

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN GÉNIE ÉLECTRIQUE

PAR
CARLOS ORTIZ

MODÉLISATION PARALLÈLE DU TRANSFERT DE CHALEUR DANS UN
TRANSFORMATEUR À SEC.

JUIN 2005

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Je tiens également à remercier M. Guy Boisclair membre du personnel technique du Département de Génie Électrique et Génie Informatique de l'UQTR, M. Alain Morissette du Département d'Informatique de l'UQTR ainsi que M. Dominique Martel administrateur des Systèmes du Laboratoire de Calcul Avancé de l'École de Technologie Supérieure de Montréal.

À mon fils Émile Carlos, toute ma reconnaissance de m'avoir donné une grande motivation pour passer à travers toutes les difficultés rencontrées dans ce projet.

Résumé

Les transformateurs sont des éléments essentiels dans les réseaux de distribution car ils assurent la conversion de la haute tension délivrée par les lignes de puissance, en tension utilisable soit dans les secteurs résidentiels ou les secteurs industriels. Le procédé de fabrication de ce type d'appareils a connu, dans les dix dernières années, des changements importants au niveau de la composition des fluides de refroidissement et de la configuration des bobinages. Bien que nous retrouvions encore à l'intérieur de certains transformateurs des fluides tels que les huiles minérales, des hydrocarbures de haute température et de la silicone, les nouvelles lois environnementales contraignent de plus en plus l'industrie à remplacer les unités remplies de fluides polluants, par des dispositifs de type sec. D'un autre côté, les pertes associées à la transformation de la puissance sont souvent prises comme une mesure du rendement d'un dispositif de transformation, fait par lequel on cherche de plus en plus à remplacer le cuivre, dans les enroulements des bobinages d'un transformateur, par des conducteurs plats en aluminium qui permettent une plus haute montée de température pour un même niveau de charge. Pour un même poids par masse, l'aluminium conduit deux fois plus de courant que le cuivre. À ce même effet, on préconise l'utilisation de supraconducteurs pour des raisons évidentes en matière de réduction totale des pertes. Il n'est pas surprenant, par ailleurs, qu'il se fasse des travaux de recherche sur l'utilisation de la technologie de l'état solide, pour remplacer en totalité la configuration actuelle des dispositifs de transformation, dans le but de pouvoir atteindre le plus bas niveau possible de pertes [1].

Presque toute méthode de production ou conversion d'énergie est accompagnée d'un phénomène physique de transfert de chaleur. Comme de tels phénomènes ont un grand impact dans la conception et le fonctionnement des transformateurs, il est important de pouvoir les prédire quantitativement pour prévenir des éventuels dangers et assurer au maximum les bénéfices économiques. Ce qui se traduit par une opération plus efficace et plus sécuritaire de l'appareillage de production ou de distribution électrique. Jusqu'à très récemment la modélisation du transfert de chaleur dans les transformateurs a été réalisée avec un certain degré de précision à l'aide de deux méthodes numériques distinctes. Celle de l'utilisation d'un code de transfert de chaleur par conduction et celle de l'utilisation

d'un code basé sur la dynamique des fluides. Dans le premier cas les codes électromagnétiques utilisent les équations de Maxwell, entre autres, pour le calcul d'une distribution de champ qui permet d'évaluer une dissipation de puissance en termes de pertes par induction de courants dans le circuit magnétique et la partie structurale des transformateurs. Une dissipation de puissance supplémentaire est associée à la circulation des courants dans les conducteurs électriques des bobinages. Par la suite l'équation de Poisson est utilisée pour faire les calculs de la distribution de température résultante. À l'aide d'une telle approche il est possible seulement de modéliser un transfert de chaleur par conduction.

Dans le deuxième cas, les codes basés sur la dynamique des fluides utilisent des équations hydrauliques et énergétiques (et rarement les équations de Navier-Stokes) pour faire le calcul détaillé du transfert de chaleur dans la partie solide et le fluide de refroidissement des transformateurs. À l'aide de cette approche une autre dimension est ajoutée à l'analyse thermique, celle du déplacement de masse dans la partie fluide. Ceci nous permet de faire une analyse de type couplé ou conjugué, c'est-à-dire par conduction et convection.

L'aspect commun dans les deux tendances est celui de la modélisation 2D de sections du circuit magnétique tout comme l'utilisation des relations parfois empiriques pour le calcul de données telles que la dissipation de puissance par induction magnétique et le nombre de Nusselt. Il va de soi que la taille des modèles suggérés est assez réduite (de 16000 nœuds au plus) et toutes les ressources utilisées dans les calculs sont de type séquentiel.

L'objectif général du travail de recherche est de modéliser, en trois dimensions par éléments finis le transfert de chaleur par conduction dans un transformateur à sec d'une capacité de 167 kVA opérant à tension réduite. Le modèle proposé comporte plus d'un million de nœuds.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Liste des symboles	vii
Liste des tableaux	x
Liste des figures	xi
1.0 Introduction	1
2.0 Problématique de recherche.	11
2.1 La méthode des résidus pondérés.	14
2.2 La méthode du volume de contrôle.	19
2.3 Objectifs de recherche.	21
2.4 Infrastructure de recherche.	22
2.5 L'objet de modélisation.	23
3.0 Méthodologie de recherche	36
3.1. Équation caractéristique pour la modélisation du transfert de chaleur par diffusion en régime permanent.	36
3.2 Discrétisation de l'équation de Poisson.	38
3.3 Formes intégrales élémentaires discrétisées.	41
3.4 Représentation matricielle de l'intégration par la méthode des éléments finis.	43
3.5 Forme intégrale W^e sur l'élément de référence.	47
3.6 Intégration numérique de l'équation de la chaleur.	52
3.7 Système linéaire résultant.	55
3.8 Les flots convectifs.	60

3.9 Équation caractéristique pour la modélisation du transfert de chaleur conjugué en régime permanent.	62
3.10 Modèle de turbulence adopté.	65
3.11 Discrétisation des équations de Navier-Stokes.	70
4.0 Approche de résolution numérique	78
4.1 La méthode du gradient conjugué.	79
4.2 La méthode du gradient conjugué préconditionné.	80
4.3 Parallélisation de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné.	82
4.4 L'algorithme TDMA (Thomas Direct Method Algorithm)	87
4.5 L'algorithme SIMPLE(Semi-Implicit Method for Pressure-linked Equations).	91
4.6 L'algorithme SIMPLEC (Simple-Consistent).	95
4.7 Les coefficients de relaxation.	97
5.0 Résultats de simulation	100
5.1 Résultats de simulation pour le problème de transfert de chaleur par diffusion.	101
5.2 Résultats de simulation pour le problème de transfert de chaleur par écoulement de fluides.	107
6.0 Mesure et validation	119
7.0 Conclusion	123
Références	126

Liste de symboles

T	Température (°C)
K	Température (°K)
k_x	Conductivité thermique selon l'axe x (W/m.°K)
k_y	Conductivité thermique selon l'axe y (W/m.°K)
k_z	Conductivité thermique selon l'axe z (W/m.°K)
Q	Densité de puissance (W/m ³)
h	Coefficient de convection (W/m ² .°K)
σ	Constante de Stefan-Boltzmann (5.6703 ^e -08 W/m ² K ⁴)
e	Coefficient d'émissivité
Ω	Volume ou surface (m ³ , m ²)
Γ	Frontière de ligne ou de surface (m, m ²)
ζ	Opérateur différentiel
θ	Opérateur différentiel
f_v	Terme source de volume
f_s	Terme source de surface
u	Variable inconnue
R	Résidu
v	Fonction de pondération
Θ	Ordre de grandeur
μ	Viscosité (kg/m.s)
ρ	Densité (kg/m ³)
u	Vélocité en x (m/s)
v	Vélocité en y (m/s)
w	Vélocité en z (m/s)
P	Pression (Pa)
C_p	Chaleur spécifique (J/kg.K)
S	Terme source
V_x	Terme visqueux additionnel
B_x	Force de poussée
F_x	Résistance distribuée
Ra	Nombre de Rayleigh
β	Coefficient de dilatation thermique (1/K)
ξ, η, ζ	Base naturelle pour l'élément de référence
ψ	Fonction de pondération
δT	Première variation de la température
N	Fonctions d'interpolation
T_n	Valeur nodale de température
T_{ref}	Température de référence (°K)
T_{ex}	Température exacte
T_H	Valeur de température la plus haute

T_{fs}	Valeur de température du fluide non perturbé
h	Coefficient de convection noté h également ($W/m^2 \cdot ^\circ K$)
f_s	Valeur constante égale à hT_{ref} (W/m^2)
W	Équation intégrale
J	Matrice jacobienne
J^{-1}	Matrice jacobienne inverse
J_s	Matrice jacobienne de surface
ξ_i	Points de Gauss d'intégration selon l'axe ξ
η_j	Points de Gauss d'intégration selon l'axe η
ζ_k	Points de Gauss d'intégration selon l'axe ζ
$[B]$	Matrice des dérivées des fonctions d'interpolation
$[D]$	Matrice des propriétés physiques
$[P]$	Matrice de transformation
J_s	Terme de transformation d'intégrale de surface
$\{N\}$	Vecteur colonne de fonctions d'interpolation
$\langle N \rangle$	Vecteur rangée de fonctions d'interpolation
$[k^e]$	Matrice élémentaire des coefficients
$[f^e]$	Vecteur élémentaire d'excitation
$[k]$	Matrice globale de coefficients
$[f]$	Vecteur global d'excitation
$[k^*]$	Matrice globale des polynômes ou fractions rationnelles
$[f^*]_v$	Vecteur global des polynômes ou fractions rationnelles
$[f_{s1}]$	Matrice globale des polynômes ou fractions rationnelles
$\{f_{s2}\}$	Vecteur global des polynômes ou fractions rationnelles
τ^e	Transformation géométrique de l'élément réel
x^e	Coordonnées de l'élément réel
V^e	Volume de l'élément réel
V^r	Volume de l'élément de référence
ibw	Largeur de bande
κ	Variable associée à l'énergie cinétique turbulente
ε	Variable associée à la dissipation d'énergie turbulente
P	Terme de production d'énergie cinétique par forces de cisaillement
G	Terme de génération d'énergie cinétique par forces de poussée
C_1	Constante empirique
C_2	Constante empirique
C_{RNG}	Constante de turbulence calculée
C_μ	Constante de turbulence empirique
β_1	Constante empirique de turbulence
η	Valeur de turbulence calculée
μ_{eff}	Viscosité efficace
μ_T	Viscosité turbulente
σ_T	Nombre de Prandtl turbulent
y^+	Distance de couche limite
u^+	Velocité sur couche limite
$k_{e,o,n,s}$	Conductivité thermique d'interface selon les directions orthogonales

$k_{E,O,N,S}$	Conductivité thermique nodale
k_P	Conductivité thermique nodale de référence
ϕ	Propriété d'un écoulement (vitesse, enthalpie, etc.)
ϕ^*	Propriété d'un écoulement estimée (vitesse, enthalpie, etc.)
Γ	Coefficient de diffusion
b	Constante de discrétisation
$a_{o,e,n,s}$	Constante de discrétisation d'interface
a_{nb}	Constante de discrétisation nodale
a_P	Constante de discrétisation nodale de référence
$\phi_{O,E,N,S}$	Variable nodale dépendante
ϕ_P	Variable nodale de référence
F	Débit de masse par surface
D	Conductance
$P_{E,O,N,S}$	Pression nodale
$P^*_{E,O,N,S}$	Pression nodale connue
P'	Correction de pression
$u^*_{o,e,n,s}$	Valeur de vitesse d'interface connue
$v^*_{o,e,n,s}$	Valeur de vitesse d'interface connue
u', v'	Correction de vitesse
$d^C_{o,e}$	Coefficient de conductance corrigé
ε	Tolérance de précision
ρ_k	Norme carrée de résidu d'itération
γ_k	Constante d'itération
α_k	Constante d'itération
r_k	Vecteur résidu d'itération
A	Matrice de coefficients
b	Vecteur d'excitation
x	Vecteur solution
y	Vecteur auxiliaire de calcul
z	Vecteur intermédiaire de calcul
p	Vecteur directionnel de recherche de solution
M	Matrice de préconditionnement
L	Matrice triangulaire inférieure de factorisation
L^T	Transposée de matrice triangulaire inférieure de factorisation

Liste des tableaux

Tableau 1. Données techniques du transformateur modélisé.	31
Tableau 2. Fonctions d'interpolation et leurs dérivées.	46
Tableau 3. Points de Gauss utilisés pour l'intégration numérique.	54
Tableau 4. Stockage d'une demie largeur de bande dans un tableau $nxibw$.	57
Tableau 5. Profil de stockage CSC (Compressed Storage by Columns).	58
Tableau 6. Résultats de simulation sur cluster PC (573181 DOF).	102
Tableau 7. Résultats de simulation sur la machine IBM Power SP4(573181 DOF).	104
Tableau 8. Résultats de simulation sur la machine IBM Power SP4(1.009.096 DOF).	105
Tableau 9. Résultats de simulation sur serveur Enterprise 6000.	108
Tableau 10. Données techniques du type de thermocouple utilisé.	120
Tableau 11. Exemple de fichier de sortie de mesure.	122
Tableau 12. Comparaison de résultats de calcul et de mesure.	122

Liste de figures

Figure 1. Le domaine Ω et la frontière Γ .	14
Figure 2. L'objet de modélisation et banc d'essai.	30
Figure 3. Maillage hexaédrique du transformateur.	31
Figure 4. Portion de maillage.	32
Figure 5. Maillage du circuit magnétique.	33
Figure 6. Maillage utilisé pour la partie fluide.	34
Figure 7. Position des thermocouples.	35
Figure 8. Élément hexaédrique de référence.	46
Figure 9. Demi-profil du système linéaire avant réduction de largeur de bande.	56
Figure 10. Profil complet du système après réduction de la largeur de bande.	59
Figure 11. Principe de convection.	60
Figure 12. Vue transversale de roulis de convection entre deux plaques.	61
Figure 13. Volume de contrôle à une dimension.	71
Figure 14. Structure de la matrice de Cholesky par paquets.	84
Figure 15. Flot de calcul pour la méthode TDMA à deux dimensions.	88
Figure 16. Flot de calcul pour la méthode TDMA à trois dimensions.	89
Figure 17. Maillage déplacé.	92
Figure 18. Maillage de calcul.	94
Figure 19. Performance parallèle sur cluster PC. (573181 DDL).	102
Figure 20. Performance parallèle sur la machine IBM SP4 (573181 DDL).	104

Figure 21. Performance parallèle sur la machine IBM SP4 (1009096 DDL).	105
Figure 22. Coupe transversale de distribution de température calculée.	106
Figure 23. Affichage du temps d'exécution parallèle sur Fluent.	107
Figure 24. Performance parallèle sur la machine Enterprise 6000.	109
Figure 25. Contours de distribution de température.	110
Figure 26. Contours de distribution de vitesse.	111
Figure 27. Distribution de vecteurs de vitesse.	112
Figure 28. Détail de vecteurs de vitesse au milieu de la cuve.	112
Figure 29. Contours de distribution de pression dynamique.	113
Figure 30. Contours de distribution de pression totale.	114
Figure 31. Contours de distribution de densité.	115
Figure 32. Distribution de température axiale.	116
Figure 33. Résidus de calcul itératif.	117
Figure 34. Interface graphique de l'interface Virtual Bench.	121
Figure 35. Comparaison de température axiale.	123

1.0 Introduction

Une des préoccupations majeures dans l'ingénierie est celle du design efficace des machines. Dans ce champ d'expertise, une bonne partie des activités est reliée à la génération contrôlée de puissance à partir de recours hydrologiques et de combustibles fossiles ou nucléaires, comme aussi à la disponibilité d'énergie partout où elle est requise. Les lois du transfert de chaleur sont très importantes dans la pratique de ces genres d'activités. La génération de puissance à partir des changements énergétiques dans les réactions chimiques et nucléaires implique souvent un transfert de grosses quantités d'énergie thermique. Les processus chimiques de combustion engendrent des températures auxquelles la plupart des matériaux de construction peuvent fondre; la protection thermique contre les montées de température est fort importante. La production et la distribution d'énergie électrique sont aussi assujetties, à la présence de pertes occasionnées par la circulation de courants dans les conducteurs électriques ou par la circulation de courants induits dans les composantes magnétiques et structurales des équipements. Ces types de pertes se manifestent par une élévation de la température des équipements. Des considérations reliées aux normes d'opération permettent de maintenir ces températures dans des limites de sécurité.

Le problème du calcul précis du gradient de température dans les enroulements d'un transformateur n'est pas particulièrement nouveau. Son importance dans le processus de design et de développement est plus qu'évidente et ne sera pas discutée davantage. L'âge et l'importance du problème ont motivé la proposition de plusieurs méthodes dans la littérature. Dans les premières approches proposées il y a celle de Bean et Blume [2][3] pour des transformateurs refroidis à l'huile. Ils considéraient le taux de transfert de chaleur dans les enroulements comme étant uniforme: la chute de température dans le matériau solide était alors calculée facilement à l'aide de la loi de Fourier et la chute de température dans la couche de fluide était estimée à l'aide de corrélations tirées de données expérimentales de modèles de bobinages. Dans ces premières méthodes les données étaient présentées sous forme de courbes ou d'équations de puissance constante. Dans des publications plus récentes à ce sujet Mikhailovski et Karsai [4][5] utilisent des

groupes sans dimension pour la représentation des données corrélées. Ces méthodes sont caractérisées par une approche plus scientifique, mais n'arrivent pas à résoudre adéquatement le problème du calcul de la chute de température dans le matériau d'isolation. En plus de cela, avec les méthodes de corrélation il est très difficile de reproduire les conditions d'écoulement dans des transformateurs actuels. Une méthode plus avancée avait été proposée par Allen et Allan [6] qui consistait à utiliser un calculateur analogique pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides et de transfert de chaleur. Des méthodes semblables par éléments finis ont été proposées pour remplacer les calculateurs analogiques. Une méthode alternative plus avancée par éléments finis fut proposée par Preiningerova et Pivrnec [7] pour calculer la distribution de température dans les conducteurs et l'isolant solide. Venkateswarlu et Prasad [8] ont proposé plus tard une méthode améliorée. Dans ces deux publications l'isolant solide est modélisé en détail mais le transfert de chaleur dans la couche limite d'huile est modélisé comme étant constant. Même si cette approximation est occasionnellement utilisée, elle a été rendue désuète à cause des progrès informatiques qui permettent de modéliser de façon numérique les enroulements d'un transformateur, le fluide refroidisseur et l'isolant solide, beaucoup mieux que dans le passé.

Une approche différente a été adoptée par Olivier [9][10] dans laquelle il utilise une méthode analytique pour former un ensemble de deux équations décrivant le flot d'huile et le transfert de chaleur dans chaque conduite des enroulements. Celles-ci sont résolues de façon numérique pour trouver le gradient de température dans les bobinages.

À partir du moment où les ressources informatiques deviennent plus performantes pour le calcul en laboratoire et que les méthodes numériques acquièrent de l'importance auprès des chercheurs sur l'analyse thermique dans les transformateurs, (début des années 90) deux approches différentes ont été rapportées dans la littérature:

- Celle d'utiliser des équations hydrauliques et énergétiques pour l'analyse thermique de sections d'enroulements de transformateur refroidis à l'huile. Le niveau de sophistication se situant parfois au niveau de l'utilisation d'expressions empiriques, semi empiriques et

souvent l'analogie de Reynolds pour le calcul des coefficients tels que le nombre de Nusselt et le coefficient de convection dans les couches limites de fluide modélisé.

- Celle d'utiliser les équations de Maxwell pour le calcul de la distribution de température dans des transformateurs baignant dans l'huile également. Le niveau de sophistication se situant parfois au niveau de la prise en compte d'aspects tels que le niveau de saturation dans le noyau pour le calcul du flux magnétique, l'épaisseur de peau et les effets du flux de fuite.

Dans les deux approches la dissipation de puissance dans les conducteurs électriques est décrite à l'aide de la loi d'Ohm et la même expression est aussi utilisée dans la modélisation du refroidissement externe par convection naturelle. Toutefois, dans les publications de type électromagnétique la modélisation de la dissipation de puissance se fait de façon plus rigoureuse et réaliste avec la formulation utilisée pour les pertes par courants de Foucault, par hystérésis dans le noyau magnétique et par flux de fuite sur la partie structurale de transformateurs. Mais en contrepartie, le transfert de chaleur dans les couches limites de fluide est modélisé comme étant par conduction dans une région solide à faible conductivité thermique.

Dans le volet des premières simulations CFD (Computational Fluides Dynamics) Bensmaia et al. [11] utilisent le code NISA fluides3f pour l'analyse 2D d'une section d'enroulements/noyau à l'aide de 16385 nœuds. Simonson et Lapworth à leur tour utilisent le code maison TEFLOW2 roulant sur PC dans l'analyse des modèles d'enroulements de transformateur de plusieurs MVA pour des conditions ONAN (Oil Natural Air Natural) OFAF (Oil Forced Air Forced). Tekletsadik et Saravolac [12] proposent la méthode des éléments finis pour calculer les pertes dans la partie structurale d'un transformateur. Leur modèle tient compte des pertes par hystérésis de façon empirique, des effets de la saturation dans le noyau magnétique et même du transfert de chaleur par radiation. Dans une perspective semblable en se basant sur la loi de Biot-Savard et l'intégration numérique d'une expression analytique Turowski et Pelikant [13] évaluent les pertes par courants de Foucault dans un couvert de transformateur de 360

MVA en présence et en en absence d'un écran de cuivre. Pierce et Holifield [14] utilisent en 1999 le code de différences finies TWIND (4058 nœuds) pour faire l'optimisation d'un design de transformateur de 10 kVA. Les équations de type nodal utilisées tiennent compte des débits de masse et même du transfert de chaleur par radiation. La même année une autre méthode d'amélioration de design est proposée par Declercq et Van de Veken [15] et Del Vecchio et Feghali[16] se servent à nouveau des équations nodales en faisant usage d'une relation de pression /vitesse et de l'analogie de Reynolds pour le calcul du coefficient de convection dans les couches limites d'huile. Toujours dans le volet électromagnétique, Driesen et al. [17] se penchent sur un aspect assez particulier, celui de calculer à l'aide d'un code magnétothermique les effets des harmoniques dans un transformateur de 30kVA. Leur modèle 2D comporte deux maillages pour la résolution et une estimation détaillée des pertes. D'une façon très élégante Y. Saboohi [18] utilise des relations empiriques pour le calcul presque complet de la génération de chaleur dans un transformateur d'un four à arc électrique de 56 MVA. Les équations hydrauliques utilisées se basent sur une formulation permettant le calcul des vitesses dans les couches de fluide de refroidissement. Une approche forte intéressante est celle proposée par L. Longfu et al. [19] pour l'analyse 3D thermique de la cuve dans un transformateur de locomotive de 6952 kVA. Bien que cette étude soit faite à l'aide d'un code magnétique par éléments finis de type vectoriel (edge elements), leur modèle incorpore un mode de refroidissement ODAF (Oil Directed Air Forced) en associant un facteur de convection aux parois baignant dans l'huile. Ce dernier se calcule de façon empirique en fonction d'une vitesse constante sur les couches limites de fluide et une longueur caractéristique de refroidissement. Pour la prédiction du gradient de température dans les enroulements d'un transformateur 16/32 MVA ONAN/ODAF Ryder[20] propose de façon peu habituelle en 2002 la méthode de réseaux électriques et une formulation semi-empirique pour le calcul du nombre de Nusselt associé aux régimes d'écoulements considérés. Dans cette même période teNyenhuis et al. [21] reprennent les simulations électromagnétiques par différences finies pour la modélisation thermique 2D d'une configuration triphasique de distribution 50 MVA. Finalement Driesen et al. [22] favorisent l'utilisation d'un code magnétothermique pour examiner également en 2D le régime thermique

transitoire d'une configuration triphasique de 30 kVA, une initiative qui rajoute une nouvelle dimension dans la littérature recensée, celle d'une analyse évolutive.

Les processus de transfert de chaleur dans un transformateur sont alors décrits par des équations qui relient l'énergie à être transférée par unité de temps aux dimensions physiques de la surface considérée. D'autres facteurs qui entrent en ligne de compte dans les équations sont les températures ou les gradients de température et quelques coefficients qui dépendent des propriétés physiques des matériaux et en particulier du mécanisme de transfert de chaleur considéré. Trois mécanismes de transfert de chaleur ont alors lieu dans un transformateur. Ils ont lieu de façon simultanée et pour chaque mécanisme participant il existe une équation caractéristique pour décrire le phénomène.

La chaleur autant à l'intérieur comme à l'extérieur d'un transformateur est transférée par conduction, par convection et par radiation. Avant de décrire les processus nous devons définir ce que l'on sous-entend par chaleur. Dans l'étude de la thermodynamique, le transfert de chaleur est défini comme étant un transfert d'énergie entre deux systèmes, résultant seulement d'une différence de température. La conduction est le mode de transfert de chaleur dans un matériau solide et il a lieu à cause de la différence de température entre deux régions du matériau en question. Ce phénomène de conduction peut aussi avoir lieu dans les liquides et les gaz mais il est généralement accompagné de la convection et de la radiation dans le cas de certains gaz. La conduction dans un solide est un transfert d'énergie interne; cette énergie est, en fait, une énergie de mouvement des molécules, des atomes et des particules qui constituent les matériaux. L'énergie cinétique du mouvement est proportionnelle à la température absolue; les collisions moléculaires mènent vers un transfert d'énergie vers des régions d'énergie cinétique plus basse. À des conditions stables, une molécule transfère la même quantité d'énergie qu'elle reçoit. Sous des conditions d'instabilité le flot d'énergie est gouverné par les niveaux changeants d'énergie.

La conduction est décrite par l'équation de Fourier dont les travaux ont été publiés à Paris en 1822, toutefois du travail à ce sujet avait été fait auparavant par Biot en 1804 et 1816.

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

Le taux de transfert de chaleur dans la direction x est proportionnel au produit de l'aire A refroidie et le gradient de température. La constante de proportionnalité k étant la conductivité thermique du matériau. Le signe négatif résulte de la convention qui définit un flot de chaleur positif dans la direction d'un gradient de température négatif. La conductivité thermique k peut être une fonction de la température et de la direction du flux de chaleur. Le transfert de chaleur par conduction, dans le transformateur à l'étude, se fait à partir de la partie solide interne des enroulements de haute et de basse tension et de celle du noyau magnétique vers les parois externes de ces composantes qui se trouvent à être en contact avec de l'air. L'évacuation de chaleur dans la partie fluide entourant le circuit magnétique vers les parois internes de la cuve métallique se fait par l'action conjuguée de la conduction et la convection. À partir de la cuve métallique la chaleur sera à nouveau transmise par conduction vers les parois externes de la cuve où elle sera transmise à nouveau par conduction et par convection vers l'air ambiant. (Le terme conduction prend souvent le nom de diffusion dans la littérature de la mécanique des fluides). La convection est le nom donné au mouvement du fluide, qui fait que du nouveau fluide est continuellement disponible pour refroidir une région d'intérêt. En plus du mouvement de masse du fluide, il y a en général un faible mouvement de courants qui participent dans la distribution de l'énergie thermique. Le transfert de chaleur par convection peut se faire de façon naturelle ou forcée. La convection naturelle a lieu entre un solide et un fluide non perturbé par d'autres effets, lorsqu'il existe une différence de température entre les deux. Nous ne pouvons pas considérer facilement un fluide comme étant complètement au repos, donc il peut y avoir une faible quantité de convection forcée aussi. Mais la vraie convection forcée requiert un plus grand mouvement de fluide, par rapport à la source de chaleur, pour que les effets de convection naturelle soient négligeables. Un aspect important de la convection naturelle est que le mouvement de

fluide qui a lieu est dû complètement aux forces d'Archimède qui résultent des variations de densité du fluide dans le voisinage d'une surface solide considérée. Nous pouvons associer à la convection forcée les régimes d'écoulement laminaire et turbulent. Un changement de phase peut être aussi envisageable comme dans le cas de l'ébullition et de la condensation. En bref, la formulation de tous ces phénomènes est fort complexe et on recourt souvent aux techniques de l'analyse dimensionnelle et de l'expérimentation pour résoudre ce type de problèmes [23].

En 1701 Newton a proposé l'équation générale suivante pour décrire le transfert de chaleur par convection,

$$Q = hA (T_1 - T_2) \quad (2)$$

Le transfert de chaleur se faisant entre une surface solide de température T_1 et un fluide à une plus basse température T_2 , h étant le coefficient de convection qui prend les unités $W/(m^2 \cdot ^\circ K)$ dans le système SI. La valeur de h va varier selon le régime d'écoulement, les propriétés du fluide et les différences de température considérées.

Le troisième mode de transfert de chaleur est celui par radiation et sa nature est plutôt différente des autres deux modes. La conduction et la convection ont lieu entre un fluide et un solide et souvent de façon simultanée. La radiation par contre est un transfert d'énergie qui peut avoir lieu dans le vide et toutes les phases matérielles. À toutes les températures supérieures au zéro absolu la matière émet des ondes électromagnétiques de plusieurs longueurs d'onde. La radiation est ainsi de l'énergie émise par des électrons qui vibrent dans les molécules de la surface d'un corps, et la quantité d'énergie émise dépend de la température absolue du corps en question. La troisième équation à considérer est celle qui a été introduite en 1884 par Boltzmann, connue sous le nom d'équation de Stefan-Boltzmann

$$Q = e\sigma AT^4 \quad (3)$$

où ϵ est le coefficient d'émissivité, T est la température absolue à la surface d'un corps parfaitement radiant, et σ est la constante de Stefan-Boltzmann $56.7 \times 10^{-12} \text{ kW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$, Stefan avait établi cette relation de façon expérimentale et Boltzmann l'a prouvée théoriquement plus tard. Un corps irradiant parfait dit corps noir émet à n'importe quelle température le maximum possible d'énergie à toutes les longueurs d'onde. L'énergie émise sera moindre pour les matériaux considérés comme n'étant pas des corps noirs. Cette équation définit une émission d'énergie plutôt qu'un échange d'énergie. La surface va aussi absorber de la radiation d'ailleurs, ce qui doit être considéré dans une relation d'échange d'énergie. Les caractéristiques d'émission et d'absorption des surfaces, le facteur de forme que les surfaces peuvent avoir entre elles, sont des aspects qui doivent être considérés dans les échanges par radiation. Le transfert de chaleur dans le transformateur par radiation se fait principalement à partir des parois externes du circuit magnétique du transformateur vers la surface interne de la cuve métallique. Étant donné la faible différence de température entre le point le plus chaud du transformateur et la température moyenne à l'intérieur (moins de 50°C) ce type de transfert n'est pas considéré dans l'analyse. De plus, la contribution de la radiation dans le transfert de chaleur interne est très minime, étant donné que les parois externes du circuit magnétique sont entourées de matériaux isolants de très faible émissivité. Sur la surface externe de la cuve la radiation peut à nouveau contribuer au transfert de chaleur vers l'air ambiant, étant donné que les surfaces métalliques possèdent un bon coefficient d'émissivité. Mais cet aspect n'a pas été considéré non plus dans notre analyse.

À l'aide des équations (1), (2) et (3) nous pouvons faire donc la mise en équation des mécanismes qui interviennent dans le transfert de chaleur dans des systèmes électriques. La modélisation à trois dimensions du problème électrothermique qui est l'objet de cette recherche, requiert toutefois une mise en équation beaucoup plus élaborée. Tel que mentionné auparavant la modélisation du transfert de chaleur par convection se fait à l'aide de l'équation de Poisson et pour l'intégration de cette dernière nous utilisons la méthode des éléments finis. Le produit fini de cette manipulation mathématique est un système linéaire d'équations d'une taille proportionnelle à celles des noeuds contenus dans le maillage de la géométrie du dispositif à l'étude. La résolution du système ainsi

obtenu nous permet d'obtenir une distribution de température nodale à trois dimensions. Le problème de transfert de chaleur conjugué qui tient compte du déplacement de la masse fluide est abordé à son tour avec les équations de Navier-Stokes et un modèle de turbulence associé à l'écoulement caractéristique. L'intégration des équations considérées se fait en passant par la méthode des différences finies. Cette manipulation mathématique produit également un système d'équations beaucoup plus grand que celui du problème de conduction. Sa résolution nous permet d'obtenir entre autres la distribution de vitesse, de pression, de densité et de température dans la partie fluide ainsi que la température dans la partie solide.

Les deux types de systèmes considérés étant de taille assez considérable il est plus commode de les résoudre en parallèle dans un temps raisonnable et pas dans des jours ou des semaines comme autrefois. L'accomplissement de cette tâche de calcul intensif, qui est la plus lourde en termes de développement, peut se faire aujourd'hui avec des versions parallèles de plusieurs algorithmes séquentiels fort connus.

En termes de routines parallèles de calcul pour la résolution de systèmes linéaires de grande taille l'algorithme SOR (successive over-relaxation) est souvent implanté pour le traitement de systèmes pleins ou à largeur de bande[24]. Le traitement des valeurs propres dans des systèmes linéaires non symétriques issus des problèmes de réservoirs d'huile ou de diffusion anisotropique et autres se fait avec succès à l'aide des algorithmes distribués tels que le QMR(Quasiminimum Residual), le MINRES (Minimal Residual) et le GMRES (Generalized Minimum Residual)[25][26][27]. Une équation du type diffusion-convection et la méthode Multigrid algébrique distribuée sont utilisés dans la modélisation du fonctionnement d'un dispositif semiconducteur[28] et du problème biomédical de la tête humaine, pour lequel il faut obtenir une solution pour 10000 vecteurs indépendants[29]. La méthode Multigrid s'utilise également comme préconditionneur du GMRES[30]. Une autre méthode parallèle assez intéressante est celle de l'inversion de matrice utilisée pour des problèmes de supraconductivité et de théorie de contrôle[31]. Cette approche est également utilisé comme 'Smoother' ou réducteur de la composante de haute fréquence de l'erreur dans la méthode Multigrid

pour des problèmes d'écoulements purement rotatifs[32]. L'inversion parallèle de matrices creuses a aussi été testée comme préconditionneur pour résoudre un problème de 270000000 inconnues à l'aide d'algorithmes de résolution multigrid sur 125 nœuds de calculs et 500 processeurs [33]. Le niveau de sophistication de ces algorithmes se mesure par rapport à l'implantation de la décomposition de domaines et une réorganisation de matrice par couleurs de type Red/Back, pour un gabarit de discrétisation de 5 points dans les problèmes 2D et une réorganisation Red/Black/Orange/Green pour un gabarit de 9 points dans les problèmes 3D. Les algorithmes de réorganisation du degré minimum, celui de la Bisection Spectrale de même que la théorie de graphes sont souvent associés à ces implantations distribuées.

Une autre méthode parallèle faisant partie des méthodes itératives du sous espace de Krylov est celle du gradient conjugué préconditionné qui s'applique bien pour le traitement de systèmes linéaires symétriques définis positifs, tel que celui qui résulte de l'intégration par éléments finis de l'équation de Poisson [34][35][36]. Pour compléter cette étape dans la première partie du projet de recherche, l'algorithme de réorganisation de Kuthill-Mckee et une version parallèle du gradient conjugué appelée le PCGB (Preconditioned Conjugate Gradient by Blocks) sont préférés à tout autre méthode. L'efficacité du PCGB avait déjà été testée par Vollaire [37] pour traiter un système linéaire de 50000 nœuds à trois degrés de liberté dans un problème de propagation d'onde. Une méthode itérative s'adapte beaucoup mieux au traitement des systèmes de grosse taille que les méthodes directes, car ces dernières génèrent des éléments de remplissage dans le système de départ, rallongeant par conséquent l'étape de calcul de la solution, que dans notre cas traité se fait pour plus d'un million d'inconnues.

Pour le traitement du système issu du problème de transfert de chaleur par dynamique des fluides un code séquentiel avait été écrit à cet effet, mais sa parallélisation s'est avérée une tâche très lourde car elle imposait la décomposition de domaines et l'utilisation d'autres outils mathématiques fort compliqués à implanter. Un code fluide parallèle tel que Fluent a été choisi pour compléter cette étape d'une manière plus adéquate.

2.0 Problématique de recherche

Les modèles mathématiques permettent parfois la formulation de quelques phénomènes réels, tels que comportement des marchés, la croissance d'une population ou la météorologie, à partir des lois physiques qui les régissent. Cette démarche comporte toutefois un certain degré d'abstraction étant donné qu'il n'est pas toujours simple de modéliser tous les facteurs qui déterminent le comportement d'un système physique.

Un système physique comme tel, est caractérisé par un ensemble de paramètres qui peuvent dépendre des coordonnées dans l'espace $x = (x, y, z)$ et du temps t . Certaines variables du système sont connues d'avance telles que les propriétés physiques, les dimensions du système, les sources d'énergies, les conditions aux limites etc. D'autres variables peuvent être inconnues comme les déformations, les vitesses, la température, les contraintes mécaniques etc. Les relations entre les variables connues et inconnues d'un système se traduisent souvent par des systèmes d'équations couplées ou non couplées.

En ce qui a trait aux formulations connues pour la représentation de systèmes électromagnétiques ou électromécaniques, les équations aux dérivées partielles sont d'une vaste importance dans le domaine des mathématiques appliquées et l'ingénierie, une fois que plusieurs problèmes réels de distribution de champs peuvent être modélisés à l'aide de ces dernières. Les équations aux dérivées partielles comme telles peuvent être divisées en trois catégories distinctes, soit celles de type hyperbolique, de type parabolique ou de type elliptique, chacune ayant ses propres conventions de normalisation et fermeture.

À l'aide des équations aux dérivées partielles hyperboliques nous pouvons décrire des processus physiques qui exhibent une faible quantité de dissipation, qui dépendent du temps et qui n'évoluent pas vers un régime permanent. Dans ce volet nous pouvons inclure l'équation d'onde et l'équation d'advection (ou convection). Avec l'équation d'onde il est possible de modéliser la propagation de champs électromagnétiques et

acoustiques. L'équation d'advection sert à son tour à modéliser des phénomènes tels que le mouvement des vagues dans l'eau et les écoulements visqueux.

Les équations aux dérivées partielles paraboliques décrivent en général des processus physiques dissipatifs, qui dépendent aussi du temps, mais qui évoluent vers un régime permanent. Une équation typique parabolique aux dérivées partielles est celle de la diffusion. Comme le terme le suggère, cette équation est reliée au phénomène de la diffusion en physique, tel que la dispersion de la chaleur dans un milieu conducteur.

Les équations aux dérivées partielles elliptiques, quant à elles, peuvent servir à décrire des processus physiques qui ont atteint un régime permanent ou un état d'équilibre. Pour cette raison elles n'exhibent pas de dépendance par rapport au temps. Les équations elliptiques peuvent être souvent considérées comme des équations aux dérivées partielles paraboliques qui ont atteint un régime permanent. Par exemple, l'équation d'onde ou de la diffusion se réduisent à l'équation de Laplace ou de Poisson lorsque la dépendance du temps est enlevée.

Nous devons noter, qu'à part leur distinction formelle, il y a une distinction pratique à faire entre les équations elliptiques et les équations hyperboliques et paraboliques. En ce qui a trait aux équations elliptiques nous pouvons leur associer des conditions aux frontières pour une frontière fermée, et toutes leurs dérivées sont exprimées par rapport à des variables spatiales, tel que dans l'équation de Laplace ou l'équation de Poisson. Les équations hyperboliques et paraboliques, en contraste, ont au moins une frontière ouverte sur laquelle nous pouvons spécifier des conditions par rapport à une variable. De cette façon, les équations d'onde et de diffusion qui contiennent la variable du temps comportent toujours des conditions initiales. Ces propriétés sont évidemment reliées au fait qu'une ellipse est un objet fermé, tandis qu'une hyperbole est une parabole ne le sont pas.

Pour certains types de problèmes en ingénierie nous pouvons obtenir des solutions analytiques pour les équations aux dérivées partielles qui les décrivent, toutefois, ceci est

vrai seulement pour des formes d'équation simples et pour des domaines de définition simples. Pour des applications plus pratiques, i.e. plus complexes en soi, il est plus commode de chercher des solutions pour un ensemble fini de points dans l'espace ou d'instantanés dans le temps. Ces types de solutions sont connus sous le nom de solutions discrètes. Il existe un bon nombre de méthodes qui ont été développées pour obtenir la solution discrète des équations aux dérivées partielles, telles que les différences finies, la méthode des éléments de frontière, la méthode des éléments finis, la méthode des éléments vectoriels et la méthode de covariance de projection[38].

La méthode des différences finies est plus facile à implanter que celles des éléments finis. Les équations hyperboliques et paraboliques sont souvent résolues en utilisant une méthode hybride des éléments finis et des différences finies; les variables spatiales sont modélisées à l'aide de la méthode des éléments finis et leur variation dans le temps est modélisée par la méthode des différences finies. La méthode des éléments de frontière est applicable pour un ensemble assez restreint d'équations aux dérivées partielles. En général la méthode est applicable pour des équations elliptiques linéaires et elle requiert que l'équation aux dérivées partielles soit formulée en termes d'une intégrale.

L'étude du phénomène de transfert de chaleur par conduction en régime permanent dans le transformateur à sec est un exemple de problème de type stationnaire. Ceci implique que la variable du temps ne rentre pas en ligne de compte dans notre analyse, la solution devra donc être déterminée à partir d'une équation elliptique aux dérivées partielles adaptée à cet effet. Les équations de Navier-Stokes utilisées pour faire l'étude du transfert de chaleur conjugué dans l'objet de modélisation sont considérées comme étant de type elliptiques pour un écoulement établi et de type parabolique pour un écoulement transitoire.

2.1 La méthode des résidus pondérés

Le point de départ pour la formulation complète du problème de conduction est celui de l'application de la méthode des résidus pondérés qui peut se traduire par la recherche d'une fonction u qui satisfait une ou plusieurs équations différentielles notées de façon symbolique en vecteur colonne comme suit:

$$A(u) = \begin{Bmatrix} A_1(u) \\ A_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (4)$$

dans un domaine Ω (volume ou surface) assujetti à des conditions aux frontières notées également de façon symbolique :

$$B(u) = \begin{Bmatrix} B_1(u) \\ B_2(u) \\ \vdots \end{Bmatrix} = 0 \quad (5)$$

sur la frontière Γ du domaine Ω .

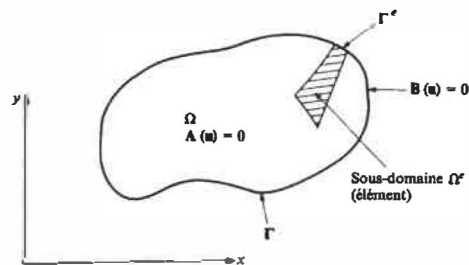


Figure 1. Le domaine Ω et la frontière Γ [39].

Si les équations (4) et (5) sont linéaires, nous pouvons les écrire sous la forme suivante :

$$A(u) \equiv \zeta u + f_v \quad \text{dans } \Omega \quad (6)$$

$$B(u) \equiv \theta u + f_s \quad \text{sur la frontière } \Gamma \quad (7)$$

où

ζ, θ : opérateurs différentiels caractérisant le système d'équations.

f_v, f_s : des fonctions ou des constantes.

Pour des conditions de stationnarité, nous pouvons alors considérer que le comportement d'un système physique peut être représenté par le système d'équations aux dérivées partielles d'ordre m suivant :

$$\zeta(u) + f_v = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (8)$$

$$\theta(u) + f_s = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \quad (9)$$

Pour introduire le concept de résidu, nous pouvons le définir alors à l'aide de l'expression:

$$R(u) = \zeta(u) + f_v \quad (10)$$

Une quantité qui s'annule lorsque u est solution de l'équation (8). L'application de la méthode des résidus pondérés consiste donc à chercher des fonctions qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int_V v^T R(u) d\Omega = \int_V v^T (\zeta(u) + f_v) d\Omega = 0 \quad (11)$$

pour toute fonction de pondération v appartenant à un ensemble de fonctions E_v , u appartenant à un ensemble E_u de solutions admissibles dérivables jusqu'à l'ordre m et qui satisfont les conditions aux limites prescrites.

La fonction u recherchée peut être de type scalaire ou de type vectoriel à plusieurs composantes. De la même manière, le système d'équations différentielles peut avoir une seule composante ou plusieurs, cela justifie la notation vectorielle adoptée pour (4) et (5). La solution approximative recherchée peut avoir la forme suivante :

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i a_i = Na \quad (12)$$

où N_i représente des fonctions d'interpolation définies localement dans un domaine de définition géométrique discrétisé en sous-domaines. Lesdites fonctions d'interpolation peuvent être exprimées à l'aide des coordonnées x , y et z ou celles d'une autre base naturelle. Les coefficients a_i , quant à eux, sont des inconnues qu'il faut calculer. Les équations qui définissent ces paramètres peuvent s'écrire sous une forme intégrale dans le but d'obtenir un système d'équations linéaires à partir d'une équation ou d'un système d'équations différentielles:

$$\int_{\Omega} G_j(\hat{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} g_j(\hat{u}) d\Gamma \quad (13)$$

dans laquelle G_j et g_j sont des fonctions intégrables ou des opérateurs connus. Ces aspects deviendront plus clairs plus loin dans le texte.

L'ensemble d'équations différentielles ou dérivées partielles décrit en (6) doit être vérifié sur chaque point du domaine Ω , il en découle que :

$$\int_{\Omega} v^T A(u) d\Omega \equiv \int [v_1 A_1(u) + v_2 A_2(u) + \dots] d\Omega = 0 \quad (14)$$

où:

$$v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (15)$$

peut être vu comme un ensemble de fonctions arbitraires, dont la dimension est celle des composantes de u .

Pour satisfaire en plus les conditions aux frontières stipulées en (7), nous devons soit assurer ces conditions par le choix d'une fonction u , soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} \bar{v}^T B(u) d\Gamma \equiv \int_{\Gamma} [\bar{v}_1 B_1(u) + \bar{v}_2 B_2(u) + \dots] d\Gamma = 0 \quad (16)$$

pour tout l'ensemble de fonctions v . La formulation intégrale

$$\int_{\Omega} v^T A(u) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{v}^T B(u) d\Gamma = 0 \quad (17)$$

est satisfaite pour tous v et $\bar{v}$, si et seulement si les équations différentielles (4) et les conditions aux frontières (5) sont vérifiées. Cela suppose que la forme (17) est intégrable, ce qui impose certaines restrictions sur les familles auxquelles peuvent appartenir les fonctions v ou u . De façon générale, il faut éviter des fonctions qui rendent infini l'une des formes intégrales. Ainsi dans (17), le choix doit se limiter sur des fonctions v et $\bar{v}$ univoques à valeurs finies. Les restrictions à imposer au choix des fonctions u_1 , u_2 , etc. dépend de l'ordre de différentiation présent dans $A(u)$ ou $B(u)$. Si ces opérateurs font intervenir des dérivations d'ordre n , les fonctions u doivent avoir des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n-1$. Alors dans de nombreux cas, il est possible d'intégrer (17) par parties, et de remplacer l'expression par la formulation suivante :

$$\int_{\Omega} C(v)^T D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\bar{v})^T F(u) d\Gamma = 0 \quad (18)$$

où les opérateurs C et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé que A et B . Cela découle du fait que l'intégration par parties impose un ordre de différentiation plus faible pour le choix de u , et fait apparaître des dérivées de v et $\bar{v}$, augmentant ainsi leur

dérivabilité. Une telle approche est connue comme une formulation faible. Cette approche présente les avantages suivants:

- L'ordre maximum des dérivées de u qui apparaissent dans la forme intégrale diminue. Par conséquent les conditions de dérivabilité de u sont moins fortes.
- Certaines conditions aux limites qui apparaissent dans la forme faible, peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites identiquement par u .

Nous pouvons donc approcher la solution d'une équation différentielle aux dérivées partielles par la solution d'une forme intégrale faible, même si cette solution ne satisfait pas les conditions de dérivabilité de l'équation de départ. En ce qui a trait à la résolution des formes intégrales présentées par la méthode des résidus pondérés, si la fonction u est approchée tel que suggéré par l'expression (12), il est clairement impossible, dans les cas généraux, de satisfaire à la fois l'équation différentielle et les conditions aux frontières. Les formes intégrales (17) ou (18) conduisent vers une approximation de la solution si, à la place d'une fonction v quelconque, nous choisissons un ensemble de fonctions données:

$$v = w_j \quad \bar{v} = \bar{w}_j \quad j = 1 \text{ à } n \quad (19)$$

où n est le nombre de paramètres inconnus a_i du problème. Les équations (17) et (18) prennent la forme d'un système d'équations algébriques, qui permettent de déterminer les paramètres a_i . Nous pouvons donc réécrire (17) et (18) comme suit:

$$\int_{\Omega} w_j^T A(Na) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_j^T B(Na) d\Gamma = 0 \quad j = 1 \text{ à } n \quad (20)$$

$$\int_{\Omega} C(w_j)^T D(Na) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\bar{w}_j)^T F(Na) d\Gamma = 0 \quad j = 1 \text{ à } n \quad (21)$$

Dans cette approche, $A(Na)$ représente le résidu, ou l'erreur obtenu en remplaçant dans (4) u par son expression approchée, $B(Na)$ étant à son tour le résidu des conditions aux frontières. Donc une fois que la méthode des résidus aura été appliquée à l'équation de Poisson nous pouvons passer à l'étape d'intégration par éléments finis.

Les concepts théoriques vus jusqu'ici deviendront plus clairs avec l'application pratique de ceux-ci à la section 3.

2.2 La méthode du volume de contrôle.

Les équations qui régissent la dynamique des fluides sont des expressions mathématiques des lois physiques de conservation, qui tiennent compte du fait que :

- La masse de fluide est conservée
- Le taux de variation de quantité de mouvement est égale à la somme des forces sur une particule de fluide (deuxième loi de Newton).
- Le taux de variation d'énergie est égal au taux d'addition de chaleur et au taux de travail fait sur une particule de fluide (première loi de la thermodynamique).

Cette formulation peut être dérivée en faisant différents bilans sur un volume fini de fluide. Ceci nous permet d'aboutir à des équations dites de transport et d'énergie. La résolution pratique des équations caractéristiques d'un bon nombre d'écoulements se fait par l'approche du volume de contrôle. La méthode du volume de contrôle fut à l'origine développée comme une formulation particulière des différences finies. L'algorithme comprend les étapes suivantes :

- Subdivision du domaine à l'étude en volumes de contrôle.
- Intégration formelle des équations de transport sur tous les volumes de contrôle.
- Discretisation comprenant la substitution d'une variété d'approximations de type différences finies, pour les termes dans l'équation intégrale qui représentent les

phénomènes de convection, de conduction et les termes sources. Ceci transforme les équations intégrales dans un système d'équations algébriques.

La formulation résultante exprime la conservation des propriétés dans chaque cellule de fluide considérée. Cette relation entre l'algorithme et le principe de physique de conservation, représente un des attraits majeurs de la méthode, car elle la rend plus facile à implanter que la méthode des éléments finis et la méthode spectrale qui sont encore très peu documentées dans la littérature. Le principe de conservation d'une variable ϕ d'un écoulement (une composante de la vitesse ou l'enthalpie par exemple) dans un volume de contrôle peut être exprimé comme étant un équilibre entre les processus qui ont tendance à l'augmenter ou le diminuer. Ce que nous pouvons exprimer en mots comme suit :

Le taux de variation de ϕ dans le volume de contrôle par rapport au temps	= Flux net de ϕ dû à la convection dans le volume de contrôle	+ Flux net de ϕ dû à la diffusion dans le volume de contrôle	+ Taux net de création de ϕ dans le volume de contrôle
--	--	---	---

La mise en équation de ce bilan est la suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho u \phi) = \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) + S \quad (22)$$

où :

ρ : représente la densité.

u : exprime la vitesse.

Γ_ϕ : est un paramètre de propriétés physiques.

S : terme source

La convection et la diffusion de la variable ϕ de l'équation (22) dépendent de la magnitude et la direction du champ local de vitesse. Le calcul de ce champ se fait à partir des équations de transport pour chaque composante, lesquelles peuvent être dérivées à partir de l'équation générale (22) en remplaçant ϕ par u , v et w

respectivement. Le champ en question doit évidemment satisfaire une équation de continuité. Le terme S est réservé pour des mécanismes tels que la génération de chaleur dans un solide, la production ou la destruction d'une espèce chimique dans une réaction ou tout aussi bien pour des termes qui puissent être considérés des sources. La formulation physique du problème est fort complexe et à la fois non linéaire dû, entre autres, au couplage entre la pression et vitesse. Une solution itérative des équations est donc requise. En se basant sur le principe du volume de contrôle, des méthodes de résolution telles que celle de la TDMA et les algorithmes SIMPLE et SIMPLEC sont utilisés à cet effet. L'intégration sur le volume de contrôle, est le point de départ pour la résolution du problème de transfert de chaleur par la dynamique des fluides dans le transformateur à sec.

2.3 Objectifs de recherche

Les objectifs du projet de recherche sont les suivants :

-Proposer une modélisation complète 3D par dynamique des fluides du transfert de chaleur dans le transformateur à sec à l'étude. La contribution cherchée étant celle d'ajouter plus de dimension aux études répertoriées dans la littérature à l'aide de simulations 2D de sections de transformateurs refroidis à l'huile. Il est plus facile de cette façon d'évaluer la répercussion des propriétés du fluide et des caractéristiques de l'écoulement sur le mode de refroidissement testé. L'utilisation d'un code fluide permet de mieux prédire l'effet de pompes, des ventilateurs ou d'un dispositif de refroidissement à changement de phase comme celui qui avait été conçu pour être inséré dans les enroulements du transformateur à l'étude. La plus-value de cette approche est celle de pouvoir évaluer ce que les méthodes répertoriées ne permettaient pas d'évaluer. En général, cette initiative se prête mieux pour la vérification, le développement et l'optimisation de nouveaux designs.

-Démontrer l'utilité du traitement parallèle dans la modélisation numérique de grande taille des phénomènes de transfert de chaleur dans les transformateurs.

-Adopter une approche autre que celle préconisée dans la littérature électromagnétique pour déterminer la dissipation de puissance dans les composantes électromagnétiques du transformateur. La nouvelle approche étant celle de la mesure en temps réel de la température, aux endroits fixés par la position de thermocouples installés en usine sur le transformateur à l'étude, pour déterminer la distribution de puissance à ces endroits.

2.4 Infrastructure de recherche

En ce qui a trait au problème de conduction le problème débute en identifiant :

1. La forme d'équation de Poisson qui sera utilisée à cet effet.
2. La formulation requise pour modéliser le refroidissement par convection naturelle externe.
3. La formulation requise pour modéliser la dissipation de puissance dans les enroulements et dans le noyau magnétique.
- 4 Les propriétés thermiques des matériaux de construction du transformateur

Par la suite un outil de maillage commercial est utilisé pour :

1. Créer la géométrie simplifiée et faire le maillage de l'objet de modélisation.
2. Associer les propriétés physiques des matériaux au maillage.
3. Associer au maillage les conditions aux frontières relatives au refroidissement de surface externe par convection naturelle et celles relatives à la dissipation de puissance dans les volumes des enroulements et du noyau magnétique.

L'étape qui s'en suit est celle de concevoir un code d'éléments finis avec lequel il faut saisir les informations relatives au maillage généré à l'aide de l'outil commercial, pour générer le système linéaire à résoudre par intégration numérique. La résolution du système linéaire se fait une fois qu'un profil de stockage des données soit choisi et que la réorganisation de matrice soit implantée. Une version de l'algorithme du gradient conjugué est parallélisée pour effectuer la résolution du système linéaire d'équations de grande taille issu du problème de conduction.

Le traitement relatif au problème de transfert de chaleur par la dynamiques des fluides est abordé en identifiant le type d'écoulement associé au déplacement d'air produit par les gradients de température entre les régions à l'intérieur de la cuve et le modèle de turbulence pouvant être associé à l'écoulement considéré.

La deuxième étape consiste à utiliser un outil de type commercial pour faire le maillage de la partie fluide et de la partie solide du transformateur ainsi que pour définir les frontières d'écoulement. En dernier lieu un code commercial CFD est utilisé pour :

- 1 Charger en mémoire le maillage de définition du problème de type conjugué.
- 2 Définir les propriétés physiques des solides et du fluide pris en considération dans ce type de modélisation.
- 3 Faire l'incorporation des conditions aux frontières de refroidissement externe et de dissipation de puissance dans les volumes concernés.
- 4 Définir le type d'analyse (régime permanent/transitoire)
- 5 Définir le modèle de turbulence associé à l'écoulement à l'étude
- 6 Définir les différents coefficients de sous-relaxation nécessaires aux calculs et les différents schémas de discrétisation à utiliser dans les calculs.
- 7 Obtenir la résolution numérique.
- 8 Faire l'exploitation des résultats.

La validation des résultats de simulation pour le traitement séquentiel et les deux traitements de type parallèle se fait par l'entremise de la mesure de température sur les enroulements et le noyau magnétique du transformateur à sec. Le processus de validation est accompli à l'aide d'un système d'acquisition des données de type commercial et de thermocouples, le tout assisté par ordinateur.

2.5 L'objet de modélisation

L'objet de modélisation dans ce travail de recherche est un transformateur de distribution à sec. Les transformateurs de distribution sont des dispositifs électriques qui relient des circuits primaires de distribution à des circuits secondaires de distribution et/ou à des circuits de service aux abonnés. De tels transformateurs sont d'usage courant et nous les retrouvons dans les sous-stations, sur les poteaux, dans les cours arrières, autour des centres commerciaux, dans les installations industrielles et dans tous les endroits où l'énergie électrique est délivrée et utilisée. Le Oak Ridge National Laboratories (ORNL) estime qu'il existe en service sur le continent américain plus de 40 millions d'unités remplies de fluide et plus de 10 millions d'unités de type sec. Avec une telle variété de dispositifs de transformation et un si grand étendu de niveaux charges, la mise en fonction doit être bien pensée de façon à être en mesure de garantir une bonne efficacité dans ce processus de transformation d'énergie.

Les transformateurs à sec, pour un bon nombre de raisons, ont largement remplacé les unités remplies à l'huile dans l'industrie et les institutions. Toutefois, contrairement à ce qui se fait avec les unités remplies à l'huile dans le réseau d'utilité publique, peu d'attention est portée à l'efficience de ces unités. L'efficacité est rarement spécifiée lors de l'acquisition des transformateurs à sec. Des valeurs de 95% ou plus sont assez typiques et les différences entre les dispositifs de haute et basse efficacité sont d'à peine de 1% à 2%. Lorsque nous comparons une unité de bas prix de 98% d'efficacité avec une autre unité plus coûteuse de 99% d'efficacité, cela veut dire que les pertes sont coupées en deux.

Les pertes dans les conducteurs, connues aussi sous le nom de pertes dans les enroulements ou pertes de charge, ne doivent pas être prises à la légère, pour la simple raison que ces pertes varient selon le carré de la charge. Cela veut dire qu'un transformateur chargé à sa capacité maximale produit quatre fois plus de pertes comparé avec un dispositif qui opère à 50% de sa charge nominale. Dans plusieurs applications, les transformateurs sont souvent fortement chargés. Mais même pour de faibles niveaux de charge, si les unités ne sont pas efficaces les pertes montent rapidement.

Les transformateurs efficaces chauffent moins et par conséquent sont beaucoup plus fiables à cause de la réduction du stress thermique sur les matériaux d'isolation. À la longue nous pouvons obtenir des dispositifs d'un calibre kVA moindre pour remplir une même fonction. L'efficacité et la température sont reliées ensemble mais les deux facteurs représentent des problèmes différents. L'inefficacité est purement la génération de pertes de chaleur proportionnelles à RI^2 dans les enroulements. Dépendamment de la chaleur est générée, l'unité peut être inefficace. D'un autre côté, la montée de température ne résulte pas seulement de la quantité de chaleur générée, mais aussi de la quantité de chaleur qui est évacuée. Un transformateur à sec inefficace peut en effet chauffer moins en incorporant dans son design de grands espaces d'air ou en le refroidissant à l'aide de ventilateurs. Les transformateurs de grande efficacité éliminent le besoin de recourir au surdimensionnement géométrique et aux dispositifs de refroidissement additionnels [40]. Le bon fonctionnement des unités à sec est une question d'efficacité sur laquelle nous pouvons faire des prédictions à l'aide d'une analyse électrothermique judicieuse. De telles analyses nous permettent entre autres de vérifier si un design en particulier correspond aux normes d'efficacité d'énergie ou aux standards établis pour les transformateurs de distribution tel que le NEMA TP-1 créé en 1996. Il s'applique autant pour les transformateurs à sec qu'aux transformateurs remplis d'huile.

En plus des effets électriques non souhaités tels que l'inductance de fuite et l'effet d'hystérésis, les transformateurs peuvent exhiber aussi des effets physiques indésirables, les plus notables étant la production de chaleur et de bruit. Le bruit est en principe un effet de nuisance, mais la chaleur est un problème potentiel sérieux car l'isolation des bobinages peut être endommagée si elle chauffe. La chaleur peut être minimisée avec un bon design, en s'assurant que le noyau n'atteigne pas des niveaux de saturation, une minimisation des courants de Foucault et que les enroulements ne sont pas surchargés ou qu'ils n'opèrent pas trop près de leur pleine capacité. Les transformateurs de grosse taille ont leurs noyaux et leurs enroulements submergés dans l'huile pour transférer la chaleur et noyer le bruit, et aussi pour déplacer l'humidité qui peut facilement compromettre l'intégrité de l'isolation. Des conduites extérieures de dissipation de chaleur permettent

d'avoir un écoulement convectif pour transférer la chaleur du circuit magnétique du transformateur vers l'air ambiant.

Les transformateurs sans huile ou de type sec sont souvent classés en termes de la montée maximale de température à laquelle ils opèrent (augmentation de température en haut de la température ambiante) selon un système de classement par lettres; A, B, F, ou H. Ces lettres de codification sont arrangées dans l'ordre de la plus petite tolérance à la chaleur jusqu'à la plus signifiante comme suit :

Class A: Pas plus de 55° Celsius de montée de température sur les enroulements, pour une température ambiante maximale de 40° Celsius.

Class B: Pas plus de 80° Celsius de montée de température sur les enroulements, pour une température ambiante maximale de 40° Celsius.

Class F: Pas plus de 115° Celsius de montée de température sur les enroulements, pour une température ambiante maximale de 40° Celsius.

Class H: Pas plus de 150° Celsius de montée de température sur les enroulements, pour une température ambiante maximale de 40° Celsius.

Les transformateurs sont limités par la puissance qu'ils peuvent transférer des enroulements primaires vers les enroulements secondaires. La résistance dans les enroulements contribue à l'inefficacité, une fois que le courant électrique dissipe de la chaleur sous forme d'énergie qui se gaspille. Les effets magnétiques dans le noyau du transformateur contribuent aussi à l'inefficacité. Parmi ces effets nous avons les courants de Foucault (de courants d'induction qui circulent dans le noyau) et l'hystérésis (puissance perdue pour compenser la tendance qui a le fer à se magnétiser dans une direction en particulier). L'augmentation de la fréquence augmente les pertes de puissance dans le transformateur. La présence d'harmoniques dans un système de puissance est une source de fréquences plus hautes que la normale, ce qui peut causer de

l'échauffement dans les transformateurs de grosse taille. Autant les transformateurs que les inducteurs contiennent de grosses capacités à cause de l'isolation filaire (diélectrique) qui sépare les tours d'enroulement du noyau de fer et de chacun d'entre eux. Cette capacité peut être suffisante pour donner au transformateur une fréquence naturelle de résonance, laquelle peut être un problème dans des applications de signaux. L'inductance de fuite est causée par le flux magnétique n'étant pas 100% couplé entre les enroulements dans un transformateur. Tout flux qui ne participe pas au transfert d'énergie d'un enroulement à l'autre va emmagasiner et dégager de l'énergie, ce qui est comment la self-inductance fonctionne. L'inductance de fuite tend à empirer la régulation en voltage d'un transformateur (le voltage secondaire fléchi pour un niveau de charge donné). La saturation magnétique d'un noyau de transformateur peut être causée par un voltage excessif au primaire, opérer à basse fréquence également, et/ou par la présence d'une tension CC dans n'importe lequel des enroulements. La saturation peut être minimisée ou évitée avec un design conservateur, lequel fournit une marge adéquate de sécurité entre les valeurs des crêtes de densité de flux magnétique et les limites de saturation du noyau. Les transformateurs subissent souvent des courants d'irruption lorsqu'ils sont connectés à une source alternative. Le courant d'irruption est plus sévère lorsque la connexion à la source alternative se fait lorsque le voltage instantané de la source est zéro. Les pertes cuivre autant dans les enroulements du primaire que du secondaire, et les pertes dans le noyau se transforment en chaleur dans un transformateur. Ces pertes se mesurent en Watts. Cette chaleur doit être transférée hors des enroulements et du noyau et dissipée dans les environs ou l'air ambiant. Il y a un délai de temps requis pour évacuer cette chaleur; par conséquent, la température du transformateur augmente. La température continue de monter jusqu'à ce qu'une condition d'équilibre soit atteinte, dans laquelle la quantité de chaleur dans le transformateur est égale à la quantité de chaleur dissipée. La différence de température entre un transformateur non opérant (condition à froid) et un autre chargé à plein capacité (condition à chaud) est connue sous le nom de montée en température et souvent mesurée en degrés Celsius. Toutefois, la montée résultante de température est moyennée dans tout l'enroulement, l'intérieur de l'enroulement est toujours plus chaud que l'extérieur en réalité. Le point le plus chaud est en quelque part à l'intérieur du bobinage ayant le chemin le plus long vers l'air ambiant. Ce différentiel de

température de point chaud est déterminé par le manufacturier sur des unités prototype; normalement exprimé comme une montée de température sur la température moyenne. La différence de température de point chaud est définie par des standards industriels (NEMA et AINSI) pour chaque classe d'isolation (type et dénomination de température d'isolation utilisé sur les enroulements). De toute évidence, la température de point chaud est un facteur limitant en température pour l'isolation d'un transformateur, la montée de température doit être limitée par le design de façon à ce que la température totale ne dépasse pas la température limite d'isolation utilisée. Par exemple, si l'isolation est limitée à une température de 105 degrés C maximum, le manufacturier doit permettre une différence température de 10 degrés C entre les températures moyennes et celle du point chaud dans l'enroulement. Si la température de la pièce est de 40 degrés C, alors la montée de température permise se calcule comme suit :

Montée moyenne = 105 (point chaud) moins 10 degrés C moins 40 degrés C (ambient)= 55 degrés.

De cette façon le transformateur doit être capable de supporter une montée moyenne de température de 55 degrés C. Une classe d'isolation est en principe spécifiée en montée de température Celsius, ce qui se base sur la montée maximale permise par résistance dans une température ambiante de 40 C, de façon à ce que la température maximale de point chaud ne soit pas dépassée. La température maximale totale permet une température ambiante de 40 degrés C. Si la température ambiante est en-dessous de cela, le transformateur opère plus froid, sinon il va opérer à plus haute température, à moins qu'un design spécial de montée de température plus basse soit utilisé. Plusieurs types d'isolation doivent être imprégnés avec un vernis pour améliorer la limitation en température, la résistance à l'humidité, la rigidité mécanique et diélectrique. Les enroulements doivent aussi être imprégnés. Un bon matériel d'imprégnation va remplir la plupart des cavités des enroulements. L'imprégnation scelle également les bords des enroulements et en général prévient l'entrée d'air et d'humidité. Le remplissage des espaces d'air améliore la conduction de la chaleur en dehors du bobinage. L'ensemble noyau et bobinage est aussi traité, le rendant une masse solide. L'usure mécanique de l'isolation est donc minimisée. Les tôles magnétiques du noyau sont cimentées

ensembles par le vernis, cela améliore leur rigidité mécanique évitant au même temps la vibration individuelle des tôles magnétiques. L'air est le milieu de refroidissement pour les transformateurs à sec. Ces dispositifs se divisent en trois catégories; encapsulé, à noyau exposé, et de type cabinet et ils diffèrent amplement des unités remplies à l'huile car ils peuvent opérer à plus hautes températures, une fois qu'un seul transfert de chaleur est requis vers l'air ambiant, les unités conventionnelles doivent transférer la chaleur des enroulements vers le fluide refroidisseur et du fluide refroidisseur vers l'air ambiant.

Dans celui de type encapsulé un matériau de remplissage, en général thermoplastique, enrobe le circuit magnétique au complet. Le matériau de remplissage est mélangé avec un bon conducteur électrique tel que le sable de silice; c'est donc ce matériau qui transfère la chaleur vers la cuve du transformateur, où elle est dissipée dans l'air. Dans le type à noyau exposé on utilise un bobinage de type coquille qui enveloppe les enroulements. Les enroulements sont confinés dans un compartiment solide, laissant le noyau exposé. La conduction de la chaleur se fait des enroulements vers la coquille et vers l'air ambiant. Les unités de type cabinet ont le noyau et les enroulements complètement couverts par un cabinet considérablement plus grand que l'ensemble du circuit magnétique. Ce cabinet possède des ouvertures ventilées dans le dessous et le dessus, de façon à ce qu'un effet de cheminée soit créé. Alors, l'air qui circule dans le cabinet transporte la chaleur vers l'extérieur. Il est très important que ces unités soit installées où l'air circule librement. Les transformateurs de puissance doivent être efficaces et doivent dissiper la moindre puissance autant que possible, sous forme de chaleur pendant le processus de transformation. L'efficacité est normalement en haut de 99% et elle est obtenue en utilisant des alliages d'acier spéciaux pour coupler le champ magnétique induit dans les enroulements du secondaire et du primaire. La dissipation même de 0.5 % de la puissance transmise dans de gros transformateurs génère de grosses quantités de chaleur, qui exigent des moyens de refroidissement. En général, les transformateurs sont installés dans des contenants scellés qui ont de l'huile ou une autre substance qui circule à travers des enroulements pour transférer la chaleur vers des surfaces externes radiatives, où elle peut être transmise dans l'air ambiant. La température de fonctionnement est un facteur important qui doit être considéré. Il est courant de voir une montée de 60 à 70 degrés en

haut de la température de l'air ambiant à puissance nominale. La chaleur générée par un transformateur est due à la somme des pertes dans le cuivre et dans le fer. Une fois que le cuivre possède un coefficient positif de température, sa résistance augmente avec cette dernière. Lorsque la température monte, la résistance de tension continue augmente aussi entraînant un cycle d'échauffement direct. La montée de température peut être réduite en augmentant le diamètre du filage des enroulements et la taille du transformateur. Toutefois ceci entraîne des coûts. La figure 2 illustre le prototype de transformateur à sec étudié et le banc d'essai utilisé pour la validation de la simulation numérique.



Figure 2. Objet de modélisation et banc d'essai.

Le dispositif électrique a été conçu par la compagnie Ferranti-Packard (une filiale de la multinationale Vatec) dans leurs ateliers de Trois-Rivières et ses données techniques sont les suivantes :

Puissance	167 kVA
Phases	1 ϕ
Fréquence	60 Hz
Impédance à 85 °C	2.1 %
Niveau d'isolement	95 kV
Haute Tension	8000 V
Basse Tension	120/240 V
Échauffement	65 °C
Masse totale	525 Kg

Tableau 1. Données techniques du transformateur modélisé.

Sa géométrie simplifiée pour les besoins de simulation est illustrée à la figure 3.

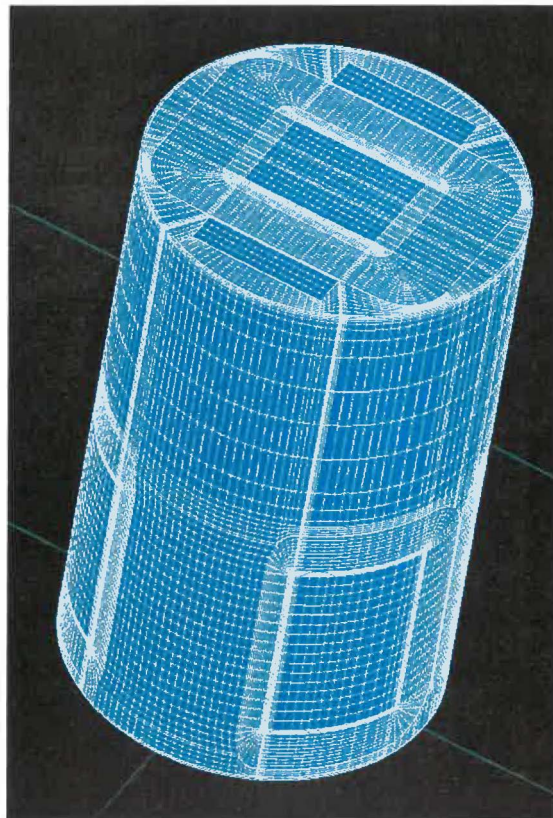


Figure 3. Maillage hexaédrique du transformateur.

La cavité intérieure du maillage en question est illustrée en coupe à la figure 4.

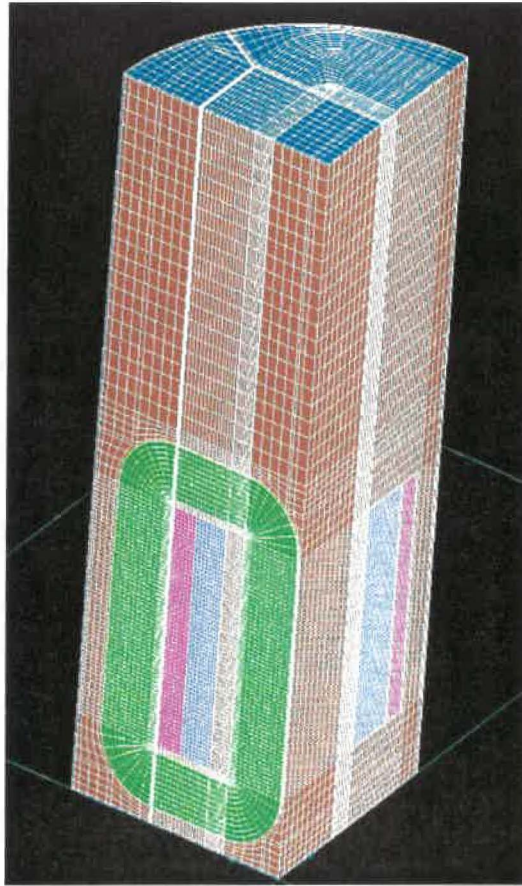


Figure 4. Portion de maillage.

La figure 4 illustre l'approche géométrique utilisée pour représenter l'intérieur du transformateur.

- La partie en bleu représente la cuve métallique en acier.
- La partie en brun représente la cavité d'air.
- La partie en vert représente un des noyaux magnétiques.
- La partie en rose représente l'enroulement primaire.
- La partie en bleu pâle représente l'enroulement secondaire.

Plus en détail nous pouvons voir à la figure 5 la topologie du circuit électromagnétique tel qu'il a été modélisé.

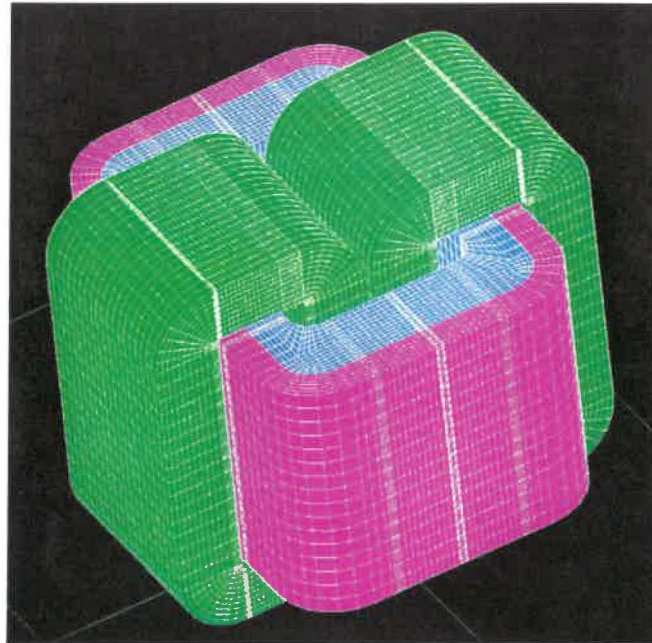


Figure 5. Maillage du circuit magnétique.

C'est donc à partir de ce type de maillage que la partie analyse du transfert de chaleur par conduction est complétée. L'intérieur du transformateur à l'étude diffère en quelque sort de la géométrie proposée dans le maillage présenté. Nous y retrouvons moins de symétries telles que les bouts de connexions électriques entre l'intérieur et l'extérieur de la cuve, une plaque métallique au-dessus des noyaux magnétiques de même qu'un support de structure pour le circuit magnétique et l'isolation de tous les conducteurs. Plus en détail, au niveau des enroulements de basse et haute tension il y a des espaces d'air et des séparateurs solides qui ne sont pas également représentés à cause des limitations dictées par la propriété intellectuelle du manufacturier du prototype de transformateur. Quelques uns de ces détails ne sont pas facilement représentables même avec une modélisation à haute échelle. Ce qui se traduit par une des limites de la méthode et l'approche qui font l'objet du travail de recherche. Nous considérons toutefois que parmi ces détails quelques uns ont peu d'influence sur le transfert de chaleur, bien qu'ils représentent des obstacles à l'écoulement convectif de fluide qui s'établit à l'intérieur de transformateur.

En ce qui a trait à l'analyse du transfert de chaleur conjugué, le même type de maillage est utilisé au départ, mais il subit par la suite des étapes de conditionnement pour pouvoir l'adapter à la physique du problème.

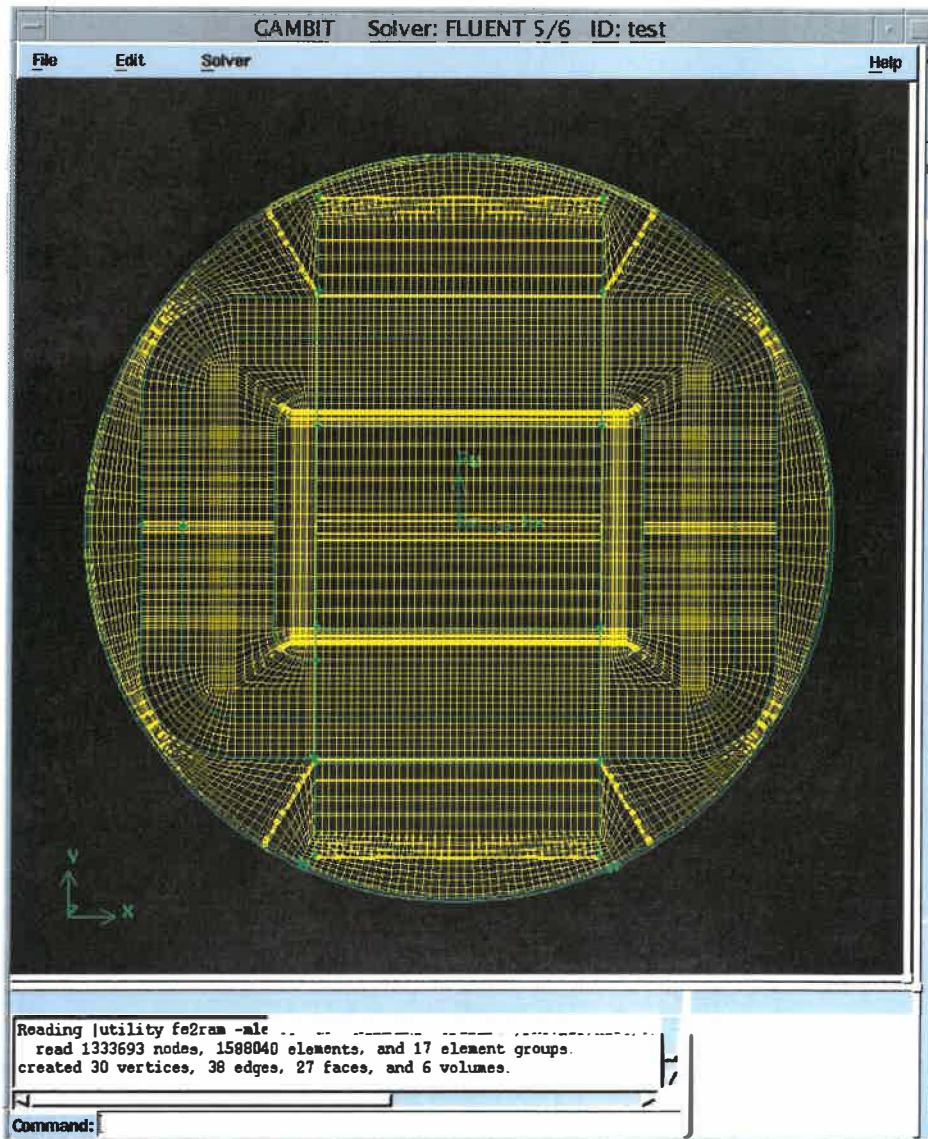


Figure 6. Maillage utilisé pour la partie fluides.

La disposition des thermocouples utilisés dans la mesure de température faite sur les enroulements et les noyaux magnétiques est la suivante :

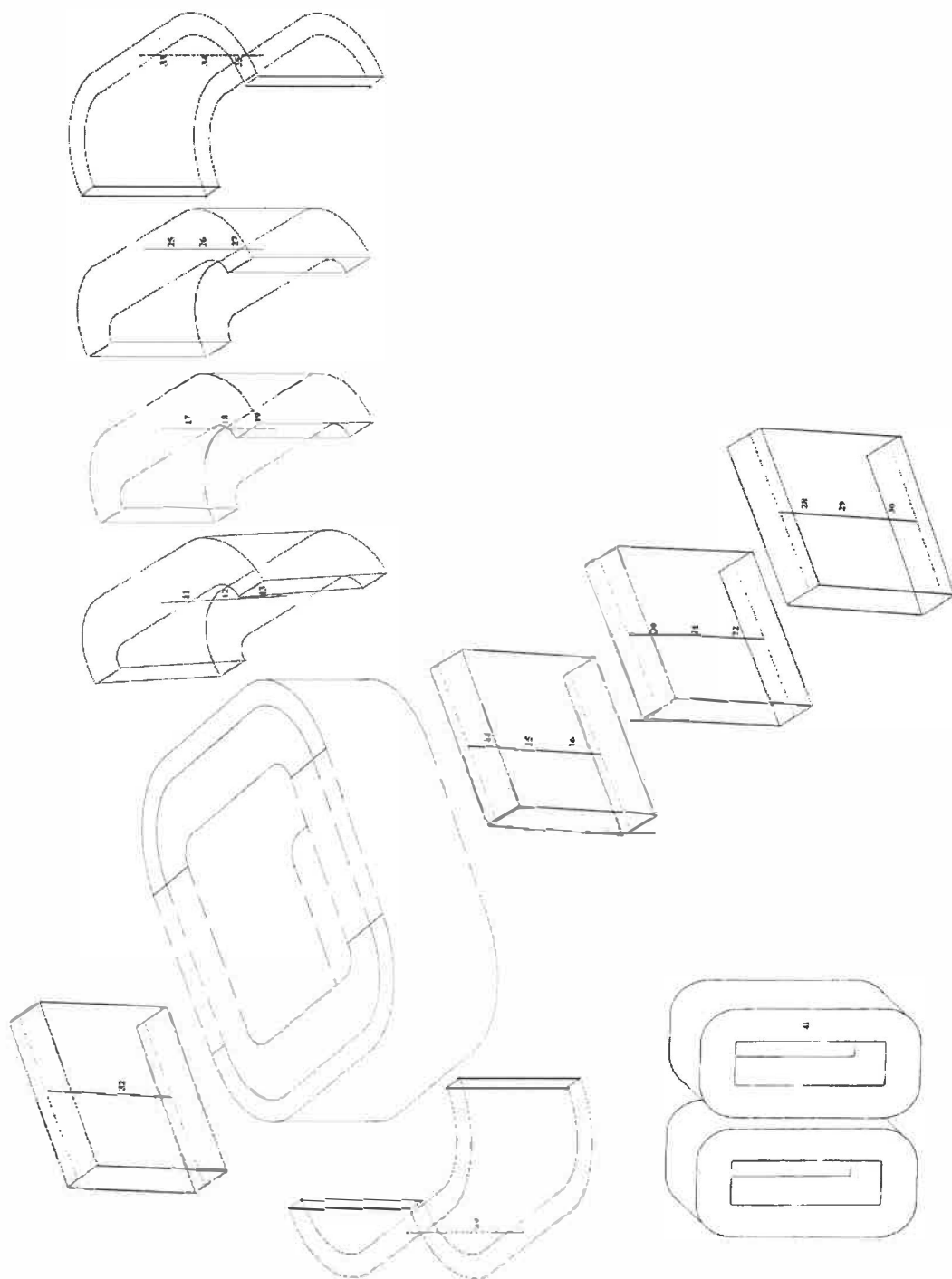


Figure 7 Position des thermocouples

3.0 Méthodologie de recherche

Une fois que les équations mathématiques qui régissent les deux types de problèmes analysés sont identifiées, ainsi que la formulation des phénomènes physiques participant, il faut aborder l'approche de discrétisation et d'intégration numérique qui s'applique dans chaque traité. L'identification de la formulation de l'équation Poisson pour le problème de conduction et celle des phénomènes physiques participant se fait sans difficulté. La discrétisation de ces dernières se fait en appliquant la méthode des résidus pondérés et leur intégration numérique se fait par éléments finis.

La formulation de Navier-Stokes pour le problème de type conjugué se détermine en tenant compte de l'élément moteur dans le déplacement du fluide à l'intérieur de la cuve du transformateur. Le nombre de Rayleigh est pris comme critère pour déterminer si l'écoulement à modéliser est de type laminaire ou turbulent. L'approche de discrétisation adoptée pour les équations prises en considération est celui du volume de contrôle et leur intégration numérique se fait par la méthode des différences finies.

Dans les deux cas traités la formulation des phénomènes physiques participant pris en ligne de compte est celle du refroidissement externe par convection naturelle et celle de la dissipation de puissance dans le circuit magnétique. Le transfert de chaleur par radiation à l'intérieur de la cuve est par contre négligé. Son effet peut avoir une bonne influence à très haute température, mais pas à laquelle fonctionne le transformateur à sec modélisé. Il va de soi que la formulation de la radiation peut être incluse dans les deux cas traités mais cela rend la tâche de calcul encore plus lourde.

3.1 Équation caractéristique pour la modélisation du transfert de chaleur par conduction en régime permanent.

Le transfert de chaleur à trois dimensions dans un système où le phénomène de conduction peut être prédominant par rapport à la convection, peut avoir comme base de définition l'équation elliptique suivante:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f_v = 0 \quad (23)$$

où T représente la température, k la conductivité thermique axiale et f_v une source connue d'excitation. Cette équation est connue sous le nom de l'équation de la chaleur. Lorsque cette équation est utilisée pour modéliser le transfert de chaleur par conduction dans le transformateur à l'étude les conditions aux frontières de l'équation sont les suivantes :

- une dissipation de puissance par effet Joule dans les enroulements de basse tension de 1300 Watts/m³.
- une dissipation de puissance par effet Joule dans les enroulements de haute tension de 1500 Watts/m³
- une dissipation de puissance par courants de Foucault dans le noyau magnétique de 260 Watts/m³.
- un coefficient de convection sur les parois externes de la cuve métallique de 5 Watts/(m².°K)

La seule propriété physique des matériaux requise dans cette analyse est celle de la conductivité thermique. Les valeurs utilisées sont les suivantes:

Cuivre	$k = 387.6 \text{ W/(m.°K)}$
Aluminium	$k = 202.4 \text{ W/(m.°K)}$
Acier	$k = 16.3 \text{ W/(m.°K)}$
Acier magnétique	$k = 36.4 \text{ W/(m.°K)}$
Air	$k = 2.62 \times 10^{-2} \text{ W/(m.°K)}$

La dissipation de puissance est incorporée comme étant une quantité constante dans le terme f_v de l'équation (23). Aucune expression analytique ou empirique est utilisée à cet

effet, car l'estimation des ces conditions se fait par mesure de température sur les régions concernées dans le transformateur.

Aucune considération n'est faite au sujet des pertes par hystérésis dans le noyau magnétique et par flux de fuite dans la partie structurale. L'effet du refroidissement par convection naturelle sur la surface externe du transformateur n'est pas calculé directement mais plutôt modélisé à l'aide d'une deuxième équation incorporée dans l'analyse sous la forme de condition de frontière de type Neumann. L'expression analytique de cette condition aux frontières est donnée dans les équations (2) et (27).

3.2 Discrétisation de l'équation différentielle de Poisson

L'obtention d'une solution discrète de l'équation de la chaleur peut se faire à l'aide de la méthode des résidus pondérés, tel que présenté à la section 2.1. Nous considérons l'équation d'équilibre pour le champ T recherché sous la forme suivante:

$$W(T) = \int \psi \{R(T)\} dV = 0 \quad (24)$$

où ψ est une fonction de pondération, $R(T)$ est un résidu et $W(T)$ est une forme intégrale. La discrétisation de l'équation (23) se fait en posant la forme intégrale suivante:

$$W(T) = \int \psi \left(k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f \right) dV = 0 \quad (25)$$

T est alors solution du problème de transfert de chaleur, lorsque T satisfait aux conditions de frontière et annule $W(T)$, pour toute fonction de pondération ψ appartenant à un ensemble de fonctions particulières. Cette forme intégrale telle que posée représente la forme intégrale forte de l'équation de Poisson à cause de son ordre deux de dérivation. Une intégration par parties nous permet d'obtenir une forme intégrale faible d'ordre un.

Dans la forme intégrale initiale de l'équation (25) T doit être dérivable deux fois. Les fonctions ψ quant à elles ne sont soumises à aucune condition.

L'intégration par parties de (25) pour une valeur unitaire de k_x , k_y et k_z nous donne:

$$W = - \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - \psi f_v \right) dV + \int_{S_f} \psi \frac{\partial T}{\partial n} dS + \int_{S_u} \psi \frac{\partial T}{\partial n} dS = 0 \quad (26)$$

Cette intégration a comme conséquence directe de faire apparaître des dérivées de ψ et de réduire le degré de dérivation de T . Les conditions de dérivabilité de ψ augmentent alors ψ peut avoir à satisfaire des conditions de frontière sur des contours. Les fonctions ψ et T doivent être dérivables une fois seulement.

L'intégrale de volume de l'équation (26) tient compte du transfert de chaleur par conduction. Les intégrales de surface ou termes de contour fermé sur S_f et S_u tiennent compte du transfert de chaleur par convection et par radiation. Les dérivées de T par rapport à la normale n peuvent être exprimées comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = fs - \alpha T \text{ sur le contour } S_f \quad (27)$$

$fs - \alpha T$ est toutefois analogue à :

$$h(T_\infty - T) \quad (28)$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \sigma \epsilon (T_\infty^4 - T^4) \text{ sur } S_u \quad (29)$$

Nous pouvons alors remplacer l'intégrale de surface $\int_{S_f} \psi \frac{\partial T}{\partial n} dS$ par :

$$\int_{S_f} \psi (fs - \alpha T) dS \quad (30)$$

pour tenir compte du transfert de chaleur par convection naturelle sur la surface externe

de la cuve. Nous pouvons également remplacer l'intégrale de surface $\int_{S_u} \psi \frac{\partial T}{\partial n} dS$ par :

$$\int_{S_u} \psi \sigma (T_{ref}^4 - T^4) dS \quad (31)$$

Cette expression peut être utilisée pour tenir compte des conditions de refroidissement par radiation entre les surfaces externes du circuit magnétique et les parois internes de la cuve du transformateur, de même que sur la surface externe de la cuve et le milieu ambiant.

En choisissant $\psi = 0$ sur S_u nous faisons disparaître ce terme de contour, pour faire abstraction de l'effet de la radiation dans le problème à l'étude.

La forme intégrale faible résultante peut s'écrire finalement comme suit:

$$W = - \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - \psi f v \right) dV + \int_{S_f} \psi (fs - \alpha T) dS = 0 \quad (32)$$

L'expression mathématique du premier terme de l'intégrale de volume est utilisée pour tenir compte du transfert de chaleur par conduction dans les solides du transformateur et la partie fluide. Le deuxième terme quant à lui est utilisé pour tenir compte de la dissipation de puissance dans les enroulements et les noyaux magnétiques.

À partir de cette formulation faible nous devons construire une solution approchée de T . Pour ce faire nous discrétisons (32) en deux étapes :

-En choisissant une approximation à n paramètres des fonctions inconnues T . Dans notre cas cette approximation sera de type nodale ce qui permet l'utilisation de la méthode des éléments finis, nous posons la variable T sous la forme suivante :

$$T = \langle N \rangle \{ T_n \} \quad (33)$$

où $\langle N \rangle$ représentent des fonctions d'interpolation et T_n les valeurs nodales de température sur chaque élément utilisé dans la discrétisation géométrique du domaine à l'étude.

-En choisissant un ensemble de n fonctions de pondération indépendantes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Les différents choix de fonctions ψ_i nous conduisent à des méthodes distinctes. Pour le problème de transfert de chaleur par conduction nous choisissons comme fonctions de pondération δT , la première variation de la fonction inconnue T , nous appliquons alors la méthode de Galerkin pour la discrétisation de la forme intégrale de départ.

3.3 Formes intégrales élémentaires discrétisées

Dans la section précédente nous avons vu comment la méthode des résidus nous conduit à une forme intégrale faible de l'équation de Poisson. La forme intégrale W devient alors :

$$W = \int \delta T (\zeta(T) + f_v) dV = 0 \quad (34)$$

La forme intégrale comme telle est valable pour une solution dans un volume complet. Pour une solution à un nombre de degrés de liberté fini, nous pouvons remplacer cette intégrale par une somme d'intégrales sur chaque élément V^e à l'aide desquels la géométrie à l'étude aura été discrétisée :

$$W = \sum_{e=1}^n W^e = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \delta T^e (\zeta(T^e) + f_v) dV = 0 \quad (35)$$

Le calcul de chaque terme W^e , dit forme intégrale élémentaire, se fait à l'aide d'une approximation par éléments finis de T et de δT sur chaque élément V^e considéré du maillage.

$$\begin{aligned} T^e &= \langle N \rangle \{T_n\} \\ \delta T^e &= \langle N \rangle \{\delta T_n\} \end{aligned} \quad (36)$$

Les fonctions d'interpolation $\langle N \rangle$ sont nulles en tout point extérieur au V^e considéré, et les $\{T_n\}$ ne font intervenir que des variables nodales de l'élément V^e , alors chaque terme W^e se calcule à partir des variables liées à l'élément e considéré. En utilisant (36), W^e devient :

$$W^e = \langle \delta T \rangle \int_V \langle N \rangle \zeta (\langle N \rangle) dV \{T_n\} + \langle \delta T \rangle \int_V \{T_n\} f_v dV \quad (37)$$

Pour l'équation à l'étude et en faisant abstraction de l'indice e , la forme intégrale W s'écrit comme suit :

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \int_{V^e} \delta T \left(k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f_v \right) dV = 0 \quad (38)$$

après intégration par parties nous obtenons

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \left(\int_{V^e} \langle \delta T \rangle [D] \{T\} - \delta T f_v dV - \int_{S_f^e} \delta T (f_s - \alpha T) dS \right) = 0 \quad (39)$$

où

$$\langle \delta T \rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \quad (40)$$

compte tenue du fait que la modélisation se fait à trois dimensions

$$\langle \delta(\partial T) \rangle = \left\langle \delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right), \delta\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right), \delta\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \right\rangle \quad (41)$$

$$D = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (42)$$

comme $T = \langle N \rangle \{T_n\}$

$$\{\mathcal{T}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \{T_n\} = [B] \{T_n\} \quad (43)$$

$$\{\delta(\mathcal{T})\} = \begin{bmatrix} \delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \\ \delta\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ \delta\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \end{bmatrix} \{\delta T_n\} = [B_\delta] \{\delta T_n\} = [B] \{\delta T_n\} \quad (44)$$

3.4 Représentation matricielle de l'intégration par la méthode des éléments finis.

L'équation (39) s'écrit sous sa forme discrétisée comme suit :

$$W^e = \langle \delta T_n \rangle \left(\int_V [B_\delta]^T [D] [B] dV \{T_n\} - \int_V \{N\} f_v dV - \int_S \{N\} f_s dS + \int_f \alpha \{N\} \langle N \rangle dS \{T_n\} \right) = 0 \quad (45)$$

ou

$$W^e = \langle \delta T_n \rangle ([k^e] \{T_n\} - \{f^e\}) = 0 \quad (46)$$

pour

$$[k^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_f} \alpha \{N\} \{N\} dS \quad (47)$$

$$[f^e] = \int_{V^e} \{N\} f_v dV + \int_{S_f} \{N\} f_s dS \quad (48)$$

où :

$[k^e]$ est la matrice élémentaire, indépendante de T_n si l'opérateur ζ est linéaire.

$\{f^e\}$ est le vecteur élémentaire des sollicitations

$\{T_n\}$ est le vecteur élémentaire des variables nodales

$\langle \delta T^e \rangle$ est le vecteur élémentaire des variations des variables nodales

La forme intégrale globale se construit alors par l'addition des formes élémentaires dans une forme matricielle globale

$$W = \langle \delta T_n \rangle ([k] \{T_n\} - \{f\}) = 0 \quad (49)$$

Étant donné que la première variation de la température $\langle \delta T_n \rangle$ est non-nulle et arbitraire, le terme entre parenthèses est celui qui s'annule. Par conséquent :

$$[k] \{T_n\} = \{f\} \quad (50)$$

Dans notre analyse par éléments finis de départ, les équations de la physique du problème présentées jusqu'ici s'expriment par rapport aux éléments réels; elles font intervenir des fonctions inconnues T et leurs dérivées en x , y et z . Sur chaque élément V^e nous utilisons une approximation nodale de la fonction exacte $T_{ex}(x)$ du type :

$$T_{ex}(x) \approx T(x) = \langle N(x) \rangle \{T_n\} \quad (51)$$

où:

x appartient à V^e

T_n sont les valeurs de T_{ex} aux nœuds d'interpolation de l'élément

$N(x)$ sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel

L'intégration analytique des expressions matricielles qui résultent de l'application de la méthode de Galerkin est fort compliquée pour un maillage non structuré. Dans notre analyse nous utilisons des éléments hexaédriques souvent déformés et cela nous oblige à faire une intégration de type numérique. Nous pouvons remplacer l'approximation sur l'élément réel par une approximation correspondante sur un élément de référence V^r :

$$T_{ex}(\xi) \approx T(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{ T_n \} \quad (52)$$

Un élément de référence V^r est un élément de forme très simple, repéré dans un espace ξ différent de celui de l'élément réel. Une transformation géométrique τ^e permet de définir les coordonnées x de chaque point d'un élément réel à partir des coordonnées ξ d'un élément dit de référence.

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi) \quad (53)$$

La transformation τ^e dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des nœuds géométriques qui le définissent. Il y a alors une transformation τ^e différente pour chaque élément réel.

$$\tau^e : \xi \rightarrow x^e = x^e(\xi, x_i, x_j, x_k, \dots) \quad (54)$$

où $x_i, x_j, x_k, \dots$ sont les coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à l'élément e .

Un même élément de référence V^r est utilisé pour transformer tous les éléments réels V^e de même type dans un maillage réel. Grâce à la transformation géométrique τ , nous remplaçons la définition analytique de chaque élément V^e dans l'espace des x , par la définition analytique plus simple de son élément de référence V^r , dans l'espace des ξ . La transformation géométrique τ peut être interprétée comme un simple changement de

variables $x \rightarrow \xi$. Nous pouvons également considérer ξ comme un système de coordonnées locales lié à chaque élément.

Dans notre analyse nous utilisons des éléments de type hexaédrique pour lesquels l'élément de référence est défini comme suit :

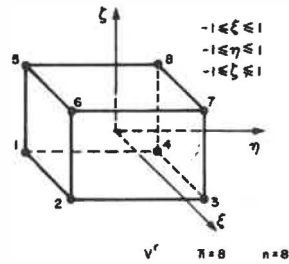


Figure 8. Élément brique de référence[39].

Cet élément comporte une variable T_i en chacun de ses 8 nœuds. Les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation. Les fonctions d'interpolation et ses dérivées s'expriment comme suit :

$\frac{1}{c}\{N\}$	$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\right\}$	$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial N}{\partial \eta}\right\}$	$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial N}{\partial \zeta}\right\}$	c
1 $a_2 b_2 c_2$	$-b_2 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_2 b_2$	1/8
2 $a_1 b_2 c_2$	$b_2 c_2$	$-a_1 c_2$	$-a_1 b_2$	
3 $a_1 b_1 c_2$	$b_1 c_2$	$a_1 c_2$	$-a_1 b_1$	
4 $a_2 b_1 c_2$	$-b_1 c_2$	$a_2 c_2$	$-a_2 b_1$	
5 $a_2 b_2 c_1$	$-b_2 c_1$	$-a_2 c_1$	$a_2 b_2$	
6 $a_1 b_2 c_1$	$b_2 c_1$	$-a_1 c_1$	$a_1 b_2$	
7 $a_1 b_1 c_1$	$b_1 c_1$	$a_1 c_1$	$a_1 b_1$	
8 $a_2 b_1 c_1$	$-b_1 c_1$	$a_2 c_1$	$a_2 b_1$	

Tableau 2. Fonctions d'interpolation et leurs dérivées.

Avec $a_1 = (1 + \xi)$ $a_2 = (1 - \xi)$
 $b_1 = (1 + \eta)$ $b_2 = (1 - \eta)$
 $c_1 = (1 + \zeta)$ $c_2 = (1 - \zeta)$

3.5 Forme intégrale W^e sur l'élément de référence

Les expressions de W^e vues jusqu'ici comportent :

- des dérivées en x, y, et z de T et de δT
- des variables T_n et δT_n
- des intégrations sur l'élément réel V^e

Pour obtenir une forme intégrale W^e sur l'élément de référence les dérivées en x, y et z doivent être exprimées en fonction des dérivées en ξ, η et ζ et des termes de la matrice jacobienne $[j] = [J]^{-1}$ de la transformation géométrique imposée

$$T(\xi, \eta, \zeta) = \langle N(\xi, \eta, \zeta) \rangle \{T_n\} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right\rangle \{T_n\} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \right\rangle \{T_n\} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right\rangle \{T_n\} \end{aligned} \quad (56)$$

La dérivation en chaîne est utilisée pour calculer les dérivées en ξ d'une fonction à partir de ses dérivées en x :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (57)$$

ce que nous pouvons noter :

$$\{\partial_\xi\} = [J] \{\partial_x\} \quad (58)$$

où $[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation imposée. De la même manière, les dérivées en x d'une fonction s'obtiennent à partir des dérivées en ξ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

soit :

$$\{\partial_x\} = [J]\{\partial_\xi\} \quad (60)$$

par inspection de (58) et (60) nous pouvons déterminer que:

$$[J] = [J]^{-1} \quad (61)$$

C'est la matrice $[J]$ qui est utilisée en pratique puisque nous devons exprimer les dérivées de T en x, y et z à partir de dérivées de T en ξ, η et ζ .

L'expression de $[J]^{-1}$ pour un problème à trois dimensions est la suivante :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23} & J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33} & J_{12}J_{23} - J_{13}J_{22} \\ J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33} & J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} & J_{21}J_{13} - J_{23}J_{11} \\ J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22} & J_{12}J_{31} - J_{32}J_{11} & J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\det(J) = J_{11}(J_{22}J_{33} - J_{32}J_{23}) + J_{12}(J_{31}J_{23} - J_{21}J_{33}) + J_{13}(J_{21}J_{32} - J_{31}J_{22}) \quad (64)$$

Le calcul des termes de $[J]$ se fait à partir de la relation suivante :

$$\langle x \ y \ z \rangle = \langle N(\xi) \rangle [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}] \quad (65)$$

$\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}$ étant les coordonnées x , y et z des nœuds géométriques de l'élément utilisé dans la discrétisation. Pour obtenir la matrice jacobienne nous multiplions (65) des deux côtés par le vecteur des colonnes de dérivées en ξ , η et ζ .

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \langle x \ y \ z \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\} \end{bmatrix} \quad (66)$$

(3 x n^e) (n^e x 3)

L'expression se réduit au produit de deux matrices, l'une contenant les dérivées en ξ des fonctions de transformation géométrique, et l'autre les coordonnées des n^e nœuds géométriques de l'élément considéré.

Dans le cas des éléments hexaédriques à huit nœuds utilisés dans la modélisation, la matrice jacobienne se calcule comme suit :

$$[J] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -b_2c_2 & b_2c_2 & b_1c_2 & -b_2c_2 & -b_2c_2 & b_1c_2 & b_1c_2 & -b_2c_2 \\ -a_2c_2 & -a_2c_2 & a_2c_2 & a_2c_2 & -a_2c_2 & -a_2c_2 & a_2c_2 & a_2c_2 \\ -a_2b_2 & -a_2b_2 & -a_2b_2 & -a_2b_2 & a_2b_2 & a_2b_2 & a_2b_2 & a_2b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_1 & z_2 \\ x_3 & y_1 & z_3 \\ x_4 & y_1 & z_4 \\ x_5 & y_1 & z_5 \\ x_6 & y_1 & z_6 \\ x_7 & y_1 & z_7 \\ x_8 & y_1 & z_8 \end{bmatrix} \quad (67)$$

les coordonnées x_n , y_n et z_n correspondent aux coordonnées des nœuds sur l'élément réel et les coefficients a, b et c sont tels que décrit au tableau 2 .

L'expression de la matrice $[B]$ dans (47) peut être réorganisée comme suit :

$$[B] = [Q][B_\xi] \quad (68)$$

où :

$[Q]$ est une matrice de transformation contenant des termes de $[j] = [J]^{-1}$

$[B_\xi]$ est une matrice semblable à $[B]$ mais qui implique des dérivées en ξ, η et ζ des fonctions $N(\xi, \eta, \zeta)$ au lieu des dérivées en x des fonctions $N(x, y, z)$.

Les variables nodales $\{T_n\}_\xi$ sur l'élément de référence et $\{T_n\}_x$ sur l'élément réel sont reliés par :

$$\begin{aligned} \{T_n\}_\xi &= [P] \{T_n\}_x \\ \{\delta T_n\}_\xi &= [P] \{\delta T_n\}_x \end{aligned} \quad (69)$$

La matrice de transformation $[P]$ contient des termes de $[J]$ calculés aux nœuds.

L'intégrale de volume sur V^e sur l'élément réel à son tour, est remplacée par l'intégrale de volume sur l'élément de référence V^r

$$\int_{V^e} \dots dV = \int_{V^r} \dots \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (70)$$

Tel qu'illustré à la figure 8 les limites d'intégration en ξ pour les éléments de référence hexaédrique sont :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \det(J) d\xi d\eta d\zeta \quad (71)$$

L'intégrale de surface à deux dimensions

$$\int \dots dS \quad (72)$$

s'écrit en fonction des coordonnées de surface s_1 et s_2 qui sont en général (ξ, η) , (ξ, ζ) ou (η, ζ)

$$\int \dots J_s ds_1 ds_2 \quad (73)$$

La surface dS est l'une des faces de l'élément de référence. Sur cette face un point est repéré par les deux paramètres s_1 et s_2

$$\mathbf{x} = \langle N(s_1, s_2) \rangle \{x_n\} \quad (74)$$

et J_s s'exprime comme étant égal à :

$$J_s = \sqrt{(y_{,s_1} z_{,s_2} - z_{,s_1} y_{,s_2})^2 + (z_{,s_1} x_{,s_2} - x_{,s_1} z_{,s_2})^2 + (x_{,s_1} y_{,s_2} - y_{,s_1} x_{,s_2})^2} \quad (75)$$

Les fonctions d'interpolation $N(s_1, s_2)$ sont celles associées à un élément de référence pour les conditions de flux de surface considérées. Si par exemple nous déclarons un flux de surface dans la direction ζ d'un élément de référence

$$\begin{aligned} s_1 &\equiv \xi \quad s_2 \equiv \eta \\ ds_1 &\equiv d\xi \quad ds_2 \equiv d\eta \end{aligned} \quad (76)$$

$$N(s_1, s_2) = N(\xi, \eta) \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \langle x_\xi \ y_\xi \ z_\xi \rangle &= \langle N_{,\xi} \rangle [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}] \\ \langle x_\eta \ y_\eta \ z_\eta \rangle &= \langle N_{,\eta} \rangle [\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}] \end{aligned} \quad (78)$$

Les limites d'intégration pour les intégrales de surface sont :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \dots J_s(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (79)$$

3.6 Intégration numérique de l'équation de la chaleur

Dans la méthode des éléments finis, la matrice élémentaire $[k]$ et le vecteur d'excitation $\{f\}$ s'expriment sous forme d'intégrale à deux ou trois dimensions, tout en étant définies sur l'élément réel V^e

$$[k] = \int_{V^e} [B_\delta]^T [D] [B_\xi] dV + \int_{S_f^e} \alpha \{N\} \langle N \rangle dS \quad (80)$$

$$\{f\} = \int_{V^e} \{N\} f_v dV + \int_{S_f^e} \{N\} f_s dS \quad (81)$$

Sur l'élément de référence, ces intégrales deviennent

$$[k] = \int_{V^r} [B_\delta(\xi)]^T [D(\xi)] [B_\xi(\xi)] \det(J(\xi)) dV^r + \int_{S_f^r} \alpha \{N(\xi)\} \langle N(\xi) \rangle dS \quad (82)$$

$$\{f\} = \int_{V^r} \{N(\xi)\} f_v dV^r + \int_{S_f^r} \{N(\xi)\} f_s dS \quad (83)$$

Ce que nous pouvons récrire

$$[k] = \int_{V^r} [k^*] dV^r + \int_{S_f^r} [f_{s1}^*] dS \quad (84)$$

$$\{f\} = \int_{V^r} \{f_v^*\} dV^r + \int_{S_f^r} \{f_{s2}^*\} dS \quad (85)$$

Les termes de $[k^*]$ et $\{f^*\}$ sont des polynômes ou des fractions rationnelles souvent compliquées et leur intégration explicite est réalisable que s'ils sont constitués des termes polynomiaux. Il est en général préférable d'intégrer numériquement les différentes formes intégrales générées. Quelques unes d'entre elles peuvent s'intégrer de façon

exacte, mais pour d'autres l'intégration numérique ne donne qu'une expression approchée de $[k^*]$ et $\{f^*\}$.

L'intégration numérique des expressions matricielles du paragraphe précédent se fait par l'entremise de la méthode du produit. Elle consiste à utiliser dans chaque direction ξ, η et ζ une intégration numérique à une dimension. À trois dimensions, la méthode de Gauss à $r_1 \times r_2 \times r_3$ points intègre exactement les monômes $\xi^i \eta^j \zeta^k$ tel que :

$$i \leq 2r_1 - 1, j \leq 2r_2 - 1, k \leq 2r_3 - 1$$

Pour l'élément de référence hexaédrique utilisé la méthode d'intégration numérique de volume s'écrit comme étant un produit triple de sommations :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \sum_{k=1}^{r_3} w_i w_j w_k y(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (86)$$

et pour les intégrales de surface lorsque nous considérons les faces des éléments hexaédriques sur lesquels des conditions de refroidissement sont spécifiées, l'intégration numérique s'écrit comme étant un produit double de sommations :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_j w_k y(\xi_i, \eta_j) \quad (87)$$

En faisant correspondre à chaque expression de la matrice $[k]$ et du vecteur $\{f\}$ leur formulation pour un élément de référence hexaédrique, la forme et les monômes de plus haut degré de l'expression sont les suivants :

Dans $[k]$ pour le produit $[B_\xi]^T [Q]^T [D] [Q] [B_\xi] \det(J)$ la forme d'expression qui s'obtient correspond à :

$$P(\xi, \eta, \zeta) = \frac{a_1 + a_2 \xi + \dots + a_i \xi^4 \eta^4 \zeta^4}{b_1 + b_2 \xi + \dots + b_j \xi^2 \eta^2 \zeta^2}$$

Pour le produit $\alpha \{N\} <N> J_s$ pour des conditions de flux sur un plan arbitraire (ζ, η) la forme d'expression qui s'obtient correspond à :

$$P(\xi, \eta, \zeta) = c_1 + c_2 \xi + \dots + c_i \xi^2 \eta^2 \sqrt{d_1 + d_2 \xi + \dots + d_i \xi^2 \eta^2}$$

Dans $\{f\}$ pour le produit $f v \{N\} \det(J)$ il s'obtient :

$$P(\xi, \eta, \zeta) = e_1 + e_2 \xi + \dots + e_i \xi^3 \eta^3 \zeta^3$$

Cette expression est la seule qui peut être intégrée exactement.

Pour le produit $f s \{N\} J_s$ il s'obtient, pour des conditions de flux sur un plan arbitraire (ζ, η) , l'expression suivante :

$$P(\xi, \eta, \zeta) = f_1 + f_2 \xi + \dots + f_i \xi \eta \sqrt{g_1 + g_2 \xi + \dots + g_i \xi^2 \eta^2}$$

les $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ et g_i sont des constantes résultant d'une combinaison linéaire des coordonnées des nœuds.

Étant donné la nature compliquée de chaque terme, nous pouvons adopter une méthode d'intégration numérique produit 3x3x3 pour les intégrales de volume et une autre de 3x3 pour les intégrales de surface[41][42][43][44]. Les points de Gauss et les poids de pondération choisis pour l'intégration de volume et de surface sont les suivants :

$\xi_i = \eta_j = \zeta_k$	$w_i = w_j = w_k$
0	0,88888 88888 88889 (8/9)
$\pm 0,77459 66692 41483 (\pm \sqrt{3/5})$	0,55555 55555 55556 (5/9)

Tableau 3. Points de Gauss et poids de pondération utilisés pour l'intégration numérique.

Le code d'éléments finis développé pour le problème de conduction tient compte de toutes les notions théoriques illustrées jusqu'ici. Sa programmation a été faite en langage C++ et son implantation est la suivante :

Fichiers d'entrée :

- Un fichier ASCII contenant les coordonnées des nœuds des éléments, la table de connectivité des éléments, les conditions aux frontières reliées à la dissipation de puissance et au refroidissement par convection naturelle.

- Un fichier texte généré à l'aide de Matlab contenant le vecteur de permutations de la renumérotation des nœuds, obtenu avec l'application de l'algorithme de Cuthill-McKee inverse.

Fichiers de sortie :

- Un fichier binaire contenant la matrice des coefficients associée au système linéaire du problème de conduction stockées sous forme de profil CSC (Compressed Storage by Columns).

3.7 Système linéaire résultant

L'approche d'intégration numérique proposée pour l'analyse de transfert de chaleur par conduction, et tel que prédit dans [39]et [44], produit un système linéaire symétrique d'un faible pourcentage d'éléments non nuls concentrés à l'intérieur d'une région limite dans la matrice. Le système est alors considéré de type creux et à largeur de bande. Une caractéristique facilement vérifiable avec la fonction `spy()` de Matlab et l'interface de visualisation de profil du logiciel conçue à cet effet. Cette visualisation du profil du système linéaire est parfois nécessaire, ceci nous permet de vérifier entre autres si l'intégration numérique a bel et bien produit le type de système linéaire attendu pour le problème traité.

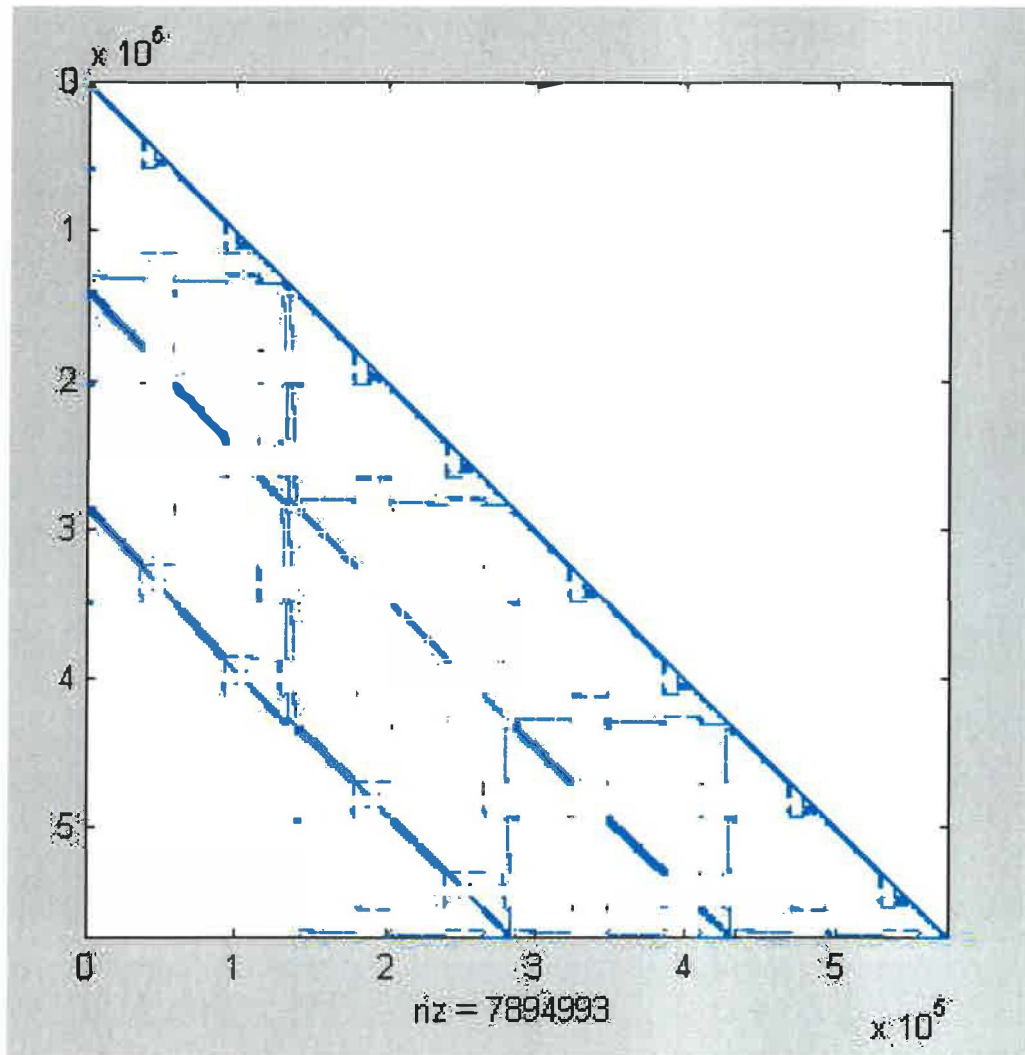


Figure 9. Visualisation sur Matlab du demi-profil d'un système linéaire 573181 DDL avant réduction de largeur de bande.

Les espaces en bleu représentent les positions des éléments non-nuls dans le système linéaire résultant et les éléments nuls sont représentés en blanc. Dans la disposition des éléments de la matrice nous retrouvons des patrons répétitifs, la ligne de démarcation ou largeur de bande à l'intérieur de laquelle se trouvent les éléments non nuls est très facilement appréciable.

Dans les essais préliminaires du code d'éléments finis des systèmes linéaires de taille réduite ont été assemblés et stockés sous forme de tableau de demie-largeur de bande en incluant les éléments non-nuls tel qu'illustré au tableau 4.

0	0	a_{11}
0	a_{21}	a_{22}
a_{31}	a_{32}	a_{33}
a_{42}	a_{43}	a_{44}
.	.	.
.	.	.
$a_{n,n-2}$	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$

$ibw \times n$

Tableau 4. Stockage d'une demie-largeur de bande dans un tableau $n \times ibw$.

En supposant un système linéaire symétrique d'une largeur de bande $ibw = 3$, pour lequel évidemment $a_{ij} = a_{ji}$ et $i - j \geq ibw$. Au lieu de stocker la matrice au complet sous forme de tableau $n \times n$ nous pouvons stocker que sa demie-largeur de bande sous forme de tableau de dimension $ibw \times n$. Ce type de stockage a été testé pour des modèles de 27000 nœuds et moins mais l'approche comme tel restait prohibitif en termes d'espace mémoire pour les problèmes de grosse taille. Un profil de stockage de type CSC (Compressed Storage by Columns) a été préféré pour la mise en mémoire des matrices de grosse taille de 573181 et 1009096 degrés de liberté. Dans ce genre de stockage seuls les éléments non-nuls de la demie-largeur de bande sont gardés en mémoire selon les colonnes. Il va de soi que seule la demie-largeur de bande des gros systèmes a été assemblée, comparativement à toute la matrice des systèmes de taille réduite. Le profil de stockage adopté est défini comme suit :

VAL	1	2	3	4	5	6
I	1	1	1	2	2	3
J	1	4	6	7		

Tableau 5. Profil de stockage CSC (Compressed Storage by Columns).

Dans cette approche, trois structures doivent être créées, une pour contenir les valeurs des éléments de la matrice (VAL), une autre pour contenir l'indice de colonne de chaque élément (I) et finalement une dernière qui sert de registre pour le nombre d'éléments non nuls sur chaque colonne. L'adoption d'un profil de stockage a une répercussion directe sur la structure du code de résolution numérique à utiliser, car ce choix détermine la manière dont l'algorithme doit être développé et voire même sa performance.

L'outil de visualisation de profil de matrice de Matlab et les calculs d'essai ont permis de constater qu'il était nécessaire de réduire la largeur de bande des systèmes de grosse taille à l'étude. La largeur de bande du système linéaire présenté à la figure 9 a été réduite à l'aide de Matlab également par l'application directe de leur version de l'algorithme Reverse Cuthill-McKee [45][46].

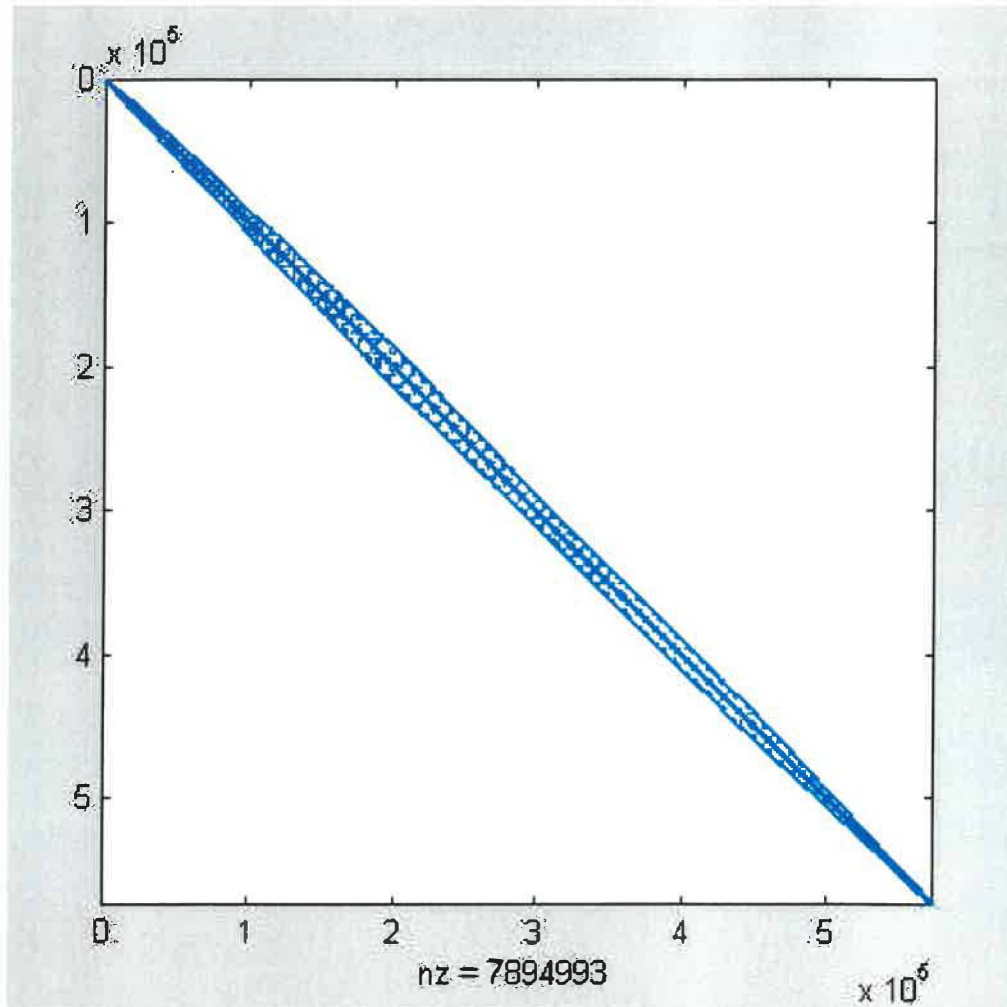


Figure 10. Profil complet du système linéaire après réduction de largeur de bande.

À la figure 10 nous pouvons constater que la largeur de bande à l'origine, (dans l'ordre de quelques centaines de milliers), a été réduite à quelques milliers à peine. L'immense largeur de bande à l'origine était le produit de l'algorithme de numérotation des nœuds du mailleur commercial utilisé[46][47]. Cette numérotation dite naturelle[48] avait comme conséquence directe de ralentir considérablement l'étape de résolution.

3.8 Les écoulements convectifs

L'écoulement d'air qui a lieu à l'intérieur du transformateur lorsque celui-ci est alimenté est de type convectif naturel dû au fait qu'aucune source d'énergie n'est utilisée pour entraîner une circulation continue de fluide de refroidissement. La nature de ce genre de d'écoulement peut être illustrée d'un exemple comme celui de la convection de type Rayleigh-Benard qui se déclare dans la couche d'air confinée entre deux plaques conductrices placées à la verticale, lorsque celle du bas est chauffée pour produire un gradient de température fixe entre elles. Le fluide du bas se dilate en chauffant et induit un gradient de densité instable dans la couche de fluide. Si ce dernier est suffisamment fort, le fluide chaud monte en écoulement convectif et enclenche un transfert de chaleur entre les deux plaques. Pour que la convection ait lieu, un front de fluide qui commence à monter en force ne doit pas se dissiper. Dans la terminologie mathématique, le mode correspondant à l'écoulement doit avoir une valeur propre plus grande que l'unité. Physiquement ceci correspond à l'occurrence de trois processus, en supposant que la couche de fluide ait été chauffée graduellement du bas et que le gradient de température ait eu le temps de se développer entre les deux plaques.

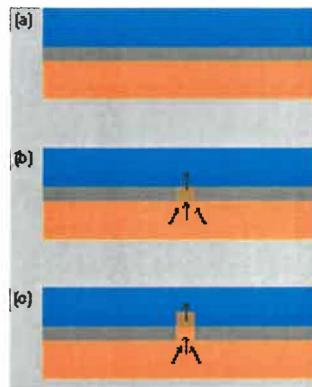


Figure 11. Principe de convection.

Ceci est illustré au panneau (a) de la figure 11 où la couleur orange représente du fluide chaud, le bleu du fluide froid et le gris la température moyenne. La température possède en réalité un spectre continu mais pour des fins d'illustration, la figure 11 décrit le phénomène avec des bandes de couleurs. Alors même si le gradient de densité est

instable, le fluide ne subit aucune force de poussée, car chaque particule de fluide est à la même température sur tous les côtés, et par conséquent possède la même densité. Il y a des différences de température entre le fluide du bas et celui du haut mais ceci ne produit pas une force de poussée encore.

Dans le panneau (b) une fluctuation a lieu et une particule de fluide au centre devient plus chaude que son entourage. La différence de pression entre le haut et le bas de la particule peut excéder le poids d'une particule de fluide, alors une force de poussée la fera monter. Le fluide du dessous remonte pour combler le vide laissé par la particule montante. Le panneau (c) illustre le fait que la fluctuation de température est amplifiée car le fluide qui monte derrière la particule du bas de la cavité, est plus chaud que le fluide d'au-dessus. En entraînant du fluide de la région chaude de la cavité, la fluctuation originale de température est amplifiée, et le front de fluide montant devient plus intense avec le temps. Plus la différence de température est grande, plus rapidement la fluctuation de température est amplifiée. Il y a deux processus qui s'opposent à cette amplification. En premier, il y a la dissipation visqueuse dans le fluide qui s'oppose directement au déplacement du fluide. En plus, la diffusion thermique tente de supprimer la fluctuation de température en faisant monter le front de fluide chaud pour équilibrer avec le fluide environnant, détruisant ainsi la force de poussée. La convection a lieu si l'effet d'amplification excède l'effet dissipatif de la diffusion thermique et la force de poussée. Ce rapport de force est caractérisé par le nombre de Rayleigh, lequel tient compte de la différence de température normalisée entre les deux plaques, de la géométrie de la cavité et des propriétés physiques du fluide[49]. Si le nombre de Rayleigh est plus grand que 1708, la convection a lieu. Si la différence de température est très grande le fluide monte très vite et un écoulement turbulent peut avoir lieu. L'écoulement convectif établi entre les deux plaques peut avoir la forme transversale cylindrique illustrée à la figure 12.

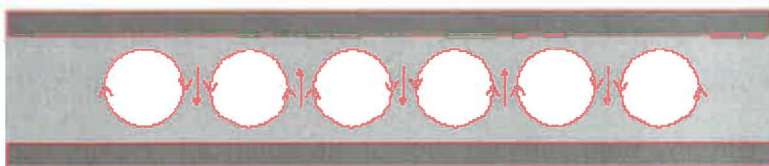


Figure 12. Vue transversale des rouleaux de convection entre deux plaques.

Les écoulements convectifs d'air sont difficiles à modéliser pour deux raisons principales; les forces d'entraînement de faible échelle conduisent vers des instabilités numériques, et l'écoulement est spécifié de façon implicite (i.e. les termes sources de poussée sont spécifiées à partir de l'endroit où le code doit calculer un champ de vitesse). Par conséquent, beaucoup de validation est requise pour évaluer l'habileté d'un code CFD à modéliser de tels écoulements.

Nous nous attendons à retrouver certaines similarités dans les résultats de simulation du transfert de chaleur conjugué avec l'écoulement convectif illustré. Les écoulements convectifs sont souvent modélisés en 2D dans la littérature pour des problèmes de cavités fermées et un gradient de température prescrit.

3.9 Équation caractéristique pour la modélisation du transfert de chaleur conjugué en régime permanent.

Les phénomènes reliés à la dynamique des fluides peuvent en principe être prédits à l'aide d'une expérimentation à l'échelle souvent très coûteuse et parfois impossible de réaliser. Prenons par exemple les essais en soufflerie et les problèmes de réservoirs. L'expérimentation à échelle réduite est toujours onéreuse et l'extrapolation des résultats vers une échelle réelle peut être parfois questionnable. Une alternative intéressante est celle du calcul théorique des écoulements à l'aide d'un modèle mathématique classique, souvent limité à des cas simples qui ont une solution numérique. Mais il arrive parfois que la solution numérique puisse subir des problèmes de convergence. Des calculs préliminaires peuvent aider à réduire les étapes d'expérimentation et en général une combinaison appropriée d'expérimentation et de calcul est toujours désirable[50].

Pour un fluide newtonien en régime laminaire, une des formulations de base pour la modélisation de sa dynamique et du transfert de chaleur est celle des équations de Navier-Stokes dans la version suivante:

Équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (88)$$

Équation de transport en x

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + V_x + B_x + F_x \quad (89)$$

Équation de transport en y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} + V_y + B_y + F_y \quad (90)$$

Équation de transport en z

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} + V_z + B_z + F_z \quad (91)$$

Équation d'énergie

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k_x}{C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{k_y}{C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{k_z}{C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{S}{C_p} \quad (92)$$

où

u, v, w = composantes de vitesse

ρ = densité

μ = viscosité

P = pression

C_p = chaleur massique

V_x = terme visqueux additionnel

$B_x \equiv$ force de poussée

$F_x \equiv$ résistance distribuée

$S \equiv$ terme source

L'équation de continuité stipule qu'en régime permanent la variation de vitesse dans les trois axes doit être nulle. En plus des termes sources associés, les équations de transport et d'énergie comportent un terme d'advection du côté gauche du signe d'égalité et un terme de diffusion du côté droit respectivement. L'équation d'énergie est dérivée à partir de la première loi de la thermodynamique que définit le taux de changement d'énergie d'une particule de fluide comme étant égale au taux d'addition de chaleur à la particule, plus le taux de travail fait sur cette dernière. Le terme S est réservé pour des mécanismes tels que la génération de chaleur dans un solide, la production ou la destruction d'une espèce chimique dans une réaction ou tout autre phénomène qui puisse être considéré un terme source. Dans les équations de transport le terme de diffusion est linéaire, tandis que celui de l'advection est non linéaire. Ceci a une forte influence dans la façon dont la solution de ce type d'équations doit être faite. Les conditions aux frontières associées aux équations de Navier-Stokes sont les mêmes que celles prises en ligne de compte dans l'équation de Poisson pour le problème de conduction. C'est à dire le refroidissement externe par convection et la dissipation de puissance dans le circuit magnétique, mais il se rajoute les valeurs nulles de vitesse de fluide sur les parois de l'intérieur de la cuve et le circuit magnétique. Ces conditions sont incorporées dans les équations par le logiciel Fluent 6.0. Les différents termes source spécifiés dans les équations 89, 90, 91 et 92 sont soit calculés par le logiciel ($B_{x,y,z}$) ou bien omis ($F_{x,y,z}$ et $V_{x,y,z}$) selon les conditions d'opération associées à l'écoulement. Les propriétés des matériaux sont aussi les mêmes que celles utilisées dans l'équation de Poisson exception faite des propriétés du fluide. Ces dernières sont tel que spécifié au tableau 9 en fonction de la température. C'est donc à partir des équations présentées que l'écoulement convectif dans le transfert de chaleur à l'intérieur du transformateur est abordé. Aux cinq équations mentionnées se rajoutent deux autres équations, pour tenir compte de l'effet de turbulence associé à l'écoulement convectif simulé. Les dites équations sont présentées à la section suivante.

3.10 Modèle de turbulence adopté pour le problème de fluides

La théorie associée aux flots convectifs a été élucidée par Linden et al. [51] en considérant le déplacement d'air dans une boîte rectangulaire produit par le gradient de température entre ses deux parois verticales. Plusieurs publications à ce sujet abordent des problèmes reliés à des cavités rectangulaires pour un transfert de chaleur à température constante. Cook et Lomas [52] abordent un problème de déplacement d'air associé au chauffage d'une enceinte carrée à l'intérieur de laquelle on retrouve une source de puissance et des points d'entrée et de sortie d'air. Bien que cette configuration géométrique soit différente de celle du transformateur, les conditions d'opération sont assez semblables, au point de vue densité de puissance et de régime d'écoulement convectif et un régime d'écoulement turbulent. À cause des similarités rencontrées dans l'approche de Cook et Lomas, cette dernière sert de cadre de référence pour notre analyse de transfert de chaleur conjugué.

La détermination du régime associé à un écoulement convectif se fait à l'aide du nombre de Rayleigh, lequel se calcule comme suit :

$$Ra = \frac{\rho^2 g \beta (T_{Hot} - T_{fs}) C_p x^3}{\mu k} \quad (93)$$

où ρ représente la densité, β le coefficient d'expansion thermique, μ la viscosité, C_p la chaleur spécifique, k la conductivité thermique, T_H la plus haute température considérée, T_{fs} la température du fluide non perturbé et x la longueur caractéristique d'écoulement.

Pour le calcul de ce nombre les propriétés de l'air à une température moyenne de 60 °C suivantes ont été considérées :

$$\rho = 1.0597 \text{ kg/m}^3$$

$$\beta = 3.0017\text{E-}3 \text{ 1/K}$$

$$\mu = 2.0061\text{E-}5 \text{ kg/m.s}$$

$$C_p = 1.0081\text{E+}003 \text{ J/kg.K}$$

$$k = 0.028517 \text{ W/m.K}$$

$$T_H \approx 98 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{fs} = 21 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$x \approx 0.5 \text{ m}$$

$$Ra = 1,00919310333E+009$$

Tel que suggéré dans [53] et [54], l'écoulement interne associé à l'échauffement du fluide à l'intérieur de la cuve du transformateur est en effet de type turbulent.

La turbulence associée à ce type d'écoulements est un aspect important à modéliser étant donné que les forces de poussée augmentent l'activité turbulente. Dans cette recherche nous considérons le modèle RNG κ - ε qui se base sur l'approche (RNG) (Renormalised Group Theorie) établie par Yakhot et Orszag[55]. Ce modèle prend la même forme des équations κ - ε du modèle de Launder et Spalding[56] mais utilise la théorie RNG pour calculer certaines constantes. Le modèle diffère dans la façon dont les constantes sont dérivées. Dans le modèle standard κ - ε , toutes les constantes sont trouvées de façon empirique. Malgré ceci de bons résultats ont été obtenus pour plusieurs types d'écoulements à l'aide de ce modèle. Dans le modèle RNG les constantes sont dérivées mathématiquement de manière à ce qu'elles soient valides pour plusieurs types d'écoulements, en incluant les écoulements de grand et de petit nombre de Reynolds. La théorie du RNG introduit un nouveau terme de taux de déformation dans l'équation ε .

La modélisation de turbulence est un aspect crucial dans la dynamique des fluides, mais ceci est particulièrement important dans les écoulements convectifs dans lesquels les forces de poussée augmentent l'activité turbulente[57]. Nous pouvons considérer le modèle de base κ - ε dans lequel les équations de transport se présentent comme suit :

Équation de l'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \kappa) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right) = P + G - \rho \varepsilon \quad (94)$$

Équation de l'énergie de dissipation turbulente

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) = C_1 \frac{\varepsilon}{\kappa} P - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \quad x_j = x, y, z \quad (95)$$

où ρ est la densité, u_j les velocities u , v et w , κ l'énergie cinétique turbulente, μ la viscosité, μ_t la viscosité turbulente, σ_κ et σ_ε le nombre de Prandtl turbulent et ε l'énergie de dissipation turbulente. $C_1 = 1.44$ et $C_2 = 1.92$ sont des constantes empiriques, P et G représentent la production d'énergie cinétique turbulente due aux forces de cisaillement et de poussée respectivement:

$$P = \mu_{eff} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (96)$$

$$G = \frac{\mu_{eff}}{\sigma_T} \beta g_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (97)$$

$$\mu_{eff} = \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_T} \quad (98)$$

où σ_T est le nombre de Prandtl turbulent pour κ ou ε selon l'équation qui soit considérée et μ_T la viscosité turbulente se calcule comme suit :

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (99)$$

où : $C_\mu = 0.09$ (Standard κ - ε) ; $C_\mu = 0.085$ (RNG κ - ε)

Le second modèle est celui du RNG κ - ε basé sur la théorie (Renormalised Group) établie par Yakhot et Orszag[55]. Ce modèle prend la même forme que celui de Launder et Spalding[56] mais il utilise la théorie RNG pour calculer les constantes de l'équation (95).

C_1 est remplacée par $C_1 - C_{1RNG}$ où :

$$C_{1RNG} = \frac{\eta \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right)}{(1 + \beta_1 \eta^3)} \quad (100)$$

où :

$$\eta = \left(\frac{P}{\mu_T} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\kappa}{\varepsilon} \quad (101)$$

$$\beta_1 = 0.15 \text{ and } \eta_0 = 4.38 \quad C_1 = 1.42 \text{ et } C_2 = 1.68$$

Le modèle diffère dans la façon où les constantes sont calculées. Dans le modèle standard κ - ε toutes les constantes sont définies de façon empirique. Ceci rend les constantes applicables seulement pour le type d'écoulement pour lesquels elles ont été dérivées. Toutefois, de bons résultats ont été obtenus pour plusieurs types d'écoulement à l'aide de ce modèle. Dans le modèle RNG, les constantes sont dérivées mathématiquement de façon à ce que les constantes soient valides pour un bon étendu de type d'écoulement en incluant des écoulements de grand nombre et faible nombre de Reynolds.

Celui-ci est donc le cadre théorique adopté pour la modélisation de la turbulence associée à l'écoulement étudié.

En ce qui a trait aux conditions aux frontières utilisées dans cette analyse, la dissipation de puissance dans les enroulements et les noyaux magnétiques est la même que celle spécifiée à la page 37. Les propriétés physiques associées à l'air sont les suivantes :

Densité, ρ	T (°C)	ρ (kg/m ³)
	19.85	1.164
	39.85	1.092
	59.85	1.025
	79.85	0.968
	99.85	0.916
	199.85	0.723
Chaleur spécifique, C_p (kg-K)	$C_p(T) = 1.0888 - 0.000739T + 2.02 \times 10^{-6}T^2 - 1.6 \times 10^{-9}T^3$	
Conductivité therm., k (W/m-K)	$k(T) = -0.0063 + 0.000102767T - 4.86 \times 10^{-8}T^2 + 1.33336 \times 10^{-11}T^3$	
Viscosité, μ (kg/m-s)	$\mu(T) = 6.676 \times 10^{-7} + 7.1826 \times 10^{-8}T + 4.46 \times 10^{-11}T^2 + 8.06 \times 10^{-15}T^3$	

Les polynômes en question ont été générés avec Mathematica 4.2 à l'aide de valeurs tirées dans [58]. Ces dernières ne sont pas fortement dépendantes de la pression et peuvent être utilisées pour un bon intervalle de pressions.

Les propriétés physiques des matériaux solides sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \rho &= 8978 \text{ kg/m}^3 \\
 \text{Cuivre} \quad C_p &= 381 \text{ J/(kg}^\circ\text{K)} \\
 k &= 387.6 \text{ W/(m}^\circ\text{K)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho &= 2719 \text{ kg/m}^3 \\
 \text{Aluminium} \quad C_p &= 871 \text{ J/(kg}^\circ\text{K)} \\
 k &= 202.4 \text{ W/(m}^\circ\text{K)}
 \end{aligned}$$

	$\rho = 8030$	kg/m^3
Acier	$C_p = 505.48$	$\text{J/(kg}^\circ\text{K)}$
	$k = 16.27$	$\text{W/(m}^\circ\text{K)}$

	$\rho = 7753$	kg/m^3
Acier magnétique	$C_p = 486$	$\text{J/(kg}^\circ\text{K)}$
	$k = 36.4$	$\text{W/(m}^\circ\text{K)}$

3.11 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

Tel que mentionné auparavant l'intégration des équations de Navier-Stokes est plus commode par la formulation du volume de contrôle. Pour ce faire le domaine est divisé en un nombre de volumes de contrôle de façon à ce qu'un volume de contrôle entoure chaque nœud du maillage utilisé.

Chaque équation différentielle considérée est intégrée sur chaque volume de contrôle (i.e., l'intégrale du résidu est rendu nulle pour chaque volume de contrôle).

L'équation de discrétisation exprime le principe de conservation pour un volume de contrôle fini de la même façon que l'équation différentielle l'exprime pour un volume de contrôle infinitésimal.

La solution résultante implique que l'intégrale de conservation de masse, de moment etc. est exactement satisfaite pour n'importe quel groupe de volumes de contrôle et aussi pour le domaine d'étude à l'entier. En plus ceci est vrai pour n'importe quel nombre de nœuds et pas seulement pour un maillage fin. Il est donc requis de définir des profils pour exprimer la variation d'une variable de flot ϕ entre les nœuds[59][60] du maillage considéré.

Pour illustrer la méthode nous pouvons aborder l'intégration à une dimension, en annulant le terme transitoire et le terme convectif pour ne tenir compte que de l'équation de diffusion :

$$k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S = 0 \quad (102)$$

où k_x est le coefficient de diffusion pris en conduction et S le terme source.

La première étape consiste en diviser le domaine en volumes de contrôle. Les limites des volumes de contrôle (ou faces) sont placés à mi-chemin entre les nœuds adjacents. De cette manière chaque nœud est entouré d'un volume de contrôle ou cellule.

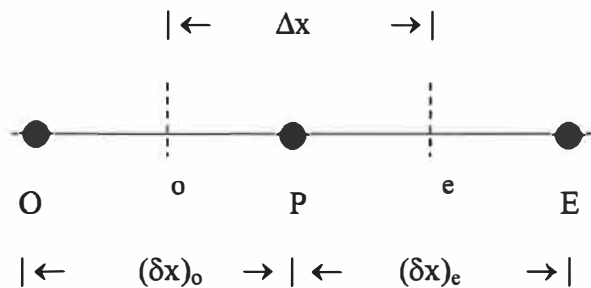


Figure 13. Volume de contrôle à une dimension.

Un point général est identifié par P. Ses voisins d'interface sont identifiés selon une direction cardinale ouest-est. À partir de cette notation les distances ou intervalles Δx et $(\delta x)_o$ et $(\delta x)_e$ sont également définis.

L'intégration de l'équation (102) sur le volume de contrôle défini auparavant nous permet d'obtenir une équation discrète sur le point P. Pour le volume de contrôle défini plus haut :

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = k_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - k_o \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o + \int S dx = 0 \quad (103)$$

L'équation discrète résultante a une interprétation physique importante. Le flux de diffusion d'une variable de flot ϕ sortant d'une interface est égale à la génération de ϕ . Ceci constitue une équation d'équilibre pour ϕ sur chaque volume de contrôle.

Le coefficient d'interface k et $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ à l'est et à l'ouest sont requis pour dériver une forme utile de l'équation discrétisée. Pour le calcul des dérivées nous utilisons une approximation linéaire de différence centrale.

$$k_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = k_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{(\Delta x)_e} \quad (104)$$

$$k_o \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o = k_o \frac{(\phi_P - \phi_O)}{(\Delta x)_o} \quad (105)$$

En ce qui concerne les coefficients k , k_e et k_o sont les valeurs de la conductivité thermique d'interface. Si k est non uniforme, nous supposons que cette valeur prévaut à travers le volume de contrôle autour du point P, et k_E à travers du volume de contrôle voisin, k_e devient la moyenne harmonique de k_P et k_E i.e.

$$k_e = \frac{2k_P k_E}{(k_P + k_E)}$$

(106)

ainsi lorsque $k_P \rightarrow 0$, $k_e \rightarrow 0$ $k_P \gg k_E$, $k_e \rightarrow 2k_E$.

Cette formulation nous permet alors de traiter de grosses discontinuités dans la distribution de k . La même approche prévaut pour k_o .

En ce qui concerne le terme S , nous considérons une valeur moyenne sur le volume de contrôle

$$S = S_C + S_P \phi_P \quad (107)$$

En général S dépend de ϕ . Une fois qu'une dépendance linéaire peut être prise en compte, une expression linéaire du genre est utilisée

$$\int_V S dx = \hat{S} \Delta x \quad \hat{S} = S_{moy} \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_V S dx \quad (108)$$

La discrétisation de l'équation nous donne:

$$\frac{k_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_o(\phi_P - \phi_O)}{(\delta x)_o} + (S_C + S_P \phi_P) \Delta x = 0 \quad (109)$$

en réarrangeant les termes pour identifier les coefficients associés à ϕ_E , ϕ_O et ϕ_P comme étant a_e , a_o , a_p , l'équation (109) peut être écrite comme suit :

$$a_p \phi_P = a_e \phi_E + a_o \phi_O + b \quad (110)$$

ce que nous pouvons écrire comme :

$$\phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (111)$$

où:

$$a_e = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (112)$$

$$a_o = \frac{k_o}{(\delta x)_o} \quad (113)$$

$$a_p = a_e + a_o - S_p \Delta x \quad (114)$$

$$b = S_c \Delta x \quad (115)$$

Tous les coefficients a_p et a_{nb} doivent être toujours positifs. Si le signe de a_p est différent d'un a_{nb} en particulier, ceci implique qu'une augmentation de la valeur de ϕ_{nb} mène vers une réduction de la valeur de ϕ_p , ceci est évidemment incohérent. De la même façon S_p doit être négatif dans les expressions

$$S = S_c + S_p \phi_p \text{ et } a_p = a_e + a_o - S_p \Delta x \quad (116)$$

autrement a_p peut devenir négatif. Une valeur positive de S_p indique une situation instable qu'il faut éviter.

La discrétisation des équations doit résulter en une équation linéaire, car nous devons la résoudre avec des méthodes pour les systèmes linéaires. Les non-linéarités se présentent lorsque k dépend de ϕ ou lorsque S est une fonction non-linéaire de ϕ . Ceci se résout par itérations en posant une valeur de ϕ et en calculant les coefficients a_{nb} . Par la suite nous utilisons les équations discrètes linéarisées pour obtenir une nouvelle valeur de ϕ , et ainsi de suite jusqu'à la convergence, i. e. jusqu'à ce que des itérations additionnelles ne produisent un changement considérable dans la valeur calculée de ϕ . La linéarisation du terme S se fait en général en développant une série de Taylor de premier degré de l'expression non-linéaire en ϕ autour d'une valeur estimée ϕ^* .

La résolution complète des équations différentielles suggérées pour la modélisation de la dynamique des fluides se fait en supposant que nous connaissons d'avance les

composantes de vitesse et de densité, advenant le cas que nous voulions calculer la distribution de ϕ en termes de température résultant des conditions d'écoulement.

L'approche de discrétisation présentée auparavant peut être appliquée par la suite pour dériver les équations de la convection et de la diffusion d'une propriété ϕ du fluide, en régime permanent.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S \quad (117)$$

L'équation de continuité stipule que:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \text{ soit un débit de masse } \rho u \text{ constant.} \quad (118)$$

En intégrant encore une fois sur le volume de contrôle 1D nous obtenons :

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_o = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o \quad (119)$$

La formulation d'une différentiation centrale donne :

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{(\Delta x)_e} \quad (120)$$

$$\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o = \Gamma_e \frac{\phi_P - \phi_O}{(\Delta x)_o} \quad (121)$$

$$(\rho u \phi)_e = (\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (122)$$

$$(\rho u \phi)_o = (\rho u)_o \frac{\phi_P + \phi_O}{2} \quad (123)$$

après manipulation nous obtenons encore une fois la formulation suivante :

$$a_P \phi_P = a_e \phi_E + a_o \phi_O + b \quad (124)$$

cette fois-ci il apparaît un nouveau terme dans la définition du coefficient a pour tenir compte de l'effet de convection:

$$a_e = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (125)$$

$$a_o = D_o - \frac{F_o}{2} \quad (126)$$

où :

$F \equiv \rho u \rightarrow$ débit de masse pour une surface unitaire

$D \equiv \frac{\Gamma}{(\delta x)} \rightarrow$ conductance

La discrétisation du terme de convection et du terme de diffusion mène aussi à la formulation décrite dans l'équation (110).

À partir de cette formulation nous pouvons adopter plusieurs autres approches de discrétisation telles que:

- la formulation Upwind
- la formulation Exponentielle

- la formulation Hybride
- la formulation en Loi de Puissance

Chacune d'entre elles possédant une expression différente pour le calcul des coefficients a_{nb} et un degré de précision correspondant. Dans notre cas nous utilisons la formulation en loi de puissance comme schéma de discrétisation[50].

$$a_e = D_e \left[0, \left(1.0 - 0.1 \frac{|F_e|}{D_e} \right)^5 \right] + [0, -F_e] \quad (127)$$

$$a_o = D_o \left[0, \left(1.0 - 0.1 \frac{|F_o|}{D_o} \right)^5 \right] + [0, -F_o] \quad (128)$$

où $[A,B]$ représente la plus grande valeur entre A et B.

Ceci garantit une bonne approximation de l'expression exacte et n'est pas très onéreux en calcul. L'approche de discrétisation par volume de contrôle vue jusqu'ici est également appliquée pour l'équation d'énergie. Dans les calculs préliminaires un code en Fortran a été développé pour un écoulement laminaire convectif dans une cavité 2D, sur laquelle une température fixe est prescrite sur les parois verticales. L'analyse 3D n'a pas été abordée pour arriver à développer un code fluide capable de résoudre le problème de transfert de chaleur conjugué dans le transformateur. Les difficultés associées à la parallélisation d'un code fluide ont été une raison suffisante pour laisser tomber la démarche comme telle.

4.0 Approche de résolution numérique

Plusieurs algorithmes de résolution ont été étudiés dans la phase exploratoire sur le traitement de systèmes d'équations linéaires de grosse taille issus de la modélisation numérique par éléments finis ou par différences finies. Parmi ceux qui ont été considérés celui basé sur le concept distribué d'arbre d'élimination semblait être un bon choix et il a été examiné de près, mais l'idée a été finalement laissée de côté étant donné la structure de données impliquée dans cette approche[61][62][63]. Il a paru beaucoup plus indiqué d'essayer d'exploiter le parallélisme inhérent des méthodes du sous-espace de Krylov pour résoudre le problème de conduction. À cet égard, une version parallèle du gradient conjugué préconditionné adaptée au profil de stockage choisi a été implantée.

En ce qui a trait au problème de convection-conduction, la solution des équations de Navier-Stokes proposées comporte deux difficultés majeures, la première se situe au niveau de terme convectif dans les équations de transport car il inclut des relations non-linéaires en vitesse, comme par exemple celui de la dérivée en x de ρu^2 . Ceci produit de l'instabilité numérique dans la solution. La deuxième difficulté est celle reliée au terme de pression qui est présent sur chaque équation de transport, car aucune autre équation n'est utilisée pour couvrir cet aspect. Dans la plupart des problèmes d'écoulements il est souhaitable d'obtenir la distribution de pression de fluides comme étant une partie de la solution lorsque le gradient de pression n'est pas connu d'avance. Alors les deux problèmes associés aux non linéarités des équations de transport et au couplage de vitesse-pression peuvent être résolus en adoptant une stratégie de solution itérative telle que formulé dans l'algorithme SIMPLE ou SIMPLEC. Dans cet algorithme les flux convectifs par unité de masse F qui traversent les faces des cellules sont évalués à partir de composantes de vitesses posées et un champ de pression posé également et une équation de correction de pression, laquelle est par la suite utilisée pour actualiser les champs de vitesse et de pression jusqu'à la convergence. Toutes ces étapes s'accomplissent en utilisant le flot de calcul de l'algorithme TDMA. L'approche comme telle a été testée pour la modélisation en 2D d'un écoulement convectif dans une cavité rectangulaire et d'un écoulement turbulent dans une canalisation, dans le cadre du cours

de niveau 600 305-654B Computational Fluid Flow and Heat Transfer du Département de Génie Mécanique de l'Université McGill. Mais la parallélisation d'un code fluide n'a pas été menée à terme, car la tâche était déjà assez lourde avec la parallélisation de la méthode itérative privilégiée pour l'analyse de transfert de chaleur par conduction.

4.1 La méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est une des méthodes du sous-espace de Krylov les plus utilisées pour résoudre de gros systèmes d'équations linéaires de la forme $Ax = b$ comme celui qui résulte de la modélisation par éléments finis. Cette méthode appartient à une classe de méthodes itératives connue sous le nom de méthodes de minimisation ou de projection[64]. Pour une matrice symétrique A définie positive, le seul vecteur x qui minimise la fonction quadratique $q(x) = (1/2) x^T A x - x^T b$ est la solution du système $Ax = b$. Cette démarche de minimisation exige le calcul d'un pas scalaire α_k , un vecteur p_k de direction et un vecteur résidu r_k . La solution approximative calculée à chaque itération sert à calculer la solution suivante, jusqu'à l'obtention de la convergence de l'algorithme. Le nombre d'itérations requis pour atteindre la convergence est en pratique plus petit que la dimension n du système traité. C'est à ce moment que la norme carrée du résidu tombe en-dessous d'une fraction prédéterminée de la norme carrée du résidu initial r_0 .

1. **procedure** GC (A, b, x, ε)
2. **début**
3. $k := 0 ; x_0 := b ; \rho_0 := ||r_0||^2 ;$
4. **tant que** $(\sqrt{\rho_k} > \varepsilon ||r_0||^2)$ **faire**
5. **début**
6. **Si** $(k = 0)$ **alors** $\rho_1 := r_0$
7. **sinon** $p_{k+1} := r_k + \rho_k p_k / \rho_{k-1} ;$
8. $k := k + 1 ;$
9. $w_k := A p_k ;$
10. $\alpha_k := \rho_{k-1} / p_k^T w_k ;$
11. $x_k := x_{k-1} + \alpha_k p_k ;$
12. $r_k := r_{k-1} - \alpha_k w_k ;$
13. $\rho_k := ||r_k||^2 ;$
14. **fin**

15. $x := x_k$;
16. **fin GC**

Algorithme du gradient conjugué [65].

4.2 L'algorithme du gradient conjugué préconditionné

La vitesse de convergence de l'algorithme du GC peut être augmentée en conditionnant A avec la transformation de congruence $A' = RAR^T$, R étant une matrice non-singulière. L'algorithme résultant est appelé l'algorithme du gradient conjugué préconditionné. Abstraction faite des manipulations mathématiques pour y arriver, l'effet du conditionnement se reflète à la ligne 6 de l'algorithme 2 au niveau de la résolution du système linéaire $Mz_k = r_k$. La matrice M est nulle autre que la matrice de préconditionnement et elle est donnée par $M = (R^T R)^{-1}$. Si M est directement choisie comme étant une matrice définie positive le calcul de $M = (R^T R)^{-1}$ n'est pas nécessaire. Pour des raisons évidentes, M est donc choisie de façon à ce que la solution du système $Mz_k = r_k$ ne soit pas trop coûteuse[65].

1. **procedure** GCP (A,b,x,ε)
2. **début**
3. $k := 0$; $x_0 := b$; $\rho_0 := ||r_0||^2$;
4. **tant que** ($\sqrt{\rho_k} > \varepsilon ||r_0||^2$) **faire**
5. **début**
6. **Résoudre le système** $Mz_k = r_k$
7. $\gamma_k = r_k^T z_k$
8. **Si** ($k = 0$) **alors** $\rho_1 := z_0$
9. **sinon** $p_{k+1} := z_k + \gamma_k p_k / \gamma_{k-1}$;
10. $k := k + 1$;
11. $w_k := A p_k$;
12. $\alpha_k := \gamma_{k-1} / p_k^T w_k$;
13. $x_k := x_{k-1} + \alpha_k p_k$;
14. $r_k := r_{k-1} - \alpha_k w_k$;
15. $\rho_k := ||r_k||^2$;
16. **fin**
17. $x := x_k$;
18. **fin GCP**

Algorithme du gradient conjugué préconditionné [65].

Cette méthode a été utilisée avec succès dans des problèmes de:

- Solution numérique de gros systèmes linéaires issus de la discrétisation 3D de problèmes de conditions aux limites.
- Simulation de fusion astrophysique et inertielle de confinement (ICF).
- Solution par éléments finis d'analyses de vibrations libres.
- Utilisation de l'approche Régularisation de Tikhonov des moindres carrés, pour estimer des paramètres distribués dans des équations différentielles partielles.

Dans un premier temps une version séquentielle de l'algorithme a été implantée. Ladite version a été programmée en langage C++ et la structure du code était la suivante :

Fichiers d'entrée :

- Un fichier binaire contenant les coefficients la matrice bande générée par éléments finis, stockée sous forme de profil CSC (Compressed Storage by Columns) et son vecteur de sollicitation correspondant. Ces deux arguments de l'algorithme GCP sont A et b respectivement.
- Un fichier texte contenant l'inverse du vecteur de permutations de la numérotation des nœuds généré à l'aide de l'algorithme Cuthill-McKee de Matlab pour ramener la solution finale dans sa numérotation de départ.

Fichier de sortie :

- Valeurs nodales de températures du maillage utilisé dans la simulation du transfert de chaleur dans le transformateur par éléments finis. Ceci correspond a l'argument x de l'algorithme GCP.

Le code ainsi généré sert à tester la validité des résultats d'une version distribuée du même algorithme.

4.3 Parallélisation de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné.

Tel qu'illustré dans le pseudo code précédent, l'algorithme du GCP comprend quatre types de calculs à chaque itération que nous pouvons paralléliser comme suit:

(1) **Opérations SAXPY**: Les opérations des lignes 9, 13, et 14 sont connues comme étant de *simples ax plus y* (SAXPY), où a est un scalaire et x et y sont des vecteurs. Chacune de ces opérations se fait de façon partielle sur chaque processeur. Si tous les vecteurs sont distribués identiquement parmi les processeurs, ces étapes ne requièrent pas de communication dans une implantation parallèle. Mais dans notre cas, les processeurs ne font que des calculs partiels de ces vecteurs et la reconstitution de chacun d'entre eux requiert une communication entre les noeuds de calcul.

(2) **Produits scalaires** : Les opérations des lignes 7, 12 et 15 de l'algorithme GCP sont exclusivement des produits scalaires, mais encore une fois ces opérations se font partiellement aux niveaux des processeurs et la reconstitution du résultat final requiert une communication entre les processeurs.

(3) **Multipliation Matrice-Vecteur** : Celle-ci est l'étape de calcul qui requiert le plus de temps. Le coût de calcul et de communications de la multiplication matrice-vecteur de la ligne 11 dépend de la structure de la matrice A . Une matrice avec une structure de bande facilite l'accomplissement de cette tâche. Chaque processeur peut posséder une copie du vecteur à multiplier et une portion de la matrice bande. En supposant que le produit matrice-vecteur se fasse entre les processeurs et pas par un seul d'entre eux, le stockage de la matrice sous forme diagonale fait en sorte que quelques valeurs sont disponibles sur les processeurs soit par assignation ou soit par transposition d'une valeur symétrique assignée. Les valeurs non-disponibles sur les processeurs induisent des calculs partiels du produit matrice-vecteur. Chaque processeur doit donc communiquer à son voisin le résultat partiel qu'il calcule pour obtenir le résultat final par concaténation. L'identification des processeurs voisins se détermine au niveau du code.

(4) **Résolution du système $Mz_k = r_k$** : L'algorithme du GCP résout un système d'équations linéaires $Mz_k = r_k$ à chaque itération (ligne 6). Le préconditionneur M est choisi de façon à

ce que la solution du système $Mz_k = r_k$ ne soit pas trop coûteuse par rapport à la solution du système d'équations $Ax = b$. Toutefois, le conditionnement augmente le volume de calculs à chaque itération, mais cette augmentation des calculs est toutefois compensée par une réduction du nombre d'itérations requises pour obtenir une convergence rapide.

Trois types de conditionnements peuvent être envisagés :

- le préconditionnement diagonal, dans lequel la matrice de conditionnement M a seulement des éléments non-nuls le long de sa diagonale.
- le préconditionnement incomplet de Cholesky dans lequel la matrice M est générée à partir d'une factorisation Cholesky incomplète de A .
- le préconditionnement incomplet de Cholesky par blocs.

En ce qui concerne le préconditionnement diagonal, la matrice M est choisie comme étant une matrice avec des éléments non-nuls le long de sa diagonale exclusivement, laquelle est habituellement dérivée à partir de la diagonale de A . La solution du système $Mz_k = r_k$ de la ligne 6 du programme GCP équivaut à diviser chaque élément de r par le coefficient de la rangée correspondante dans A . Aucune communication n'est requise car les éléments avec des indices identiques résident dans le même processeur. De cette façon, sur une architecture à n processeurs quelconque, chaque processeur réalise cette opération en un temps $\Theta(n/p)$.

Le préconditionnement incomplet de Cholesky se fait en exprimant la matrice M comme un produit $L \cdot \bar{L}$, où L est une matrice triangulaire inférieure. La tâche de calcul associé à cette approche est plus grande que celle du conditionnement diagonal, car il exige la génération d'une structure de données plus élaborée, étant donné que nous utilisons le facteur incomplet de Cholesky de A comme matrice de préconditionnement. Cette matrice L a par conséquent une structure semblable à la matrice A de départ. Ceci revient à rejeter les termes de remplissage, ce qui requiert que la matrice A de départ soit ordonnée de façon efficace. De cette manière le système $Mz_k = r_k$ est résolu en solutionnant les systèmes triangulaires suivants :

- (1) $Lu = r_k$ (descente)
 (2) $L^T z_k = u$ (montée)

Le préconditionnement incomplet de Cholesky par blocs consiste en faire le calcul de la matrice L par blocs ou sous-matrices, une partie de la matrice n'étant pas générée. Cette méthode ne requiert pas de communication entre les processeurs et s'avère la méthode qui permet d'obtenir une meilleure accélération des calculs en parallèle[37][66]. Cette méthode consiste alors à calculer les termes de la matrice de préconditionnement (ou facteur L) exclusivement à partir des termes de la portion de matrice de rigidité disponibles sur chaque nœud de calcul. L'algorithme utilisé est le même qu'on utilise pour faire une factorisation LL^T d'une matrice symétrique, sa descente et sa montée correspondante à l'exception que pour le cas d'une matrice bande distribuée sur plusieurs processeurs, certains termes ne sont pas présents sur chaque nœud calcul, les calculs ne sont qu'approximatifs. La matrice de préconditionnement a donc la structure de celle illustrée à la figure 14, en supposant que le calcul se fasse sur trois processeurs pour des fins d'illustration. Le seul processeur qui calcule des valeurs exactes est le processeur 1, car il utilise toutes les données qui lui sont assignées. Les autres nœuds n'utilisent qu'une partie des données qui leur sont assignées, tel qu'illustré plus loin.

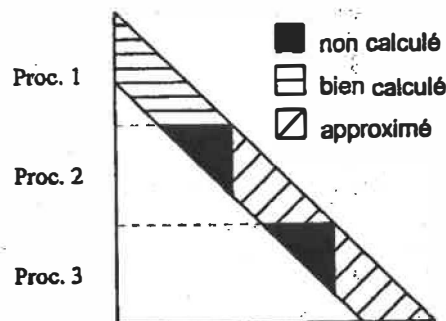


Figure 14. Structure de la matrice de Cholesky par blocs [37].

L'erreur introduite par cette méthode a évidemment une incidence sur la convergence de l'algorithme du gradient conjugué qui est préconditionné de cette façon. Toutefois, l'introduction d'une erreur dans le préconditionnement n'a pas d'incidence sur la précision

du résultat. Étant donné la forme de la matrice de conditionnement, la factorisation, la descente et la montée se font entièrement en parallèle, sans qu'il y ait recours à des envois de messages, celle-ci est alors la section critique dans le processus de minimisation du temps d'exécution. Les envois de messages se font afin de pouvoir reconstituer des valeurs à partir des calculs partiels qui se font au niveau de tous les processeurs dans les étapes (1), (2) et (3).

En tenant compte des directives de parallélisation des lignes précédentes le flot de calcul de la version parallèle de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné par blocs peut être décrit à l'aide du pseudo code suivant :

PROCESSEUR MAITRE

- Réception de partition de données et initialisation du vecteur solution et du résidu

PROCESSEURS ESCLAVES

- Réception des partitions de données
- Calcul partiel du produit $\langle r_0, r_0 \rangle$
- Reconstitution du produit $\gamma_0 = \langle r_0, z_0 \rangle$ entre les nœuds calcul

$$\rho_0 = \sqrt{b^2}$$

$$\varepsilon = 0.001\sqrt{\rho_0}$$

- Calcul partiel du facteur incomplet de Cholesky

pour $k = 0, n$

Résolution du système $Mz_k = r_k$ par $LL^T z_k = r_k$

$Ly = b_k$ (Descente)

$L^T z_k = y$ (Montée)

Calcul partiel de $\langle r_k, z_k \rangle$

Reconstitution du produit $\gamma_k = \langle r_k, z_k \rangle$ entre les nœuds de calcul

Calcul partiel du vecteur $p[n]$

Si $(k = 0)$ alors

$$p_0 := z_0$$

sinon

$$p_k := z_k + \gamma_k p_{k-1} / \gamma_{k-1};$$

Reconstitution du vecteur $p[n]$ entre les nœuds de calcul

Calcul partiel du produit $A p_k$ et $A p_k \cdot p_k$

Reconstitution du produit $A p_k \cdot p_k$ entre les nœuds de calcul

Calcul de $\alpha_k := \gamma_{k-1} / p_k^T A p_k$

Actualisation de vecteur solution global $x_k = x_{k-1} + \alpha_k p$

Actualisation de $r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p$ le vecteur résidu global

Calcul partiel du produit $\langle r_k, r_k \rangle$

$$\rho_k = \sqrt{\langle r_k, r_k \rangle}$$

Actualisation de $x_k = x_{k-1} + \alpha_k \cdot p_k$

si $\rho_k < \varepsilon$

convergence

sinon

continuer les itérations

fin de boucle externe

Envoi au processeur maître de la solution partielle

PROCESSEUR MAITRE

Reconstitution de la solution globale

Pour compléter cette étape un code distribué a été écrit en langage C++ pour un environnement de programmation parallèle WMPI [67]. Les arguments d'entrée et sortie sont les mêmes que ceux du code GCP. Bien que les fichiers d'entrée et de sortie du code distribué soient les mêmes que ceux du code séquentiel, le flot de calcul du code parallèle est régi par les lignes de commandes parallèles en WMPI.

4.4 L'algorithme TDMA (Thomas Direct Method Algorithm).

La discrétisation par différences finies utilisée dans l'équation de convection-conduction à une dimension (117) génère un système linéaire tridiagonal, c'est-à-dire un système avec seulement trois coefficients non nuls par équation tel qu'illustré dans (124). Thomas a développé en 1949 une technique pour résoudre rapidement ce type de système, qui est aujourd'hui connu sous le nom d'algorithme de Thomas ou algorithme de la matrice tridiagonale TDMA. Ce dernier est une méthode directe en soi pour les problèmes à une dimension, mais il peut être implanté de façon itérative dans une approche ligne par ligne, pour résoudre des problèmes de fluides à deux et à trois dimensions. Son implantation est peu coûteuse en termes de calcul et il requiert un minimum de stockage[60].

Lorsque l'équation générale de transport est discrétisée à deux dimensions deux autres directions cardinales sont considérées pour tenir compte des variations en y. La forme résultante est la suivante :

$$a_P \phi_P = a_O \phi_O + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (129)$$

où O, E, N et S représentent les quatre directions cardinales dans le plan. Le système ainsi obtenu est de type pentadiagonal, mais il peut toujours être résolu par la méthode TDMA appliquée selon une ligne *n-s*, par exemple, à l'aide de l'heuristique suivante :

$$-a_S\phi_S + a_P\phi_P - a_N\phi_N = a_O\phi_O + a_E\phi_E + b \quad (130)$$

Les valeurs de ϕ_O et ϕ_E à droite du signe d'égalité sont considérées comme étant des valeurs connues ou posées de façon temporaire. Il est alors possible d'obtenir une solution selon la direction *n-s* pour toutes les valeurs inconnues sur cette ligne.

Des calculs subséquents se font sur les lignes *n-s* contiguës. La séquence dans laquelle les lignes sont choisies est connue sous le nom de direction de balayage. Si le balayage se fait d'ouest à est, les valeurs de ϕ_O à l'ouest du point P sont connues à partir des calculs sur la ligne précédente. Les valeurs de ϕ_E ne sont toutefois pas connues, donc le processus de solution doit être itératif. À chaque cycle d'itération ϕ_E est pris comme étant la valeur de l'itération précédente ou une valeur initiale donnée. Le calcul ligne par ligne est répété jusqu'à ce que la convergence soit obtenue.

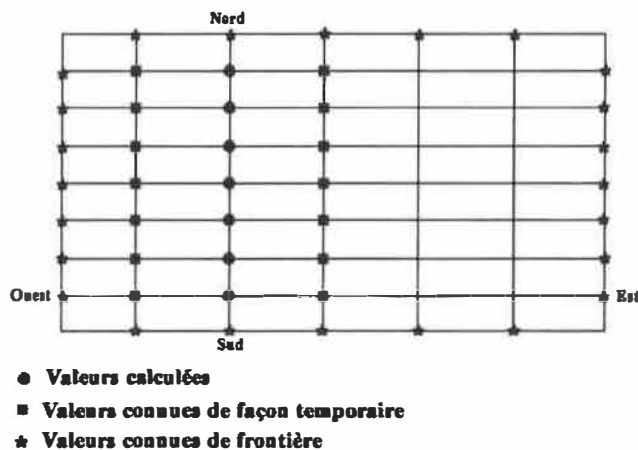


Figure 15. Flot de calcul pour la méthode TDMA à deux dimensions[60].

Pour des problèmes à trois dimensions la méthode TDMA est encore appliquée ligne par ligne sur un plan sélectionné et ensuite le calcul est transféré au plan suivant, en balayant le domaine entier plan par plan.

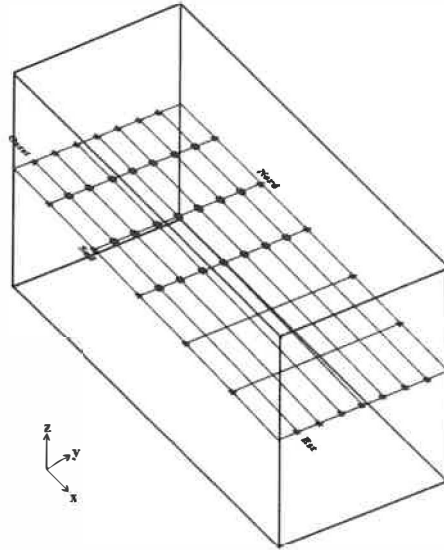


Figure 16. Flot de calcul pour la méthode TDMA à trois dimensions[60].

Par exemple, pour résoudre le long d'une ligne $n-s$ dans le plan $x-y$, nous écrivons l'équation de transport comme suit:

$$-a_S\phi_S + a_P\phi_P - a_N\phi_N = a_O\phi_O + a_E\phi_E + a_B\phi_B + a_T\phi_T + b \quad (131)$$

où O, E, N, S, B et T représentent les six directions orthogonales dans l'espace.

Les valeurs de O, E, B et T du côté droit de l'équation (131) peuvent être considérées comme étant connues ou posées de façon temporaire. Les valeurs de ϕ sont calculées selon la ligne nord-sud avec l'algorithme TDMA. Le calcul est ensuite transféré sur la ligne suivante de façon subséquente dans tout plan jusqu'à ce toutes les inconnues sur chaque ligne soient calculées. Suite à cela, le calcul est transféré sur un autre plan. Dans

les calculs à deux et trois dimensions la convergence peut être accélérée en alternant la direction de balayage de façon à ce que toute l'information de frontière soit incorporée plus efficacement dans le calcul. Alors si le calcul débute sur un plan selon une direction n-s, au plan suivant le calcul peut être fait selon une direction o-e en arrangeant l'équation discrétisée (131) comme suit:

$$-a_O\phi_O + a_P\phi_P - a_E\phi_E = a_S\phi_S + a_N\phi_N + a_B\phi_B + a_T\phi_T + b \quad (132)$$

Avec la formulation présentée et en remplaçant ϕ par T nous générons pour N nœuds du maillage considéré le système d'équations suivant:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i \quad (133)$$

par inspection $c_1 = 0$ et $b_N = 0$ car T_{N+1} et T_{N-1} ne sont pas définies.

Une fois que T_1 est exprimé en termes de T_2 l'équation pour $i = 2$ nous donne conséquemment T_2 en termes de T_3 . Ce genre de substitutions successives peut continuer jusqu'à ce que T_N soit formellement exprimée en termes de T_{N+1} . Mais une fois que T_{N+1} n'est pas définie nous pouvons obtenir facilement la valeur de T_N et par la suite faire une montée pour obtenir $T_{N-1}, T_{N-2}, \dots, T_3, T_2, T_1$.

Nous pouvons modifier la formulation comme suit :

Dans la relation $T_i = P_i T_{i+1} + Q_i$ nous soustrayons 1 à tous les indices pour obtenir par la suite :

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1}$$

De cette façon nous pouvons substituer la valeur de T_{i-1} dans (133)

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i$$

$$P_i = b_i / (a_i - c_i P_{i-1}) \text{ et}$$

$$Q_i = (d_i + c_i Q_{i-1}) / (a_i - c_i P_{i-1})$$

Le point de départ étant

$$P_1 = b_1/a_1 \quad Q_1 = d_1/a_1$$

par conséquent $T_N = Q_N$.

En termes généraux l'algorithme TDMA se résume à :

Calculer P_1, Q_1 ,

Obtenir récursivement,

$P_2, Q_2, P_3, Q_3, \dots, P_N, Q_N$.

Utiliser $T_i = P_i T_{i+1} + Q_i$ pour obtenir

$T_{N-1}, T_{N-2}, \dots, T_3, T_2, T_1$.

L'algorithme TDMA présente l'avantage de requérir un espace mémoire de stockage proportionnel à N seulement.

4.5 L'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)

Les équations de transport ont toutes la même forme dans notre formulation générale pour ϕ . Résoudre de telles équations pour obtenir la distribution de vitesses ne présente pas beaucoup de difficultés. La non-linéarité dans les équations de convection est facilement résolue à l'aide d'une approche itérative. La difficulté majeure se présente à cause du terme de pression qui apparaît dans les équations de transport. Dans les équations de Navier–Stokes il n'y a pas de formulation directe pour déterminer la distribution de pression. D'une certaine manière la pression est implicitement spécifiée dans l'équation de continuité. Une distribution physique de pression permet aux équations de transport de générer un champ de vitesse satisfaisant. La pression peut être

éliminée des équations de transport si nous formulons ces dernières en terme des vortex, cette méthode est fort populaire pour des analyses à 2D, mais elle ne peut pas être adaptée pour des problèmes en 3D. Alors si nous spécifions une variation linéaire de la pression entre les nœuds du maillage cela introduit le phénomène de pression tableau d'échec ou spectre de pression non continu dans lequel plusieurs solutions sont possibles, ce qui fait en sorte que le champ de vitesse peut satisfaire l'équation de continuité sans toutefois avoir des valeurs consistantes, c'est à dire valables. La solution à ce problème est celle de ne pas utiliser le même maillage pour toutes les variables. Nous éliminons ce problème en spécifiant les composantes de vitesse sur les volumes de contrôle, ainsi les différences de pression entre deux nœuds adjacents déterminent la composante de vitesse définie entre ces derniers.

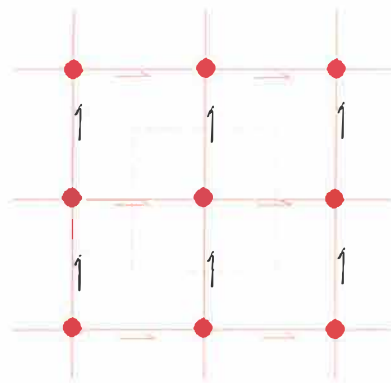


Figure 17. Maillage déplacé.

$\rightarrow = u$

$\uparrow = v$

- les autres variables sur les nœuds.

Les débits de masse peuvent alors être calculés directement à partir des composantes de vitesse. L'équation de continuité contient la différence de composantes de vitesse adjacentes et non des composantes alternées. Le phénomène de pression tableau d'échec ne peut pas se présenter car les différences de pression prises sur des nœuds adjacents sont utilisées dans les équations de transport. Le seul désavantage qui se présente est celui de devoir tenir compte d'un indexage et de l'information géométrique

additionnelle. Alors dans les équations de transport si le champ de pression est connu, il n'y aura aucune difficulté à construire et résoudre ces dernières pour le volume de contrôle de la figure 17.

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \quad (134)$$

on définit les vitesses v et w de la même façon.

Alors pour une pression P^* dite posée

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*) \quad (135)$$

Ce champ de vitesse tel que posé ne permet pas en général de satisfaire l'équation de continuité. Le champ de pression doit alors être corrigé par :

$$P = P^* + P' \quad (136)$$

P' étant la correction de pression.

La correction de vitesse se fait par :

$$u = u^* + u' \quad (137)$$

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + A_e (P_P - P_E) \quad (138)$$

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + A_e (P_P^* - P_E^*) \quad (139)$$

en soustrayant (139) de (138)

$$a_e (u_e - u_e^*) = \sum a_{nb} (u_{nb} - u_{nb}^*) + A_e (P_P' - P_E') \quad (140)$$

en négligeant le terme de la sommation

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \quad (141)$$

où :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (142)$$

De la même manière

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \quad (143)$$

La correction de pression se fait alors à partir de l'équation de continuité

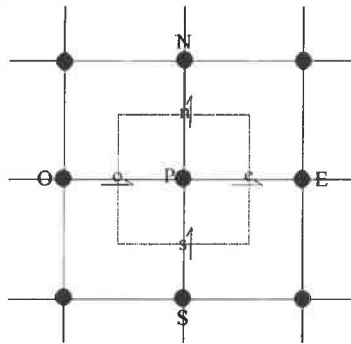


Figure 18. Maillage de calcul.

$$(\rho u A)_o - (\rho u A)_e + (\rho v A)_s - (\rho v A)_n = 0 \quad (144)$$

En remplaçant les expressions de vitesse corrigées dans (144) nous obtenons l'équation de correction de pression suivante:

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_O P'_O + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (145)$$

où :

$$a_E = (\rho u A)_e \text{ etc.}$$

$$a_p = a_E + a_O + a_N + a_S + b \quad (146)$$

$$b = (\rho u^* A)_o - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n \quad (147)$$

La formulation présentée nous permet de bâtir un algorithme de résolution connu sous le nom de SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), dont le flot de calcul se résume comme suit :

1. Poser P^*
2. Résoudre les équations de transport pour obtenir u , v et w en prenant soin de sous-relaxer adéquatement.
3. Résoudre l'équation de correction de pression.
4. Corriger la pression et les vitesses.
5. Résoudre les autres variables telles que la température.
6. Retourner à l'étape 2 en posant la pression corrigée comme la nouvelle valeur du champ P^* .
7. Répéter jusqu'à la convergence.

4.6 L'algorithme SIMPLEC (SIMPLE-CONSISTENT)

Il est possible d'améliorer l'algorithme SIMPLE sans avoir à résoudre un ensemble additionnel d'équations par itération. Dans l'expression

$$a_e (u_e - u_e^*) = \sum a_{nb} u'_{nb} + A_e (P'_P - P'_E) \quad (148)$$

nous tenons compte du terme $\sum a_{nb} u'_{nb}$ en supposant que $u'_{nb} = u'_e$ donc

$$(a_e - \sum a_{nb}) \dot{u}_e = A_e (P'_P - P'_E) \quad (149)$$

$$u_e = \dot{u}_e^* + d_e^c (P'_P - P'_E) \quad (150)$$

$$d_e^c = A_e / (a_e - \sum a_{nb}) \quad (151)$$

de la même façon

$$v_n = \dot{v}_n^* + d_n^c (P'_P - P'_N) \quad (152)$$

encore une fois l'équation de continuité stipule que :

$$(\rho u A)_o - (\rho u A)_e + (\rho u A)_s - (\rho u A)_n = 0 \quad (153)$$

en remplaçant dans (153) la nouvelle expression des vitesses corrigées, nous obtenons à nouveau :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_O P'_O + a_N P'_N + a_S P'_S + b \quad (154)$$

avec

$$a_E = (\rho u d^c)_e \quad ; \quad a_O = (\rho u d^c)_o \quad (155)$$

$$a_N = (\rho u d^c)_n \quad ; \quad a_S = (\rho u d^c)_s \quad (156)$$

$$a_P = a_E + a_O + a_N + a_S \quad (157)$$

$$b = (\rho \dot{u}^* A)_o - (\rho \dot{u}^* A)_e + (\rho \dot{v}^* A)_s - (\rho \dot{v}^* A)_n \quad (158)$$

L'approche est similaire à celui dans SIMPLE sauf que d est remplacé par d^c .

SIMPLEC s'implante alors de la manière suivante :

1. Poser ou estimer u^* v^* w^* et P^* .
2. Calculer d_e^c à partir des équations de transport en x et le stocker. Résoudre l'équation de transport en x pour obtenir une nouvelle valeur de u^* , en prenant soin de sous-relaxer adéquatement. Faire ainsi de suite pour les équations de transport en y et z pour obtenir des nouvelles valeurs de v^* et w^* et d_n^c etc.
3. Résoudre l'équation de correction de pression en P' .
4. Corriger la pression et les vitesses.
5. Résoudre les autres variables telles que la température.
6. Retourner à l'étape 2 en posant la pression corrigée comme la nouvelle valeur du champ P^* .
7. Répéter jusqu'à la convergence.

4.7 Les coefficients de relaxation

Une dernière considération dans l'étape de résolution des équations présentées pour la modélisation du transfert de chaleur par la dynamique des fluides est celle des coefficients de sur-relaxation et de sous-relaxation tel que stipulé dans l'équation (111) :

$$\tilde{\phi}_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b$$

nous pouvons poser

$$\phi_p = \alpha \tilde{\phi}_p + (1 - \alpha) \phi_p^* \quad (159)$$

où ϕ_p^* est la valeur de la dernière itération et α est le coefficient de relaxation et $\tilde{\phi}_p$ la nouvelle valeur calculée. En faisant abstraction des indices :

$$\phi = \alpha \phi_{new} + (1 - \alpha) \phi^* \quad (160)$$

$$\frac{\phi}{\alpha} = \phi_{new} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \phi^* \quad (161)$$

Dans le cas du calcul de la vitesse

$$u = \alpha u_{new} + (1 - \alpha) u^* \quad (162)$$

$$\frac{u}{\alpha} = u_{new} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} u^* \quad (163)$$

Pour ce qui est de la pression

$$P = \alpha P_{new} + (1 - \alpha) P^* \quad (164)$$

Si nous remplaçons dans (185) P par P^*

$$P^* = \alpha P_{new}^* + (1 - \alpha) P^* \quad (165)$$

En soustrayant (186) de (185) nous obtenons

$$P - P_{new} = \alpha P_{new} - \alpha P_{new}^* \quad (166)$$

tel que stipulé dans (155) $P' = P - P^*$ donc,

$$P = P^* + \alpha P_{new}' \quad (167)$$

Pour $\alpha < 1$ nous faisons de la sous-relaxation et pour $\alpha > 1$ nous faisons de la

sur-relaxation. Dans les problèmes non-linéaires il est toujours souhaitable de ralentir les variations des variables dépendantes [50]. Pour ce faire nous devons utiliser l'approche de sous-relaxation. Le choix judicieux des facteurs de relaxation est un aspect crucial pour l'obtention de la convergence des problèmes en dynamique des fluides.

La simulation du transfert de chaleur par dynamique de fluides du problème à l'étude se fait alors à l'aide du code CFD Fluent 6.0 et son mailleur GAMBIT. Dans un premier temps un fichier de type .msh est créé dans GAMBIT. Ce fichier contient le maillage 3D du problème, les conditions de limites de surface (des parois dans notre cas) et les conditions de limites de volume fluide/solide. Le fichier .msh est compatible avec le solveur Fluent 6.0 et seul ce dernier peut le lire, le fichier de type .msh est un fichier de type binaire. Lorsque que le fichier .msh est chargé avec Fluent 6.0 nous pouvons en créer un fichier .cas et un fichier .dat. Dans ces deux fichiers sont contenues les informations suivantes :

- Le maillage géométrique et le maillage d'interface de l'objet à l'étude
- Les conditions aux frontières
- Les conditions de frontières géométriques
- Les conditions initiales
- Les propriétés des solides
- Les propriétés du fluide
- Les coefficients de sous-relaxation
- Les schémas de discrétisation à utiliser
- Les résultats de simulation

Les fichiers .cas et .dat sont aussi des fichiers binaires et ne peuvent être lus que par le code Fluent 6.0.

5.0 Résultats de simulation numérique

Dans la modélisation du transfert de chaleur par conduction et par dynamique de fluides les calculs suivants ont été réalisés:

- Des calculs préliminaires sur machines monoprocesseur de type PC pour tester la validité des algorithmes de résolution du problème conduction avec des modèles de taille de 1031 et 27456 inconnues.

- Un calcul parallèle préliminaire pour le problème de conduction sur une machine SGI Origin 2000 avec une taille de problème de 573181 inconnues.

- Un calcul parallèle sur cluster PC au LCA de l'ETS pour le problème de conduction de taille de 573181 inconnues.

- Deux calculs parallèles sur la machine IBM Power Sp4 Regatta de l'RQCHP avec un modèle de taille 573181 inconnues et 1009096 inconnues pour le problème de conduction.

- Des calculs préliminaires sur des machines UNIX IBM RS6000 à l'IRH de l'UQTR pour tester la validité du cas Fluent utilisé pour la partie fluide à l'aide d'un modèle d'une taille de presque 80000 nœuds.

- Un calcul parallèle sur la machine Enterprise 6000 du LCA de l'ETS pour un problème transfert de chaleur conjugué d'une taille de 1333693 nœuds.

Le problème traité dans chaque cas est celui du transformateur à sec qui opère en court-circuit au secondaire en étant alimenté à 112 volts et 13 ampères. L'extérieur de la cuve métallique est refroidi par convection naturelle et les propriétés des matériaux sont celles spécifiées à la page 37 pour le problème de conduction, et celles de la page 69 pour le problème de convection-conduction. Dans les deux cas traités la dissipation de puissance

dans les enroulements et les noyaux magnétiques est celle qui est spécifiée à la page 37 également.

Les résultats de simulation numérique pour le problème de conduction ont été générés sous forme de températures sur les nœuds du maillage du transformateur à l'étude. Bien que ce ne soit pas le but ultime du projet, l'exploitation des résultats du problème de conduction de taille 573181 DDL a été faite à l'aide du logiciel Techplot, mis à la disposition au Département de Génie Mécanique de l'École de Technologie Supérieure de Montréal. La démarche est assez satisfaisante étant donné le nombre de variables indépendantes calculées à représenter. En ce qui concerne la partie fluides, il est beaucoup plus attrayant d'exploiter les capacités de post-traitement du logiciel Fluent 6.0, ce dernier permet de charger en mémoire les résultats de simulation et de générer des fichiers de sortie à partir de ces derniers.

5.1 Résultats de simulation pour le problème de transfert de chaleur par conduction.

La stratégie d'implantation parallèle a été réalisée dans un premier temps en mémoire partagée sur un ordinateur portable 266 MHz avec un modèle réduit de calcul de 1031 inconnues pour développer le code. Une fois que la fonctionnalité de l'algorithme a permis de produire des résultats valables, le même algorithme a été testé sur un cluster d'ordinateurs à double processeur Pentium II 400 MHz, 256 Mo, IDE 6.4 Go, Windows NT, connectés à l'aide d'une interface réseau 100 Mb/s. La taille de modèle traitée pour cette première implantation à mémoire distribuée était de 573181 degrés de liberté. La démarche comme telle a permis de tester l'aspect des communications à mémoire distribuée dicté par le code parallèle. Une machine à mémoire distribuée étant une architecture dont les unités de traitement et de communication sont propres à chaque processeur. Par la suite le même algorithme a été exécuté sur une machine parallèle SGI Origin2000. Cette première implantation sur une vraie machine parallèle a été faite sur deux nœuds dans le but de tester la validité du flot de calcul sur une architecture de ce type. En dernier, deux modèles de calcul ont été traités sur une machine IBM Power SP4 Regatta. Dans un premier temps le problème de 573181 degrés de liberté a été résolu

avec succès. Finalement un modèle de 1009096 degrés de liberté a été aussi résolu. Tous les calculs ont été faits en double précision. Les architectures testées n'avaient aucun impact sur la précision des résultats obtenus mais plutôt sur la vitesse d'obtention des ces derniers.

Les résultats de simulation pour cette partie du travail se présentent comme suit:

Processeurs	Temps (sec.)	Itérations
2	2060	638
4	1725	754
6	1922	846
8	2512	992

Tableau 6. Résultats de simulation sur cluster PC (573181 DDL).

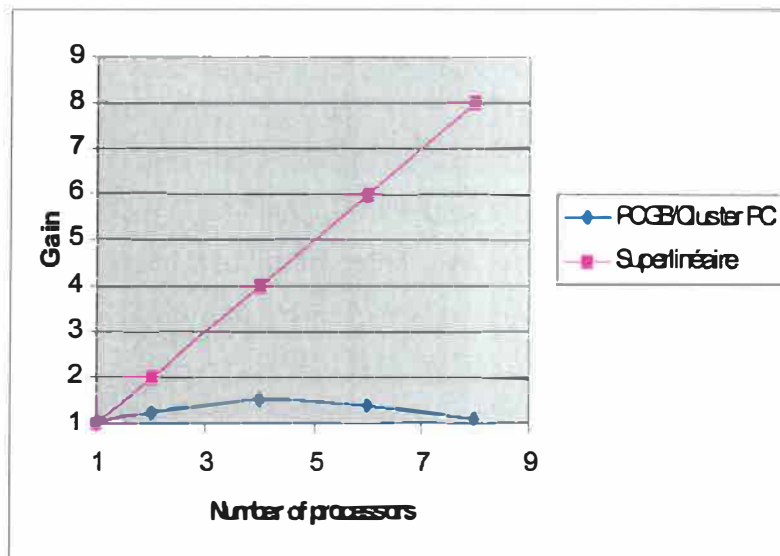


Figure 19. Performance parallèle sur cluster PC. (573181 DDL)

À la figure 19 les résultats de simulation du tableau 6 sont mis en graphique pour évaluer la performance parallèle ou l'efficacité de l'algorithme de résolution (GCPB) utilisé dans le problème de conduction. Ceci nous permet d'avoir un aperçu du gain en temps de calcul obtenu par l'utilisation de plus d'un processeur. Pour le calcul du gain le temps d'exécution sur chaque ensemble de processeurs a été divisé par le temps d'exécution sur un seul processeur. Le gain superlinéaire quant à lui est le gain idéal qu'il serait possible d'obtenir avec l'exécution sur plusieurs processeurs d'un code à 100% parallèle dont le ratio de temps calcul et du temps de communication serait assez minime. Ceci est avant tout un concept théorique car la plupart d'applications parallèles devient de cette courbe idéale et atteignent un gain asymptotique au-delà d'un certain nombre de processeurs.

Alors suite au calcul sur le cluster PC, le même algorithme a été exécuté sur une machine distribuée SGI Origin2000. Cette machine est un modèle réduit de serveur de 4 processeurs R12000 cadencés à 400 MHz; 4 Go de mémoire distribuée. Cette première implantation à mémoire distribuée a été faite sur deux nœuds pour un problème de taille 573181 et aucun temps d'exécution n'a été noté. En dernier, deux modèles de calcul ont été exécutés sur une machine IBM Power SP4 Regatta 16 processeurs doubles 1.3 GHz Power4 contenus dans quatre tiroirs 128 GB de RAM. Dans un premier temps le problème de 573181 degrés de liberté a produit les mêmes résultats que la machine SGI Origin 2000, ce qui a permis finalement de charger un modèle de taille 1009096 dont la résolution a été complétée avec succès. Tous les calculs réalisés ont été faits en double précision.

Processeurs	Temps (sec.)	Itérations
1	305	638
2	163	683
4	99	754
6	83	848
8	78	955

Tableau 7. Résultats de simulation sur la machine IBM Power SP4 (573181 DDL)

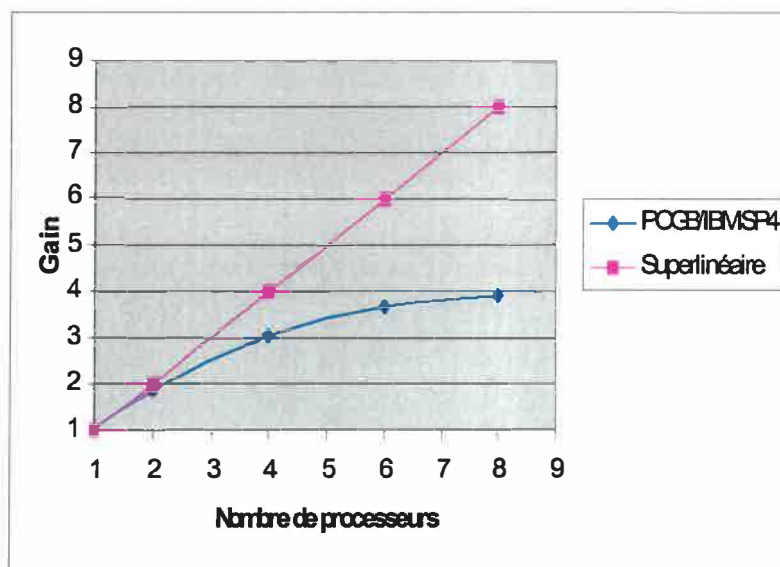


Figure 20. Performance parallèle sur la machine IBM SP4 (573181 DDL)

Processeurs	Temps (sec.)	Itérations
1	583	499
2	271	528
4	158	546
6	132	655
8	136	878

Tableau 8. Résultats de simulation sur la machine IBM Power SP4 (1009096 DDL).

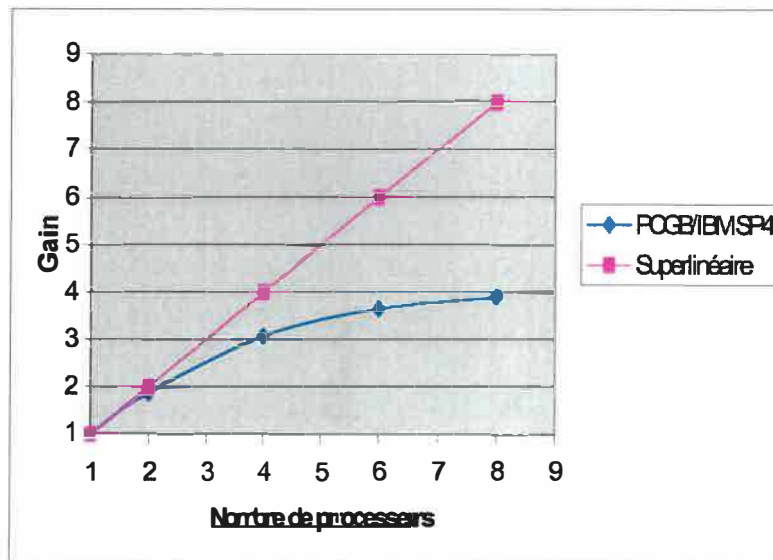


Figure 21. Performance parallèle sur la machine IBM SP4 (1009096 DDL).

Pour un problème de taille plus grande que 1009096 degrés de liberté le gain obtenu sur la machine IBM SP4 ne sera pas d'avantage meilleur, tant et aussi longtemps que le code parallèle ne sera pas optimisé pour obtenir les gains presque superlinéaires déjà obtenus avec l'exécution de cet algorithme dans [37] et [66].

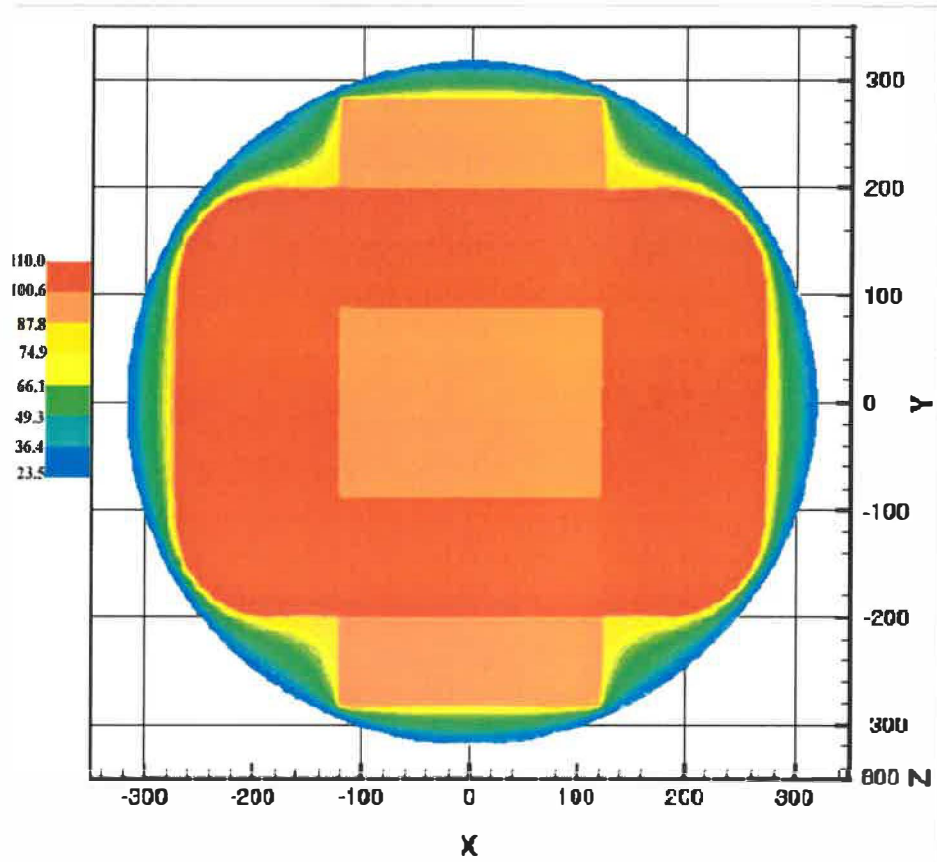


Figure 22. Coupe horizontale de distribution de température en °C calculée (573181 DDL).

Ces résultats de simulation démontrent la capacité du code d'éléments finis utilisé de produire des valeurs de température d'une bonne précision. En termes généraux si nous comparons ces résultats avec ceux de la mesure, l'écart n'est pas supérieur à 10%. Une telle constatation est tout à fait acceptable dans la simulation d'un phénomène de transfert de chaleur que nous supposons prédominant en diffusion ou conduction. La plus grande erreur dans le cas traité est celle de considérer l'air contenu dans la cuve du transformateur comme étant un solide. Ce qui a comme conséquence directe de retrouver une plus basse température au niveau des points chauds dans des régions au niveau des enroulements. La distribution de température illustrée nous permet aussi de constater que, la prédiction des valeurs théoriques des propriétés des matériaux, celle du coefficient de convection et l'utilisation des mesures de dissipation de puissance, permettent d'obtenir

une bonne vue d'ensemble du comportement thermique du transformateur à sec dans les conditions d'opération testées. Une analyse que nous pouvons cataloguer d'effet direct des conditions d'opération du transformateur sur la distribution de température à l'intérieur de la cuve métallique.

5.2 Résultats de simulation pour le problème de transfert de chaleur par écoulement de fluides

Les résultats de simulation du problème de transfert de chaleur conjugué ont été obtenus à l'aide du logiciel Fluent. Les différents essais et raffinements du modèle ont été faits dans un premier temps sur une machine RS6000 32-bits et 375MHz de l'Institut d'Hydrogène de l'UQTR. La géométrie et le maillage pour la partie fluides du projet de recherche ont été créés à l'aide du logiciel Gambit. Les conditions aux frontières et la définition du type d'analyse et les propriétés des matériaux se définissent toutefois sur Fluent. Une fois que la convergence du calcul sur la machine RS6000 a été obtenue, le même modèle a été calculé sur la machine parallèle Enterprise 6000 à 14 processeurs UltraSPARC 167 MHz du laboratoire de calcul avancé de l'École de Technologie Supérieure de Montréal.

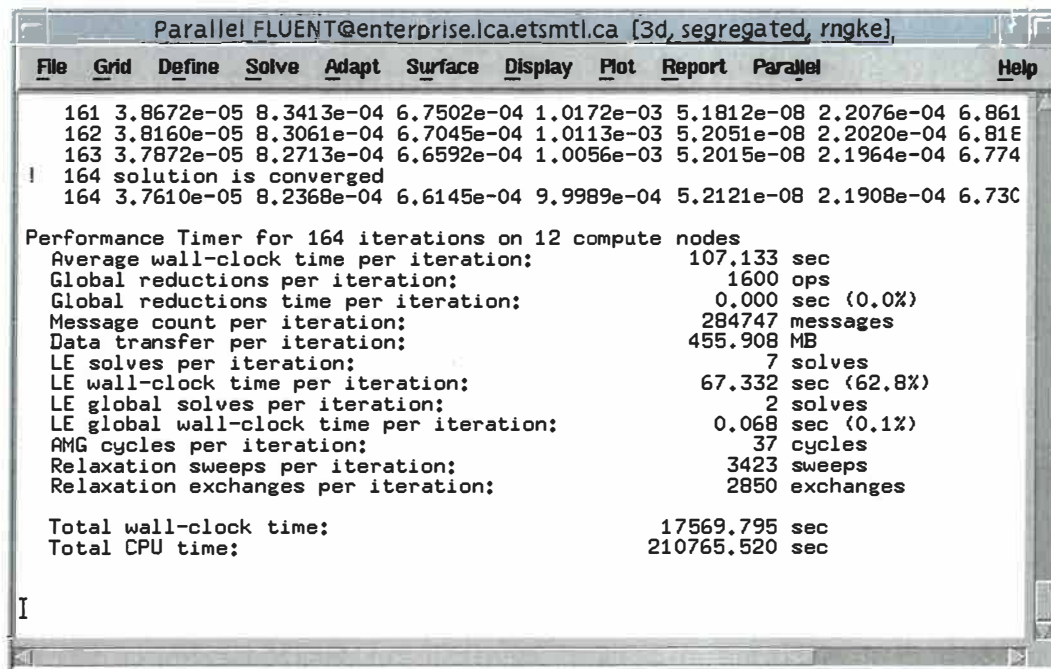


Figure 23. Affichage du temps d'exécution parallèle sur Fluent.

Pour ce type de modélisation un maillage hexaédrique de 1333693 nœuds a été utilisé. Un modèle de taille beaucoup plus considérable que ceux déjà répertoriés dans la littérature pour ce type d'analyse. D'autres maillages de taille inférieure ont été aussi testés pour s'assurer que la solution obtenue était indépendante du maillage. Des considérations particulières par rapport à la turbulence ont été portées sur le maillage autour des parois pour pouvoir tenir compte des valeurs de y^+ dans les couches limites de la partie fluide[57][60].

La résolution complète du problème de dynamiques des fluides se fait au bout de 163 itérations, autant en séquentiel qu'en parallèle. Le temps d'exécution est fortement influencé par le type de précision utilisée. Il est évident qu'en double précision le modèle converge en moins d'itérations, mais pour le type de modèle considéré il est prohibitif d'utiliser ce genre de précision à cause de l'espace mémoire restreint sur la machine à mémoire partagée que nous avons utilisée. Contrairement au problème de transfert de chaleur par conduction, dans un problème de dynamique des fluides, plus d'un degré de liberté est associé à chaque nœud du maillage. Les résultats de simulation sont les suivants pour la partie calcul :

Processeurs	Temps /Itérations (sec.)
1	838
2	461
4	244
6	189
8	159
10	134
12	107
14	89

Tableau 9. Résultats de simulation sur serveur Enterprise 6000.

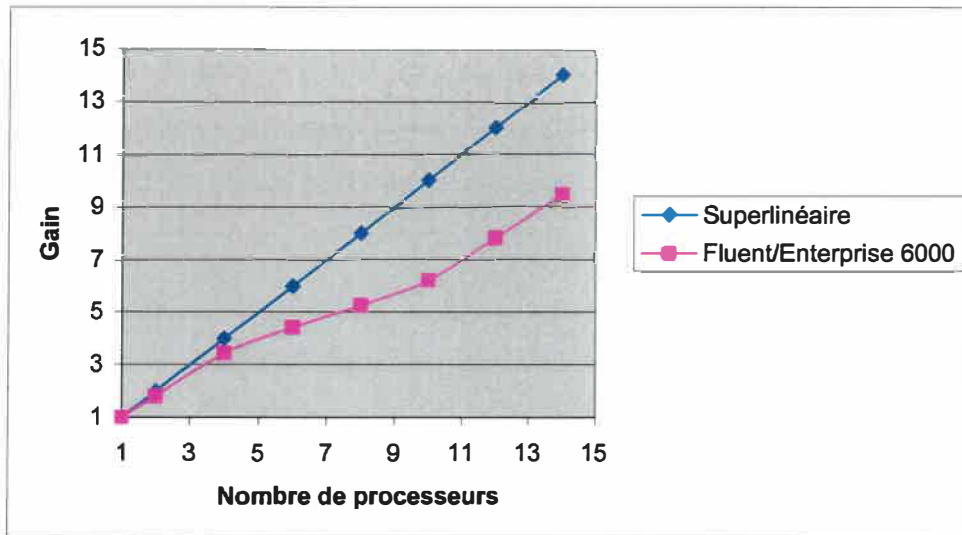


Figure 24. Performance parallèle de Fluent sur la machine Enterprise 6000.

Dans ce cas-ci l'analyse de performance se fait par rapport à l'exécution de l'algorithme de résolution parallèle utilisé par le code Fluent 6.0 pour le problème de convection-conduction, pour un total de 14 processeurs.

Les résultats de simulation sous forme de contours et de vecteurs se présentent comme suit :

Distribution de température

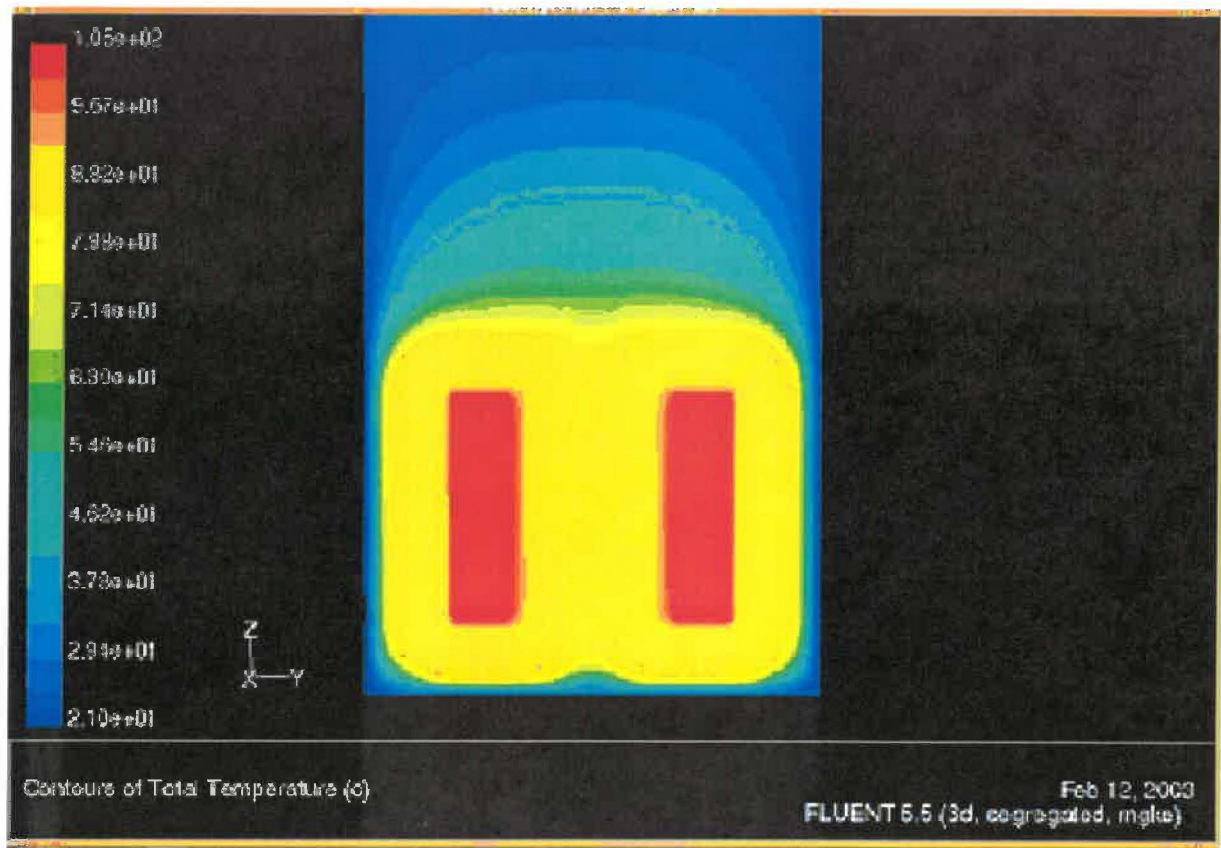


Figure 25. Contours de distribution de température.

Les résultats obtenus à l'aide du code fluides sont conformes aux températures obtenues par mesure sur les parties solides du circuit magnétique. Sur cette coupe verticale du modèle 3D du transformateur nous pouvons observer une meilleure stratification dans la distribution de température au niveau de la partie fluide. La température de la partie solide qui est associée au circuit magnétique est assez semblable à celle obtenue à l'aide du code d'éléments finis. Dans le cas traité, derrière les résultats de prédiction de la distribution de température se cachent plusieurs autres aspects reliés au transfert de chaleur qui la génère. C'est pourquoi il est important de pouvoir avoir accès, entre autres, aux informations qui tracent l'azimut de l'écoulement convectif qui a lieu à l'intérieur de la cuve du transformateur, tels que la distribution de pression, la distribution de densité et la distribution de vitesse. Ces paramètres peuvent aussi être fort utiles aux concepteurs de machines électriques.

Contours de vitesse

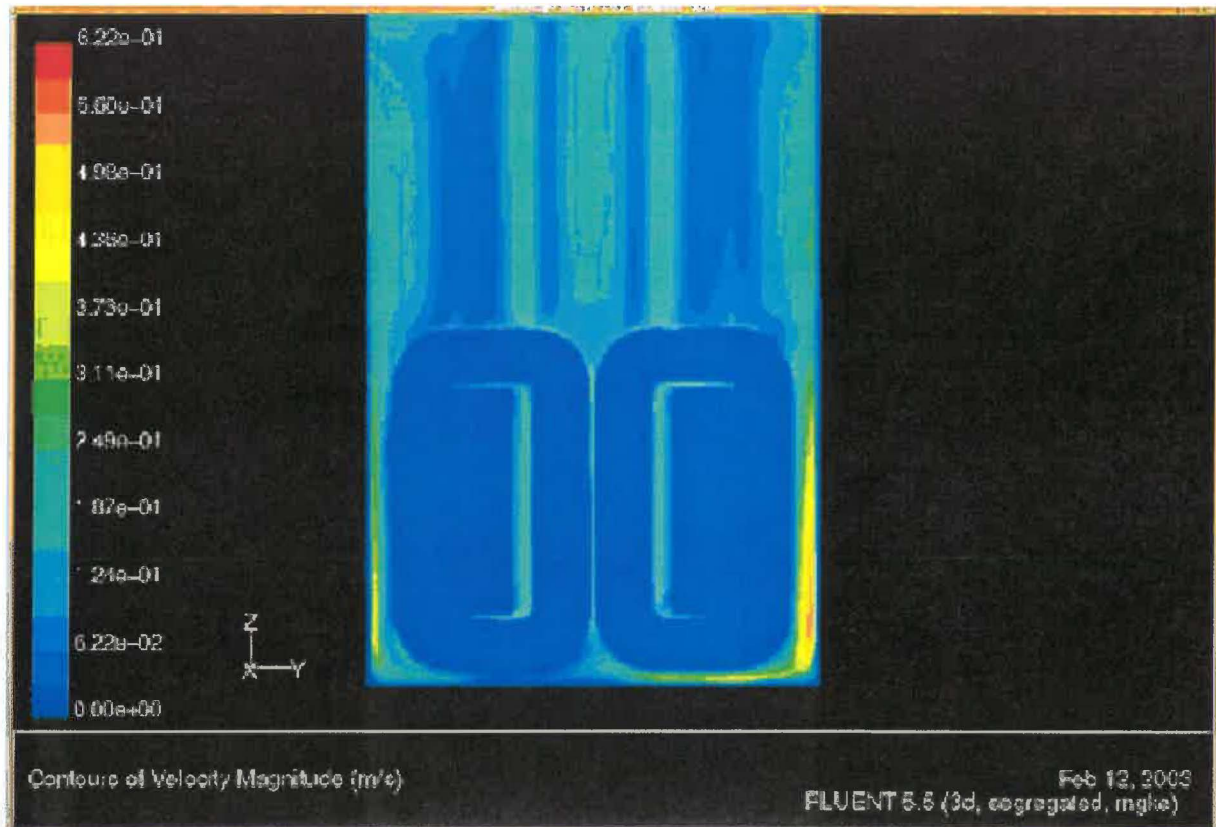


Figure 26. Contours de distribution de vitesse.

La distribution de vitesse peut fournir des indices sur les modifications à apporter sur un design géométrique dans le but d'améliorer le transfert de chaleur à des endroits spécifiques. Ce type de résultats nous permet, entre autres, de déterminer s'il existe des régions géométriques qui peuvent nuire à l'écoulement convectif ou des profils géométriques qui peuvent aider à un meilleur refroidissement en contribuant à l'accélération du fluide.

Les résultats obtenus sont semblables à ceux rapportés dans [52] pour un problème d'écoulement convectif associé à un problème de chauffage dans une enceinte de bâtisse.

Vecteurs de vitesse

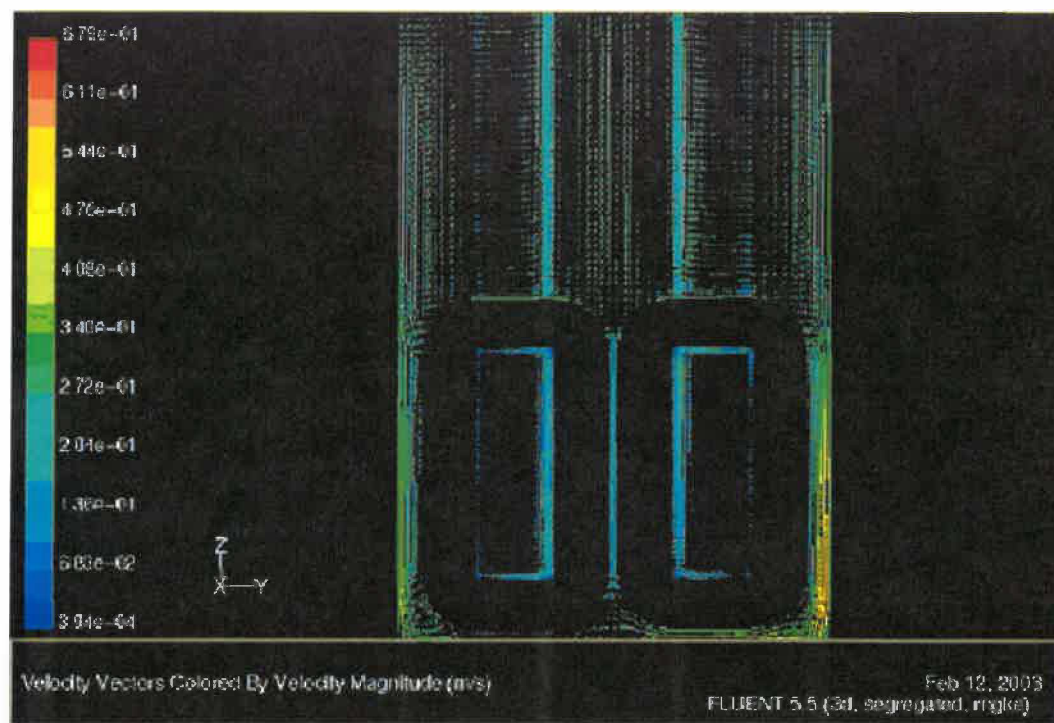


Figure 27. Distribution de vecteurs de vitesse.

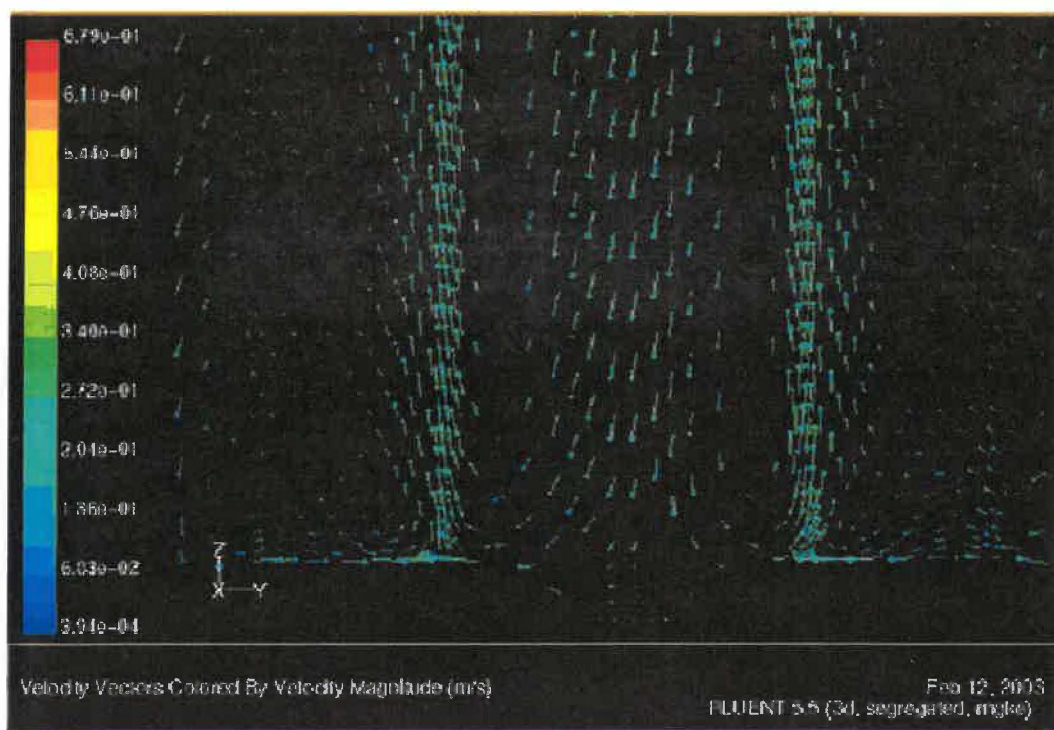


Figure 28. Détail de vecteurs de vitesse au milieu de la cuve.

Ce format vectoriel de visualisation de la distribution de vitesse facilite entre autres :

- l'identification de points de stagnation de l'écoulement convectif dans la partie structurale du transformateur.
- l'identification d'obstacles à la circulation souhaitée de l'écoulement convectif.
- l'identification de points ou régions de recirculation de l'écoulement.

Le zoom fait sur la partie centrale du transformateur nous permet de constater que le roulis de convection prédit dans le modèle de Rayleigh-Benard est en effet présent dans l'écoulement qui s'établit à l'intérieur de la cuve. L'analogie utilisée pour identifier l'écoulement était alors valable.

Contours de pression

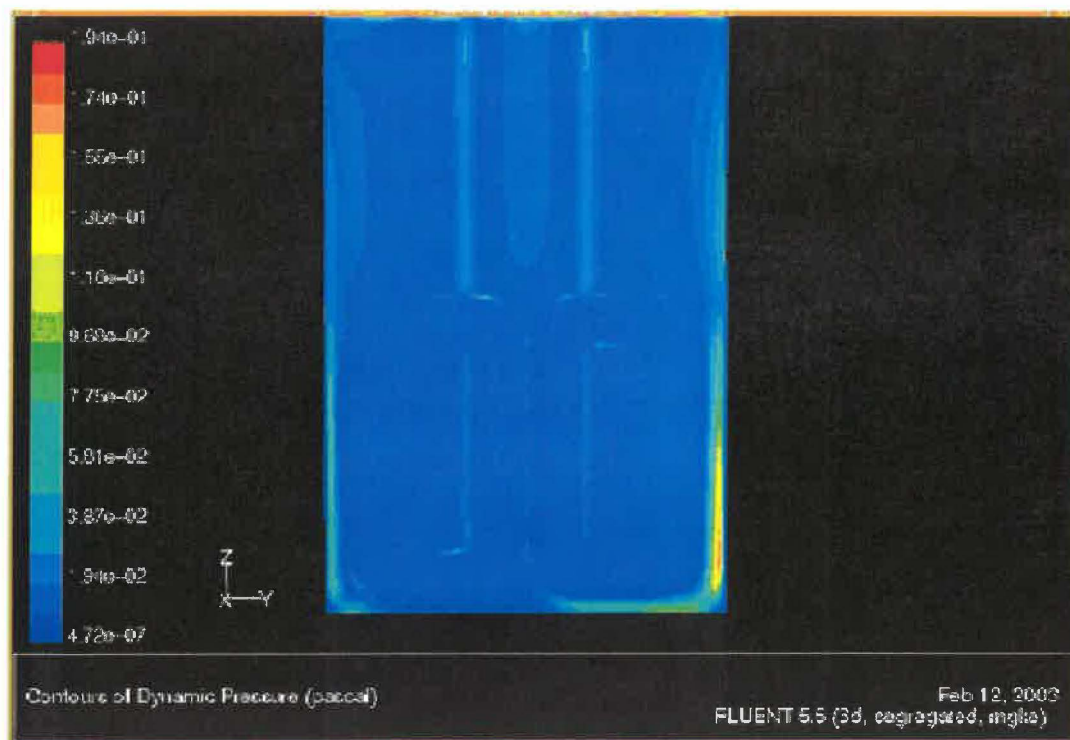


Figure 29. Contours de distribution de pression dynamique.

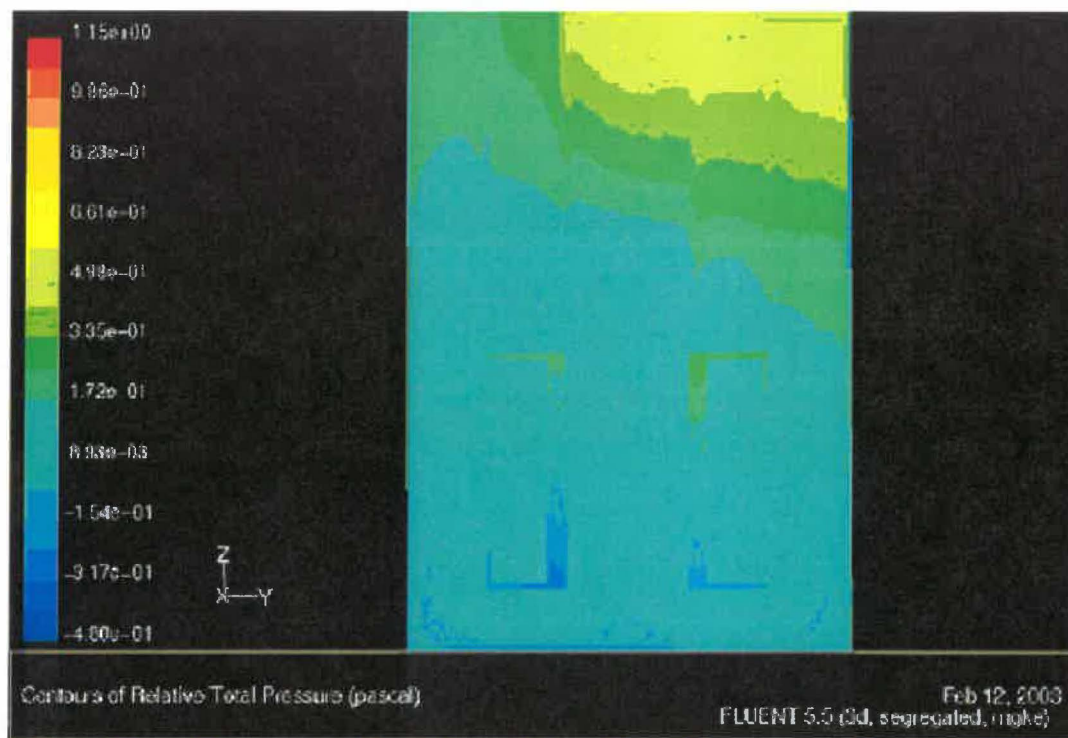


Figure 30. Contours de distribution de pression totale.

Dans le cas traité la distribution de pression n'est pas un indicateur sur la façon dont la chaleur est transférée, mais plutôt sur l'écoulement participant qui la transporte. Des poches de haute pression sont associées avec des basses vitesses du fluide et celles de basse pression à des hautes vitesses. De gros gradients de pression à des endroits spécifiques signalent une accélération de masse, de faibles gradients de pression indiquent au contraire un ralentissement de vitesse de fluide et un gradient de pression nul fait état d'un écoulement établi dans une région en particulier. En général, une distribution de pression peu homogène indique la présence de fortes perturbations dans un écoulement, tel que le mouvement de turbulence.

Distribution de densité

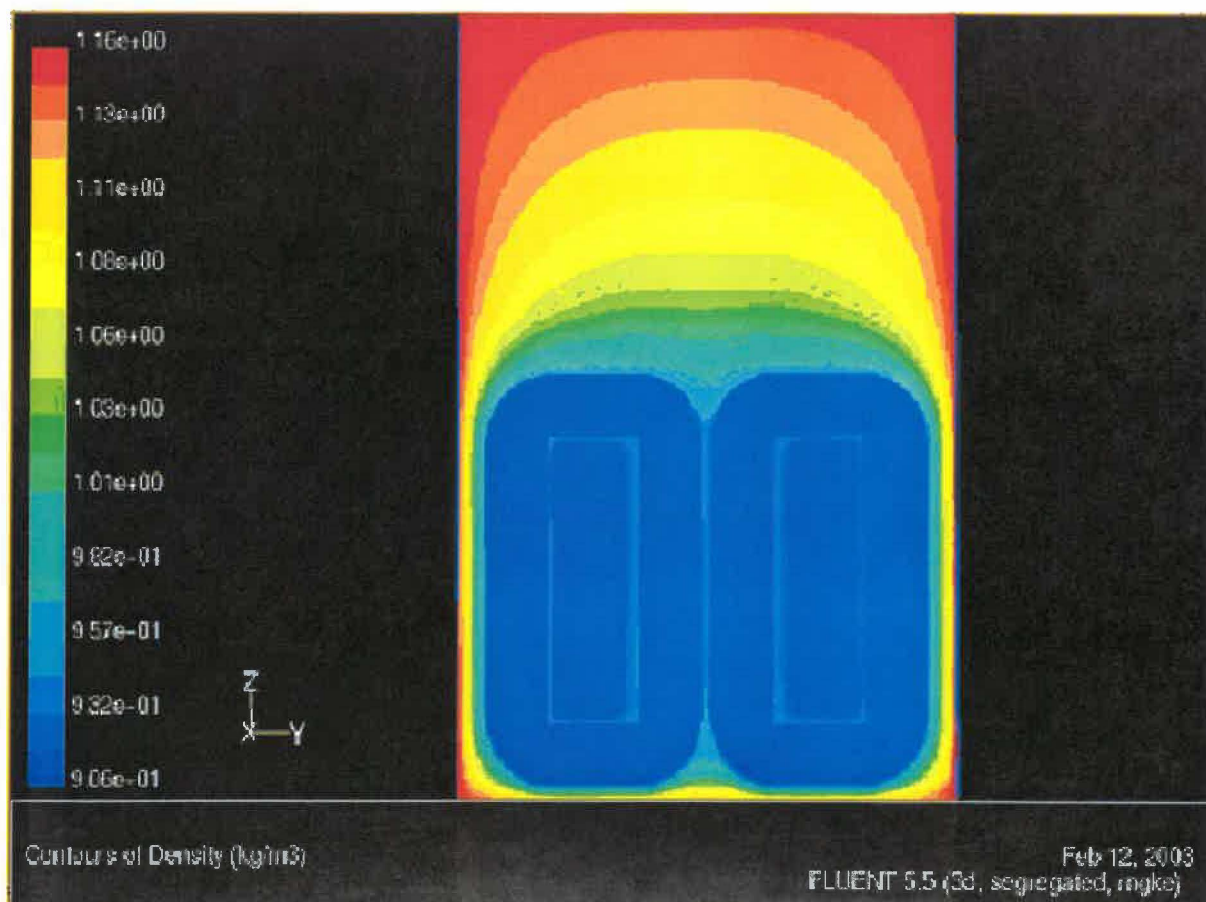


Figure 31. Contours de distribution de densité.

Un autre type de résultats important, car il nous donne un aperçu des régions où le transfert peut être amélioré. Pour une analyse de transfert conjugué de chaleur cette distribution s'interprète ou s'examine par rapport aux parois et aux couches limites de fluide. Une faible densité dans les couches limites de fluide par rapport à une densité de référence peut faire état d'un faible changement dans la pente du gradient de température des régions avoisinantes et par conséquent d'un bon transfert de chaleur dans la région d'intérêt. En contrepartie, une forte densité dans les couches limites de fluide peut faire état d'un mauvais transfert de chaleur dans une région considérée.

Diagramme de distribution axiale de température

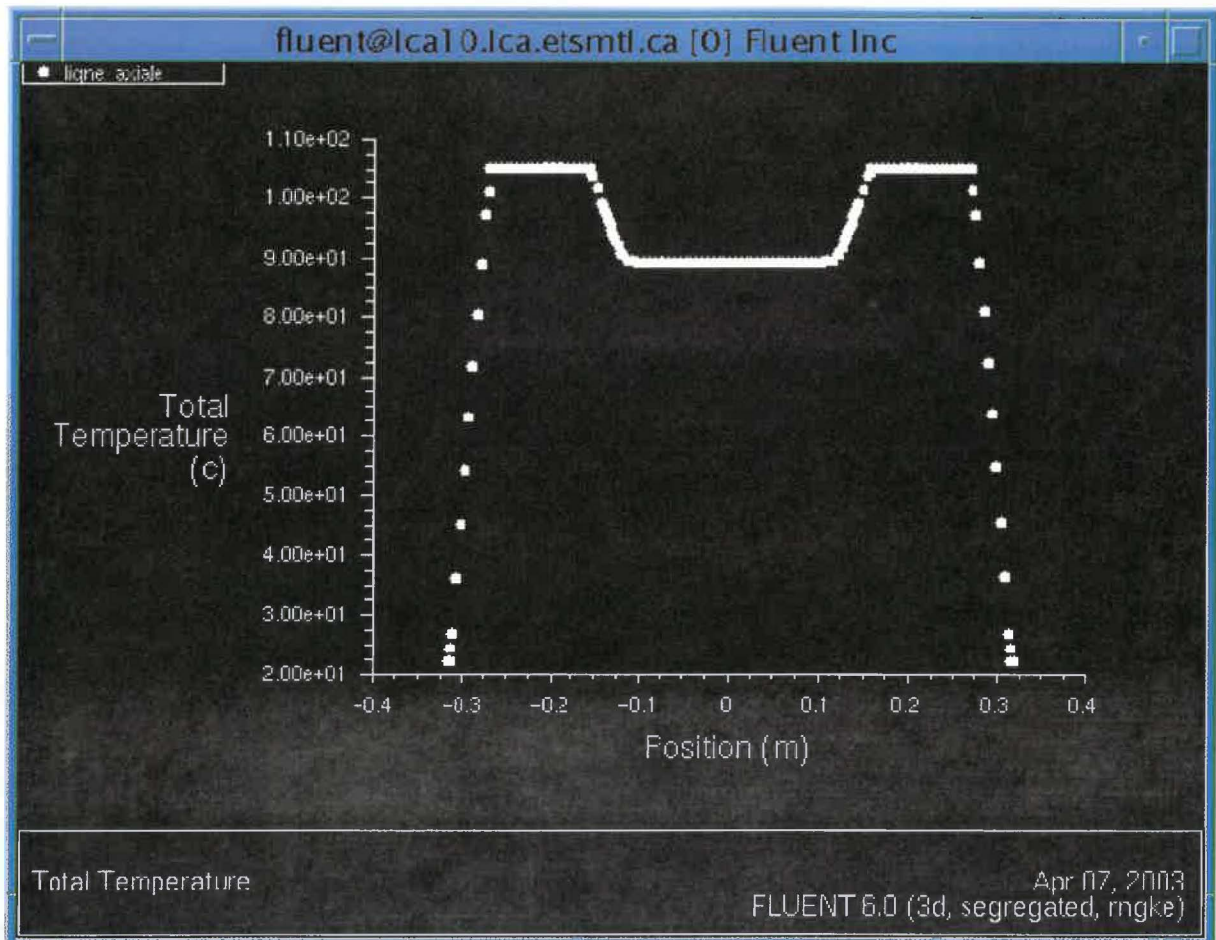


Figure 32. Distribution de température axiale.

Le diagramme de distribution axiale pour une coupe transversale du modèle 3D nous permet de constater que les résultats obtenus par simulation sont réalistes en soi. La position zéro correspond à la position du centre autour duquel se trouve le circuit magnétique. Au fur et à mesure que nous nous éloignons du centre, la température est presque constante dans la région occupée par les noyaux magnétiques. La montée abrupte correspond à la région occupée par les enroulements de haute et de basse tension. La forte descente se fait au niveau de l'espace où se trouvent les parois de la cuve.

Résidus de calcul

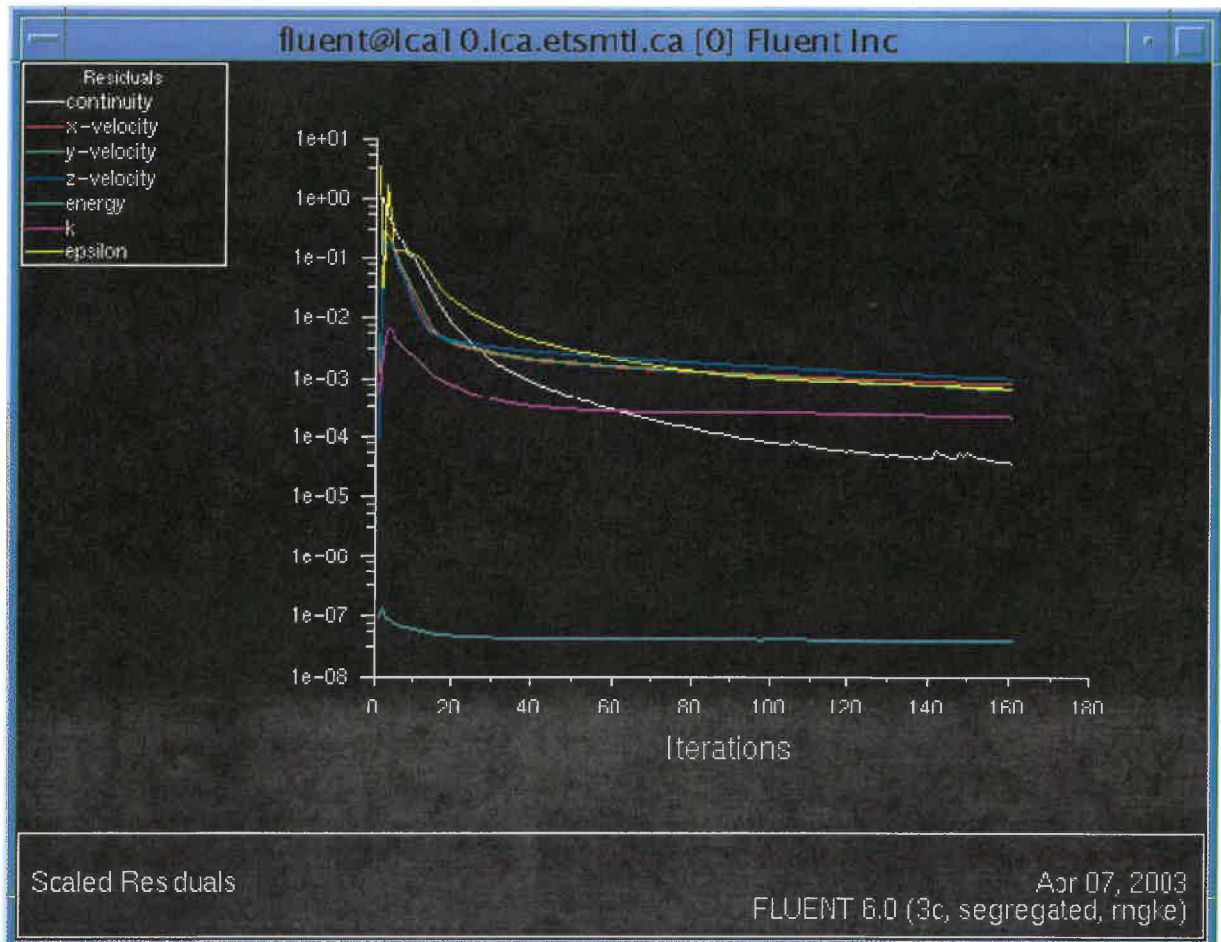


Figure 33. Résidus de calcul itératif.

À l'aide de ce graphique nous pouvons visualiser l'évolution des calculs vers la solution espérée d'après le critère de précision fixé. D'une certaine manière ces informations nous permettent de vérifier la conformité du modèle d'écoulement modélisé. Des oscillations continues autour d'une valeur quelconque dans ce graphique font état d'une mauvaise définition d'un ou plusieurs paramètres de simulation et il vaut mieux recommencer la stratégie de solution.

Les résultats de simulation du transfert de chaleur conjugué obtenus à l'aide du code Fluent peuvent se comparer à ceux du problème de conduction seulement par rapport à la température. Il existe de bonnes similitudes entre les deux distributions au niveau des régions solides où le transfert de chaleur se fait par conduction. La même équation est utilisée par le code fluide et par le code d'éléments finis pour traiter les régions en question. La différence majeure se trouve dans la distribution de température au niveau de la partie fluide. Le code logiciel Fluent 6.0 affiche d'une façon plus stratifiée cette distribution de température que le logiciel Techplot. Ceci est tout à fait normal, car le code Fluent tient compte du mouvement de masse dans la partie fluide. En ce qui a trait aux températures mesurées sur les enroulements et sur les noyaux magnétiques, la distribution de température obtenue avec le code Fluent pour les mêmes régions est en bon accord également avec de tels résultats, pour un écart inférieur à 10%. Dans le cas traité encore fois, la prédiction des valeurs théoriques des propriétés des matériaux, celle de la valeur hypothétique du coefficient de convection externe, l'utilisation des valeurs mesures de dissipation de puissance et le modèle de turbulence adopté ont permis d'obtenir des résultats fort satisfaisants.

En règle générale, les résultats de simulation de vitesse, de pression, de densité et autres qui s'obtiennent avec le code Fluent permettent de faire la lumière sur beaucoup plus d'aspects reliés au transfert de chaleur par convection-conduction à l'intérieur du transformateur à sec à l'étude, car ils permettent de faire une analyse de cause et d'effet conjointement.

6.0 Mesure et validation

La mesure est une étape fort importante, sans laquelle les résultats de simulation de l'équation de la chaleur et ceux des équations de Navier-Stokes n'auraient aucune signification physique valide. L'instrumentation de mesure nous permet entre autres de vérifier que :

- les sources de dissipation de puissance dans les enroulements et les noyaux magnétiques ont été définies de manière convenable pour les deux cas analysés.
- l'intégration numérique de volume et de surface par éléments finis est conforme pour le cas du transfert de chaleur par diffusion ou conduction.
- la modélisation de l'écoulement convectif converge vers une solution physique pour le cas du transfert conjugué de chaleur.

Une mauvaise définition d'un ou de plusieurs paramètres de simulation dans une modélisation, tel que le facteur de convection externe ou la dissipation de puissance dans une région solide, peut toujours être compensée par un surdimensionnement ou un sous dimensionnement d'un ou de l'autre. Un modèle de simulation construit de cette façon ne pourra pas toutefois servir à faire des analyses paramétriques exhaustives ou à tester différentes conditions d'opération. Sans une implantation adéquate de mesure de validation, une analyse numérique soit par éléments finis ou différences finies ne peut produire que de l'incertitude. Dans notre cas, la mesure de température nous a permis de vérifier que les résultats de simulation de nos deux modèles allaient de bon train pendant leur développement. Bref, c'est la mesure qui a permis de constater que dans le cas du code d'éléments finis, l'intégration numérique de surface était erronée au tout début des calculs. Les premiers résultats de simulation obtenus se situaient entre 200 et 2000° C.

Pour l'implantation de la mesure nous avons utilisé un banc d'essai composé par le prototype de transformateur à l'étude, un PC, une carte d'acquisition de données NI 4351 de National Instruments, une interface de connexion TC-2190 avec des entrées miniatures pour des thermocouples et une matrice de thermocouples de type T de la compagnie

OMEGA Engineering, raccordés à différents endroits dans le noyau et les enroulements du transformateur à sec. Le tableau 10 donne les caractéristiques du type de thermocouple utilisé.

Type	Construction	Intervalle d'utilisation	Précision
T	Cuivre - Constantan	0 à 350 °C	± 1.0 °C

Tableau 10. Données techniques du type de thermocouple utilisé.

L'influence de la précision garantie par le fabricant sur les résultats de mesure est assez minime étant donné l'ordre de température à laquelle opère le transformateur à l'étude.

À l'aide de la carte NI 4351 nous pouvons faire des mesures précises avec des thermocouples et des mesures de tension CC. La température peut être aussi échantillonnée avec de RTDs, thermistors, mesures de résistance et de courant.

L'adaptateur TC-2190 consiste en une boîte blindée avec 14 contacts miniatures que nous pouvons utiliser pour connecter nos thermocouples avec la carte d'acquisition de données NI 4351. La connexion se fait à l'aide d'un câble blindé SH6868 fourni également par la compagnie National Instruments. Nous pouvons y raccorder jusqu'à 14 thermocouples à la fois.

La carte NI 4351 permet l'utilisation des GUI de LabWIEV, LabEWindows/CVI et celle de Virtual Bench. Le périphérique permet aussi la programmation d'un GUI dédié à l'aide des langages de programmation tels que C, C++ et Visual Basic. Pour le cas à l'étude nous avons choisi d'utiliser le GUI de Virtual Bench qui est configuré avec l'installation du logiciel de la carte. À l'aide de l'interface de Virtual Bench il est alors possible de configurer :

- le type de mesure que nous voulons réaliser, soit de tension, courant ou température.
- le type de thermocouple que nous voulons raccorder à la carte d'acquisition.

- la taille du fichier de sortie que nous voulons obtenir.
- les paramètres de commande pour la mesure tout comme l'étiquetage des différents capteurs de température utilisés.

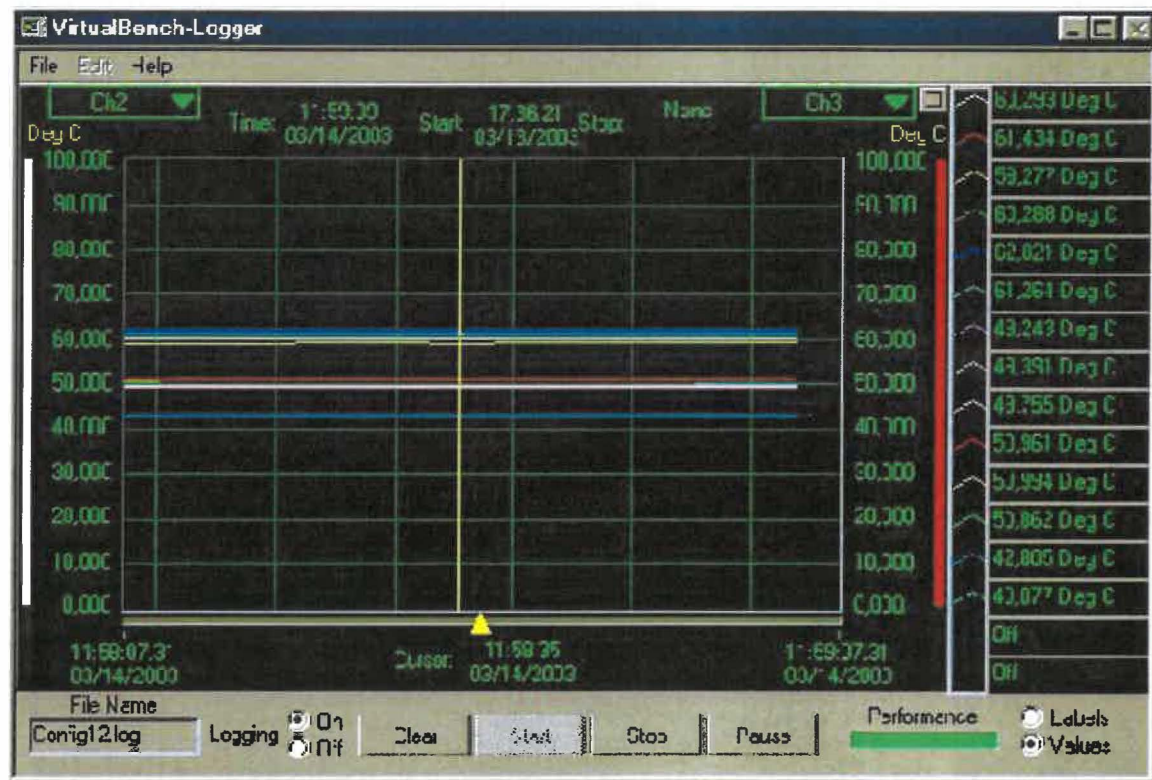


Figure 34. Interface graphique de l'interface Virtual Bench.

Le GUI de Virtual Bench nous permet aussi de visualiser en temps réel la mesure de température de façon très aisée. De plus, une fois que les paramètres d'acquisition ont été définis, nous pouvons lancer l'acquisition de données à l'aide de l'interface elle-même.

Les résultats de mesure peuvent s'obtenir sous forme de fichier texte également comme suit :

Date	Time	Ch2 (Deg C)	Ch3 (Deg C)	Ch4 (Deg C)
05/16/2001	12:15:11	92,598	94,334	89,067
05/16/2001	12:15:17	92,614	94,348	89,069
05/16/2001	12:15:22	92,626	94,365	89,116

Tableau 11. Exemple de fichier de sortie de mesure.

L'évolution de la température a été suivie pendant un temps de plus de 24 heures, intervalle au bout duquel nous avons considéré qu'un régime permanent avait été atteint. Dans un premier temps nous avons fait une mesure à l'aide de 14 thermocouples pour faire la validation des modèles de simulation tel qu'illustré à la figure 7. Les résultats des deux cas traités ainsi obtenus sont en très bon accord avec ceux du calcul. Par la suite, une deuxième expérience de mesure a été faite pour tenter d'estimer la dissipation de puissance par effet Joule dans les bobinages du transformateur et la dissipation de puissance par courants de Foucault dans le noyau magnétique.

À titre d'exemple, nous pouvons comparer les résultats de simulation par éléments finis et de mesure pour une région en particulier dans la géométrie du transformateur. Nous avons choisi une direction axiale partant du centre du circuit magnétique vers la cuve métallique, selon l'axe des x sur une distance de 142 à 252 mm. C'est en autres selon cette direction que nous pouvons observer une bonne variation de la température.

Distance à partir du centre	142mm	170mm	189mm	234mm	246mm	252mm
Temp. Calculée	95.53	102.53	105.10	105.08	103.34	103.07
Temp. Mesurée	92.71	103.42	103.91	104.21	94.98	93.43
Erreur	2.3%	0.8%	1.1%	0.8%	8.0%	9.4%

Tableau 12. Comparaison de résultats de calcul et de mesure.

La mesure a donc été réalisée pour une seule condition d'opération et pour les paramètres physiques estimés. Autant ceux du transformateur que ceux du fluide considéré. Le but du travail de recherche étant avant tout celui d'aborder la modélisation parallèle du

transformateur à sec et pas celui de l'étude exhaustive des ses conditions d'opération. Toutefois les deux modèles de simulation réalisés s'adaptent bien à ce type d'analyse paramétrique. La seule possibilité d'analyse à cet effet aurait été faire une série de simulations sur différents régimes d'alimentation en courant. Le seul point vérifiable par mesure de température, mais aucune validation aurait été possible pour une étude paramétrique des propriétés physiques du transformateur et du fluide considéré, car elles n'étaient pas modifiables. Mais il aurait été possible de prédire les effets de leur variation.

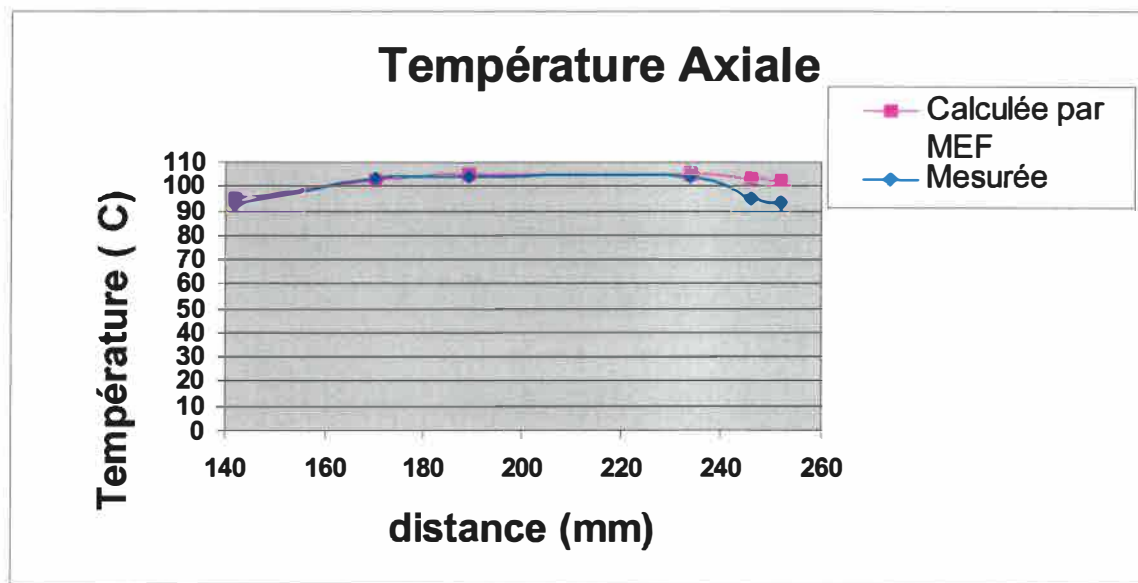


Figure 35. Comparaison de température axiale.

En ce qui concerne l'estimation des pertes comme telle, celle-ci n'est pas une démarche très évidente. Prenons par exemple le cas de l'estimation de dissipation de puissance par effet Joule dans les enroulements primaires et secondaires du circuit magnétique. Il ne suffit pas de connaître leur résistance et l'intensité du courant qui les traverse. Des facteurs tels que les contraintes résiduelles dans les métaux, l'anisotropie des matériaux, le coefficient de foisonnement des conducteurs dans les bobinages et la profondeur de peau ont une grande influence sur la détermination de ce type des pertes. Un problème similaire se présente lors du calcul de la dissipation de puissance par courants de Foucault. En effet, en plus des pertes engendrées par les changements des propriétés des

tôles magnétiques après usinage et recuit, d'autres pertes par courants induits sont plus difficiles à évaluer. Si la surface de chaque tôle est parfaitement isolée électriquement, théoriquement le courant ne peut pas traverser l'espace entre les tôles adjacentes. Pourtant des études démontrent qu'il y a toujours des fuites qui contribuent à l'augmentation des pertes dans le fer[68]. À tout ceci se rajoute le fait que les fabricants d'acier pour tôles magnétiques, donnent des pertes dans le fer sur des abaques, sans faire de distinction entre les pertes par hystérésis et les pertes par courants de Foucault. Il y a donc toujours une grosse incertitude dans la détermination de ce type de pertes autant par effet Joule que par courants de Foucault. Il en résulte qu'il soit courant d'ajuster la valeur des densités de puissance dans les simulations électrothermiques pour pouvoir obtenir des résultats dans une direction souhaitée.

Des mesures indirectes de la densité de pertes ont été faites sur le noyau magnétique et sur les enroulements de haute et basse tension, par la technique de la mesure de température en fonction du temps. Cette approche permet de déduire la densité de dissipation de puissance aux différents points où sont insérés les thermocouples utilisés pour relever des mesures. Cette méthode de mesure indirecte de puissance a déjà été utilisée à plusieurs reprises pour caractériser les pertes dans les moteurs à induction[69][70].

Cette méthode est utilisée pour déterminer la distribution des pertes en utilisant la température essentiellement. Elle est basée sur le fait que les pertes générées dans les différentes parties d'une machine électrique peuvent être obtenues en mesurant l'énergie absorbée ou libérée à ces endroits quand les conditions d'opération sont changées. Au point de mesure la pente initiale de changement de température est proportionnelle à la production de chaleur, si durant ce test, l'écoulement d'énergie reste constant. Pour pouvoir prédire la dissipation de puissance dans le cas du transformateur deux conditions sont à respecter :

- le transformateur doit être amené à un régime permanent de température
- la source d'alimentation doit être déconnectée instantanément.

Ces conditions étant remplies la mesure de puissance s'est faite de la manière suivante : une fois le régime permanent atteint l'alimentation du transformateur a été coupée et des mesures ont été prises à toutes les 5 secondes pendant un intervalle de temps de 10 minutes. Les conditions d'opération du transformateur pour cette expérience étaient de 112 volts et 13 ampères.

Les données ainsi recueillies servent à calculer la relation suivante :

$$Q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (168)$$

où :

ρ : densité (kg/m³)

C_p : chaleur spécifique (J/kg°C)

T : température (°C)

t : temps en (sec.)

Q : densité de puissance (Watts/m³)

La pente spécifiée dans (168) est calculée à l'aide du logiciel Excel avec l'acquisition de température faite sur l'intervalle de 10 minutes.

La distribution de puissance obtenue par mesure est la suivante :

Enroulement de haute tension	1300 Watts/m ³
Enroulement de basse tension	1500 Watts/m ³
Noyau magnétique	260 Watts/m ³

C'est donc de cette façon que nous avons déterminé la dissipation de puissance dans le circuit magnétique. Aucun ajustement de puissance n'a été nécessaire pour obtenir par simulation des températures semblables à celles qui ont été mesurées. Nous pouvons conclure que la méthode de mesure de puissance proposée dans [71][72] peut s'adapter à un bon nombre de modélisations thermiques de machines électriques.

7.0 Conclusion

La supposition faite que le nombre de Pecklet associé à l'écoulement d'air interne dans le transformateur est beaucoup plus petit que 1, peut laisser entendre que le transfert de chaleur dans la cuve se fait par conduction. Mais l'équation de Poisson à elle seule ne peut pas confirmer cela et ce malgré la haute échelle de modélisation en 3D par éléments finis utilisée pour couvrir cet aspect. Les analyses thermiques qui s'orientent de cette manière tout en négligeant le mouvement de masse de fluide, demeurent des analyses directes d'effet d'une configuration géométrique et électrique données et ne fournissent pas la marge de manœuvre nécessaire dans la prise de décision associée au design thermique d'une machine électrique statique ou rotative. L'implantation faite du problème de conduction a toutefois permis de tester l'utilité des algorithmes distribués et des machines parallèles pour la modélisation numérique de haute échelle de systèmes électriques industriels. Le gain parallèle obtenu pour ce volet est acceptable et nous n'avons pas cherché à l'optimiser, compte tenu du fait qu'il fallait couvrir plus d'un aspect précis dans le projet de recherche.

L'approche de modélisation proposée à l'aide du code Fluent 6.0 pour couvrir l'aspect convection-conduction associé au transfert de chaleur dans la cuve, est l'approche la plus indiquée à utiliser pour le développement, la vérification et l'optimisation du design thermique d'un transformateur à sec ou d'une unité refroidie à l'huile. Partant du fait que l'écoulement turbulent dans la cuve est loin d'être à deux dimensions, la modélisation complète de la circulation du fluide et de la géométrie à l'étude permet d'avoir un meilleur diagnostic sur les caractéristiques du phénomène abordé dans ce travail de recherche.

Les méthodes d'analyses proposées auparavant dans la littérature se focalisent plus sur une partie du problème que sur le problème au complet. Les codes électromagnétiques quant à eux, se prêtent mieux pour résoudre des problèmes de compatibilité électromagnétique et pas pour les problèmes de design thermique. Ils demeurent toutefois des outils avancés de calcul des pertes dans l'appareillage électrique. En règle générale,

un code CFD a la capacité de résoudre plus en détail le problème de cause et d'effet d'un transfert de chaleur conjugué.

L'implantation de modèles de calcul intensif sur des architectures distribuées de type cluster n'est pas encore très efficace de nos jours à cause de la faible vitesse de traitement des adaptateurs réseaux d'usage courant. Les adaptateurs réseaux de haute performance sont encore fort dispendieux et ne suivent pas du tout la courbe de progression de vitesse de traitement des processeurs. Les architectures cluster se prêtent mieux pour des modèles de calcul basés sur la décomposition de domaines, une démarche qui aide à réduire le temps de communication de façon considérable.

Le transfert de chaleur par rayonnement thermique à l'intérieur du transformateur rajoute une touche de réalisme autant au problème de conduction qu'au problème de transfert conjugué. Le codage de ce volet n'aurait pas été plus compliqué. Sa formulation est disponible dans [42]. Cela aurait rajouté une étape itérative dans l'exécution de l'algorithme du PCGB à cause de la non-linéarité de la formulation de l'expression mathématique utilisée pour modéliser le phénomène, laquelle est donnée dans les équations (29) et (31). D'une certaine manière la radiation contribue peu au transfert de chaleur à l'intérieur de la cuve compte tenu du faible gradient de température dans le transformateur à sec. La radiation peut être le mode prédominant de transfert de chaleur dans les cas d'applications industrielles dans le vide ou celles des fours de haute température. Le code Fluent peut toutefois accommoder deux modèles différents de radiation dans la modélisation de flots.

La méthode de mesure indirecte de dissipation de puissance utilisée dans notre étude est évidemment préférée à toute autre relation empirique car cette technique de mesure peut être reproduite sur tous les transformateurs et les moteurs électriques. Cette technique de mesure comporte moins d'incertitude pour l'estimation de la puissance que les autres méthodes suggérées dans la littérature.

La modélisation du refroidissement externe en spécifiant un facteur de convection constant sur toutes les surfaces externes de la cuve a été convenable dans les deux cas traités. Cette hypothèse a contribué entre autres à reproduire des résultats de mesure. Pour une analyse plus détaillée du phénomène nous pouvons toujours utiliser le logiciel Fluent pour inclure dans la modélisation un écoulement de surface libre à l'extérieur du transformateur.

Comme note finale nous pouvons affirmer que pour le cas traité les avantages associés à l'utilisation d'un code fluide par rapport à l'expérimentation se situent au niveau de :

- la réduction des coûts et du temps de développement de nouveaux designs.
- la capacité de tester des systèmes électriques au-delà de leurs conditions normales d'opération pour des études de sécurité ou de scénarios de risque.
- la génération d'un grand ensemble de résultats détaillés.

L'expérimentation est sans aucun doute d'une grande utilité pour la conception de machines électriques, mais il va de soi que les gros volumes d'informations qu'un code parallèle CFD comme Fluent peut générer, servent aussi à apporter des améliorations au design thermique des transformateurs, avec un degré de sophistication tel qu'il est même possible de prédire les effets des changements de phase et des réactions chimiques dans les écoulements qui régissent un transfert de chaleur en particulier. Il existe certes une bonne fenêtre d'opportunités pour l'application de la démarche suggérée dans l'industrie des électrotechnologies. Toutefois l'utilisation efficace d'un code parallèle CFD requiert de l'expérience pertinente tout comme une bonne connaissance des principes physiques associés à l'écoulement des fluides et des principes de base des algorithmes de résolution numérique.

La contribution du travail de recherche se centre autour de l'élaboration d'un modèle thermique d'un transformateur à sec d'une dimension beaucoup plus complète que celles des modèles recensés dans la littérature. Lesquels demeurent fort simplistes par rapport à la complexité du phénomène analysé, comportant ainsi beaucoup d'incertitude dans

l'analyse de l'effet thermique direct d'une configuration géométrique et électrique et l'optimisation d'un design de transformateur comme celui à l'étude.

Les limites de la méthode et l'approche qui font l'objet du travail de recherche se situent surtout au niveau de l'espace mémoire requis pour faire une simulation CFD de haute résolution en double précision dans le milieu académique. Le RQCHP ne permet pas l'utilisation de codes commerciaux tels que Fluent 6.0 parallèle. L'espace mémoire et la vitesse d'exécution n'y sont pas un obstacle, mais il faut écrire notre propre code CFD parallèle, et cela représente une tâche énorme. Une autre limitation évidente est celle de la représentation géométrique en détail de toutes les composantes internes et externes du transformateur. Nous ne sommes pas toutefois trop loin de la disponibilité d'une technologie d'imagerie du type IRM qui permette de créer un maillage fin des formes compliquées à partir d'une acquisition interne et externe de données à trois dimensions d'un objet à l'étude comme le transformateur à sec analysé dans le travail de recherche proposé. Le maillage est encore l'étape qui demande le plus de temps dans la modélisation numérique des systèmes en ingénierie.

Références

- [1] D.L. Galloway, S.F. Glover, E.R. Ronan, S.D. Sudhoff, "Power electronics based distribution transformers.", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 17, No. 2, 2002, pp. 537-543.
- [2] R. L. Bean, N. Chackan, H. R. Moore, *Transformers for the Electricity Power Industry*, pp. 146-184, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [3] L. F. Blume, *Transformer Engineering*, 2nd ed. New York: Wiley 1951, pp. 275-351.
- [4] Y. A. Mikhailovsky, A. B. Shvidhler, G. E. Tarle, V. M. Tchernogotsky, "Methods of temperature rise calculations of power transformer windings.", *CIGRE Paper* 12-16, 1984.
- [5] K. Karsai, D. Kerenyi, L. Kiss, *Large Power Transformers*, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 1987, pp. 351-535.
- [6] D. J. Allan, P. H. Allen, , "Layer-type transformer-winding cooling factors derived from analog solution of the governing equations", *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol 110, no. 3, pp 523-534, March. 1963.
- [7] M. Pivmec, S. V. Preiningerova, , "Temperature distribution in the coils of a transformer winding", *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 124. no. 3, pp. 218-222, 1997.
- [8] A. R. Prasad, P. Venkateswarlu, "Numerical prediction of the temperature distribution in the coils of a transformer winding.", *CIGRE Paper*, 12-04, 1984.
- [9] A. J. Oliver, "Estimation of transformer winding temperature and coolant flows using a general network method.", *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 127. no. 6, pp. 395-405, 1980.
- [10] P. J. Burton, J. Graham, A.C. Hall, "Recent developments by CEGEB to improve the prediction and monitoring of transformer performance", *CIGRE Paper*, 12-09, 1984.
- [11] J. Aubin, A. Bensmaia, A. Skorek, Simulation du comportement des fluides dans l'analyse thermique des enroulements de transformateurs de puissance, Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Vancouver, 1993.
- [12] M. Saravolac, K. Tekletsadik, Calculation of losses in structural parts of transformers by FE method, IEE Colloquium on field modeling Applications to high voltage power apparatus, London UK, 1996.
- [13] A. Pelikant, J. Turowski, Eddy currents losses and hot-spot evaluation in cover plates of power transformers., *IEE Proc.-Electr. Power Appl.*, Vol. 144, No. 6, November 1997.

- [14] T. Holifield, L.W. Pierce, A thermal model for optimized distribution and small power transformer design, IEEE Conference on Transmission and Distribution, Vol. 2, pp. 925-929, 1999.
- [15] J. Declercq, W. Van der Veken, Accurate hot spot modeling in a power transformer leading to improved design and performance, IEEE Transmission and Distribution Conference, 1999 ,Vol. 2 , pp. 920 – 924, 1999.
- [16] R.M. Del Vecchio, P Feghali,. Thermal model of a disk coil with directed oil flow IEEE Transmission and Distribution Conference,Vol. 2, pp. 914 – 919, 1999
- [17] J. Driesen, R. Belmans, K. Hameyer, The computation of the effects of harmonic currents on transformers using a coupled electromagnetic-thermal FEM approach, Proceedings of the Ninth International Conference on Harmonics and Quality of Power, Orlando, 2000.
- [18] Y. Saboohi, Thermal model operation of arc furnace transformer in steel making plant in a climate of high humidity., Conference records of the 2000 IEEE Industry Applications Conference, Rome, 2000.
- [19] L. Jianzou, L. Longfu, T. Tiao, Heat analysis of main high speed electric locomotive transformer tank using 3-D finite element method., Proceedings of the Fifth International conference on electrical machines and systems, Shenyang, 2001.
- [20] Simon Ryder, A simple method for calculating winding temperature gradient in power transformers, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 17. No. 4, October 2002.
- [21] R. Girgis, G. Mechler, E. G. teNyenhuis, G. Zhou, Calculation of hot-spot temperature in power distribution transformers, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 17. No. 4, October 2002.
- [22] R. Belmans, J. Driesen, K. Hameyer, Methodologies for coupled transient electromagnetic-thermal finite element modeling of electrical energy transducers, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 38, No. 5, September/October, 2002.
- [23] J. A. Lapworth, E. A. Simonson, Thermal capability assesment for transformers, Second International Conference on the reliability of transmission and distribution Equipment, Coventry UK, 1995 .
- [24] L. Adams, D. Xie, New parallel SOR method by domain partitioning, SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 20, No. 6, pp. 2261-2281, 1999.
- [25] J. A. Vogel, B. Szyld, A flexible quasi-minimal residual method with inexact preconditioning, SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 23, No. 2, pp. 363-380, 2001.

- [26] J. Dongarra, G. Henry, D. Watkins, A parallel implementation of the nonsymmetric QR algorithm for distributed memory architectures, SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 24, No. 1, pp. 284-311, 2002.
- [27] C. Paige, Z. Strakos, Residual and backward error bounds in minimum residual Krylov subspace methods, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 23, No. 6, pp. 1898-1923, 2002.
- [28] C. Haase, M. Kuhn, S. Reitzinger, Parallel algebraic multigrid methods on distributed memory computers, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 24, No. 2, pp. 410-427, 2002.
- [29] R. E. Bank, R. K. Smith, An algebraic multilevel multigraph algorithm, SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 23 Number 5 pp. 1572-1592, 2002.
- [30] C. Oosterlee, T. Washio, R. Wienands, Fourier analysis of GMERS(m) preconditioned by multigrid, SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 22, No. 2, pp. 582-603, 2000.
- [31] E. Quintana, X. Sun, R. Van de Gein, A note on parallel matrix inversion SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 22, No. 52, pp. 1762-1771, 2001.
- [32] O. Bröker, M. Grote, C. Mayer, Robust parallel smoothing for multigrid via sparse approximate inverses, SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 23, No. 4, pp. 1396-1417, 2001.
- [33] Edmond Chow, A priori sparsity patterns for parallel sparse approximate inverse preconditioners, SIAM Journal, Scientific Computing, Vol. 21, No. 5, pp. 1804-1822, 2000.
- [34] B. Beckermann, A. B. J. Kuijlaars, Superlinear convergence of conjugate gradients, SIAM Journal, Numerical Analysis, Vol. 39, No. 1, pp. 300-329, 2001.
- [35] J. Erhel, F. Guyomarch, Y. Saad, M. Yeung, A deflated version of the conjugate gradient algorithm.
- [36] Eric Belanger, Report on iterative methods based on the conjugate gradient, Rapport interne Réseau Québécois de Calcul de Haute Performance, Montreal 2003.
- [37] Christian Vollaire, *Modélisation de phénomènes électromagnétiques hyperfréquences sur ordinateur parallèle*, Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, Septembre 1997.
- [38] P. Rajan, J. Raju, "Application of the covariant projection finite elements in the E field formulation for wave guide analysis.", Applied Computational Electromagnetics Society, July 2002, University of Mississippi.

- [39] G. Dhatt, G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Presses de l'Université Laval, Sainte-Foy, 1989.
- [40] <http://energy.copper.org/copper-wound.html>.
- [41] P. Kohner, *ANSYS User's Manual*, vol. 4, Analysis systems Inc., Houston, 1992.
- [42] S.S. Rao, *The finite element method in engineering*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [43] R. L. Ferrari, P. P. Sylvester, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University press, 2nd edition, Cambridge, 1991.
- [44] J. Jin, *The Finite Element in Electromagnetics*, John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [45] Matlab User's Manual.
- [46] P. Lascaux, R. Thédor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur 2. Méthodes itératives*, 2^e édition, Masson, Paris, 1994.
- [47] I. Duff, A. M. Erisman, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Clarendon Press, New York, 1990.
- [48] T. Iwashita et al., "Three-dimensional finite brick-type edge-element Eddy current analysis using parallelized linear-system solvers", *International Conference on Parallel Computing in Electrical Engineering*, IEEE Computer Society, Trois Rivieres, Quebec, Canada, pp. 204, 2000.
- [49] B. Gebhar, *Buoyancy Induced Flows and Transport*, Hemisphere Publishing Corporation, June 1988.
- [50] Notes de cours 305-654B Computational Fluid Flow and Heat Transfer, Mechanical Engineering Department McGill University.
- [51] G. F. Lane-Serff, P. F. Linden, "Emptying Filling Boxes: The Fluid Mechanics of Natural Ventilation", *Journal Fluid of Mechanics* 212, pp.309-335, 1990.
- [52] M. J. Cook, Lomas K. J, "Guidance on the Use of Computational Fluid Dynamics for Modelling Buoyancy-Driven Flows.", *Proceedings IBPSA '97*, Volume 3, pp.57-64, 1997.
- [53] J. R. Simonson, *Engineering Heat Transfert*, Hemisphere, New York, 1989.
- [54] M. Hortmann, M. Perić, " Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Benchmark solutions ", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 11, 189-207, 1990.

- [55] S. A. Orszag, V. Yakhot, “Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique”, *Physics of Fluids A* 4 no. 7, pp.1510-1520, 1992.
- [56] Launder, B. E. and Spalding, D. B. “The Numerical Computation of Turbulent Flows”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3, pp.269-289, 1974
- [57] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, D C W Industries, July 1 1998.
- [58] J. P. Holman, *Heat Transfer*, McGraw-Hill Company, 9th edition, October 2001.
- [59] S. V. Patankar, *Numerical HeatTransfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corp., Washington, D.C., 1980.
- [60] W. Malalasekera, H. K. Versteeg, *An Introduction to Computational Fluids Dynamics: The finite Volume Method*, Longman, Essex, England,1995,
- [61] J. R. Gilbert, E. Zmijewski, A parallel algorithm for sparse symbolic Cholesky factorization on a multiprocessor, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1988.
- [62] A. George, M. T. Heath, Symbolic Cholesky factorization on a local-memory multiprocessor, *Parallel Computing*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1987.
- [63] J. Liu, A Compact Row Storage Scheme for Cholesky Factors Using Elimination Trees, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 12, No. 2, June 1986.
- [64] Y. Saad, “*Iterative Methods for Sparse Linear Systems* ”, PWS Publishing, New York, 1996.
- [65] A. Gupta, V. Kumar , *Introduction to parallel computing, design and analysis of algorithms*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Redwood City, California, 1994.
- [66] L. Nicolas, C. Vollaie, “Preconditionning techniques for the conjugate gradient solver on a parallel distributed memory computer”, *IEEE Transactions on Magnetics*”, Vol. 34, No. 5, pp. 3347-3350, 1998.
- [67] P.S. Pacheco, *Parallel programming with MPI* , Morgan Kaufman Publishers Inc., San Francisco California, 1997.
- [68] A. Charrette, S, Lahaie, “Évaluation des procédures de réparation des moteurs électriques”, LTEE 97-04. Laboratoire des technologies Electrochimiques et des Électrotechnologies d’Hydro-Québec, Octobre 1997.

- [69] C. Chillet, R. Isnard, "Analysis and localization of losses in an induction machine using a calorimetric method, Electric Machines and Power Systems", 18, 29-39, 1990.
- [70] A. Bousbaine, W. F. Low, "Thermal modeling of induction motors based on accurate loss density measurements", Proceedings ICEM, UMIST, Manchester, 953-957, 1992.
- [71] G. Rakotonirina et al., A new approach to modeling core losses in induction motor using polynomial functions", IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Toronto, May 2001.
- [72] G. Rakotonirina, *Modélisation thermique des moteurs asynchrones à cage par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, Université du Québec à Trois Rivières, Avril 2001.