne*.

- [29] Jones, M. C. (1990). The performance of kernel density function. *Communications in statistics, Theory and Methods*, **14**, 605-620.
- [30] Jones, M. C. and Sheather, S. J. (1991). Using non-stochastic terms to advantage in kernel-based estimation of integrated squared density derivatives. *Statistics and Probability Letters*, **11**, 511-514.
- [31] Jorion, P. (1996). Measuring the Risk in VaR . *Financial Analysts Journal*, **52**, 47-56.
- [32] Jorion, P. (1996). *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, Irwin Professional.
- [33] Jorion, Philippe. (1997). Lessons From The Orange County Bankruptcy. *Journal of Derivatives*, **4**, 61-66.
- [34] J.P. Morgan (1996). *RiskMetrics<sup>TM</sup> - Technical Document*, 4th ed., Morgan Guaranty Trust Company, New York.
- [35] Kupiec, Paul H. (1995) Techniques for verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, **3**, 73-84 .
- [36] Longuin, M.F. (1999). From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach. *Center for Economic Policy Research*, Discussion Paper No. 2161.
- [37] Marshall C., Siegel M. (1996) Value-at-Risk : Implementing a Risk Measurement Standard *Financial Institutions Center, Wharton*.
- [38] McKay R., Keefer T. E. (1996). *Var is a dangerous technique*. Corporate Finance, London.
- [39] Miller R. G. (1974). The Jackknife - A Review. *Biometrika*. **61**, 1-15.
- [40] Nadaraya, E. A. (1964). Some new estimates for distribution functions. *Theory Prob. Applic.* **15**, 497-500
- [41] Parrish, R.S. (1990). Comparison of Quantile Estimators in Normal Sampling. *Biometrics*, **46**, 247-257.
- [42] Pearson E.S et Hartley H.O. (1976) *Biometrika tables for statisticians*, *Biometrika Trust*, London, p. 118.
- [43] Polansky, A. (1997). Bandwidth selection for kernel distribution functions. Preprint : <http://www.math.niu.edu/~polansky/Papers/>
- [44] Reiss, R. D. (1989). Approximate Distributions of Order Statistics. With Applications to Nonparametric Statistics. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, no. 409, 260-261.

- [45] Ridder, T. (1997). Basics of Statistical VaR-estimation. *Risk measurement, econometrics and neural networks*, Karlsruhe, 161-187,
- [46] Rodolphe Demilie (1997). *Le Value at Risk : une méthodologie d'estimation des risques de marché*. FUNDP, Fac. des sciences économiques, sociales et de gestion, Namur.
- [47] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some Nonparametric Estimates of a Density Function, *Annals of Mathematics and Statistics*, **27**, 832-835.
- [48] Sharpe W.F., (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, **9**, no. 1, 277-293.
- [49] Sheather, S. J., and Jones, M.C.(1991). A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **53**, 683-90.
- [50] Silverman, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall, London.
- [51] Simon J. Sheather, J. S. Marron (1990). Kernel Quantile Estimators. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, no. 410, 410-416.
- [52] Terrell, G. R. (1990). The maximal smoothing principle in density estimation. *Journal of the American Statistical Association*, **85**, 470-477
- [53] Vose D., (1996). *Quantitative risk analysis*, Wiley, New York.
- [54] Wand M.P. and M.C. Jones (1995). *Kernel Smoothing*, Chapman and Hall London.