UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
WILLIAM GAUTHIER

SUR LES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS NON-HOMOGÈNES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES EN (3+1) DIMENSIONS OBTENUES VIA LA MÉTHODE DES INVARIANTS DE RIEMANN

OCTOBRE 2021

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de trouver des classes de solutions des équations de la dynamique des fluides par la méthode de Riemann des caractéristiques généralisées. Ces équations décrivent le mouvement en 3+1 dimensions d'un fluide idéal (non-visqueux) en présence de la force gravitationnelle et de Coriolis dans un système de coordonnées non-inertiel. Le système d'équations initial est un système hyperbolique qu'on met sous forme algébrique en utilisant les éléments intégrals simples homogènes et non-homogènes. Une fois ceux-ci sont calculés, on trouve les solutions de rang 1 en termes des invariants de Riemann du système homogène et non-homogène de la dynamique des fluides qu'on nomme respectivement ondes simples et états simples. On trouve les ondes simples et les états simples entropiques, acoustiques et hydrodynamiques qu'on dénote respectivement par : E, A_ϵ, H, E^0, A_ϵ^0 et H^0. L'approche est ensuite généralisée de manière à obtenir des solutions de rang 2 représentant la propagation d'une onde simple sur un état simple. Parmi les solutions de rang 2, on retrouve les classes suivantes : E^0E, E^0A_ϵ, A_ϵ^0E, $A_\epsilon^0A_\epsilon$, H^0E et H^0A_ϵ. Nous obtenons, pour chacun des cas, des solutions analytiques admettant des fonctions arbitraires d'une variable. En particulier, la spécification de ces fonctions nous permet de trouver des solutions de rang 2 de type solitonique (kink, bump) qui représentent un intérêt particulier en physique. Les résultats sont résumés dans les Tables A.1, A.2, A.3, A.4, A.5 et A.6.

William Gauthier | Michel Grundland

Avant-propos

J'aimerais d'abord remercier mon directeur de recherche, Michel Grundland, non seulement pour le support financier accordé de sa subvention de recherche du CRSNG, mais aussi pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils toujours justes.

Pour leur contribution moins directe mais non moindre, je remercie mes parents et ma conjointe, qui se sont montré d'un support indispensable lors de la rédaction de ce mémoire et de mon parcours académique. Sans vous, tout cela n'aurait aucun sens.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce mémoire est de trouver des solutions analytiques exactes en termes des invariants de Riemann des équations de la dynamique des fluides non-homogènes en 3+1 dimensions pour l'écoulement d'un fluide idéal (non-visqueux) en présence de la force gravitationnelle $\rho\vec{g}$ et de la force de Coriolis $\rho(\vec{\Omega} \times \vec{v})$. Ces équations forment un système hyperbolique non-homogène quasi-linéaire du premier ordre. La méthode employée sera basée sur la généralisation de la méthode des invariants de Riemann établie dans les articles [1],[2],[3],[4],[5]. Plus spécifiquement, on trouve d'abord les solutions au système homogène (solutions de rang 1) qu'on dénote ondes simples. Ces solutions décrivent réellement une onde. On calcule ensuite les solutions du système non-homogène qu'on dénote états simples. Ces solutions sont d'un intérêt particulier étant donné qu'elles sont la base pour construire des solutions d'ordre supérieur (rang 2 et plus) et qu'elles existent pour tous systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons aux solutions de rang 2, soit la superposition d'une onde simple sur un état simple. Physiquement, ce type de solution représente une onde et le milieu dans lequel elle se meut.

Dans le Chapitre 2, nous considérons, selon les articles [4] et [5], les expressions déterminant les éléments intégrals simples homogènes et non-homogènes permettant de déterminer les solutions de rang 1 d'un système d'équations quasi-linéaire du premier ordre. On définit ensuite les ondes simples de Riemann (solutions du système homogène) et les états simples de Riemann (solutions du système non-homogène) du système d'équations. On y traite aussi la notion de leur superposition non-linéaire et leurs propriétés. On vérifie l'hypothèse que les conditions de compatibilité sont respectées de manière à garantir l'existence de solutions de rang 2. Il y est démontré que de telles solutions existent, que la propagation d'une onde simple sur un état simple survient et que ces solutions de rang 2 peuvent être écrites en terme des invariants de Riemann. On y présente aussi plusieurs théorèmes qui, selon l'article [5], donnent une solution en terme des invariants de Riemann sous forme implicite pour un système d'équations aux dérivées partielles.

Dans le Chapitre 3, la méthode des invariants de Riemann est appliquée aux équations non-homogènes classiques de la dynamique des fluides

$$\begin{aligned} &\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] + \nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}), \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\kappa}}\right) + (\vec{v}\cdot\nabla)\left(\frac{p}{\rho^{\kappa}}\right) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

où κ est le coefficient adiabatique, ρ est la densité, p la pression et $\vec{v}$ la vitesse d'un fluide idéal se déplaçant sous l'influence de la force gravitationnelle $\rho\vec{g}$ et de Coriolis $\rho(\vec{\Omega}\times\vec{v})$ dans un système de coordonnées non-inertiel. On détermine alors les éléments intégrals simples homogènes et non-homogènes du système (1.1).

Dans le Chapitre 4, les solutions du système non-homogène (1.1), qu'on appelle états simples, sont calculées en termes des invariants de Riemann et interprétées d'un point de vue physique. Les solutions trouvées sont l'état entropique simple E^0, acoustique simple A^0_ϵ et hydrodynamique simple H^0. Ces types de solutions se distingue physiquement par leur vitesse. Les ondes entropiques sont les ondes qui ont une vitesse équivalente à celle de leur écoulement, les ondes acoustiques sont les ondes qui ont se déplacent à la vitesse du son et les ondes hydrodynamiques sont, tout simplement, les autres ondes.

Dans le Chapitre 5, on étudie la propagation d'une, deux et plusieurs ondes simples sur un état simple d'un système d'équations non-homogène quasi-linéaire hyperbolique du premier ordre. On se concentre sur l'importance physique des solutions de rang 2 ou plus. On remarque notamment la conservation du nombre et du type des ondes en superposition élastique.

Dans le Chapitre 6, on étudie les solutions de rang 2 de la dynamique des fluides, soit la propagation d'une onde simple de Riemann sur un état simple (la superposition d'une onde simple sur un état simple). On y observe six types de solutions de rang 2 : l'onde entropique simple sur l'état entropique simple E^0E, l'onde acoustique simple sur l'état entropique simple E^0A_ϵ, l'onde entropique simple sur l'état acoustique simple A_ϵ^0E, l'onde acoustique simple sur l'état acoustique simple $A_\epsilon^0A_\epsilon$, l'onde entropique simple sur l'état hydrodynamique simple H^0E et l'onde acoustique simple sur l'état hydrodynamique simple H^0A_ϵ. Les solutions trouvées à cette étape admettent des fonctions et des paramètres arbitraires. Comme le système admet un certain degré de liberté au niveau des fonctions arbitraires, il est possible de trouver des solutions solitoniques (rang 1) ou multi-solitoniques (rang 2) en spécifiant ces fonctions. Pour chaque type de superposition, une solution de rang 2 implicite est rendue explicite en appliquant le théorème des fonctions implicites et inverses. On y présente une interprétation physique de chacun des résultats obtenus. On utilise le logiciel de calcul symbolique *Mathematica* [6] pour générer les graphiques à l'aide de la commande *Plot3D*. Il est de plus utilisé pour vérifier l'exactitude des solutions trouvées.

La conclusion dans le Chapitre 7 contient un résumé des résultats ainsi que des indications pour les recherches futures.

Il est à noté que les Chapitre 3, 4 et 6 représentent des contributions originales.

Chapitre 2

Introduction à la méthode des invariants de Riemann

Ce chapitre introduit la théorie des invariants de Riemann nécessaires aux Chapitres 3, 4 et 6. La présentation consiste en un résumé des articles [4] et [5].

2.1 Concepts Fondamentaux

Nous considérons dans la présente section un système quasi-linéaire d'équations différentielles partielles non-elliptiques et non-homogènes du premier ordre de forme

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} a_j^{s\mu}(u^1, ..., u^l)\frac{\partial u^j(x)}{\partial x^\mu} = b^s(u^1, ...u^l) \quad \text{où } 1 \leq s \leq m, \tag{2.1}$$

où $u^j(x^1, ...x^n)$ sont les variables dépendantes, x^i les variables indépendantes et $a_j^{s\mu}$ et b^s sont des coefficients fonctions des variables dépendantes seulement. L'espace des variables indépendantes est un espace euclidien $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et l'espace des variables dépendantes est $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^l$. On fait l'hypothèse que les conditions initiales $u_0(x)$ sont lisses, soit que $u_0(x) \in \mathbb{C}^l(\mathbb{R}^{n-1})$. Plus généralement, on fait l'hypothèse que toutes les variétés et applications sont aussi lisses que nécessaire. Nous nous intéresserons aux solutions de (2.1) décrivant la propagation et les superpositions non-linéaires d'ondes ayant lieu au sein de notre système.

2.1.1 Ondes simples

Considérons l'équation linéaire homogène

$$\begin{aligned} &a^{s\mu}(u^1, ..., u^l)u^j_{,x^\mu} = 0, \\ &s = 1, ..., m, \qquad \mu = 1, ..., n, \qquad j = 1, ..., l. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dans le cas linéarisé, lorsque les arguments de $a^{s\mu}_j(u)$ sont fixés à une valeur quelconque

$$u(x) = \tilde{u} + \epsilon\gamma e^{i\lambda_\mu x^\mu}, \qquad a^{s\mu}_j(\tilde{u})\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0, \tag{2.3}$$

où ϵ est un petit paramètre, on peut chercher une solution de type onde plane. Dans ce cas, en négligeant les termes d'ordre supérieur en ϵ, l'équation (2.3) dans (2.2) donne

$$a^{s\mu}_j(\tilde{u}^1, ..., \tilde{u}^l)\gamma^j\lambda_\mu e^{i\lambda_\mu x^\mu} = 0,$$

ce qui exige que la relation d'onde

$$a^{s\mu}_j(\tilde{u}^1, ..., \tilde{u}^l)\gamma^j\lambda_\mu = 0 \tag{2.4}$$

soit respectée.

On note l'espace des variables dépendantes par $H \subset \mathbb{R}^l$ ($\tilde{u} \in H$). L'espace des variables indépendantes est noté par $E \subset R^n$ ($x \in E$). On remarque que γ, le **vecteur**

de polarisation, est un élément de H. λ est un **covecteur caractéristique** ou vecteur d'onde qui est élément de l'espace dual des 1-formes linéaires E^*. La condition nécessaire à l'existence d'une solution non-nulle à l'équation (2.4) pour un vecteur γ est que

$$\text{rang}\left|a_j^{s\mu}\lambda_\mu\right| < l, \tag{2.5}$$

où l est le nombre de variables dépendantes.

L'ensemble de tous les covecteurs caractéristiques λ satisfaisant (2.4) pour les valeurs fixes de u ($u = \tilde{u}$) est **nommé cone caractéristique**. La relation (2.4) est appelée **relation d'onde**. La relation (2.5) est quant à elle appelée **relation de dispersion**. Cette relation de dispersion implique que $\gamma = \gamma(u)$ et $\lambda = \lambda(u)$.

Si le nombre d'équations est égal au nombre de variables dépendantes, alors l'équation (2.5) est remplacée par

$$\det\left(a_j^{s\mu}(u)\lambda_\mu\right) = 0, \quad m = l.$$

Comme $a_j^{s\mu}$ dépend de u (les variables dépendantes), les covecteurs $\lambda(u)$ qui satisfont (2.5) dépendent aussi de u. Autrement dit, on a

$$a_j^{s\mu}(u)\gamma^j(u)\lambda_\mu(u) = 0.$$

Il a été montré [1] que même si les relations d'ondes ont été formellement obtenues en linéarisant (2.2) à un point $u = \tilde{u}$, des solutions exactes des équations non-linéaires peuvent être obtenues. Ces solutions de (2.2) sont nommées **ondes** et sont basées sur $\gamma(u)$ et $\lambda(u)$ peut être obtenu. Ceci découle de l'intégration de l'ensemble d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{du^\alpha}{dr} = \gamma^\alpha(u).$$

Soit une certaine courbe de l'espace H tangente en tout point au vecteur de polarisation $\gamma(u)$. Définissons cette courbe comme suit :

$$u = f(r), \qquad r \in [a, b] \subset \mathbb{R}^l.$$

Si on prend une fonction différentielle arbitraire

$$\phi : \mathbb{R}^l \mapsto [a, b],$$

alors la paire

$$u = f(r) \qquad r = \phi(\lambda_\mu(u)x^\mu) \tag{2.6}$$

peut être considéré comme une relation implicite définissant une certaine fonction $u = u(x)$. Par substitution, on peut vérifier qu'une fonction ainsi définie est une solution au système (2.2). Les solutions appartenant à ces classes sont appelées **ondes simples de Riemann**.

Définition 2.1.1 (Catastrophe du gradient). *Les solutions décrivant le comportement de l'onde simple données par la relation implicite* (2.6) *peuvent être dérivées de manière à ce que*

$$\frac{\partial r}{\partial x^\mu} = \frac{\dot{\phi}\lambda_\mu}{1 - \dot{\phi}\frac{d\lambda_\mu}{dr}x^\mu}, \qquad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d(\lambda_\mu x^\mu)}.$$

De ces relations suit que l'hypersurface M définie par

$$\begin{aligned} r &= \phi(\lambda_\mu(r)x^\mu), \\ 1 &= \dot{\phi}\frac{d\lambda_\mu}{dr}x^\mu \end{aligned}$$

correspond aux points où le gradient de r devient infini. Ce phénomène est nommé ***catastrophe du gradient*** *[7]. Une solution peut perdre son sens sur l'hypersurface M. Autrement dit, on pourra observer dans le cas de certaines solutions des discontinuités sur cette surface, par exemple des ondes de choc peuvent apparaître [7].*

Considérons le système (2.1) sous une forme algébrique. On définit un élément intégral comme étant la matrice L^j_μ satisfaisant

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} \in \left\{ L^j_\mu | \sum_{\mu,j} a^{s\mu}_j L^j_\mu = b^s \right\}$$

à un point arbitraire au temps fixé t_0 $u_0(x, t_0) \in \mathbb{H}$. Il s'agit de la matrice des applications tangentes

$$du(x) : \mathbb{E} \mapsto T_u\mathbb{H}, \qquad \delta x^\mu \mapsto \delta u^j, \qquad \delta u^j = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} \delta x^\mu.$$

La matrice L est un élément de l'espace linéaire $L(\mathbb{E}, T_u\mathbb{H}) = T_u\mathbb{H} \otimes \mathbb{E}^*$, où $\mathbb{E}^*$ est l'espace dual des 1-formes linéaires $\lambda : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$. Chaque élément de l'espace $T_u\mathbb{H} \otimes \mathbb{E}^*$ est une somme finie de tenseurs simples $\gamma \otimes \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{E}^*$ et $\gamma \in T_u\mathbb{H}$.

L'élément intégral L^j_μ est définit comme un **élément simple** si son rang est 1, autrement dit si le tenseur correspondant est simple. Dans un tel cas, la matrice se décompose en un produit entre un vecteur $\gamma \in T_u\mathbb{H}$ et un covecteur $\lambda \in \mathbb{E}*$ satisfaisant

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} a^{s\mu}_j(u) \gamma^j \lambda_\mu = b^s \quad \text{où} \quad 1 \leq s \leq m \tag{2.7}$$

Les éléments simples existent lorsque le système (2.7) est non-homogène et a une solution non-triviale γ si et seulement si $\text{rang}\left(\sum_{\mu=1}^{n} a^{s\mu}_j \lambda_\mu, b^s\right) = \text{rang}\left(\sum_{\mu=1}^{n} a^{s\mu}_j \lambda_\mu\right)$. Dans le cas d'un système homogène, la condition est alors $\text{rang}\left(\sum_{\mu=1} a^{s\mu}_j(u)\lambda_\mu\right) < l$.

On construira les solutions de (2.1) à partir d'éléments intégrals simples. Une solution $u : D \subset \mathbb{E} \mapsto \mathbb{H}$ du système (2.1) pour laquelle l'application tangentielle $du(x)$ est un élément intégrable simple $\forall x \in D$ est définie comme une onde simple (solution d'un système homogène) ou un état simple (solution d'un système non-homogène). Le théorème des rangs [8] implique que $u(D) \in \mathbb{H}$ est une sous-variété unidimensionnelle, soit une courbe Γ. Si $r \mapsto f(r) \in \mathbb{H}$ est une paramétrisation de Γ, alors $u(x) = f(r(x))$

où $r(x)$ est une fonction scalaire appelée **invariant de Riemann**.

2.2 États Simples

Dans le cas du système non-homogène (2.1), on introduit la notion d'**état simple** de manière analogue à l'introduction de la notion d'onde simple. Une fonction $u(x)$ est considérée comme un état simple si

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \gamma_0^\alpha \otimes \lambda_i^0(u), \qquad a_j^{s\mu}\gamma_0(u)\lambda^0(u) = b^s(u).$$

Les conditions de compatibilité exigent que

$$\frac{d}{dr^0}\lambda^0 \approx \lambda^0.$$

En choisissant une longueur appropriée pour λ^0, on peut obtenir

$$\frac{d}{dr^0}\lambda^0 = 0. \tag{2.8}$$

Autrement dit, le vecteur λ^0 est constant. Ainsi, on peut représenter la solution de (2.1) par la forme

$$u = f(r^0), \qquad r^0 = \lambda_\mu^0 x^\mu. \tag{2.9}$$

Ces solutions sont appelées états simples du système (2.1). Les solutions du système homogène (2.1), les ondes simples, correspondent réellement à des ondes dans le sens physique tel que défini (par exemple) par Rieutord [9]. En ce qui concerne les solutions au système non-homogène, les états simples, le covecteur λ^0 est analogue à un vecteur d'onde $(\omega, \vec{k})$ déterminant le vitesse et la direction d'une onde simple. Les conditions de compatibilité détaillées plus tôt indiquent que λ^0 ne dépend pas de r^0, λ^0 a plutôt une direction constante dans l'espace physique. La solution peut s'écrire sous la forme $u = u(r^0)$, où $r^0 = \sum_{\mu=1}^4 \hat{\lambda}_\mu^0 x^\mu = \lambda^0 t + \vec{\lambda}\cdot\vec{x}$. L'état simple se propage en direction de $\vec{\lambda}$.

On peut ainsi déduire que les états simples sont des solutions unidimensionnelles dans l'espace physique $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ qui sont constantes sur la famille de plans parallèles $\vec{\lambda} \cdot \vec{x} = 0$ et se propagent à vitesse de phase constante $\lambda^0 = \lambda^0 / |\vec{\lambda}|$ perpendiculairement à ces derniers. Ces solutions de classe $\mathbb{C}^1$ décrivent l'écoulement laminaire. Si (et seulement si) la vitesse de phase λ^0 et la vitesse de groupe δ ne sont pas égales, alors on observera de la dispersion [10].

Chapitre 3

Équations de la dynamique des fluides

Considérons les équations non-homogènes décrivant l'écoulement d'un fluide non visqueux soumis à la force de Coriolis $\rho(\vec{\Omega} \times \vec{v})$ et la force gravitationnelle $\rho\vec{g}$. L'écoulement sera décrit par un système d'équations dans un système de coordonnées non-inertiel donné par [9]

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) + \nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\kappa}}\right) + (\vec{v}\cdot\nabla)\left(\frac{p}{\rho^{\kappa}}\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dans ce cas, l'espace physique $\mathbb{E} \in \mathbb{R}^4$ sera l'espace-temps dont les points ont la forme $(t, \vec{r})$. L'espace des fonctions inconnues $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^5$ a les coordonnées $(\rho, p, \vec{v})$ où ρ est la densité, p la pression et $\vec{v}$ les trois composantes du champs de vitesse. La quantité k, le coefficient adiabatique, est une constante non nulle et positive. Notons que $\vec{\Omega}$ est le double de la fréquence de rotation f et que, sous le bon choix de système de coordonnées, il est possible d'avoir $\vec{\Omega} = (0, 0, 1)$ et donc $|\vec{\Omega}| = 1$. Finalement, une connaissance approfondie de la dynamique des fluides permet de remarquer qu'on néglige ici la force centrifuge. Il s'agit tout simplement d'un choix : négliger les termes d'ordres supérieurs en $\vec{\Omega}$.

Calculons les éléments simples homogènes et non-homogène pour l'équation (3.1). Les éléments de l'espace dual $\mathbb{E}^*$ sont notés $\lambda = (\lambda_0, \vec{\lambda})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^3$. Les éléments de l'espace tangentiel $T_u\mathbb{H}$ sont notés $\gamma = (\gamma_\rho, \gamma_p, \vec{\gamma})$, où $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. On algébrise de manière à ce que les dérivées se décomposent de manière suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \gamma_\rho \lambda_0, & \frac{\partial \rho}{\partial x^i} &= \gamma_\rho \lambda_i \\
\frac{\partial p}{\partial t} &= \gamma_p \lambda_0, & \frac{\partial p}{\partial x^i} &= \gamma_p \lambda_i \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \lambda_0, & \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^i} &= \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \lambda_i.
\end{aligned}$$

On définit finalement

$$\delta = \lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda}. \tag{3.2}$$

Physiquement, δ décrit la vitesse de la propagation d'une perturbation relative au fluide. Finalement, lorsque le système est algébrisé, on obtient

$$\begin{aligned}
&\rho\delta\vec{\gamma} + \gamma_p\vec{\gamma} = \rho(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) \\
&\delta\gamma_\rho + \rho\vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = 0 \\
&\rho\delta\left(\gamma_p - \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho\right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Les solutions au système d'équations $\gamma \in T_u\mathbb{H}$, $\lambda \in \mathbb{E}^*$, déterminent les éléments simples du système d'équations (3.1).

3.1 Éléments simples non-homogènes

On considère (3.3) comme un système d'équations algébriques non-homogènes avec 5 inconnus $(\gamma_\rho, \gamma_p, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. On écrit (3.3) sous forme de matrice de manière à calculer le rang de la matrice et de la matrice augmentée. Ainsi, par le théorème de Kronecker-Cappela on sait que si le rang de la matrice est égal au rang de la matrice augmentée, il y aura une solution. Dans notre cas, cette condition se résume en trois équations

$$\delta_{E^0} = 0, \quad \gamma_p \neq 0, \tag{3.4a}$$

$$\delta_{A_\epsilon^0} = \epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|, \quad \vec{\lambda}\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0, \quad \epsilon = \pm 1, \tag{3.4b}$$

$$\delta_{H^0} \neq 0 \neq \epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|. \tag{3.4c}$$

L'équation (3.4a) détermine les éléments simples non-homogènes entropiques correspondant à l'état entropique simple E^0. En appliquant cette équation à (3.3), on obtient

$$\gamma_p\vec{\lambda} = \rho(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}), \qquad \rho\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda} = 0, \qquad \lambda_0 = -\vec{v}\cdot\vec{\lambda}. \tag{3.5}$$

La résolution du système (3.5) donne les éléments simples non-homogènes entropiques E^0

$$\gamma = (\gamma_\rho, \rho, \vec{a}\times(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})), \qquad \lambda = (-\vec{v}\cdot\vec{g}, \vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}), \tag{3.6}$$

où $\vec{a}$ est un vecteur inconnu et γ_ρ, une fonction inconnue. Les états simples entropiques sont obtenus en résolvant (3.6) en soumettant le système aux conditions de compatibilité.

L'équation (3.4b) détermine les éléments simples non-homogènes acoustiques, A_ϵ^0.

Si on applique l'équation à (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} &\epsilon\rho\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}| + \gamma_p\vec{\lambda} = \rho(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}), \qquad && \epsilon\rho\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|\gamma_\rho + \rho\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda} = 0, \\ &\epsilon\rho\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|\left(\gamma_p - \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho\right) = 0, && \lambda_0 = \epsilon\rho\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}| - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La résolution de (3.7) donne les éléments simples non-homogènes acoustiques A^0_ϵ

$$\begin{aligned} &\gamma = \left(\gamma_\rho\,,\ \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho\,,\ \frac{1}{\epsilon\rho\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|}[\rho(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) - \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho\vec{\lambda}]\right), \\ &\lambda = \left(\epsilon\rho\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}| - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}\,,\ \vec{\lambda}\right), \qquad \vec{\lambda}\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

où γ_ρ est une fonction arbitraire. Encore une fois, la solution de (3.8) soumise aux conditions de compatibilités donne l'état simple acoustique A^0_ϵ.

Répétons une dernière fois le processus, cette fois avec (3.4c) qu'on insère dans (3.3) de manière à trouver les éléments simples non-homogènes hydrodynamiques H^0 :

$$\begin{aligned} &\gamma = \left(\rho\frac{(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho}|\vec{\lambda}|^2}\,,\ \kappa p\frac{(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho}|\vec{\lambda}|^2}\,,\ \frac{-1}{\rho\delta}\left[\rho(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) + \kappa p\frac{(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho}|\vec{\lambda}|^2}\right]\right) \\ &\lambda = (\delta - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}\,,\ \vec{\lambda}), \qquad \delta \neq 0 \neq \epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Finalement, si on soumet (3.9) aux conditions de compatibilités, on trouve les états simples non-homogènes hydrodynamiques H^0.

Par définition de (3.2), la vitesse de l'état entropique E^0 relative au fluide est nulle, donc l'état se meut avec le fluide. La vitesse de l'état acoustique A^0_ϵ relative au fluide est égale à la vitesse du son, soit $\epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|$. La vitesse de l'état hydrodynamique H^0 se meut à n'importe quelle vitesse autre que δ_{E^0} ou $\delta_{A^0_\epsilon}$.

3.2 Éléments Simples Homogènes

Considérons maintenant le système homogène associé à (3.3). La condition d'existence d'une solution non triviale γ est donnée par $\rho^4\delta^3\left(\delta^2 - \kappa p|\vec{\lambda}|^2/\rho\right) = 0$. On peut aussi exprimer ces conditions comme

$$\delta_E = 0, \qquad \delta_{A_\epsilon} = \epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|, \quad \text{où } \epsilon = \pm 1. \tag{3.10}$$

Si on applique la première équation de (3.10) à (3.3), on trouve le système

$$\gamma_p\vec{\lambda} = 0, \qquad \rho\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda} = 0, \qquad \lambda_0 = -\vec{v}\cdot\vec{\lambda},$$

dont les solutions déterminant les éléments simples homogènes entropiques E sont

$$\gamma = (\gamma_\rho\ ,\ 0\ ,\ \vec{a}\times\vec{\lambda}), \qquad \lambda = (-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}\ ,\ \vec{\lambda}), \tag{3.11}$$

où $\vec{a}$ est un vecteur arbitraire. Ces solutions correspondent à des ondes entropiques simples E. Si on refait le même processus mais avec la deuxième équation de (3.10), on trouve le système

$$\begin{aligned} &\rho\epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|\vec{\gamma} + \gamma_p\vec{\lambda} = 0, && \epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|\gamma_\rho + \rho\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda} = 0, \\ &\rho\epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}|\left(\gamma_p - \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho\right) = 0, && \lambda_0 = \epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}|\vec{\lambda}| - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La solution acoustique A_ϵ au système (3.12) est

$$\gamma = \left(\gamma_\rho\ ,\ \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho\ ,\ \epsilon\sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}\frac{\gamma_\rho}{\rho}\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|}\right), \qquad \lambda = \left(|\vec{\lambda}| - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}\ ,\ \vec{\lambda}\right). \tag{3.13}$$

Cette solution correspond aux éléments acoustiques simples homogènes correspondant à des ondes acoustiques simples A_ϵ.

Chapitre 4

États simples (solutions de rang 1)

4.1 État entropique simple E^0 ($\delta = 0$)

Théorème 4.1.1. *Si les conditions* (2.9) *et* (2.8) *sont respectées par le système* (3.6), *alors la solution au système* (3.1) *aura une des formes suivantes :*

(i) *Lorsque* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$, *alors la solution aura la forme*

$$(\rho \ , \ p \ , \ \vec{v}) = (\dot{p}(r) \ , \ p(r) \ , \ \vec{v}_0), \tag{4.1}$$

où $r(t, \vec{x}) = -\vec{v}_0 \cdot \vec{g}t + (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0) \cdot \vec{x}$, $\vec{v}_0$ *est un vecteur arbitraire tel que* $\vec{g} \neq \vec{\Omega} \times \vec{v}_0$ *et* $p(r)$ *est une fonction arbitraire satisfaisant* $\dot{p}(r) > 0$.

(ii) *Lorsque* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$, *alors on aura*

$$(\rho \ , \ p \ , \ \vec{v}) = (\dot{p}(r) \ , \ p(r) \ , \ \nu(r)\vec{\Omega} + \vec{A}), \tag{4.2}$$

où $r(t, \vec{x}) = -\vec{A} \cdot \vec{g}t + (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{A}) \cdot \vec{x}$, $\vec{A}$ *est un vecteur constant arbitraire tel que*

$\vec{A} \cdot \vec{\Omega} = 0$ et $\vec{g} \neq \vec{\Omega} \times \vec{A}$ alors que ν et p sont des fonctions arbitraires positives de r telles que $\dot{p}(r) > 0$. Ces solutions sont les états entropiques simples.

Preuve : Exiger que les conditions de compatibilités pour (3.6) donne le système d'équations

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dr} = \gamma_\rho, \qquad \frac{dp}{dr} = \rho, \\ &\frac{d\vec{v}}{dr} = \vec{a} \times (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}), \qquad \lambda = \begin{bmatrix} -\vec{v} \cdot \vec{g} \\ \vec{g} - (\vec{\Omega} \times \vec{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vec{c} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $\vec{c}$ est un vecteur constant et c_0 est une constante. La première et la deuxième équation de (4.3) donnent immédiatement $\rho = \dot{p}(r)$ et $p = p(r)$. Si on dérive la quatrième équation de (4.3), on trouve

$$\frac{d\vec{v}}{dr} \cdot \vec{g} = 0, \qquad \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{v}}{dr} = 0. \tag{4.4}$$

De la deuxième équation de (4.4), on conclut que le champ de vitesse $\vec{v}$ a la forme

$$\vec{v} = \nu(r)\vec{\Omega} + \vec{A}, \tag{4.5}$$

où ν est une fonction arbitraire de r et $\vec{A}$ est un vecteur constant tel que $\vec{A} \cdot \vec{\Omega} = 0$. En substituant (4.5) dans la première équation de (4.4), on trouve $\dot{\nu}(r)\vec{\Omega} \cdot \vec{g} = 0$, on doit donc considérer les cas **(i)** $\vec{\Omega} \cdot \vec{g} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{\Omega} \cdot \vec{g} = 0$.

(i) Si $\vec{\Omega} \cdot \vec{g} \neq 0$, alors $\dot{\nu}(r) = 0$, le champ de vitesse est donc un vecteur constant $\vec{v}_0$. De $r(t, \vec{x}) = c_0 t + \vec{c} \cdot \vec{x}$ et de la quatrième équation de (4.3), on trouve (4.1).

(ii) Lorsque $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$, la substitution de (4.5) dans la quatrième équation de (4.3) nous donne $c_0 = -\vec{A} \cdot \vec{g}$ et $\vec{c} = \vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{A}$. La troisième équation de (4.3) est alors équivalente à $d\vec{v}/dr \cdot (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v})$, ce qui est satisfaisant à (4.5). On obtient donc (4.2).

□

Un écoulement est dit incompressible si $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho = 0$. Ainsi, le système (3.1) est incompressible si et seulement si $\nabla\cdot\vec{v} = 0$. De plus, un écoulement est dit potentiel lorsque $\nabla\times\vec{v} = 0$. Si on exprime $\vec{v}$ en terme d'invariant de Riemann, on trouve $\nabla\cdot\vec{v} = \vec{\lambda}\cdot\frac{d\vec{v}}{dr}$ et $\nabla\times\vec{v} = \vec{\lambda}\times\frac{d\vec{v}}{dr}$. Finalement, on dit qu'un fluide est isentropique lorsque p/ρ^κ est constant.

Ainsi, (4.2) décrit un écoulement incompressible d'un fluide. La condition pour qu'il soit isentropique est

$$
\begin{aligned}
&p = (k_1 r + k_2)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad \text{lorsque} \quad \kappa \neq 1\\
&p = k_2 e^{k_1 r} \quad \text{lorsque} \quad \kappa = 1,
\end{aligned}
$$

où k_1 et k_2 sont des constantes arbitraires.

4.2 État acoustique simple A_ϵ^0

Théorème 4.2.1. *Si les conditions* (2.9) *et* (2.8) *sont satisfaites par le système* (3.8), *alors la solution du système* (3.1) *prendra une des formes suivantes :*

(i) *Si $\lambda\times\vec{\Omega}\neq 0$, un solution existe lorsque $\vec{\lambda}\cdot\vec{\Omega} = 0$ et est donnée par*

$$
\begin{aligned}
&\rho = \rho_0, \qquad p = p_0,\\
&\vec{v}(S) = \vec{g}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{c})\vec{c} + \left[\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\epsilon\left(\frac{\kappa p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} S + b_0\right]\vec{\Omega} + \vec{g}\cdot\vec{c}(\vec{c}\times\vec{\Omega}),
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

où l'invariant de Riemann est donné par $S(t,\vec{x}) = \left[\epsilon(\kappa p_0/\rho_0)^{1/2} - g\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{c})\right]t + \vec{c}\cdot\vec{x}$ alors que $\rho_0 > 0$, $p_0 > 0$ et $\vec{c} = \vec{\lambda}/\left|\vec{\lambda}\right|$ sont des constantes arbitraires telles que $\vec{c}\cdot\vec{\Omega} = 0$

et $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\neq 0$.

(ii) *Si* $\vec{\lambda}=\epsilon_1\left|\vec{\lambda}\right|\vec{\Omega}$, *alors la solution sera donnée par*

$$\begin{aligned}\rho =&\rho_0, \qquad p=p_0,\\ \vec{v}(r)=&A_1\cos\left[\epsilon\left(\frac{\kappa p_0}{\rho_0}\right)^{-1/2} r+B_1\right]\vec{g}+\epsilon_1\left[\epsilon\left(\frac{\kappa p_0}{\rho_0}\right)^{1/2}-c_0\right]\vec{\Omega}\\ &+\left\{-A_1\sin\left[\epsilon\left(\frac{\kappa p_0}{\rho_0}\right)^{-1/2} r+B_1\right]+1\right\}(\vec{g}\times\vec{\Omega}),\end{aligned}\tag{4.7}$$

où l'invariant de Riemann est donné par $r(t,\vec{x})$ *alors que* $\rho_0>0$, $p_0>0$, $A_1\neq 0$, B_1 *et* c_0 *sont des constantes arbitraires. On a finalement* $\epsilon_1,\epsilon=\pm 1$ *et* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}=0$. *Ces solutions sont les états acoustiques simples.*

Preuve : La condition de compatibilité est satisfaite par (3.8) si :

$$\begin{aligned}&\frac{d\rho}{dr}=\gamma_\rho, \qquad \frac{dp}{dr}=\frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho,\\ &\frac{d\vec{v}}{dr}=\left[\epsilon\rho\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}\right|\right]^{-1}\left[\rho(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})-\frac{\kappa p}{\rho}\gamma_\rho\vec{\lambda}\right],\\ &\text{où,}\\ &\lambda=\begin{pmatrix}\epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}\right|-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}\\ \vec{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{01}\\ \vec{c}_1\end{pmatrix},\\ &(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}=0,\end{aligned}\tag{4.8}$$

où c_{01} et $\vec{c}_1$ sont constants.

En substituant de la première équation de (4.8) dans la deuxième puis en intégrant la relation résultante, on obtient $p=A\rho^\kappa$, où A est la constante d'intégration. En posant $c_0=c_{01}/\left|\vec{c}_1\right|$, $\vec{c}=\vec{c}_1/\left|\vec{c}_1\right|$ et $p=A\rho^\kappa$ dans la quatrième équation de (4.8), on trouve

$$\begin{aligned} &\epsilon(\kappa A)^{1/2}\rho^{(\kappa-1)/2} - \vec{v}\cdot\vec{c} = c_0, \qquad \vec{\lambda} = |\vec{c}_1|\,\vec{c}, \quad |\vec{c}| = 1, \\ &(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{c} = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

On peut donc obtenir deux expressions pour la grandeur $d\vec{v}/dr \cdot \vec{c}$. La première est obtenue en dérivant la première équation de (4.9) par rapport à r alors que la deuxième est obtenue par l'entremise des troisièmes équations de (4.8) et de (4.9) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dr}\cdot\vec{c} &= \epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\rho^{(\kappa-3)/2}\frac{d\rho}{dr} \\ &= -\epsilon(\kappa A)^{1/2}\rho^{(\kappa-3)/2}\frac{d\rho}{dr}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

L'équation (4.10) impose $d\rho/dr = 0$, la densité doit donc être une constante ρ_0. Comme la pression est donnée par $p = A\rho_0^{\kappa}$, elle est aussi constante. Considérons maintenant les cas **(i)** $\vec{c}\times\vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{c}\times\vec{\Omega} = 0$.

(i) Si $\vec{c}\times\vec{\Omega} \neq 0$, l'ensemble de vecteurs $(\vec{c}, \vec{\Omega}, \vec{c}\times\vec{\Omega})$ constitue un base pour $\mathbb{R}^3$. On pose donc $\vec{v} = \alpha(r)\vec{c} + \beta(r)\vec{\Omega} + \tau(r)(\vec{c}\times\vec{\Omega})$, où α, β et τ sont des fonctions de r. La troisième équation de (4.9) implique $\tau\left|\vec{c}\times\vec{\Omega}\right|^2 = \vec{v}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) = \vec{g}\cdot\vec{c}$. La fonction $\tau = \tau_0$ doit donc être constante. On définit $\vec{\omega}_0 = \tau_0(\vec{c}\times\vec{\Omega})$ ce qui, en accord à la troisième équation de (4.9), implique $(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{\omega}_0)\cdot\vec{c} = 0$.

En écrivant la troisième équation de (4.8) en terme de notre base vectorielle, on trouve

$$\frac{d\alpha}{dr}\vec{c} + \frac{d\beta}{dr}\vec{\Omega} = \left[\epsilon(\kappa A)^{1/2}\rho_0^{(\kappa-1)/2}\,|\vec{c}_1|\right]^{-1}(\vec{g} - \alpha\vec{\Omega}\times\vec{c} - \vec{\Omega}\times\vec{\omega}_0). \tag{4.11}$$

Le produit vectoriel entre (4.11) et $\vec{\Omega}\times\vec{c}$ implique que la fonction $\alpha = \left|\vec{\Omega}\times\vec{c}\right|^{-2}(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{\omega}_0)\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{c})$ est constante. Le produit vectoriel entre (4.11) et $\vec{c}$ nous mène à la condition $(d\beta/dr)\vec{\Omega}\cdot\vec{c} = 0$. Si $\vec{\Omega}\cdot\vec{c} \neq 0$, alors $d\beta/dr = 0$ et le champ de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_0$ est un constante qui, selon la troisième équation de (4.8), doit satisfaire $\vec{g} = \vec{\Omega}\times\vec{v}_0$.

La solution du système (3.1) serait alors triviale : $(\rho, p, \vec{v}) = (\rho_0, p_0, \vec{v}_0)$.

Considérons plutôt $\vec{\Omega} \cdot \vec{c} = 0$. L'intégration du produit vectoriel entre (4.11) et $\vec{\Omega}$ résulte en la relation $\beta = \epsilon \left|\vec{c}_1\right|^{-1} (\kappa A)^{-1/2} \vec{g} \cdot \vec{\Omega} \rho_0^{(1-\kappa)/2} r + b_0$, où b_0 est la constante d'intégration. On a donc $\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_0 = \vec{g} - \tau_0 \vec{c}$, il en suit que $\tau_0 = \vec{g} \cdot \vec{c}$ et que $\alpha = \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{c})$. Notons de plus que la première équation de (4.9) est équivalente à $c_0 = \epsilon(\kappa A)^{1/2} \rho_0^{(\kappa-1)/2} - \alpha$. L'invariant de Riemann est donné par $r(t, \vec{x}) = c_{01} t + \vec{c}_1 \cdot \vec{x} = \left|\vec{c}_1\right| (c_0 t + \vec{c} \cdot \vec{x})$. Pour simplifier, on définit $S(t, \vec{x}) = r(t, \vec{x}) / \left|\vec{c}_1\right|$ et on obtient (4.6).

(ii) Si $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$, alors on doit avoir $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{\Omega}$ $(\epsilon_1 = \pm 1)$ et, comme conséquence de la troisième équation de (4.9), $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$. Ainsi, l'ensemble de vecteurs $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g} \times \vec{\Omega})$ forme une base vectorielle pour $\mathbb{R}^3$. On pose $\vec{v} = \alpha(r)\vec{g} + \beta(r)\vec{\Omega} + \tau(r)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$ où α, β et τ sont des fonctions de r. En substituant cette nouvelle définition ainsi que $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{\Omega}$ dans la première équation de (4.9), on remarque que la fonction $\beta = \epsilon_1 \left[\epsilon(\kappa A)^{1/2} \rho_0^{(\kappa-1)/2} - c_0\right] = \beta_0$ est constante. Substituant encore une fois notre définition du champ de vitesse mais dans la troisième équation de (4.8), on trouve cette fois la condition

$$\frac{d\alpha}{dr}\vec{g} + \frac{d\tau}{dr}(\vec{g} \times \vec{\Omega}) = \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{1/2} \left|\vec{c}_1\right|\right]^{-1} \left[(1-\tau)\vec{g} + \alpha(\vec{g} \times \vec{\Omega})\right],$$

autrement dit,

$$\frac{d\alpha}{dr} = \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} \left|\vec{c}_1\right|\right]^{-1} (1-\tau), \qquad \frac{d\tau}{dr} = \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{1/2} \left|\vec{c}_1\right|\right]^{-1} \alpha. \tag{4.12}$$

Dériver la première équation de (4.12) par rapport à r permet, par l'entremise de la deuxième équation de (4.12), de trouver l'équation différentielle ordinaire de deuxième ordre $d^2\alpha/dr^2 + \left[\epsilon \left|\vec{c}_1\right| (\kappa p_0/\rho_0)^{1/2}\right]^{-2} \alpha = 0$. La solution à cette équation est bien connue et est donnée par $\alpha = A_1 \cos\left\{\left[\epsilon \left|\vec{c}_1\right| \left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{1/2}\right]^{-1} r + B_1\right\}$, où B_1 et A_1 sont des constantes arbitraires. La première équation de (4.12) permet alors de trouver une expression pour τ. L'invariant de Riemann est encore une fois donné par $r(t, \vec{x}) =$

$c_{01}t + \vec{c}_1 \cdot \vec{x} = |\vec{c}_1| (c_0 t + \vec{c} \cdot \vec{x})$. Pour simplifier, on définit $S(t, \vec{x}) = r(t, \vec{x}) / |\vec{c}_1|$ et on obtient (4.7). $\square$

4.3 État hydrodynamique simple H^0

Théorème 4.3.1. *Si le système (3.9) est satisfaisant aux conditions (2.9) et (2.8), alors sa solution a une des formes suivantes :*

Cas 1 : $\vec{\lambda} \times \vec{\Omega} \neq 0$, $\vec{\lambda} \cdot \vec{\Omega} = 0$

$$\begin{aligned} &\rho(S) = \rho(S), \qquad p = A\rho^{\kappa} \\ &\vec{v}(S) = \left(\frac{1}{a_1 \rho(S)} - c_0\right) \vec{c} + \left(\vec{g} \cdot \vec{\Omega} a_1 \int_0^S \rho(\xi) d\xi + b_1\right) \vec{\Omega} \\ &\qquad + \left\{\left[\vec{g} \cdot (\vec{c} \times \vec{\Omega}) - c_0\right] a_1 \int_0^S \rho(\xi) d\xi + S + T_1\right\} (\vec{c} \times \vec{\Omega}), \end{aligned} \tag{4.13}$$

où l'invariant de Riemann est donné par $S(t, \vec{x}) = c_0 t + \vec{c} \cdot \vec{x}$ et la densité $\rho(S) > 0$ est donnée sous forme implicite par

$$\begin{aligned} S(t, \vec{x}) = \pm \int_{S_0}^{S[r^0(t,\vec{x})]} &\left(\frac{1}{a_1^2 \rho^3} - \frac{\kappa A}{\rho^{\kappa - 2}}\right) \\ &\cdot \left\{(T_1 - \vec{g} \cdot \vec{c})^2 - \frac{1}{a_1^2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_0^2}\right) - F(\rho) \right. \\ &\left. - 2[\vec{g} \cdot (\vec{c} \times \vec{\Omega})] \left[A(\rho^{\kappa} - \rho_0^{\kappa})\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)\right]^{-1/2} \right\} d\rho, \end{aligned} \tag{4.14}$$

où $\rho_0 = \rho(0)$,

$$\rho \neq -\frac{1}{a_1[\vec{g} \cdot (\vec{c} \times \vec{\Omega}) - c_0)^{-1}}, \qquad F(p) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{\kappa A}{\kappa - 1}\right)(\rho^{\kappa - 1} - \rho_0) & \kappa \neq 1 \\ 2A \ln\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right) & \kappa = 1 \end{cases}.$$

Ici, $A > 0$, $a_1 \neq 0$, b_1, T_1, c_0 et $\vec{c} = \vec{\lambda} / |\vec{\lambda}|$ sont des constantes arbitraires telles que

$\vec{c} \cdot \vec{\Omega} = 0$ *et* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$ *ou* $\rho \neq -\left\{a_1\left[\vec{g} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{\Omega}\right) - c_0\right]\right\}^{-1}$.

Cas 2 : $\vec{\lambda} = \epsilon_1 \left|\vec{\lambda}\right| \vec{\Omega}$, $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$

$$\begin{aligned} \rho =& \rho_0, \qquad\qquad p = p_0 \\ \vec{v}(S) =& A_1 \cos\left[(c_0 + \epsilon_1 B_0)^{-1} S + B_1\right] \vec{g} + B_0 \vec{\Omega} \\ &+ \left\{1 - A_1 \sin\left[(c_0 + \epsilon_1 B_0)^{-1} S + B_1\right]\right\} (\vec{g} \times \vec{\Omega}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $S(t, \vec{x}) = c_0 t + \epsilon_1 \vec{\Omega} \cdot \vec{x}$, $\epsilon_1 = \pm 1$ *et* $\rho_0 > 0$, $p_0 > 0$, c_0, $B_0 \neq -\epsilon_1 c_0$, $A_1 \neq 0$ *et* B_1 *sont des constantes arbitraires.*

Cas 3 : $\vec{\lambda} = \epsilon_1 \left|\vec{\lambda}\right| \vec{\Omega}$, $\vec{g} = \epsilon_2 \left|\vec{g}\right| \vec{\Omega}$

$$\begin{aligned} \rho =& \rho(S) \qquad p = A\rho^\kappa \\ \vec{v}(S) =& A_1 \cos\left[\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{K\left|\vec{g}\right|}\left(A\rho^\kappa + \frac{K^2}{\rho}\right) + B_1\right] \vec{e}_1 \\ &- A_1 \sin\left[\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{K\left|\vec{g}\right|}\left(A\rho^\kappa + \frac{K^2}{\rho}\right) + B_1\right] \vec{e}_2 + \left(\frac{K}{\rho} - c_0\right) \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $S(t, \vec{x}) = c_0 t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x}$ *et où la densité* $\rho(S)$ *est donnée par la relation implicite*

$$S = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\left|\vec{g}\right|}\left[\left(\dfrac{\kappa A}{\kappa - 1}\right)\rho^{\kappa - 1} + \dfrac{K^2}{2\rho^2}\right] + \rho_0 & \kappa \neq 1 \\ \dfrac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\left|\vec{g}\right|}\left(A \ln \rho + \dfrac{K^2}{2\rho^2}\right) + \rho_0 & \kappa = 1 \end{cases}. \tag{4.17}$$

$A > 0$, A_1, B_1, $K \neq 0$, c_0 *et* ρ_0 *sont des constantes arbitraires et* $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$, $\vec{\Omega} = \vec{e}_3$. *Ces solutions sont nommées états hydrodynamiques simples.*

Preuve : En appliquant les conditions de compatibilités à (3.9), on trouve le système d'équations différentielles

$$\frac{d\rho}{dr^0} = -\rho \frac{\left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{\lambda}}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho} \left|\vec{\lambda}\right|^2} \tag{4.18a}$$

$$\frac{dp}{dr^0} = -\kappa p \frac{\left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{\lambda}}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho} \left|\vec{\lambda}\right|^2} \tag{4.18b}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dr^0} = \frac{1}{\delta}\left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}\right) + \frac{\kappa p}{\rho\delta} \frac{\left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{\lambda}}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho} \left|\vec{\lambda}\right|^2} \vec{\lambda} \tag{4.18c}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \delta - \vec{v} \cdot \vec{\lambda} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{01} \\ \vec{c}_1 \end{pmatrix} \tag{4.18d}$$

et c_{01} et $\vec{c}_1$ sont constants. Les équations (4.18a) et (4.18b) donnent immédiatement $p = A\rho^\kappa$, où A est une constante arbitraire. L'équation (4.18d) donne $\delta = c_{01} + \vec{v} \cdot \vec{c}_1$. On définit encore $\vec{c} = \vec{c}_1 / \left|\vec{c}_1\right|$ et $c_0 = c_{01} / \left|\vec{c}_1\right|$.

Considérons pour commencer le cas où $\vec{c} \times \vec{\Omega} \neq 0$. On peut alors poser $\vec{v} = \alpha(r^0)\vec{c} + \beta(r^0)\vec{\Omega} + \tau(r^0)\left(\vec{c} \times \vec{\Omega}\right)$ et $\vec{g} = g_1\vec{c} + g_2\vec{\Omega} + g_3\left(\vec{c} \times \vec{\Omega}\right)$ où g_1, g_2 et g_3 sont des constantes. Si on exprime δ à l'aide de ces nouvelles définitions, on trouve $\delta = \left|\vec{c}_1\right|\left(c_0 + \alpha(r^0) + \beta(r^0)\vec{\Omega} \cdot \vec{c}\right)$. De même façon, on trouve

$$\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} = (g_1 - \tau(r^0))\vec{c} + (g_2 + \tau(r^0)\vec{\Omega} \cdot \vec{c})\vec{\Omega} + (g_3 + \alpha(r^0))\left(\vec{c} \times \vec{\Omega}\right).$$

Si on substitue ces quantités ainsi que $\vec{\lambda} = \left|\vec{c}_1\right|\vec{c}$ dans l'équation (4.18c) et qu'on compare les coefficients, on obtient

$$\frac{d\alpha(r^0)}{dr^0} = \frac{(g_1 - \tau(r^0))(c_0 + \alpha(r^0) + \beta(r^0)\vec{\Omega} \cdot \vec{c})^2 + \kappa A\rho(r^0)^{\kappa-1}(g_2 + \tau(r^0)\vec{\Omega} \cdot \vec{c})\vec{\Omega} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{c}_1\right|(c_0 + \alpha(r^0) + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})\left[(c_0 + \alpha(r^0) + \beta(r^0)\vec{\Omega} \cdot \vec{c})^2 - \kappa A\rho(r^0)^{\kappa-1}\right]},$$

$$\frac{d\beta(r^0)}{dr^0} = \frac{g_2 + \tau(r^0)\vec{\Omega} \cdot \vec{c}}{\left|\vec{c}_1\right|(c_0 + \alpha(r^0) + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})}, \qquad \frac{d\tau(r^0)}{dr^0} = \frac{g_3 + \alpha(r^0)}{\left|\vec{c}_1\right|(c_0 + \alpha(r^0) + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})}$$

et l'équation (4.18a) devient

$$\frac{d\rho(r^0)}{r^0} = -\rho(r^0)\frac{\left[(g_1 - \tau(r^0)) + (g_2 + \tau(r^0)\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega}\cdot\vec{c}\right]}{|\vec{c}_1|\left[(c_0 + \alpha(r^0) + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})^2 - \kappa A\rho(r^0)^{\kappa-1}\right]}.$$

On obtient une solution au système (4.19) sous la condition $\vec{\Omega}\cdot\vec{c} = 0$. Dans ce cas, le système (4.19) se simplifie à

$$\frac{d\alpha(r^0)}{dr^0} = \frac{(g_1 - \tau(r^0))(c_0 + \alpha(r^0))}{|\vec{c}_1|\left[(c_0 + \alpha)^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}\right]}, \tag{4.20a}$$

$$\frac{d\beta(r^0)}{dr^0} = \frac{g_2}{|\vec{c}_1|\,(c_0 + \alpha(r^0))}, \tag{4.20b}$$

$$\frac{d\tau(r^0)}{dr^0} = \frac{g_3 + \alpha(r^0)}{|\vec{c}_1|\,(c_0 + \alpha(r^0))} = |\vec{c}_1|^{-1}\left(\frac{g_3 - c_0}{c_0 + \alpha(r^0} + 1\right), \tag{4.20c}$$

$$\frac{d\rho(r^0)}{dr^0} = -\frac{\rho(r^0)(g_1 - \tau(r^0))}{|\vec{c}_1|\left[(c_0 + \alpha(r^0))^2 - \kappa A\rho(r^0)^{\kappa-1}\right]}. \tag{4.20d}$$

Les équations (4.20a) et (4.20d) impliquent

$$\frac{1}{\alpha(r^0) + c_0}\frac{d\alpha(r^0)}{dr^0} = -\frac{1}{\rho(r^0)}\frac{d\rho(r^0)}{dr^0},$$

d'où on calcule $\alpha + c_0 = (a_1\rho(r^0))^{-1}$, où a_1 est une constante d'intégration. Substituant cette quantité dans (4.20b) et (4.20c) puis en intégrant, on trouve $\beta(r^0) = g_2 a_1 |\vec{c}_1|^{-1} \int_0^{r^0} \rho(\xi)d\xi + b_1$ et $\tau(r^0) = (g_3 - c_0)a_1 |\vec{c}_1|^{-1} \int_0^{r^0} \rho(\xi)d\xi + |\vec{c}_1|^{-1} r^0 + T_1$, où b_1 et T_1 sont des constantes d'intégration. La fonction de l'invariant de Riemann r^0 est donné par l'expression $r^0(t,\vec{x}) = |\vec{c}_1|\,(c_0 t + \vec{c}\cdot\vec{x})$ qui, après le changement de variable $S(t,\vec{x}) = |\vec{c}_1|^{-1} r^0(t,\vec{x})$ devient $S(t,\vec{x}) = (c_0 t + \vec{c}\cdot\vec{x})$. Cette expression correspond à celle attendue, soit la solution H^0 (4.13).

Comme les états simples correspondent aux solutions du système d'équations non-homogène, on a par conséquent la condition $\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v} \neq 0$. En ce sens, on remarque de l'équation (4.20a) et (4.20c) que $(\tau(r^0) - g_1) = 0$ si et seulement si $\alpha(r^0) + g_3 = 0$. Par conséquent, la condition tout juste mentionnée est équivalente à $g_2 \neq 0$ ou $\alpha + g_3 =$

$(a_1\rho(r^0))^{-1} + (g_3 + c_0) \neq 0.$

Utilisant les expressions susmentionnées pour $\alpha(r^0)$ et $\tau(r^0)$, l'équation (4.20a) devient

$$\left(\frac{1}{a_1^2\rho(S)^3} - \kappa A\rho(S)^{\kappa-2}\right)\frac{d\rho(S)}{dS} = (g_3 - c_0)a_1\int_0^S \rho(\xi)d\xi + S + T_1 - g_1. \tag{4.21}$$

Lorsqu'on dérive l'équation (4.21) par rapport à S, on trouve une équation différentielle de deuxième ordre pour la densité :

$$\frac{d^2\rho(S)}{dS^2} + f(\rho)\left(\frac{d\rho(S)}{dS}\right)^2 + g(\rho) = 0, \tag{4.22}$$

où

$$f(\rho) = -\frac{3a_1^{-2}\rho(S)^{-4} + \kappa(\kappa-2)a\rho(S)^{\kappa-3}}{a_1^{-2}\rho(S)^{-3} - \kappa A\rho(S)^{\kappa-2}}, \qquad g(\rho) = -\frac{(g_3 - c_0)a_1\rho(S) + 1}{a_1^{-2}\rho(S)^{-3} - \kappa A\rho(S)\rho^{\kappa-2}}.$$

Si on pose $Q(\rho) = d\rho(S)/dS$ dans l'équation (4.22), on se retrouve alors avec une équation de Bernouilli en termes de $Q(\rho)$. Cette nouvelle équation devient à son tour une équation linéaire lorsqu'on applique la transformation $U(\rho) = Q(\rho)^2$. La résolution de cette équation donne

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(S)}{dS} &= \pm\, e^{-\int^\rho f(q)dq}\left[-2\int^\rho g(\xi)\exp\left(2\int^\xi f(q)dq\right)d\xi + \text{cte}\right] \\ &= \pm\left(\frac{1}{a_1^2\rho(S)^3} - \kappa A\rho(S)^{\kappa-2}\right)^{-1} \\ &\quad \cdot\left[-2\frac{g_3 - c_0}{a_1\rho(0)} - \frac{1}{a_1^2\rho(0)^2} - 2(g_3 - c_0)Aa_1\rho(S)^\kappa - 2\kappa AF(\rho) + \rho_0\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.23}$$

où

$$F(p) = \begin{cases} \rho^{\kappa-1}/(\kappa-1) & \kappa \neq 1 \\ \ln\rho & \kappa = 1 \end{cases}$$

et ρ_0 est une constante. Les équations (4.23) et (4.21) impliquent

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\rho(S)}{dS}\right|_{S=0} &= \frac{T_1 - g_1}{a_1^{-2}\rho(0)^{-3} - \kappa A\rho(0)^{\kappa-2}} \\ &= \pm\left(\frac{1}{a_1^2\rho(0)^3} - \kappa A\rho(0)^{\kappa-2}\right)^{-1} \\ &\quad \cdot\left[-\frac{2(g_3 - c_0)}{a_1\rho(0)} - \frac{1}{a_1^2\rho(0)^2} - 2(g_3 - c_0)Aa_1\rho(0)^{\kappa} - 2\kappa AF(\rho(p(0)) + \rho_0\right]^{1/2}\end{aligned}$$

d'où on conclut

$$\rho_0 = (T_1 - g_1)^2 + 2\frac{g_2 - c_0}{a_1\rho(0)} + \frac{1}{a_1^2\rho(0)^2} + 2(g_3 - c_0)Aa_1\rho(0)^{\kappa} + \frac{2\kappa A}{\kappa - 1}\rho(0)^{\kappa-1}.$$

En séparant les variables ρ et S dans (4.23) et en intégrant chaque côté de 0 à S, on trouve (4.14).

Traitons maintenant du cas $\vec{c}\times\vec{\Omega} = 0$. Cette condition implique $\vec{c} = \epsilon_1\vec{\Omega}$, où $\epsilon_1 = \pm 1$. Ce cas se divise en deux sous cas, soit lorsque $\vec{g}\times\vec{\Omega} \neq 0$ et lorsque $\vec{g}\times\vec{\Omega} = 0$.

Commençons par traiter le sous-cas $\vec{g}\times\vec{\Omega} \neq 0$. On peut alors utiliser comme base vectorielle l'ensemble de vecteurs $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g}\times\vec{\Omega})$. On pose alors $\vec{v} = \alpha(r^0)\vec{g} + \beta(r^0)\vec{\Omega} + \tau(r^0)\left(\vec{g}\times\vec{\Omega}\right)$. Par conséquence de cette formulation, on trouve $\delta = |\vec{c}|\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha(r^0)\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta(r^0))\right]$, $\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v} = (1 - \tau(r^0))\vec{g} + \tau(r^0)\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\vec{\Omega} + \alpha(r^0)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ et $\vec{\lambda} = |\vec{c}_1|\,\vec{c} = \epsilon_1\,|\vec{c}_1|\,\vec{\Omega}$. Si on substitue ces quantités dans (4.18c) et qu'on compare les coefficients, on trouve

$$\frac{d\alpha(r^0)}{dr^0} = \frac{1 - \tau(r^0)}{|\vec{c}_1|\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha(r^0)\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta(r^0))\right]},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\beta(r^0)}{dr^0} &= \frac{\vec{\Omega}\cdot\vec{g}}{|\vec{c}_1|\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha(r^0)\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta(r^0))\right]} \\ &\quad \cdot\left\{\tau(r^0) + \frac{\kappa A\rho(r^0)^{\kappa-1}}{\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha(r^0)\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta(r^0)\right]^2 + \kappa A\rho(r^0)^{\kappa-1}}\right\},\end{aligned}$$

$$\frac{d\tau(r^0)}{dr^0} = \frac{\alpha(r^0)}{|\vec{c}_1| \left[c_0 + \epsilon_1(\alpha(r^0)\vec{g} \cdot \vec{\Omega} + \beta(r^0))\right]},$$

alors que (4.18a) se transforme en

$$\frac{d\rho(r^0)}{dr^0} = \frac{-\epsilon_1 \vec{g} \times \vec{\Omega}\rho(r^0)}{|\vec{c}_1| \left[c_0 + \epsilon_1(\alpha(r^0)\vec{g} \cdot \vec{\Omega} + \beta(r^0)\right]^2 + \kappa A \rho(r^0)^{\kappa-1}}.$$

On résout le système (4.24) sous l'hypothèse que $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$. Sous cette hypothèse, le système (4.24) devient

$$\frac{d\alpha(r^0)}{dr^0} = 0, \qquad \frac{d\beta(r^0)}{dr^0} = 0 \tag{4.25a}$$

$$\frac{d\tau(r^0)}{dr^0} = \frac{\alpha(r^0)}{|\vec{c}_1| (c_0 + \epsilon_1 \beta)}, \qquad \frac{d\rho}{dr^0} = 0. \tag{4.25b}$$

On remarque que ρ et β sont constants, on les note donc ρ_0 et B_0, respectivement. De plus, la pression est aussi constante $p = p_0$. Du fait que β est constant, les équations (4.25a) et (4.25b) sont résolues comme dans la section précédente. Comme $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{\Omega}$, la fonction de l'invariant de Riemann r^0 prend la forme $r^0(t, \vec{x}) = |\vec{c}_1| (c_0 t + \epsilon_1 \vec{\Omega} \cdot \vec{x})$. En posant $S(t, \vec{x}) = |\vec{c}_1|^{-1} r^0(t, \vec{x})$, on trouve la solution H^0 (4.15).

Traitons finalement le cas $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$, $\vec{g} \times \vec{\Omega} = 0$. On utilise la base orthonormée standard $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ pour $\mathbb{R}^3$. Comme on peut choisir $\vec{\Omega} = (0,0,1)$, on a clairement $\vec{\Omega} = \vec{e}_3$, $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{e}_3$ et $\vec{g} = \epsilon_2 \vec{e}_3$, où $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$. De plus, on a $\vec{\lambda} = |\vec{c}_1| \vec{c} = \epsilon_1 |\vec{c}_1| \vec{e}_3$. Si on pose $\vec{v} = v_1(r^0)\vec{e}_1 + v_2(r^0)\vec{e}_2 + v_3(r^0)\vec{e}_3$, on trouve alors $\delta = |\vec{c}_1| (c_0 + \epsilon_1 v_3(r^0))$ et $\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} = v_2(r^0)\vec{e}_1 - v_1(r^0)\vec{e}_2 + \epsilon_2 |\vec{g}| \vec{e}_3$. Si on écrit (4.18c) en termes de ces vecteur de base, on trouve

$$\frac{d\vec{v}_1}{dr^0} = \frac{v_2}{|\vec{c}_1| (c_0 + \epsilon_1 v_3)}, \tag{4.26a}$$

$$\frac{d\vec{v}_1}{dr^0} = \frac{-v_1}{|\vec{c}_1| (c_0 + \epsilon_1 v_3)}, \tag{4.26b}$$

$$\frac{d\vec{v}_3}{dr^0} = \frac{-\epsilon_1 \epsilon_2 |\vec{g}| \rho}{|\vec{c}_1| ((c_0 + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa A \rho^{\kappa-1})} \tag{4.26c}$$

et l'équation (4.18a) devient

$$\frac{d\rho}{dr^0} = \frac{-\epsilon_1\epsilon_2 \, |\vec{g}| \, \rho(r^0)}{|\vec{c}_1| \left((c_0 + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa A \rho^{\kappa - 1}\right)}. \tag{4.26d}$$

De (4.26c) et (4.26d), on obtient

$$\begin{aligned} (c_0 + \epsilon_1 v_3)^{-1} \epsilon_1 \frac{dv_3(r^0)}{dr^0} &= -\frac{1}{\rho(r^0)} \frac{d\rho(r^0)}{r^0} \\ \Rightarrow c_0 + \epsilon_1 v_3(r^0) &= K \rho(r^0)^{-1}, \end{aligned}$$

où K est une constante d'intégration. En insérant ce résultat dans (4.26d), on trouve l'équation différentielle séparable

$$\frac{d\rho(r^0)}{dr^0} = -\frac{\epsilon_1\epsilon_2 \, |\vec{g}| \, \rho(r^0)^3}{|\vec{c}_1| \left(K^2 - \kappa A \rho^{\kappa+1}\right)}.$$

Après avoir posé $S = |\vec{c}_1|^{-1} r^0$, la solution à cette équation correspond à (4.17). Les équations (4.26a) et (4.26b) impliquent $v_1(r^0) dv_1/dr^0 = -v_2 dv_2/dr^0$, où k est une constante d'intégration. Ainsi, la fonction $v_1(r^0)$ doit satisfaire

$$\frac{dv_1(r^0)}{dr^0} = \pm \frac{\rho(r^0)(k^2 - v_1^2)^{1/2}}{|\vec{c}_1| \, K},$$

d'où on conclut

$$\frac{dv_1}{d\rho} = \frac{dv_1(r^0)}{dr^0} \left(\frac{d\rho(r^0)}{dr^0}\right)^{-1} = \pm \frac{\kappa A \rho(r^0)^{\kappa-1} - K^2 \rho(r^0)^{-2} \, (k^2 - v_1(r^0)^2)^{1/2}}{K \epsilon_1 \epsilon_2 \, |\vec{g}|}. \tag{4.27}$$

Si on sépare les variables $v_1(r^0)$ et $\rho(r^0)$ dans (4.27) et qu'on intègre, on trouve

$$v_1(r^0) = A_1 \cos\left[\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{K \, |\vec{g}|} (A\rho(r^0)^\kappa + K^2 \rho(r^0)^{-1} + B_1\right],$$

où A_1 et B_1 sont des constantes arbitraires. Finalement, on trouve $v_2(r^0)$ par l'équation (4.26a).

On conclut que la solution est donnée par les équations (4.16) avec $r^0(t, \vec{x}) =$

$|\vec{c}_1|\,(c_0 t + \epsilon_1 \vec{\Omega} \cdot \vec{x})$ et $S(t, \vec{x}) = |\vec{c}_1|^{-1}\, r^0$. □

La solution (4.13) représente l'écoulement avec vorticité d'un fluide à l'entropie constante et qui est compressible (supposant que $\rho(r^0)$ ne soit pas constant). La solution (4.15) représente l'écoulement avec vorticité d'un fluide à l'entropie constante et qui est incompressible . La solution (4.16) représente l'écoulement d'un fluide à l'entropie constante et qui est incompressible. L'écoulement présente de la vorticité si $A_1 \neq 0$. Si $A_1 = 0$, alors $\vec{v} = (K\rho(S)^{-1} - c_0)\vec{\Omega}$ et l'écoulement est potentiel.

Chapitre 5

Superposition non-linéaire d'onde simple sur état simple (solutions de rang 2)

5.1 Superposition d'onde simple sur état simple pour le système quasi-linéaire d'ordre 1

Les ondes simples associées au système (2.2) ne sont pas des solution du système non-homogène (2.1). On peut cependant chercher des classes de solution plus générales correspondant à la superposition d'une onde simple sur un état simple. Ces solutions plus générales donc meilleures ont la forme

$$\begin{aligned} &du(x) = \xi\gamma_1 \otimes \lambda^1 + \gamma_0 \otimes \lambda^0, \qquad \sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{n} a_j^{s\mu}(u)\gamma_1^j\lambda_\mu^1 = 0, \\ &\sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{n} a_j^{s\mu}(u)\gamma_0^j\lambda_\mu^0 = b^s(u) \quad \text{où } 1 \leq s \leq m, \;\; \xi \neq 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ désigne le commutateur des champs vectoriels γ_α et γ_β. Autrement dit,

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] := (\gamma_\alpha, \gamma_\beta)_u + \gamma_{\alpha,_{\lambda^\alpha_\nu}} \lambda^\alpha_{\nu,_{\gamma_\beta}} - \gamma_{\beta,_{\lambda^\beta{}_\nu}} \lambda^\beta_{\nu,_{\gamma_\alpha}}.$$

Par $(\gamma_\alpha, \gamma_\beta)_u$, on entend

$$(\gamma_\alpha, \gamma_\beta)_u := \gamma^i_\alpha \frac{\partial}{\partial u^i} \gamma_\beta|_{\lambda^\beta = cte} - \gamma^i_\beta \frac{\partial}{\partial u^i} \gamma_\alpha|_{\lambda^\alpha = cte}.$$

Comme dans le cas de l'état simple (2.9), l'existence de solutions au système (5.1) nécessite les conditions suivantes

$$\begin{aligned} &[\gamma_1, \gamma_0] \in \operatorname{span}\{\gamma_0, \gamma_1\}, \\ &\frac{d\lambda^1}{dr^0} \wedge \lambda^0 \wedge \lambda^1 = 0, \qquad \frac{d\lambda^1}{dr^0} \wedge \lambda^0 = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Si (5.2) est satisfait, il est alors possible de normaliser γ_0 et γ_1 de manière à ce que leur commutateur soit nul. Par conséquent, la surface tangente aux champs γ_0 et γ_1 admet la paramétrisation $u = f(r^0, r^1)$ de sorte que

$$\frac{\partial f(r^0, r^1)}{\partial r^s} = \gamma_s(f(r^0, r^1)) \quad \text{où } \; s = 0,\ 1. \tag{5.3}$$

Les équations (5.1) et (5.3) donnent donc le système

$$\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0, \qquad dr^0 = \lambda^0(r^0, r^1), \qquad dr^1 = \xi \lambda^1(r^0, r^1). \tag{5.4}$$

Les champs de covecteurs λ^s sont fonction de r selon la relation $\lambda^s(r^0, r^1) = \sum_{\mu=1}^n \lambda^s_\mu(f(r^0, r^1)) dx^\mu \in \mathbb{E}^*$. La condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution au système (5.4) est l'existence de coefficients α_s et β_s ($s = 0,\ 1$) fonction de r de sorte que

$$\frac{\partial \lambda^0}{\partial r^0} = \alpha_0 \lambda^0, \qquad \frac{\partial \lambda^0}{\partial r^1} = \alpha_1 \lambda^1, \qquad \frac{\partial \lambda^1}{\partial r^0} = \beta_0 \lambda^0 + \beta_1 \lambda^1 \tag{5.5}$$

Il a été prouvé [1] que si les conditions (5.2) sont satisfaites, alors les solutions du système (2.1) décrivent une certaine superposition non-linéaire d'une onde simple sur un état simple.

Considérons deux cas, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

5.1.1 Cas $\alpha_1 \neq 0$

La deuxième équation de (5.5) permet de trouver une expression pour λ^1 menant à la conclusion que la troisième équation de (5.5) est une conséquence de la première et la deuxième équation de (5.5) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\lambda^1}{\partial r^0} &= \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial r^0}\frac{\partial\lambda^0}{\partial r^1} - \frac{1}{\alpha_1^2}\frac{\partial\alpha_1}{\partial r^0}\frac{\partial\lambda^0}{\partial r^1}\\ &= \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\alpha_0\lambda^0}{\partial r^1} - \frac{\lambda^1}{\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial r^0} = \left(\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\alpha_0}{\partial r^1}\right)\lambda^0 + \left(\alpha_0 - \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\alpha_1}{\partial r^0}\right)\lambda^1.\end{aligned}$$

Soit ϕ la solution à l'équation $\partial\phi/\partial r^0 = \alpha_0$. Si on insère ϕ dans la première relation de (5.5), on obtient

$$\begin{aligned}\lambda^0(r^0, r^1) &= \tau(r^1)e^{\phi(r)}\\ \lambda^1(r^0, r^1) &\propto \frac{\partial\lambda^0}{\partial r^1} \propto \left(\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\tau(r^1) + \dot{\tau}(r^1)\right),\end{aligned} \tag{5.6}$$

où τ est une fonction arbitraire de r^1. Ainsi, le système (5.4) peut se réécrire

$$\begin{aligned}dr^0 &= \tau(r^1)e^{\phi(r)}\\ dr^1 &= \xi\left(\frac{\partial\phi(r^0, r^1)}{\partial r^1}\tau(r^1) + \tau(r^1)\right),\end{aligned} \tag{5.7}$$

où $\dot{\tau}(r^1) \wedge \tau(r^1) \neq 0$. On remarque sans problème qu'on satisfait les conditions d'intégrabilité (5.5).

Théorème 5.1.1. *Toutes solutions du système* (5.7) *peuvent être obtenues en résol-*

vant le système

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu(r^1)x^\mu &= \phi(r^1) + \int_0^{r^0} e^{-\phi(r,r^1)}dr\\ \sum_{\mu=1}^{n} \dot{\tau}_\mu(r^1)x^\mu &= \phi(\dot{r}^1) - \int_0^{r^0} \frac{\partial\phi(r,r^1)}{\partial r^1}e^{-\phi(r,r^1)}dr,\end{aligned} \tag{5.8}$$

où ϕ est une fonction de $\mathbb{R}^1$ arbitraire de classe $\mathbb{C}^1$.

5.1.2 Cas $\alpha_1 = 0$

La deuxième équation de (5.5) implique que λ^0 est une fonction de r^0 uniquement, la première montre par conséquent que α_0 est uniquement fonction de r^0. Définissons encore une fois ϕ, mais cette fois comme fonction différentiable satisfaisant $d\phi/dr^0 = \alpha_0$. L'intégration de la première équation de (5.5) donne $\lambda^0(r^0, r^1) = Ce^{\phi(r^0)}$, où $C \in \mathbb{E}^*$. Soit ϕ et χ deux fonctions arbitraires de r^0 et r^1. De la troisième équation de (5.5), on trouve $\partial\lambda^1/\partial r^0 = \beta_0 Ce^\phi + \beta_1\lambda^1$, d'où on obtient finalement

$$\frac{\partial}{\partial r^0}(\lambda^1 e^{-\phi} - \chi C) = \left(\beta_0 e^{\phi-\sigma} - \frac{\partial\chi}{\partial r^0}\right) C + \left(\beta_1 - \frac{\partial\sigma}{\partial r^0}\right) e^{-\sigma}\lambda^1.$$

On choisit σ et χ comme solutions au système

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r^0} = \beta_1, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial r^0} = \beta_0 e^{\phi-\sigma},$$

d'où on conclut

$$\lambda^1(r^0, r^1)e^{-\sigma(r^0,r^1)} = \chi(r^0, r^1)C + A(r^1), \tag{5.9}$$

où $A \in C^1(\mathbb{H}, \mathbb{E}^*)$. En définissant $\chi(r^0) = \int_0^{r^0} e^{-\phi(r)}dr$, le système (5.4) devient

$$d\chi(r^0) = C, \qquad dr^1 = \xi\left[\chi(r^0, r^1)C + \tilde{A}(r^1)\right]. \tag{5.10}$$

On peut solutionner (5.10) par le théorème suivant.

Théorème 5.1.2. *L'intégration générale du système non-homogène* (5.10) *a la forme implicite*

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{n} c_\mu x^\mu + c_0 = \xi(r^0),\\ &\int_0^{r^0} \chi(r,r^1)e^{-\phi(r)}dr + \sum_{\mu=1}^{n} \tilde{A}(r^1)x\mu = \psi(r^1),\end{aligned} \tag{5.11}$$

où ψ *est une fonction arbitraire et différentiable de* r^1, $c_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\chi(r^0) = \int_0^{r^0} e^{-\phi(r)}dr$.

Le problème de Cauchy pour la superposition d'une onde simple et d'un état simple du système (2.1) est résout de la manière suivante.

En considérant le cas où $\alpha_0 \neq 0$, on présume que $r|_\Gamma = (r^0|_\Gamma, r^1|_\Gamma)$ est donné pour une courbe quelconque où $r^0|_\Gamma$ et $r^1|_\Gamma$ sont inversibles. L'invariant de Riemann r^0 ou r^1 peut être choisi comme paramètre pour Γ, on peut donc avoir une des forme suivant $\Gamma = [(x|\ x = \eta^0(r^0),\ R \circ \eta^0(r^0) = (r^0, \zeta^1(r^0))]$ ou $\Gamma = [x|\ x = \eta^1(r^1),\ R \circ \eta^1(r^1) = (\zeta^0(r^1), r^1)]$. Notons que les fonctions $r^0 \mapsto \zeta^1(r^0)$ et $r^1 \mapsto \zeta^0(r^1)$ sont l'inverse l'une de l'autre. La solution (5.8) prend maintenant la forme

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu(r^1)\eta^{1\mu}(r^1) = \phi(r^1) + \int_0^{\zeta^0(r^1)} e^{-\phi(r,r^1)}dr,\\ &\sum_{\mu=1}^{n} \dot{\tau}_\mu(r^1)\eta^{1\mu}(r^1) = \dot{\phi}(r^1) + \int_0^{\zeta^0(r^1)} \frac{\partial\phi(r,r^1)}{\partial r^1}e^{-\phi(r,r^1)}dr\end{aligned} \tag{5.12}$$

Comme $\eta^1(r^1) = \eta^0(\zeta^0(r^1))$ et $\dot{\eta}^1(r^1) = \dot{\eta}^0(r^0)\dot{\zeta}^0(r^1)$, (5.12) devient

$$\sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu(\zeta^1(r^0))\dot{\eta}^{0\mu}(r^0)e^{\phi(r^0,\zeta^1(r^0))} = 1. \tag{5.13}$$

Ainsi, le long de la courbe initiale Γ, seule une fonction (disons $r|_\Gamma$) est arbitraire, la deuxième est donnée par (5.13).

Théorème 5.1.3. *Soit* r^0 *évalué le long d'une courbe* Γ : $r^0|_\Gamma$. *Supposons que*

1. $r^0|_\Gamma$ *est monotone ;*

2. *la valeur $r^1 = r^1|_\Gamma$ peut être déterminée de façon unique le long de la courbe Γ par l'équation $\lambda^0(r^0, r^1) \circ \dot{\eta}^0(r^0) = 1$ où $x = \eta^0(r^0)$ est l'équation de Γ paramétrisée par $r^0|_\Gamma$;*

3. *les valeurs $r^0|_\Gamma$ et $r^1|_\Gamma$ déterminées de cette façon sont satisfaisantes à la condition de transversalité applicable à la forme $\lambda^1(r|_\Gamma)$.*

Alors, le problème non-homogène de Cauchy a exactement une solution dans le voisinage de Γ.

Traitons maintenant le cas $\alpha_1 = 0$ en supposant que la courbe $\Gamma = (x|x = h(t))$, la valeur $r^1|_\Gamma$ déterminée par $\zeta^1(t)$ et la valeur $r^0(h(r_0^1)) = \zeta_0^0$ sont données. En supposant que $r^1|_\Gamma$ est monotone, on peut le choisir comme paramètre pour la courbe $r^1(h(r^1)) = r^1$. L'équation (5.11) donne alors

$$r^0 = r^0(h(r^1)) = \frac{1}{\chi}(Ch(r^1) + \zeta_0^0 - Ch(r_0^1))$$
$$\psi(r^1) = \int_0^{C(h(r^1)-h(r_0^1))+\zeta_0^0} \chi(\chi^{-1}(r), r^1)dr + \tilde{A}(r^1)h(r^1)$$

et une solution existe à condition que :

Théorème 5.1.4. *Présumons qu'on connaisse la fonction monotone $r^1|_\Gamma$ le long d'une courbe $\Gamma \in \mathbb{E}$. Si, pour la valeur $r^0|_\Gamma$, le vecteur tangent à Γ n'appartient pas à l'annihilateur de forme $\lambda^1(r^0, r^1)|_\Gamma$, alors le problème non-homogène de Cauchy a exactement une solution dans le voisinage de Γ.*

Les résultats de la superposition d'une onde simple sur un état simple peuvent être classifiés mathématiquement selon la définition suivante [11] :

Définition 5.1.1. *Le système 5.1 est dit*

- ***(a)** Exceptionnel (E) s'il existe une valeur $i \in [0, 1]$ telle que $\partial\lambda^i/\partial r^i = 0$.*
- ***(b)** Complètement Exceptionnel (CE) si pour toutes valeurs $i \in [0, 1]$ on a $\partial\lambda^i/\partial r^i = 0$.*
- ***(c)** Linéaire (L) si pour toute valeur $i, j \in [0, 1]$ telles que $i \neq j$ on a $\partial\lambda^i/\partial r^j = 0$.*

— ***(d)*** *Non-Linéaire (NL) si pour une valeur* $i, j \in [0, 1]$ *telles que* $i \neq j$ *on a* $\partial\lambda^i/\partial r^j \neq 0$.

— ***(e)*** *Strictement Non-Linéaire (SNL) si pour toutes valeurs* $i, j \in [0, 1]$ *telles que* $i \neq j$ *on a* $\partial\lambda^i/\partial r^j \neq 0$.

La superposition de l'état simple avec l'onde simple dans le cas **(c)** est linéaire dans le sens physique du terme étant donné que le vecteur d'onde λ^1 ne change pas la direction de propagation, déterminée par λ^0, de l'état simple et inversement. Dans ce cas, le système (2.1) peut être linéarisé, autrement dit un système de coordonnées curvilignes dans lequel (2.1) est un système linéaire peut être trouvé. On se rappelle que les covecteurs λ^0 et λ^1 sont donnés par les expressions

$$\lambda^0 = \tau(r^0)e^{\phi}(r^0, r^1), \qquad \lambda \sim \left[\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\tau(r^1) + \dot{\tau}(r^1)\right]$$

lorsque $\alpha_1 \neq 0$ et par

$$\lambda^0 = Ce^{\phi(r^0)}, \qquad \lambda^1 \sim \left[\chi(r^0, r^1)C + \tilde{A}(r^1)\right]$$

lorsque $\alpha_1 = 0$. Déterminer les valeurs de λ^0 et de λ^1 à partir des résultats du Chapitre 6 mène à la classification des solutions présentée à la Table A.7.

5.2 Système d'évolution décrivant la superposition de deux ondes simples sur l'état simple

Considérons un système quasi-linéaire d'équations différentielles partielles non-homogènes en deux variables dépendantes, soient le temps t et la position dans l'espace

x :

$$\begin{aligned} &u_t + A(u)u_x = B(u), \\ &\vec{x} = (t,x) \in \xi \subset \mathbb{R}^2, \quad u(\vec{x}) = (u^1(\vec{x}), ..., u^l(\vec{x})) \in \mathbb{H} \subset \mathbb{R}^1, \end{aligned} \tag{5.14}$$

où $A = A_s^j(u)$ est une matrice de dimension $l \times l$ et $B(u) = (B^1(u), ..., B^l(u))$ est un vecteur de l composantes. Les éléments simples pour les équations homogènes et non-homogènes (5.14) sont déterminés par des équations algébriques telles que :

$$\begin{aligned} &(Iv_s - A)\gamma_s = 0, \quad \lambda^s = (v_s, -1) \\ &(I\lambda_1^0 + A\lambda_2^0)\gamma_0 = B, \quad \lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0), \quad s = 1, ..., k \leq l. \end{aligned}$$

Définition 5.2.1. *Une onde simple est du $i^{ème}$ type si $\gamma = df/dr$ est le $i^{ème}$ vecteur propre de la matrice A.*

Considérons maintenant la propagation de deux ondes simples sur un état simple. Avec une normalisation appropriée de la longueur des vecteurs γ_0, γ_1, et γ_2, on peut faire disparaitre les commutateurs. On peut alors choisir la paramétrisation de surface $u = f(r^0, r^1, r^2)$, tangente aux champs γ_0, γ_1, et γ_2 de la manière suivante : $\gamma_\sigma = \frac{\partial f}{\partial r^\sigma}$ $(\sigma = 0, 1, 2)$. Ainsi, on note $du = \sum_{\sigma=0}^{2} u_{,r^\sigma}\, dr^\sigma$. En supposant γ_0, γ_1, et γ_2 linéairement indépendant, on a

$$dr^s = \xi^s \lambda^s, \quad s = 1, 2, \quad dr^0 = \lambda^0. \tag{5.15}$$

Pour un tel cas, le système d'équations (5.15) peut être écrit en terme de nouvelles variables dépendantes (seulement trois maintenant). En éliminant les variables ξ^s dans les équations (5.15), on obtient

$$r^s{}_{,t} = v_{(s)}(r^0, r^1, r^2) r^s{}_{,x} = 0, \quad s = 1, 2$$

$$r^0{}_{,t} = \lambda_1^0(r^0, r^1, r^2), \tag{5.16a}$$

$$r^0{}_{,x} = \lambda_1^0(r^0, r^1, r^2). \tag{5.16b}$$

Montrons que le système (5.16) décrit l'interaction d'ondes et justifions le nom « ondes simples sur un état simple ». Il a été prouvé [12],[13] que si les données initiales sont suffisamment petites, alors il existe une intervalle de temps $[t_0, T]$ tel que la catastrophe du gradient ne survient pas pour la solution au système (5.16) $r^\sigma(t, x)$, $\sigma = 0, 1, 2$. Chacune des fonctions $r^s(t, x)$, $s = 1, 2$ est constante le long des caractéristiques appropriées $C^{(s)} : dx/dt = v_s$ du système (5.16) en choisissant dans l'espace ξ des données initiales telles que les dérivées $r^s{}_{,x}$ aient des supports compacts et sans intersections

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} r^s{}_{,s}(t_0, x) \subset [a_s, b_s], \\ &\bigwedge_{\substack{a_s, b_s \in r^1 \\ s=1,2}} \operatorname{supp} r^1{}_{,x}(t_0, x) \cap \operatorname{supp} r^2{}_{,x}(t_0, x) = \emptyset, \end{aligned} \tag{5.17}$$

où $\wedge$ est le produit extérieur [14]. Alors pour un temps t arbitraire $t_0 < t < T$, supp $r^s_x(t, x)$ est contenu dans la bande entre les caractéristiques appropriées des familles $C^{(s)}$ passant dans les extrémités de l'intervalle $[a_s, b_s]$.

Il a aussi été prouvé [15] que si les données initiales sont suffisamment petites, alors on peut satisfaire la condition

$$\bigwedge_{c>0} \bigvee_{(t,x),(t,x') \in [t_0,T) x \mathbb{R}^1} v_1(t, x) - v_2(t, x) \geq C > 0 \tag{5.18}$$

dans l'intervalle $[a_s, b_s]$. Autrement dit, chaque caractéristique de la famille $C^{(1)}$ a une tangente avec inclinaison (mesurée par rapport à la direction positive de l'axe des x) plus petite que toutes caractéristiques de la famille $C^{(2)}$. Il est évident dans un tel cas que les bandes contenant supp $r^s{}_{,x}(t, x)$ divisent la partie restante de l'espace ξ en quatre régions disjointes, voir la Figure 5.1.

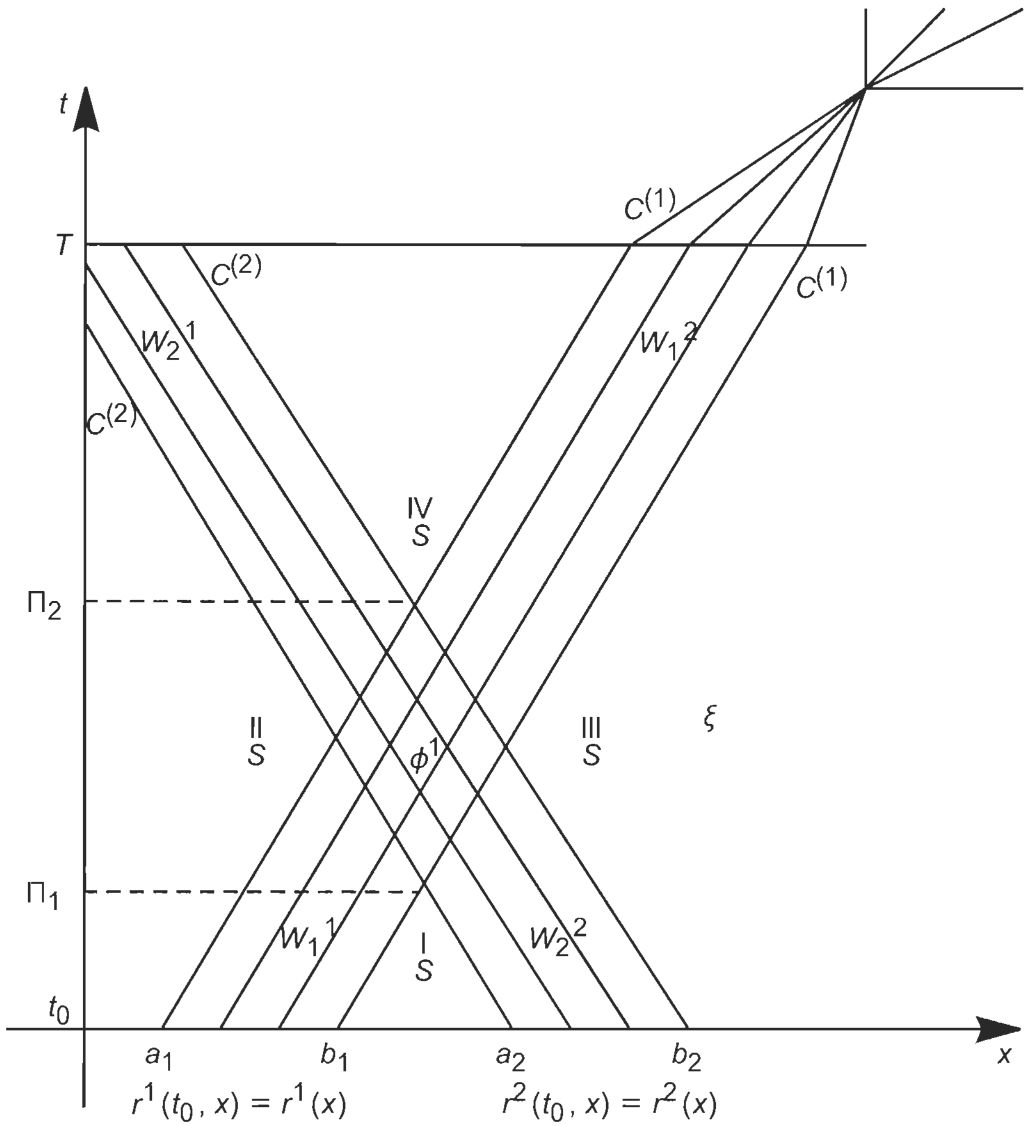

FIGURE 5.1 – Le cas de la propagation des deux ondes simples (W_1, W_2) sur l'état simple (S). Si les caractéristiques d'une famille se joignent en un point, on choisit un temps particulier T de manière à exclure la possibilité de la catastrophe du gradient.

Dans la région $G := \xi/(\text{supp } r^1{}_{,x}(t,.) \cup \text{supp } r^2{}_{,x}(t,.))$, la solution $r^0(t,x)$ du système (5.16) est décrite par l'état simple. Dans cette région, $r^s{}_{,x} = 0$ et la solution $r^0(t,x)$ satisfait les équations (5.16a) et (5.16b) avec $r^s = r_0^s =$ cte. De la condition de compatibilité de cette équation, on obtient $\lambda^0{}_{,r^0} \wedge \lambda^0 = 0$. Autrement dit, la direction de λ^0 ne dépend pas de la variable r^0, elle est donc constante sur G. En choisissant la paramétrisation de la courbe $u = f(r^0, r_0^1, r_0^2)$ de manière à ce que le covecteur λ^0 ne dépende pas du paramètre r^0, on peut exprimer la solution sur G dans la forme de l'état simple, c'est à dire

$$u^j = f^j(r^0, r_0^1, r_0^2), \quad \text{où} \quad \frac{df^j}{dr^0} = \gamma^j(f(r^0, r_0^1, r_0^2)), \quad j = 1, ..., l,$$
$$r^0 = \lambda^0_{1^t} + \lambda^0_{2^x}, \qquad \lambda^0 = \text{vecteur constant.}$$

Soit t_1, t_2 les temps auxquels supp $r^1{}_{,x}(t,x)$ et supp $r^1{}_{,x}(t,x)$ ont un seul point commun. Pour tout temps $t \in (t_0, t_1)$, on a supp $r^1{}_{,x}(t,x) \cap$ supp $r^2{}_{,x}(t,x) = \emptyset$, donc la solution $r^s(t,x)$ peut être interprétée comme la propagation de deux ondes simples séparées (sans interaction) sur l'état simple. Pour les temps $t \in [t_1, t_2]$, les caractéristiques des familles $C^{(1)}$ et $C^{(2)}$ contenant supp $r^s{}_{,s}(t,x)$ se croisent. Autrement dit, on a supp $r^1{}_{,x}(t,x) \cap$ supp $r^2{}_{,x}(t,x) \neq \emptyset$. On interprète ce phénomène comme étant une interaction entre deux ondes simples sur l'état simple. Pour les temps $t > t_2$, en vertu des conditions (5.17) et (5.18), les bandes contenant les supports des ondes simples se séparent à nouveau, on a donc supp $r^1{}_{,x}(t,x) \cap$ supp $r^2{}_{,x}(t,x) = \emptyset$, où $r^s{}_{,x} = \xi^s \lambda^s$, $s = 1, 2$. Les solutions $r^\sigma(t,x)$ se décomposent donc exactement en deux ondes simples se propageant sur un état simple.

On remarque que, sous toutes les hypothèses établies, dans le cas d'une superposition de deux ondes simples sur l'état simple pouvant être décrites en termes d'invariants de Riemann, la solution se décompose de manière exacte en deux ondes simples du même type qu'au moment initial.

Dans ce cas, on a la conservation du nombre et du type d'ondes simples se propageant sur l'état simple, on peut donc parler d'une interaction élastique d'ondes simples sur l'état simple.

L'interprétation du cas de la propagation de plus de deux ondes simples ($k > 2$) est analogue mais plus compliquée. En effet, la région D est divisée par les supports des fonctions r^1, ... , r^k dans les 2^k sous-ensembles.

Dans l'article [15], il a été prouvé que dans le cas de l'interaction de nombreuses ondes simples décrites en termes d'invariant de Riemann, le nombre et le type des ondes sont aussi conservés. Il a aussi été prouvé que pour de telles solutions, résultant de l'interaction de plusieurs ondes simples sur l'état simple, les ondes simples en interaction se décomposent exactement comme les ondes simples entrant dans l'interaction sur l'état simple.

5.3 Notions de base et définitions décrivant la superposition des ondes simples sur l'état simple

Introduisons maintenant quelques notions concernant les interactions entre plusieurs ondes simples sur un état simple. Faisons l'hypothèse que le système d'équations (5.14) possède une solution décrivant la propagation d'un certain nombre d'ondes simples sur un état simple [1]. Pour simplifier, supposons que le covecteur $\vec{\lambda}^0$ soit 1-forme constant $\vec{\lambda}^0 = dt$ (donc $\gamma_0 = B$). Ainsi, la solution au système Pfaff (5.1) peut, en utilisant les formules

$$\begin{aligned} &\lambda^i{}_{,r^s} \in \text{ span } \left\{\lambda^i, \lambda^s\right\}, &&\text{où } s \in N_0^k,\ \ i \in N_1^k,\ \ i \neq s, \\ &\lambda^0{}_{,r^s} \in \text{span } \left\{\lambda^1\right\} && \end{aligned}$$

être exprimée localement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &u^j = f^j(r^i, t), \quad \text{où} \quad \frac{\partial f^j}{\partial r^i} \approx \gamma_i^j,\ \ \frac{\partial f^j}{\partial t} = B^l,\ \ j \in N_1^i,\ \ i \in N_1^k, \\ &R^i = \phi_i(w_i - x), \qquad w_i(r^i) = \int_0^t v_i(r^i, s) ds. \end{aligned} \tag{5.19}$$

1. Il se peut qu'à certains points l'onde simple ait des dérivées infinies. Nos considérations ne concernent que l'intervalle de temps $[t_0, T]$ dans laquelle la catastrophe du gradient n'a pas lieu.

La propagation de chaque onde simple sur un état simple satisfait les conditions (5.2). Par conséquent, on obtient $\bigwedge_{i\in N_1^k}[\gamma_i, B] = 0$. Faisons aussi l'hypothèse qu'à un certain temps t_0 il y ait p ondes simples de différents types (où $p \leq k$) se propageant sur l'état simple dans le système physique décrit par les équations (5.14). On s'intéresse aux solutions u pour lesquelles l'application tangentielle $du(\vec{x})$ peut être exprimée par la somme des éléments intégrals simples homogènes et non-homogènes :

$$du(\vec{x}) = \sum_{r=1}^{p} \xi^r \gamma_r \otimes \lambda^r + B \otimes dt, \tag{5.20}$$

où $\bar{x} := (t, x)$. On présume que de telles solutions existent et qu'à la condition initiale $t = t_0$, le nombre de variables dépendantes ξ^r qui sont non nulles est égale à p (on les note $\xi^1(t_0, x)$, ..., $\xi^p(t_0, x) \neq 0$). Supposons aussi que les supports de ces fonctions soient disjoints et localisés :

$$\bigwedge_{\substack{i,j\in N^{p+1} \\ i\neq j}} \text{supp} \quad \xi^i(t_0, x) \cap \ \text{supp} \quad \xi^j(t_0, x) = \emptyset$$

$$\bigvee_{a_i, b_i \in R^1} \text{supp} \quad \xi^i(t_0, x) \subset [a_i, b_i] \, .$$

En vertu de l'équation (5.20), au moment $t = t_0$ l'image de la donnée initiale $u = u(t_0, x)$ est composée de p ondes simples $u_{,x}(t_0, x) + \xi^1(t_0, x)\gamma_1 + ... + \xi^p(t_0, x)\gamma_p = 0$. Considérons l'ensemble

$$\theta = \bigcup_{\substack{i,j\in N_1^k \\ i\neq j}} \text{supp} \quad \xi^i(t, x) \bigcap \ \text{supp} \quad \xi^j(t, x).$$

Définition 5.3.1. *On dit que la solution* (5.19) *du système* (5.14) *décrit l'interaction de p ondes simples sur l'état simple si l'ensemble θ n'est pas vide. L'ensemble θ représente la région d'interactions entre p ondes simples sur l'état simple. Les sous-ensembles simplement connexes θ^s de l'ensemble $\theta = \bigcup_{s=1}^{q} \theta^s$ sont appelés régions d'interactions élémentaires de p ondes simples sur l'état simple.*

Définition 5.3.2. *Pour tout nombre $s \in N_1^q$, des moments π^s et κ^s qui sont respecti-*

vement la limite inférieure et supérieure par rapport à la variable de temps de la région d'interaction élémentaire θ^s seront définis comme le moment où la superposition des ondes sur l'état simple dans les ensembles θ^s débute et termine. Autrement dit

$$\pi^s = max(t_0, \inf_{(t,x)\in\theta^s} (t)),$$

$$ou$$

$$\kappa^s = \inf_{(t,x)\in\theta^s} (t), \qquad si\ \kappa^s \in (t_0, +\infty).$$

Dans les intervalles $[t_0, \pi^s]$, $[\kappa^{s-1}, \pi^s]$, $s \in N_2^q$, la solution se présente sous la forme d'une propagation de p ondes simples disjointes sur l'état simple[2]. Dans les sous-intervalles disjoints restants $[\pi^s, \kappa^s]$, $s \in N_1^q$, les interactions prennent place de manière à ce que les ondes se propageant sur l'état[3] s'imposent (ou se superposent) les unes sur les autres (c'est-à-dire qu'elles interagissent). Cependant, si $\kappa^s = +\infty$ pour une certaine valeur $s \in N_1^q$, alors on dit que l'interaction a une durée infinie.

Définition 5.3.3. *Le minimum (maximum) du moment initial (final) défini par la Définition 5.3.2 est appelé moment initial (final) d'interaction de p ondes simples sur l'état simple dans l'ensemble θ, c'est-à-dire*

$$\pi = \min_{s\in N_1^q} (\pi^s), \quad \kappa = \max_{s\in N_1^q} (\kappa^s), \quad si \bigwedge_{s\in N_1^1} \kappa^s \in (t_0, +\infty).$$

S'il existe une valeur $s \in N_1^q$ telle que $\kappa^s = +\infty$, alors on présume $\kappa = +\infty$, c'est-à-dire que l'interaction dure infiniment longtemps.

On fait à présent face au problème de la description du comportement et du résultat d'interaction entre plusieurs ondes simples sur l'état simple. Le processus d'interaction peut être très complexe. Il arrive parfois au cours de l'interaction entre ondes simples sur l'état simple qu'une nouvelle[4] onde soit générée. Supposons qu'on ait un cas où de

2. Par connexion, on entend une connexion par arc.
3. Dans le cas où $\pi^s < \kappa^{s-1}$, l'intervalle $[\kappa^{s-1}, \pi^s] = \emptyset$ est exclue de nos considérations.
4. Par nouvelle onde, on entend un onde d'un type (appartenant à une autre famille) différent à

nouvelles ondes simples sont générées sur l'état simple dans la région d'interaction θ. S'il existe au moins un temps $t_g \geq \pi$ et un ensemble de nombre $s \in N_{p+1}^k$ de sorte que les variables ξ^s de la solution à l'équation (5.20) sont non-nulles et que leur supports sont contenus dans l'ensemble θ :

$$\bigvee_{t_g \geq \pi} \quad \bigvee_{s \in N_{p+1}^k, \ \xi^s \neq 0} \quad \text{supp } \xi^s(t_g, x) \subset \theta,$$

ce qui signifie qu'à partir d'un certain moment t_g, de nouveaux éléments simples (différents de ceux donnés au moment initial) correspondant à de nouvelles ondes simples apparaissent dans l'équation (5.20). Le simple critère déterminant la génération de nouvelles ondes dans la région d'interaction donnée θ^r est un saut de rang de la dérivé $du(\bar{x})$ dans cette région [5]. Notons que la Définition ?? ne concerne que la région d'interaction. Si ces hypothèses sont satisfaites, cela n'implique pas forcément qu'après le processus d'interaction on ait à traiter des ondes différentes de celles données dans les conditions initiales. Pour comprendre comment c'est possible, on peut formuler une définition de la disparition d'ondes simples sur un état simple.

Définition 5.3.4. *Si, dans un certain intervalle de temps (t_g, t_z) (où $t_z \in \mathbb{R}^1$) toute variable ξ^s ($s \in N_{p+1}^k$) prend la valeur non-nulle dans la solution de l'équation* (5.20) *et, qu'en dehors de cette intervalle, les variables ξ^s disparaissent identiquement, on parle alors de la disparition d'une onde simple sur un état simple. Autrement dit*

$$\bigvee_{s \in N_{p+1}^k} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^1} \xi^s(t,x) = \begin{cases} = 0, & \textit{pour } \pi \leq t < t_g, \\ \neq 0, & \textit{pour } t_g \leq t < t_z, \\ = 0, & \textit{pour } t_z \leq t. \end{cases}$$

celui des ondes entrant dans l'interaction.

5. Ici, l'ordre de l'application du au point $p \in \xi$ est déterminé de la manière suivante

$$\text{rang } ||d_\nu u^j(p)|| = \text{rang } \left|\left| \sum_{r=1}^k \xi^r(p) \gamma_r^j(u(p)) \lambda_\nu^r(u(p)) + B^j(u(p)) \delta_\nu^1 \right|\right| \quad \text{pour } p \in [t_0, +\infty) x \mathbb{R}^1$$

Il a précédemment été établit que la disparition d'ondes simples sur un état simple ne survient pas pour les équations hyperboliques. Un tel phénomène est observé pour d'autres types d'équations dont notamment les équations mixtes de type hyperboliques-elliptiques. D'un point de vue physique, il est pertinent de faire la distinction entre deux situations indépendantes :

1. dans le cas où t_z est un nombre réel, on parle de l'effet non-permanent (virtuel) de la génération d'ondes simple sur l'état simple ;

2. dans le cas où il n'existe aucun temps t_z tel que $t \geq t_z$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\xi^s(t,x) \equiv 0$, $s \in N_{p+1}^k$, alors on dit que l'effet de la génération d'ondes simples sur l'état simple est permanent.

D'un point de vue physique, les résultats observés en dehors de la région d'interaction sont particulièrement intéressants. Leur définition introduit une nouvelle notion : une décroissance asymptotique exacte d'une solution.

Définition 5.3.5. *On dit d'une solution de* (5.20) *qu'elle décroit à la manière d'ondes simples se propageant sur un état simple s'il existe un temps κ^q tel que pour tout temps $t > \kappa^q$ la condition*

$$\bigwedge_{i,j\in N_1^k i\neq j} supp\ \ \xi^i(t,x) \cap\ \ supp\ \ \xi^j(t,x) = \emptyset$$

est respectée.

Le temps κ^q sera nommé le temps de décroissance pour la solution $u = u(t,x)$.

Définition 5.3.6. *On dit que la solution $u = u(t,x)$ décroit asymptotiquement en k ondes simples sur l'état simple dans la norme $|.|^{t_a}$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $u_\epsilon(t,x)$ approximant la solution et un temps t_a tels que les conditions suivantes sont respectées :*

1. $du_\epsilon(\bar{x}) = \sum_{r=1}^k \xi_\epsilon^r \gamma_r \otimes \lambda^r + B \otimes dt$,

2. *la fonction u_ϵ décroit exactement à la manière des ondes simples sur l'état simple en accord avec la Définition 5.3.5 alors que $\kappa^q \leq t_a$,*

3. $|u(t,x) - u_\epsilon|^{t_a}$, $|\xi(t,x) - \xi_\epsilon(t,x)|^{t_a}$.

Définition 5.3.7. *On dit d'une interaction entres ondes simples sur l'état simple qu'elle est élastique si la solution* $u = u(t,x)$ *décroit asymptotiquement en ondes simples se propageant sur l'état simple en même nombre et en même type que les ondes entrant dans l'interaction (données dans les conditions initiales).*

L'élasticité d'une interaction n'exclut pas la génération de nouvelles ondes dans le processus d'interaction. Cependant, ces ondes doivent disparaitre ou être sujettes à une décroissance asymptotique[6] dans le sens d'une convergence uniforme vers zéro pour les fonction $\xi^s(t,x)$, $x \in N^s_{p+1}$ lorsque $t \to \infty$, c'est-à-dire

$$\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{T\in\mathbb{R}^k} \bigwedge_{t>t} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}^1} |\xi^s(t,x| < \epsilon. \tag{5.21}$$

Si les fonctions $\xi^s(t,x)$, $s \in N^k_{+1}$ ne disparaissent pas et ne satisfont pas la condition (5.21) (c'est-à-dire que l'effet de la génération est permanent), on dit de l'interaction qu'elle est non-élastique.

6. Cette approche diffère de celle présentée antérieurement.Cette dernière limitait les interactions élastiques au cas décrit par les invariants de Riemann et la génération des ondes simples dans la région d'interaction était exclue.

Chapitre 6

Solutions de rang 2 de la dynamique des fluides

Il existe six cas distincts de superposition d'une onde simple (rang 1) sur un état simple (rang 2) de Riemann, soient E^0E, E^0A_ϵ, $A^0_\epsilon E$, $A^0_\epsilon A_\epsilon$, H^0E et H^0A_ϵ. Pour chaque cas, en utilisant les éléments intégrals simples déduits précédemment, on cherche une solution à la forme paramétrique $u = (p, \rho, \vec{v}) = f(r^0, r^1)$ satisfaisant l'équation (5.3) avec $\gamma_s = (\gamma_{\rho_s}, \gamma_{p_s}, \vec{\gamma}_s)$ et les conditions d'intégrabilité (5.5) avec $\lambda^s = (\lambda^s_0, \vec{\lambda}^s)$, $s = 0, 1$. Pour chacun des six cas, nous étudions les possibilités $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$ étant donné qu'elles imposent chacune différentes restrictions sur λ^1 (donc sur ρ, p et $\vec{v}$) et mènent à des solutions différentes. Les résultats sont présentés dans les théorèmes suivant.

Pour chaque type de solution, une solution explicite sera présentée et portée en graphique grâce au logiciel de calcul *Mathematica*.

6.1 Onde entropique simple sur un état entropique simple E^0E

Si on substitue les éléments entropiques simples non-homogènes E^0 (3.6) et les éléments entropiques simples homogènes E (3.11) dans l'équation (5.4), on trouve le système d'équations différentielles partielles

$$\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = \gamma_{\rho_0}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial r^1} = \gamma_{\rho_1},$$
$$\frac{\partial p}{\partial r^0}, = \rho \qquad \frac{\partial p}{\partial r^1} = 0,$$
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = \vec{\alpha}_0 \times (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v},) \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \vec{\alpha}_0 \times \vec{\lambda}^1,$$

sujet aux contraintes

$$\lambda^0 = \begin{pmatrix} -\vec{v} \cdot \vec{g} \\ \vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} \end{pmatrix}, \qquad \lambda^1 = \begin{pmatrix} -\vec{v} \cdot \vec{\lambda}^1 \\ \vec{\lambda}^1 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Les conditions d'intégrabilité (5.5) requièrent $\partial\lambda^0/\partial r^1 = \alpha_1 \lambda^1$. Pour les équations (6.1) et (6.2), cette nécessité est équivalente à $-(\partial\vec{v}/\partial r^1)\cdot\vec{g} = -\alpha_1 \vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1$ et $-\vec{\Omega}\times(\partial\vec{v}/\partial r^1) = \alpha_1\vec{\lambda}^1$. Les deux théorèmes suivants étudient respectivement les cas $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$.

Théorème 6.1.1. *Si l'équation* (5.3) *et les conditions de compatibilités* (5.5) *avec* $\alpha_1 = 0$ *sont satisfaites par les éléments entropiques simples non-homogènes* (3.6) *et les éléments entropiques simples homogènes* (3.11) *dans l'équation* (5.1), *alors la solution au système non-homogène* (3.1) *a la forme*

$$\begin{aligned} &\rho = \dot{p}(r^0) \qquad p = p(r^0) \\ &\vec{v} = -e^{\phi_0} |\vec{g}|^{-2} c_0 \vec{g} + v_2(r^0, r^1)\vec{\Omega} - \left[\pm e^{\phi_0} |\vec{g}|^{-2} (|\vec{g}|^{-2} - c_0^2)^{1/2} - 1\right] (\vec{g} \times \vec{\Omega}) \end{aligned} \tag{6.3a}$$

avec les invariants de Riemann

$$\begin{aligned} e^{-\phi_0} r^0 &= c_0 t \pm |\vec{g}|^{-2} \left(|\vec{g}|^{-2} - c_0^2\right)^{1/2} \vec{g} \cdot \vec{x} - c_0 |\vec{g}|^{-2} (\vec{g} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{x} + c_1 \\ \psi(r^1) &= e^{-\phi_0} \int_0^{r^0} \chi(\xi, r^1) d\xi + \left\{ e^{\phi_0} \left[\pm \left(|\vec{g}|^{-2} - c_0^2\right)^{1/2} A_3 + c_0 A_1 \right] - A_3 |\vec{g}|^1 \right\} t \\ &\quad + A_1 \vec{g} \cdot \vec{x} + A_3 (\vec{g} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{x}, \end{aligned} \tag{6.3b}$$

où ϕ_0, c_0 et c_1 sont des constantes arbitraires et $p(r^0) > 0$, $v_2(r^0, r^1)$, $\chi(r^0, r^1)$, $A_1(r^1)$, $A_3(r^1)$ et $\psi(r^1)$ sont des fonctions arbitraires satisfaisant $\dot{p} > 0$, $\partial v_2 / \partial r^1 \neq 0$ et $\pm(|\vec{g}|^2 - c_0^2) A_3 \neq -c_0 A_1$.

Preuve : On résout (6.1) et (6.2) en supposant que (5.5) est satisfait avec $\alpha_1 = 0$. On remarque immédiatement que $p = p(r^0)$ et $\rho = \dot{p}(r^0)$. Comme il a été montré dans le Chapitre 2, pour que les conditions d'intégrabilité (5.5) avec $\alpha_1 = 0$ soient respectées, on doit avoir

$$\lambda^0(r^0) = C e^{\Phi(r^0)}, \qquad \lambda^1(r^0, r^1) = \tilde{\mu}(r^0, r^1) \left[\tilde{\chi}(r^0, r^1) \vec{C} + \tilde{A}(r^1) \right], \tag{6.4}$$

où $\tilde{\mu}$ est un facteur de proportionnalité dépendant des invariants de Riemann r^0 et r^1, $\vec{C}$ est un vecteur constant, Φ est une fonction arbitraire de r^0, la fonction scalaire $\tilde{\chi}(r^0, r^1)$ et la fonction à valeur vectorielle $\tilde{A}(r^1)$ doivent être déterminées par (6.1) et (6.2). On définit $\vec{C} = (c_{01}\ ,\ \vec{c}_1)^\intercal$ et $\tilde{A}(r^1) = \left[A(r^1)\ ,\ \vec{A}(r^1)\right]^\intercal$, où c_{01} et $\vec{c}_1$ sont des constantes arbitraires et $A(r^1)$ et $\vec{A}(r^1)$ sont des fonctions arbitraires de r^1. Pour simplifier les calculs, on pose $\vec{c} = \vec{c}_1 / |\vec{c}_1|$, $c_0 = c_{01} / |\vec{c}_1|$, $\phi(r^0) = \Phi(r^0) + \ln |\vec{c}_1|$, $\chi(r^0, r^1) = \tilde{\chi}(r^0, r^1) |\vec{c}_1|$ et $\tilde{\mu}(r^0, r^1) = \mu(r^0, r^1) \left|\vec{\lambda}^1\right|$. L'équation (6.4) devient alors

$$\lambda^0 = e^{\phi(r^0)} (c_0\ ,\ \vec{c})^\intercal, \qquad |\vec{c}| = 1 \tag{6.5a}$$

$$\frac{\lambda^1}{|\lambda^1|} = \mu(r^0, r^1) \left[\chi(r^0, r^1) \begin{pmatrix} c_0 \\ \vec{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(r^1) \\ \vec{A}(r^1) \end{pmatrix} \right]. \tag{6.5b}$$

Comme il a été démontré dans le Chapitre 2, les invariants de Riemann sont donnés sous forme implicite par

$$\vec{C}\cdot\vec{x}+c_2=\int_0^{r^0}e^{-\Phi(\xi)}d\xi,\qquad \int_0^{r^0}\tilde{\chi}(\xi,r^1)e^{-\Phi(\xi)}d\xi+\tilde{A}(r^1)\cdot\vec{x}=\psi(r^1),\quad(6.6)$$

où c_2 est une constante arbitraire et ψ est une fonction arbitraire de l'invariant de Riemann r^1. En posant $c_1 = c_2/|\vec{c}_1|$ et en utilisant les définitions précédentes, les équations (6.6) prennent la forme

$$\begin{gathered}c_0t+\vec{c}\cdot\vec{x}+c_1=\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi,\\ \int_0^{r^0}\chi(\xi,r^1)e^{-\phi(\xi)}d\xi+A(r^1)t+\vec{A}(r^1)\cdot\vec{x}=\psi(r^1).\end{gathered}\qquad(6.7)$$

En substituant l'expression pour λ^0 donné par (6.2) dans (6.5a), on trouve

$$-\vec{v}\cdot\vec{g}=e^{\phi}c_0\qquad \vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v}=e^{\phi}\vec{c}.\qquad(6.8)$$

En dérivant (6.8) par rapport à l'invariant de Riemann r^1, il est possible d'obtenir

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1}\cdot\vec{g}=0,\qquad \vec{\Omega}\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1}=0.\qquad(6.9)$$

De (6.9), on remarque que $\partial\vec{v}/\partial r^1=\nu(r^0,r^1)\vec{\Omega}$, où $\nu(r^0,r^1)$ est une fonction arbitraire des deux invariants de Riemann. Si on applique cette forme à la première équation de (6.9), on trouve $\partial\vec{v}/\partial r^1\cdot\vec{g}=\nu(r^0,r^1)\vec{\Omega}\cdot\vec{g}=0$. Si $\nu(r^0,r^1)=0$, alors $\partial\vec{v}/\partial r^1=0$, ce qui implique que $\vec{v}$, ρ et p sont uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^0. Comme un tel résultat implique qu'il n'y a pas de superposition et donc pas de solutions de rang 2 en terme des invariants de Riemann, on conclut $\vec{\Omega}\cdot\vec{g}=0$.

Comme $\vec{\Omega}\cdot\vec{g}=0$, l'ensemble de vecteur $(\vec{g},\vec{\Omega},\vec{g}\times\vec{\Omega})$ forme une base orthogonale pour $\mathbb{R}^3$. En posant $\vec{v}=v_1\vec{g}+v_2\vec{\Omega}+v_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ et $\vec{c}=k_1\vec{g}+k_2\vec{\Omega}+k_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$, où v_i sont des fonctions des deux invariants de Riemann et k_i sont des constantes $(i=1,2,3)$, les équations (6.8) prennent la forme

$$-v_1 |\vec{g}|^2 = e^{\phi} c_0, \qquad (1-v_3)\vec{g} + v_1(\vec{g}\times\vec{\Omega}) = e^{\phi}\left[k_1\vec{g} + k_2\vec{\Omega} + k_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})\right]. \quad (6.10)$$

Si on compare les coefficients dans (6.10), on trouve

$$v_1 = e^{\phi}k_3, \qquad k_2 = 0, \qquad v_3 = -e^{\phi}k_1 + 1, \quad (6.11a)$$

$$k_3 = -\frac{c_0}{|\vec{g}|^2}, \quad (6.11b)$$

où (6.11b) est une conséquence de (6.10) et (6.11a).

On se rappelle aussi que $|\vec{c}| = (k_1^2 + k_3^2)^{1/2} |\vec{g}| = 1$, d'où

$$k_1 = \pm\left(|\vec{g}|^{-2} - k_3^2\right)^{1/2} = \pm |\vec{g}|^{-2}\left(|\vec{g}|^2 - c_0^2\right)^{1/2}.$$

La condition $\partial\vec{v}/\partial r^0 = \vec{\alpha}_0 \times (\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})$ pour une fonction à valeur vectorielle $\vec{\alpha}_0(r^0, r^1)$ arbitraire est équivalente à

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0. \quad (6.12)$$

Par (6.11), on trouve

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} = \frac{\partial v_1}{\partial r^0}\vec{g} + \frac{\partial v_2}{\partial r^0}\vec{\Omega} + \frac{\partial v_3}{\partial r^0}(\vec{g}\times\vec{\Omega}) = e^{\phi}\dot{\phi}(r^0)k_3\vec{g} + \frac{\partial v_2}{\partial r^0}\vec{\Omega} - e^{\phi}\dot{\phi}(r^0)k_1(\vec{g}\times\vec{\Omega}). \quad (6.13)$$

En substituant $\vec{g} - (\vec{\Omega}\times\vec{v}) = e^{\phi}\left[k_1\vec{g} + k_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})\right]$ et (6.13) dans (6.12), on remarque que (6.12) est satisfait pour toute fonction $\phi(r^0)$ et toutes constantes k_1 et k_3.

En substituant l'expression pour λ^1 donnée par (6.2) dans (6.5), on trouve les conditions

$$-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1 = \mu(r^0,r^1)\left[\chi(r^0,r^1)c_0 + A(r^1)\right], \quad \vec{\lambda}^1 = \mu(r^0,r^1)\left[\chi(r^0,r^1)\vec{c} + \vec{A}(r^1)\right] \quad (6.14)$$

En combinant les deux équations de (6.14), on remarque

$$A(r^1) = -\chi(r^0, r^1)(c_0 + \vec{v}\cdot\vec{c}) - \vec{v}\cdot\vec{A}(r^1). \tag{6.15}$$

On se rappelle que $\vec{c} = k_1\vec{g} + k_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ et on pose $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{g} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + A_3(r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ dans la deuxième équation de (6.14) de manière à obtenir

$$\vec{\lambda}^1 = \mu(r^0, r^1)\left\{\left[\chi(r^0, r^1)k_1 + A_1\right]\vec{g} + A_2\vec{\Omega} + \left[\chi(r^0, r^1)k_3 + A_3\right](\vec{g}\times\vec{\Omega})\right\}. \tag{6.16}$$

Pour une fonction à valeur vectorielle arbitraire $\vec{\alpha}_1(r^0, r^1)$, la condition $\partial\vec{v}/\partial r^1 = \vec{\alpha}_1 \times \vec{\lambda}^1$ est équivalente à

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1}\cdot\vec{\lambda}^1 = 0. \tag{6.17}$$

Clairement, on a $\partial\vec{v}/\partial r^1 = \partial v_2/\partial r^1\vec{\Omega}$. En substituant cette valeur ainsi que (6.16) dans (6.17) on trouve la condition $A_2\partial v_2/\partial r^1 = 0$. Si $\partial v_2/\partial r^1 = 0$, alors $\partial\vec{v}/\partial r^1 = 0$ ce qui implique que le champ de vitesse ne serait fonction que de l'invariant de Riemann r^0. Comme la densité ρ et la pression p sont uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^0, il n'y aurait pas de superposition, donc pas de solution de rang 2 en terme des invariants de Riemann. On rejette donc cette possibilité et on choisit $A_2 = 0$.

En notant les vecteurs $\vec{c}$, $\vec{v}$ et $\vec{A}$ en termes de notre base $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g}\times\vec{\Omega})$, l'équation (6.15) devient

$$A(r^1) = -\chi(r^0, r^1)(c_0 + v_1k_1\left|\vec{g}\right|^2 + v_3k_3\left|\vec{g}\right|^2) - v_1A_1\left|\vec{g}\right|^2 - v_3A_3\left|\vec{g}\right|^2. \tag{6.18}$$

En substituant les valeurs de v_1, v_3 et c_0 données par (6.11) dans (6.18), on trouve la condition

$$A(r^1)\left|\vec{g}\right|^{-2} + A_3 = e^{\phi}(k_1A_3 - k_3A_1). \tag{6.19}$$

Comme le coefficient de $\chi(r^0, r^1)$ est nul dans (6.18), la fonction demeure arbitraire. En substituant $c_0 = -\left|\vec{g}\right|^2 k_3$, $\vec{c} = k_1\vec{g} + k_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ et $\vec{A} = A_1\vec{g} + A_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ dans les équations (6.5), on remarque que $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ précisément lorsque $k_1A_3 - k_3A_1 \neq 0$. Comme la condition $k_1A_3 - k_3A_1 \neq 0$ est nécessaire à l'existence d'une solution, les invariants de Riemann r^0 et r^1 peuvent être séparés dans (6.19) de manière à trouver $e^{\phi} = (A\left|\vec{g}\right|^{-2} - A_3)(k_1A_3 - k_3A_1)^{-1}$. On remarque de cette égalité que le coté gauche de l'équation est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^0 alors que le côté droit est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1. De ce fait, on conclut que chaque côté doit être égal à une constante. Par conséquent, $\phi = \phi_0$ est une constante. En vertu de (6.11), on remarque que $\vec{c} = \left|\vec{g}\right|^{-2}\left[\pm(\left|\vec{g}\right|^2 - c_0^2)^{1/2}\vec{g} - c_0(\vec{g}\times\vec{\Omega})\right]$ et $A(r^1) = \left\{e^{\phi_0}\left[\pm(\left|\vec{g}\right|^2 - c_0^2)^{1/2}A_3 + c_0A_1\right] - A_3\left|\vec{g}\right|^2\right\}$. Lorsqu'on substitue ces grandeurs ainsi que $\vec{A}_1(r^1) = A_1\vec{g} + A_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ dans (6.7), on trouve les invariants de Riemann (6.3b). Les équations (6.11) indiquent également que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.3a). La condition $\partial v_2/\partial r^1 \neq 0$ assure que γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendant, où les vecteurs γ_i sont définis par

$$\gamma_i = \left(\frac{\partial\rho}{\partial r^i}, \frac{\partial p}{\partial r^i}, \frac{\partial\vec{v}}{\partial r^i}\right) \qquad (i = 0, 1).$$

□

Pour les états simples, on détermine si les écoulements de fluide sont compressibles et ont une vorticité en calculant respectivement div $\vec{v}$ et $\vec{\nabla}\times v$. Une dérivation des équations (6.9) donne $\left(\frac{\partial r^0}{\partial x}, \frac{\partial r^0}{\partial y}, \frac{\partial r^0}{\partial z}\right) = \mu_1\vec{\lambda}^1$. Pour un champ de vitesse donné en terme des invariants de Riemann r^0 et r^1, on trouve

$$\operatorname{div}\vec{v} = \vec{\lambda}^0\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} + \mu_1\vec{\lambda}^1\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\lambda}^0\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} + \mu_1\vec{\lambda}^1\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1},$$

où μ_1 est le facteur de proportionnalité.

De cette manière, on conclut que la solution (6.3a) est incompressible et qu'elle a une vorticité. L'entropie est constante dans le fluide précisément lorsque

$$p(r^0) = \begin{cases} (K_1r^0 + k_2)^{\kappa/(\kappa-1)}, & (\kappa \neq 1) \\ K_2e^{K_1r^0}, & (\kappa = 1) \end{cases}, \tag{6.20}$$

où K_1 et K_2 sont des constantes arbitraires.

Théorème 6.1.2. *Si les éléments simples entropiques non-homogènes (3.6) et les éléments simples entropiques homogènes (3.11) dans l'équation (5.1) satisfont l'équation (5.3) et les conditions de compatibilité (5.5) avec $\alpha_1 \neq 0$, alors la solution au système non-homogène (3.1) a une des formes suivantes.*

Les solutions existent si et seulement si $\vec{g} \times \vec{\Omega} \neq 0$ et se classent en deux cas.

Cas 1 : $\vec{g} \times \vec{\Omega} \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\rho = \dot{p}(r^0), \qquad\qquad p = p(r^0) \\
&\vec{v}(r^1) = v_3(r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega}) + v_1(r^1)\vec{g} \\
&\quad + \Bigg\{ \frac{-|\vec{g}|^2}{\vec{g} \cdot \vec{\Omega}} \int_0^{r^1} [\dot{v}_1(\xi)(1 - v_3(\xi)) + \dot{v}_3(\xi)v_1(\xi)]\, d\xi \\
&\quad - (\vec{g} \cdot \vec{\Omega}) \int_0^{r^1} [\dot{v}_1(\xi)v_3(\xi) - v_1(\xi)\dot{v}_3(\xi)]\, d\xi + c \Bigg\} \vec{\Omega}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Les invariants de Riemann sont donnés par la forme implicite

$$\begin{aligned}
\phi(r^1) + r^0 = &\Bigg\{ |\vec{g}|^2 \int_0^{r^1} [\dot{v}_1(1 - v_3) + \dot{v}_3 v_1]\, d\xi + (\vec{g} \cdot \vec{\Omega})^2 \int_0^{r^1} [\dot{v}_1 v_3 - v_1 \dot{v}_3]\, d\xi \\
&- v_1 |\vec{g}|^2 - c(\vec{g} \cdot \vec{\Omega}) \Bigg\} t + \Big[(1 - v_3)\vec{g} + v_3(\vec{g} \cdot \vec{\Omega})\vec{\Omega} + v_1(\vec{g} \times \vec{\Omega})\Big] \cdot \vec{x} \\
\dot{\phi}(r^1) = &[(\vec{g} \cdot \vec{\Omega})^2 - |g|^2][\dot{v}_1(r^1)v_3(r^1) - v_1(r^1)\dot{v}_3(r^1)]t \\
&+ [-\dot{v}_3(r^1)\vec{g} + \dot{v}_3(r^1)(\vec{g} \cdot \vec{\Omega})\vec{\Omega} + \dot{v}_1(r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})] \cdot \vec{x},
\end{aligned} \tag{6.22}$$

où c est une constante arbitraire, $p(r^0) > 0$, $v_1(r^1)$, $v_3(r^1)$ et $\phi(r^1)$ sont des fonctions arbitraires telles que $\dot{p}(r^0) > 0$ et $\dot{v}_1(r^1) \neq 0$ ou $\dot{v}_3(r^1) \neq 0$.

Cas 2 : $\vec{g} = \epsilon_2 \,|\vec{g}|\, \vec{\Omega}$

$$\begin{aligned}
&\rho = \dot{p}(r^0) \qquad p = p(r^0) \\
&\vec{v}(r^1) = v_1(r^1)\vec{e}_1 + v_2(r^1)\vec{e}_2 + \left\{ -\frac{\epsilon}{|\vec{g}|} \int_0^{r^1} [\dot{v}_1(r)v_2(r) - v_1(r)\dot{v}_2(r)]dr + c_0 \right\} \vec{e}_3.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Les invariants de Riemann sont donnés par

$$\begin{aligned}
\phi(r^1) + r^0 = &\left\{ \int_0^{r^1} [\dot{v}_1(r)v_2(r) - v_1(r)\dot{v}_2(r)]dr - \epsilon c_0 |\vec{g}| \right\} t \\
&+ [v_2(r^1)\vec{e}_1 - v_1(r^1)\vec{e}_2 + \epsilon|\vec{g}|\vec{e}_3] \cdot \vec{x} \\
\dot{\phi}(r^1) = &[\dot{v}_1(r^1)v_2(r^1) - v_1(r^1)\dot{v}_2(r^1)]t + [\dot{v}_2(r^1)\vec{e}_1 + \dot{v}_1(r^1)\vec{e}_2] \cdot \vec{x},
\end{aligned} \tag{6.24}$$

où c est une constante arbitraire, $\epsilon_2 = \pm 1$, $p(r^0) > 0$, $v_1(r^1)$, $v_2(r^1)$ *et* $\phi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires telles que* $\dot{p}(r^0) > 0$ *et* $\dot{v}_1(r^1) \neq 0$ *ou* $\dot{v}_2(r^1) \neq 0$.

Preuve : On résout (6.1) et (6.2) en faisant l'hypothèse que (5.4) est valide avec $\alpha_1 \neq 0$. Les équations (6.1) donnent immédiatement $p = p(r^0)$ et $\rho = \rho(r^0)$.

En appliquant les conditions d'intégrabilité (5.5) avec $\alpha_1 \neq 0$, on trouve les conditions

$$\lambda^0(r^0, r^1) = \tau(r^1) e^{\tilde{\phi}(r^0, r^1)}, \qquad \lambda^1(r^0, r^1) = \tilde{\mu}(r^0, r^1 0 \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r^1} \tau(r^1) + \dot{\tau}(r^1) \right), \tag{6.25}$$

où $\tilde{\mu}$ est un facteur de proportionnalité dépendant des deux invariants de Riemann r^0 et r^1 et où $\tau(r^1)$ et $\tilde{\phi}(r^0, r^1)$ sont déterminés par (6.2). On pose

$$\tau(r^1) = \begin{pmatrix} f_1(r^1) \\ \vec{h}(r^1) \end{pmatrix},$$

où f_1 et $\vec{h}(r^1)$ sont des fonctions arbitraires de l'invariant de Riemann r^1. Pour simplifier les calculs futurs, on définit $\vec{h} = \vec{h}_1 / \left|\vec{h_1}\right|$, $f = f / \left|\vec{h_1}\right|$, $\phi(r^0, r^1) = \tilde{\phi}(r^0, r^1) +$

$\ln\left|\vec{h}_1(r^1)\right|$ et $\mu(r^0, r^1) = \tilde{\mu}(r^0, r^1)\left|\vec{h}_1(r^1)\right|$. Avec ces définitions, (6.25) devient

$$\lambda^0(r^0, r^1) = e^{\phi(r^0, r^1)}\begin{pmatrix} f_1(r^1) \\ \vec{h}(r^1) \end{pmatrix}, \qquad \left|\vec{h}(r^1)\right| = 1, \tag{6.26a}$$

$$\frac{\lambda^1(r^0, r^1)}{\left|\vec{\lambda}^1(r^0, r^1)\right|} = \mu(r^0, r^1)\left[\frac{\partial \phi}{\partial r^1}\begin{pmatrix} f_1(r^1) \\ \vec{h}(r^1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{g}(r^1) \\ \dot{\vec{h}}(r^1) \end{pmatrix}\right]. \tag{6.26b}$$

Comme expliqué dans le théorème 5.1.1, les invariants de Riemann sont donnés sous forme implicite par

$$\begin{aligned} \sum \tau_\mu(r^1)x^\mu &= \tilde{\phi}(r^1) + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi, \\ \sum \dot{\tau}_\mu(r^1)x^\mu &= \dot{\tilde{\phi}}(r^1) - \int_0^{r^0} \frac{\partial \phi(\xi, r^1)}{\partial r^1} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi, \end{aligned} \tag{6.27}$$

où $\tilde{\phi}(r^1)$ est une fonction C^1 arbitraire de r^1. En posant $\Phi(r^1) = \tilde{\phi(r^1)}/\left|\vec{h}_1(r^1)\right|$, les équations (6.27) prennent la forme

$$\begin{aligned} f(r^1)t + \vec{h}(r^1)\cdot\vec{x} &= \Phi(r^1) + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi, \\ \dot{f}(r^1)t + \dot{\vec{h}}(r^1)\cdot\vec{x} &= \Phi(r^1) - \int_0^{r^0} \frac{\partial \phi}{\partial r^1}(\xi, r^1) e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi. \end{aligned} \tag{6.28}$$

En substituant l'expression pour λ^0 donnée par (6.2) dans (6.26a), on obtient

$$-\vec{v}\cdot\vec{g} = e^{\phi(r^0, r^1)} f(r^1), \qquad \vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v} = e^{\phi(r^0, r^1)}\vec{h}(r^1). \tag{6.29}$$

En calculant le produit scalaire entre la deuxième équation de (6.29) et $\vec{\Omega}$, on trouve

$$e^{\phi(r^0, r^1)}\vec{h}(r^1)\cdot\vec{\Omega} = \vec{g}\cdot\vec{\Omega}. \tag{6.30}$$

On remarque que le côté droit de l'équation (6.30) est constant, par conséquent on doit considérer les cas **(i)** $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$.

(i) Soit $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$. L'équation (6.30) implique alors $\vec{h}(r^1)\cdot\vec{\Omega} \neq 0$. Ainsi, l'équation

(6.30) peut être reformulée de manière à ce que $\phi(r^0, r^1) = \ln\left[(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})(\vec{h}(r^1)\cdot\vec{\Omega})\right]^{-1}$. En remplaçant respectivement $e^{\phi(r^1)}f(r^1)$, $e^{\phi(r^1)}\vec{h}(r^1)$ et $\mu(r^1)$ par $F(r^1)$, $\vec{H}(r^1)$ et $e^{\phi(r^1)}\mu(r^0, r^1)$, l'équation (6.26) devient

$$\lambda^0(r^0, r^1) = \begin{pmatrix} F(r^1) \\ \vec{H}(r^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{v}\cdot\vec{g} \\ \vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v} \end{pmatrix}, \quad \lambda^1(r^0, r^1) = \begin{pmatrix} \dot{F}(r^1) \\ \dot{\vec{H}}(r^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1 \\ \vec{\lambda}^1 \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

En dérivant la première équation de (6.31) par rapport à l'invariant de Riemann r^0, on calcule

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}\cdot\vec{g} = 0, \qquad \vec{\Omega}\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} = 0. \quad (6.32)$$

La deuxième équation de (6.32) implique $\partial\vec{v}/\partial r^0 = \nu(r^0, r^1)\vec{\Omega}$, où $\nu(r^0, r^1)$ est une fonction arbitraire. En calculant le produit scalaire avec $\vec{g}$, étant donné la première équation de (6.32), on trouve $\nu(r^0, r^1)\vec{\Omega}\cdot\vec{g} = 0$. Comme $\vec{\Omega}\cdot\vec{g} \neq 0$, alors clairement $\nu = 0$ et $\partial\vec{v}/\partial r^0 = 0$, ce qui implique que $\vec{v}$ est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1.

Si on revient à (6.31), on remarque

$$-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1 = -\mu(r^0, r^1)(\dot{\vec{v}}(r^1)\cdot\vec{g}), \qquad \vec{\lambda}^1 = \mu(r^0, r^1)\dot{\vec{H}}(r^1) = -\mu(r^0, r^1)(\vec{\Omega}\times\dot{\vec{v}}). \quad (6.33)$$

En substituant la deuxième équation de (6.33) dans la première, on observe la condition

$$\dot{\vec{v}}(r^1)\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0. \quad (6.34)$$

On note que la condition $\partial\vec{v}/\partial r^0 = \vec{\alpha}_0\times(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})$ pour un vecteur $\vec{\alpha}_0$ arbitraire est satisfaite par $\vec{v} = \vec{v}(r^1)$. De plus, la condition $\partial\vec{v}/\partial r^1 = \vec{\alpha}_1\times\vec{\lambda}^1$, où $\vec{\alpha}_1$ est une fonction arbitraire, est automatiquement satisfaite par $\vec{\lambda}^1$ en vertu de la deuxième équation de (6.33).

Déterminons maintenant les valeurs du champ de vitesse $\vec{v}$ satisfaisant la condition (6.34). On doit considérer les cas **(a)** $\vec{g}\times\vec{\Omega} \neq 0$ et **(b)** $\vec{g}\times\vec{\Omega} = 0$ séparément.

(a) Si $\vec{g}\times\vec{\Omega} \neq 0$, alors l'ensemble de vecteurs $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g}\times\vec{\Omega})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On exprime alors le champ de vitesse dans cette base de manière à ce que $\vec{v}(r^1) = v_1(r^1)\vec{g}+ v_1(r^1)\vec{\Omega}+v_3(r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$. On calcule alors $\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v} = (1-v_3(r^1))\vec{g}+v_2(\vec{\Omega}\cdot\vec{g})\vec{\Omega}+v_1(\vec{g}\times\vec{\Omega})$. En substituant ces expressions dans (6.34) et en faisant le produit scalaire avec $\dot{\vec{v}}$, on trouve $\dot{v}_1(r^1)(1-v_3)\left|\vec{g}\right|^2+\dot{v}_1(r^1)v_3(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})^2+\dot{v}_2(r^1)(\vec{g}\vec{\Omega})+\dot{v}_3(r^1)v_1\left|\vec{g}\right|^2-\dot{v}_3(r^1)v_1(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})^2 = 0$, ou l'expression équivalente $\dot{v}_2(r^1) = -\left|\vec{g}\right|^2(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})^{-1}\left[\dot{v}_1(r^1)(1-v_3)\dot{v}_3(r^1)v_1\right] - (\vec{g}\cdot\vec{\Omega})\left[\dot{v}_1(r^1)v_3 - \dot{v}_3(r^1)v_1\right]$. Ainsi, on peut exprimer v_2 en terme des fonctions v_1 et v_3 :

$$\begin{aligned} v_2 = &-\left|\vec{g}\right|^2(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})^{-1}\int_0^{r^1}\left[\dot{v}_1(\xi)(1-v_3(\xi))\dot{v}_3(\xi)v_1(\xi)\right]d\xi \\ &-(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})\int_0^{r^1}\left[\dot{v}_1(\xi)v_3(\xi) - \dot{v}_3(\xi)v_1(\xi)d\xi\right] + c, \end{aligned} \tag{6.35}$$

où c est une constante d'intégration. En combinant les résultats précédents, on trouve que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ a la forme (6.21).

On applique maintenant les équations (6.28) pour décrire les invariants de Riemann de manière implicite. Comme ϕ est une fonction arbitraire dépendant uniquement de l'invariant de Riemann r^1, si on multiplie chaque côté de l'équation (6.28) par $e^{\phi(r^1)}$ et qu'on remplace $\Phi(r^1)$ par $e^{-\phi(r^1)}\Phi(r^1)$, on obtient

$$F(r^1)t + \vec{H}(r^1)\cdot\vec{x} = \phi(r^1) + r^0, \qquad \dot{F}(r^1)t + \dot{\vec{H}}(r^1)\cdot\vec{x} = \dot{\phi}(r^1), \tag{6.36}$$

où la première équation de (6.36) est utilisée pour déduire la deuxième. L'équation (6.31) avec l'expression $\vec{v}(r^1) = v_1(r^1)\vec{g} + v_1(r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ donne

$$\begin{aligned} F(r^1) &= -\vec{v}\cdot\vec{g} = -v_1\left|\vec{g}\right|^1 - v_2(\vec{g}\cdot\vec{\Omega}), \\ \vec{H}(r^1) &= \vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v} = (1-v_3)\vec{g} + v_3(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})\vec{\Omega} + v_1(\vec{g}\times\vec{\Omega}), \\ \dot{F}(r^1) &= -\dot{\vec{v}}(r^1)\cdot\vec{g} = -\dot{v}_1(r^1)\left|\vec{g}\right|^1 - \dot{v}_2(r^1)(\vec{g}\cdot\vec{\Omega}), \\ \dot{\vec{H}}(r^1) &= \vec{\Omega}\times\dot{\vec{v}}(r^1) = -\dot{v}_3(r^1)\vec{g} + \dot{v}_3(r^1)(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})\vec{\Omega} + \dot{v}_1(r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega}). \end{aligned} \tag{6.37}$$

En combinant (6.35) et (6.37) et en substituant les équations résultantes dans (6.36), on obtient les invariants de Riemann sous la forme implicite (6.22). La condition

$\dot{v}_1(r^1) \neq 0$ ou $\dot{v}_3(r^1) \neq 0$ garantie que γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendants et que $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$.

(b) Si $\vec{g} \times \vec{\Omega} = 0$, alors le vecteur gravitationnel peut être décrit comme $\vec{g} = \epsilon_2 |\vec{g}| \vec{\Omega}$, où $\epsilon_2 = \pm 1$. On choisit la base orthonormale standard pour $\mathbb{R}^3$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On pose $\vec{v} = v_1(r^1)\vec{e}_1 + v_2(r^1)\vec{e}_2 + v_3(r^1)\vec{e}_3$ et $\vec{\Omega} = \vec{e}_3$. On peut alors calculer $\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} = v_2(r^1)\vec{e}_1 - v_1(r^1)\vec{e}_2 + \epsilon_2 |\vec{g}| \vec{e}_3$. En substituant la grandeur $\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}$ dans (6.34), on trouve $\dot{v}_1(r^1)v_2(r^1) - \dot{v}_2(r^1)v_1(r^1) + \epsilon_2 \dot{v}_3 |\vec{g}| = 0$. En intégrant, on trouve une expression pour la fonction $v_3(r^1)$:

$$v_3(r^1) = -\epsilon_2 |\vec{g}|^{-1} \int_0^{r^1} [\dot{v}_1(\xi)v_2(\xi) - \dot{v}_2(\xi)v_1(\xi)]\, d\xi + c. \tag{6.38}$$

On peut alors écrire la solution $(\rho, p, \vec{v})$ comme (6.23).

Les invariants de Riemann sont calculés comme dans **(a)**. Dans le cas présent, on obtient

$$\begin{aligned} &F(r^1) = -\vec{v} \cdot \vec{g} = -\epsilon_2 |\vec{g}|\, v_3, \qquad \dot{F}(r^1) = -\dot{\vec{v}}(r^1) \cdot \vec{g} = -\epsilon_2 |\vec{g}|\, \dot{v}_3(r^1), \\ &\vec{H}(r^1) = \vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} = v_2\vec{e}_1 - v_1\vec{e}_2 + \epsilon_2 |\vec{g}|\, \vec{e}_3, \\ &\dot{\vec{H}}(r^1) = -\vec{\Omega} \times \dot{\vec{v}}(r^1) = \dot{v}_2(r^1)\vec{e}_1 - \dot{v}_1(r^1)\vec{e}_2. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Après avoir combiné (6.38) et (6.39) et substitué le résultat dans (6.36), on obtient (6.24). La condition $\dot{v}_1(r^1) \neq 0$ ou $\dot{v}_2(r^1) \neq 0$ est nécessaire et suffisante pour assurer que γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendants et que $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$.

(ii) Si $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$, alors (6.30) implique que $\vec{h}(r^1) \cdot \vec{\Omega} = 0$. De plus, l'ensemble de vecteurs $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g} \times \vec{\Omega})$ forme une base orthogonale pour $\mathbb{R}^3$. On peut alors poser $\vec{h}(r^1) = h_1(r^1)\vec{g} + h_2(r^1)\vec{\Omega} + h_3(r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$ et $\vec{v}(r^1) = v_1(r^0, r^1)\vec{g} + v_2(r^0, r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0, r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$.

En insérant ces expressions dans les équations (6.29), on trouve

$$\begin{aligned} & -v_1(r^0,r^1)\,|\vec{g}|^2 = e^{\phi(r^0,r^1)}f(r^1), \\ & \left[1-v_3(r^0,r^1)\right]\vec{g} + v_1(\vec{g}\times\vec{\Omega}) = e^{\phi(r^0,r^1)}\left[h_1(r^1)\vec{g} + h_3(r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})\right]. \end{aligned} \tag{6.40}$$

En comparant les coefficients, on trouve $[1-v_3(r^0,r^1)] = e^{\phi(r^0,r^1)}h_1(r^1)$ et $v_1(r^0,r^1) = e^{\phi(r^0,r^1)}h(r^1)$. En vertu de (6.40) et de l'hypothèse $1 = \left|\vec{h}\right| = (h_1^2+h_3^2)^{1/2}\,|\vec{g}|$, on obtient

$$\begin{aligned} v_1(r^0,r^1) &= e^{\phi(r^0,r^1)}h_3(r^1), \qquad & v_3(r^0,r^1) &= -e^{\phi(r^0,r^1)}h(r^1)+1, \\ f(r^1) &= -\,|\vec{g}|^2\,h_3(r^1), \qquad & h_1(r^1) &= \pm\left[|\vec{g}|^{-2} - h_3(r^1)^1\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.41}$$

En substituant l'expression pour λ^1 donnée par (6.2) dans (6.26b), on trouve les conditions

$$-\,\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1 = \mu(r^0,r^1)\left[\frac{\partial\phi}{\partial r^1}f(r^1) + \dot{f}(r^1)\right], \quad \vec{\lambda}^1 = \mu(r^0,r^1)\left[\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\vec{h}(r^1) + \dot{\vec{h}}(r^1)\right], \tag{6.42}$$

qu'on peut combiner de manière à trouver

$$-\left[\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\vec{v}\cdot\vec{h} + \vec{v}\cdot\dot{\vec{h}}(r^1)\right] = \frac{\partial\phi}{\partial r^1}f(r^1) + \dot{f}(r^1). \tag{6.43}$$

En calculant le produit scalaire entre la deuxième équation de (6.29) et $\vec{v}$ et en utilisant la première de (6.29), on trouve l'égalité $\vec{h}\cdot\vec{v} = -f(r^1)$. En appliquant cette égalité à (6.43), on trouve

$$\vec{v}\cdot\dot{\vec{h}}(r^1) = -\dot{f}(r^1). \tag{6.44}$$

L'équation (6.41) implique alors $\vec{v} = e^{\phi}h_3\vec{g} + v_2\vec{\Omega} + (1-e^{\phi}h_1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ et $\dot{f}(r^1) = -\,|\vec{g}|^2\,\dot{h}_3(r^1)$. En substituant ces expressions dans (6.44) avec $\dot{\vec{h}}(r^1) = \dot{h}_1(r^1)\vec{g} + \dot{h}_3(r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$, on trouve

$$h_3\dot{h}_1(r^1) - h_1\dot{h}_3(r^1) = 0. \tag{6.45}$$

Si $h_3 \neq \pm\,|\vec{g}|^{-1}$, alors (6.41) donne $\dot{h}_1(r^1) = \pm\frac{1}{2}\left(|\vec{g}|^{-2} - h_3^2\right)^{1/2}\left[-2h_3\dot{h}_3(r^1)\right]$. Lorsqu'on substitue cette égalité dans (6.45) avec $h_1 = \pm(|\vec{g}|^{-2} - h_3^2)^{1/2}$, on trouve

$\dot{h}_3(r^1) = 0$. Ainsi, peu importe si $h_3 = \pm|\vec{g}|^{-1}$ ou non, h_3 est une constante. Il suit de (6.41) que f et $\vec{h} = h_1\vec{g} + h_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ sont constants alors que (6.26) indique que $\lambda^0 \sim \lambda^1$. Cependant, cela contredit l'hypothèse $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ et démontre qu'aucune solution de rang 2 n'existe dans ce cas. $\square$

La compressibilité et la vorticité de l'écoulement d'un fluide sont déterminées en évaluant div $\vec{v}$ et $\vec{\nabla}\times v$, respectivement, tel qu'expliqué précédemment. En dérivant les équations (5.8) implicitement et en utilisant (5.6), on trouve

$$\left(\frac{\partial r^0}{\partial x}, \frac{\partial r^0}{\partial y}, \frac{\partial r^0}{\partial z}\right) = \vec{\lambda}^0 + \mu_1\vec{\lambda}^1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial r^1}{\partial x}, \frac{\partial r^1}{\partial y}, \frac{\partial r^1}{\partial z}\right) = \mu_2\vec{\lambda}^1,$$

où μ_1 et μ_2 sont des facteurs de proportion. Ainsi, pour un champ de vitesse $\vec{v}$ donné comme fonction des invariants de Riemann r^0 et r^1, on peut simplement calculer

$$\operatorname{div}\vec{v} = \vec{\lambda}^0\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} + \mu_1\vec{\lambda}^1\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} + \mu_2\vec{\lambda}^1\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1} \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\lambda}^0\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} + \mu_1\vec{\lambda}^1\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} + \mu_2\vec{\lambda}^1\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1}.$$

Avec ces calculs, on montre que les solutions (6.21) et (6.23) sont incompressibles et ont une vorticité. Dans les deux cas, l'entropie est constante dans le fluide précisément lorsque la pression p est donnée par (6.20).

Solution explicite

La solution explicite solitonique (type kink pour la deuxième composante du champ de vitesse et de type bump algébrique pour la pression) pour la solution implicite (6.3a) est donnée par :

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho(t,y,z) = \operatorname{sech}^2\left(t + \sqrt{1-\frac{1}{g^2}}z + \frac{y}{g}\right), \quad p(t,y,z) = \tanh\left(t + \sqrt{1-\frac{z}{g^2}} + \frac{y}{g}\right) + 1 \\ &\vec{v}(t,y,z) = \left(-\frac{1}{g}, 1 - \frac{4}{1-2\left(r^0(t,y,z)r^1(t,y,z)\right)^2}, -g - \sqrt{1-\frac{1}{g^2}}\right). \end{aligned}}$$

Les invariants sont donnés par

$$
\begin{aligned}
r^0(t,y,z) &= t + \sqrt{1-\frac{1}{g^2}}z + \frac{1}{g}y, \\
r^1(t,y,z) &= -\frac{(t+gz-1)\left[4(gt-y+z\sqrt{g^2-1})^2-g^2\right]}{4g^2+\left[4(gt-y+z\sqrt{g^2-1})^2-g^2\right](1-g^2t+t\sqrt{g^2-1})}.
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

Les Figures 6.1, 6.2 et 6.3 représentent respectivement des coupes en $t=0$ sur le plan (y,z) de $\rho(0,y,z)$, $p(0,y,z)$ et de la deuxième composante de $\vec{v}(0,y,z)$.

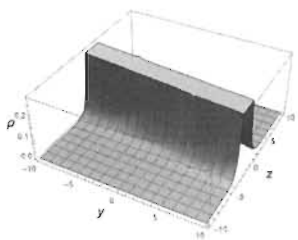

FIGURE 6.1 – Représentation graphique de la densité $\rho(0,y,z)$.

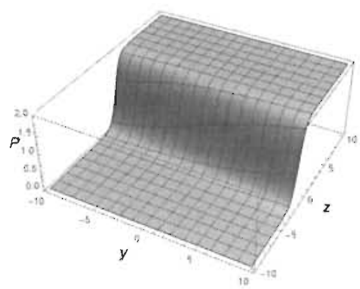

FIGURE 6.2 – Représentation graphique de la pression $p(0,y,z)$.

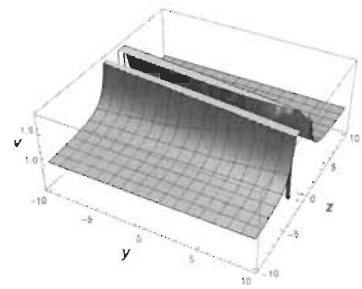

FIGURE 6.3 – Représentation graphique de la deuxième composante du vecteur $\vec{v}(0,y,z)$.

La densité et la deuxième composante du champ de vitesse, respectivement représentées aux Figures 6.1 et 6.3, ont la forme d'un bump algébrique alors que la pression, Figure 6.2, a la forme d'un kink. Ces formes d'onde sont intéressantes puisqu'elles sont vues et détectées en pratique mais sont difficiles à simuler numériquement.

Les hypothèses suivantes ont été effectuées pour trouver les solutions explicites à ce cas entropique E^0E : $\phi_0 = 0$, $c_0 = 1$, $a_0 = 0$, $\epsilon = 1$, $\vec{g} = (0,0,g)$ et $\vec{\nu} = (\nu, 0, 0)$. $\psi(r^1) = r^1$, $A_1 = r^1$, $A_3 = (r^1)^2$, $p = \tanh(r^0) + 1$ et

$$
\chi(r^0,r^1) = (r^1)^2\left[1-\frac{4}{1-4(r^0)^2}\right], \qquad \vec{\nu}(r^0,r^1) = \left[1-\frac{4}{1-2\left(r^0r^1\right)^2}, 0, 0\right].
$$

Les invariants r^0 et r^1 sont explicitement donnés par les équations (6.46).

6.2 Onde acoustique simple sur un état entropique simple $E^0 A_\epsilon$

En substituant l'élément entropique simple non-homogène (3.6) et l'élément acoustique simple homogène (3.13) dans l'équation (5.3), on obtient le système d'équations différentielles partielles :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = \gamma_{\rho_0}, && \frac{\partial \rho}{\partial r^1} = \gamma_{\rho_1}, \\ &\frac{\partial p}{\partial r^0} = \rho, && \frac{\partial p}{\partial r^1} = \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_{\rho_1}, \\ &\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = \vec{\alpha} \times \left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}\right), && \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = -\epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\gamma_{\rho_1}}{\rho} \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}, \end{aligned} \tag{6.47a}$$

où

$$\lambda^0 = \begin{pmatrix} -\vec{v} \cdot \vec{g} \\ \vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} \end{pmatrix}, \qquad \lambda^1 = \begin{pmatrix} \epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2} \left|\vec{\lambda}^1\right| - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}^1 \\ \vec{\lambda}^1 \end{pmatrix}. \tag{6.47b}$$

Dans ce cas, la condition $\partial \lambda^0 / \partial r^1 = \alpha_1 \lambda^1$ prend la forme

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} \cdot \vec{g} = \alpha_1 \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2} \left|\vec{\lambda}^1\right| - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}^1\right], \qquad -\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \alpha_1 \vec{\lambda}^1.$$

L'équation (6.47) montre que $\partial \vec{v} / \partial r^1 = \xi(r^0, r^1)\vec{\lambda}^1$, où $\xi(r^0, r^1)$ est une fonction scalaire des deux invariants de Riemann. Ainsi, $\alpha_1 \vec{\lambda}^1 \cdot \vec{\lambda}^1 = -\left[\vec{\Omega} \times \xi(r^0, r^1)\vec{\lambda}^1\right] \cdot \vec{\lambda}^1 = 0$ et, comme $\left|\vec{\lambda}^1\right| \neq 0$, on conclut que $\alpha_1 = 0$. Les solutions de (6.47) satisfaisant la condition de compatibilité (5.5) avec $\alpha_1 = 0$ sont données dans le théorème suivant.

Théorème 6.2.1. *Si l'équation* (5.3) *et les conditions de compatibilité* (5.5) *avec* $\alpha_1 = 0$ *sont satisfaites par l'élément entropique simple non-homogène* (3.6) *et l'élément acoustique simple homogène* (3.13) *dans l'équation* (5.1), *alors la solution du système* *non-homogène (3.1) existe lorsque $\kappa = 1$ et $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$ et est donnée par*

$$\begin{aligned}
\rho &= e^{r^0/A + B(r^1)}, \qquad\qquad p = Ap(r^0), \\
\vec{v} &= -\frac{c_0 e^{\phi(r^0)}}{|\vec{g}|^2}\vec{g} - \left[\epsilon_1 \epsilon A^{1/2} B(r^1) + B_0\right]\vec{\Omega} \\
&\quad + \left[-\epsilon_2 \frac{e^{\phi(r^0)}}{|\vec{g}|^2}(|\vec{g}|^2 - c_0^2)^{1/2} + 1\right](\vec{g} \times \vec{\Omega}),
\end{aligned} \tag{6.48a}$$

où les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned}
&\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)} dr = c_0 t + \epsilon_2 \frac{(|\vec{g}|^2 - c_0^2)^{1/2}}{|\vec{g}|^2}\vec{g} \cdot \vec{x} - \frac{c_0}{|\vec{g}|^2}(\vec{g} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{x} + c_1, \\
&\psi(r^1) = \left[\epsilon_1 \epsilon A^{1/2}(B(r^1) + 1) + B_0\right] t + \vec{\Omega} \cdot \vec{x}.
\end{aligned} \tag{6.48b}$$

Les constantes arbitraire sont $A > 0$, B_0, c_0 et c_1, les fonctions arbitraires sont $\phi(r^0)$, $B(r^1)$ et $\psi(r^1)$ et ces paramètres sont tels que $\dot{B}(r^1) \neq 0$, $\vec{\lambda}^1/|\vec{\lambda}^1| = \epsilon_1 \vec{\Omega}$.

Preuve : On résout (6.47) en faisant l'hypothèse que les conditions (5.5) sont satisfaites avec $\alpha_1 = 0$. De

$$\frac{\partial p}{\partial r^1} = \frac{\kappa p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r^1},$$

on conclut que la pression est donnée par $p = A(r^0)\rho^\kappa$ où $A(r^0)$ est une fonction d'intégration. De $\partial p/\partial r^0$, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = \left[\kappa A(r^0)\right]^{-1} \rho \left[\rho^{1-\kappa} - \dot{A}(r^0)\right]. \tag{6.49}$$

Les équations (6.8) et (6.9) sont aussi valides dans ce cas et, encore une fois, on a $\partial \vec{v}/\partial r^1 = \nu(r^0, r^1)\vec{\Omega}$, où $\nu(r^0, r^1)\vec{\Omega} \cdot \vec{g} = 0$. Si $\nu(r^0, r^1) = 0$, alors $\partial \vec{v}/\partial r^1 = 0$, ce qui implique que (6.47a) devient $\gamma_{\rho_1} = 0$ et que les grandeurs ρ, p et $\vec{v}$ sont seulement fonctions de r^0 et qu'il n'y a pas de superposition. Ainsi, on conclut $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$ et on emploie la base orthogonale pour $\mathbb{R}^3$ $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g} \times \vec{\Omega})$. En posant $\vec{v} = v_1(r^0, r^1)\vec{g} + v_2(r^0, r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0, r^1)\vec{g} \times \vec{\Omega}$ et $\vec{c} = k_1\vec{g} + k_2\vec{\Omega} + k_3\vec{g} \times \vec{\Omega}$, on trouve (6.11) et on observe que la condition (6.12) est satisfaite.

De l'équation (6.11), il est évident que $\partial\vec{v}/\partial r^1 = \partial v_2/\partial r^1\vec{\Omega}$ et de (6.47a) on trouve

$$\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = \left[-\epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right]^{-1}\frac{\partial v_2}{\partial r^1}\vec{\Omega}, \tag{6.50}$$

d'où la condition $\frac{\partial\rho}{\partial r^1} = \gamma_{\rho_1} \neq 0$. Comme $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right|$ et $\vec{\Omega}$ sont tous deux des vecteurs unitaires, on peut noter $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right| = \epsilon_1\vec{\Omega}$ avec $\epsilon_1 = \pm 1$. Ainsi, (6.50) implique

$$\left[-\epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right]^{-1}\frac{\partial v_2}{\partial r^1} = \epsilon_1$$

ce qui donne, en insérant l'expression $p = A(r^0)\rho^\kappa$

$$\frac{\partial v_2}{\partial r^1} = -\epsilon_1\epsilon\left[\kappa A(r^1)\rho^{\kappa-3}\right]^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}. \tag{6.51}$$

En substituant l'expression pour λ^1 donnée dans (6.47b) dans l'équation (6.5b), on obtient les expressions

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2} - \vec{v}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} &= \mu(r^0,r^1)\left(\chi(r^0,r^1)c_0 + A(r^1)\right)\\ \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} &= \mu(r^0,r^1)\left(\chi(r^0,r^1)\vec{v} + \vec{A}(r^1)\right),\end{aligned} \tag{6.52}$$

qu'on peut combiner de manière à trouver

$$\epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\mu(r^0,r^1)^{-1} - \chi(r^0,r^1)(c_0 + \vec{v}\cdot\vec{c}) + \vec{v}\cdot\vec{A}(r^1) + A(r^1). \tag{6.53}$$

En posant $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{g} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + A_3(r^1)\vec{g}\times\vec{\Omega}$ et en substituant cette grandeur ainsi que $\vec{c} = k_1\vec{g} + k_3\vec{g}\times\vec{\Omega}$ et $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right| = \epsilon_1\vec{\Omega}$ dans (6.52), on découvre

$$\mu(r^0,r^1)\left[\chi(r^0,r^1)k_1 + A_1(r^1)\right]\vec{g} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + \left[\chi(r^0,r^1)k_3 + A_3(r^1)\right]\vec{g}\times\vec{\Omega} = \epsilon_1\vec{\Omega}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\mu(r^0, r^1)A_2(r^1) = \epsilon_1, \qquad \chi(r^0, r^1)k_i + A_i(r^1) = 0, \quad i = 1, 3. \tag{6.54}$$

Comme $\vec{g} - \vec{v} \times \vec{\Omega} = e^{\phi}(k_1\vec{g} + k_3\vec{g} \times \vec{\Omega}) \neq 0$, au moins une variable entre k_1 et k_3 doit être non-nulle. L'équation (6.54) montre aussi que χ est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1. En employant (6.54), l'équation (6.53) peut prendre la forme

$$\begin{aligned}(\epsilon_1 A_2(r^1))\epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2} &= \chi(r^1)\left[c_0 + (v_1(r^0, r^1)k_1 + v_3(r^0, r^1)k_3)\,|\vec{g}|^2\right] + A(r^0) \\ &\quad + (v_1(r^0, r^1)A_1(r^1) + v_3(r^0, r^1)A_3(r^1))\,|\vec{g}|^2 + v_2(r^0, r^1)A_2(r^1) \\ &= \chi(r^1)c_0 + v_2(r^0, r^1)A_2(r^1) + A(r^0),\end{aligned}$$

d'où on conclut

$$v_2 - \epsilon_1\epsilon\left[\kappa A(r^0)\rho^{\kappa-1}\right]^{1/2} = -A_2(r^1)^{-1}\left[A(r^0) + \chi(r^1)c_0\right] \tag{6.55}$$

ainsi que

$$\frac{\partial v_2}{\partial r^0} = \epsilon_1\epsilon\kappa^{1/2}\frac{\partial}{\partial r^0}\left[A(r^0)\rho^{\kappa-1}\right]^{1/2}. \tag{6.56}$$

Pour $\kappa \neq 1$, (6.51) prend la forme

$$\frac{\partial v_2}{\partial r^1} = -\epsilon_1\epsilon\kappa^{1/2}\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial r^1}\left[A(r^0)\rho^{\kappa-1}\right]^{1/2}.$$

En dérivant (6.56) par rapport à r^1 et (6.12) par rapport à r^0 puis en soustrayant les résultats, on trouve $\epsilon_1\epsilon\kappa^{1/2}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^1\partial r^0}\left[A(r^0)\rho^{\kappa-1}\right]^{1/2} = 0$. Comme $\kappa > 0$, on doit avoir $\frac{\partial^2}{\partial r^1\partial r^0}\left[A(r^0)\rho^{\kappa-1}\right]^{1/2} = 0$, ou $0 = \frac{\partial}{\partial r^1}\left[\dot{A}(r^0)\rho^{(\kappa-1)/2} + (\kappa-1)A(r^0)\rho^{(\kappa-3)/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^0}\right]$. En employant (6.49), on trouve $0 = \frac{\partial}{\partial r^1}\left[\left(1-\kappa^{-1}\right)\rho^{-(\kappa-1)/2} + \kappa^{-1}\dot{A}(r^0)\rho^{(\kappa-1)/2}\right]$ ce qui, en dérivant par rapport à l'invariant de Riemann r^1, donne la condition $\left[\dot{A}(r^0)\rho^{\kappa-1} - (\kappa-1)\right]\partial\rho/\partial r^1 = 0$. Ainsi, on doit avoir soit $\partial\rho/r^1 = 0$ ou $\dot{A}(r^0)\rho^{\kappa-1} = (\kappa-1)$. Comme $\kappa \neq 1$, $\dot{A}(r^0) \neq 0$

et $\dot{A}(r^0)\rho^{\kappa-1} = \kappa - 1$, la densité $\rho = \left[(\kappa-1)\dot{A}^{-1}(r^0)\right]^{1/(\kappa-1)}$ est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^0. Dans tous les cas, $\partial\rho/\partial r^1 = 0$ ce qui implique qu'il n'y a pas de solution de rang 2.

Si $\kappa = 1$, alors (6.56) et (6.51) deviennent

$$\frac{\partial v_2}{\partial r^0} = \frac{\epsilon_1\epsilon}{2} A^{-1/2}\dot{A}(r^0) \tag{6.57a}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial r^1} = -\epsilon_1\epsilon A^{1/2}\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial r^1} = -\epsilon_1\epsilon\frac{\partial}{\partial r^1}\left(A^{1/2}\ln\rho\right), \tag{6.57b}$$

alors que (6.49) prend la forme

$$\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial r^0} = A^{-1}\left[1 - \dot{A}(r^0)\right]. \tag{6.58}$$

En dérivant (6.57a) par rapport à r^1 et (6.57b) par rapport à r^0, on peut égaliser les résultats et appliquer (6.58) de manière à trouver

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial r^1 \partial r^0}(A^{1/2}\ln\rho) = \frac{\partial}{\partial r^1}\left[\frac{1}{2}A^{-1/2}\dot{A}(r^0)\ln\rho + A^{-1/2}(1-\dot{A}(r^0))\right],$$

d'où on conclut que $\dot{A}\partial\rho/\partial r^1 = 0$ ou que A est une constante.

L'équation (6.58) donne $\rho^{-1}\partial\rho/\partial r^0 = A^{-1}$ et

$$\rho = e^{r^0/A + B(r^1)}, \tag{6.59}$$

où $B(r^1)$ est une fonction d'intégration. L'équation (6.57a) indique que $\partial v_2/\partial r^0 = 0$, donc v_2 est uniquement fonction de r^1. Les équations (6.57b) et (6.59) impliquent

$$\dot{v}_2(r^1) = -\epsilon_1\epsilon\frac{\partial}{\partial r^1}\left\{A^{1/2}\left[A^{-1}r^0 + B(r^1)\right]\right\} = -\epsilon_1\epsilon A^{1/2}\dot{B}(r^1). \tag{6.60}$$

En intégrant (6.60) par rapport à l'invariant de Riemann r^1, on trouve $v_2 = (-\epsilon_1\epsilon A^{1/2} B(r^1) - B_0)$, où B_0 est une constante arbitraire. En combinant ces résultats avec

(6.11), on obtient (6.48a). La condition que γ_0 et γ_1 soient linéairement indépendants est respectée pourvu que $\dot{B}(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est quant à elle remplie lorsque $\vec{c} \neq 0$.

Les invariants de Riemann sont calculés via (6.7). De (6.54) et (6.55), on trouve $A_i = -\chi(r^1)k_1$ pour $i = 1, 3$ et $A = -A_2\left(v_2 - \epsilon_1\epsilon A^{1/2}\right) - \chi(r^1)c_0 = A_2\left\{\epsilon_1\epsilon A^{1/2}\left[B(r^1) + 1\right] + B_0\right\} - \chi(r^1)c_0$. En substituant ces expressions dans (6.7) ainsi qu'en remplaçant $\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi$ par $c_0 t + k_1\vec{g} \cdot \vec{x} + k_3(\vec{g} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{x} + c_1$ et la fonction arbitraire $\psi(r^1)$ par $A_2\psi(r^1) + \chi(r^1)c_1$ où $A_2 \neq 0$, on trouve la deuxième équation de (6.48b). La première équation de (6.48b) est obtenue par (6.7) et (6.11). $\square$

L'écoulement de fluide décrit par la solution (6.48a) est compressible et a une entropie constante. Il a une vorticité lorsque $\dot{\phi}(r^0) \neq 0$.

Solution explicite

Soit le vecteur de gravitation $\vec{g} = (0, 0, g)$ et le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = (1, 0, 0)$. Si on choisit constantes $A = 1$, $B_0 = 0$, $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$ ainsi que les branches $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, on peut alors exprimer les invariants de Riemann de manière explicites en choisissant les fonctions arbitraires comme étant $\phi(r^0) = -\ln r^0$ ainsi que le bump algébrique en terme de l'invariant de Riemann r^1

$$\psi(r^1) = 1 - \frac{4}{1 - 4(r^1)^2}.$$

À titre d'illustration, pour tracer les graphiques, on choisit le bump algébrique en terme de l'invariant de Riemann r^1

$$B(r^1) = 1 - \frac{4}{1 - 4(r^1)^2}.$$

Sous ces hypothèses, on trouve les solutions explicites de rang 2

$$\boxed{\begin{aligned}
\rho(t,x,y,z) =&\exp\left[t+\frac{1}{2}\left(x-1+\sqrt{4t^2+4t(x-3)+(1+x)^2}\right.\right.\\
&\left.\left.+2\sqrt{2}\sqrt{\frac{gt-y+\sqrt{g^2-1}z}{g}}\right)\right],\\
p(t,x,y,z) =&\rho(t,x,y,z),\\
\vec{v}(t,x,y,z) =&\frac{1}{\sqrt{2}g^2}\sqrt{\frac{g}{gt-y+\sqrt{-1+g^2}z}}\vec{g}\\
&-\frac{1}{2}\left(-1+2t+x+\sqrt{4t^2+4t(-3+x)+(1+x)^2}\right)\vec{\Omega}\\
&+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{g^2}}\sqrt{\frac{g}{gt-y+\sqrt{-1+g^2}z}}+1\right)(\vec{g}\times\vec{\Omega})
\end{aligned}} \tag{6.61}$$

où les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned}
r^0(t,y,z) &= \sqrt{2}\sqrt{\frac{gt-y+\sqrt{-1+g^2}z}{g}},\\
r^1(t,x) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-2t+\sqrt{4t^2+4t(-3+x)+(1+x)^2}}{(-1+x)}}.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Les solutions (6.61) représentent un écoulement compressible.

L'invariant de Riemann $r^0(t,y,z)$ est réel sous la condition $t < \frac{y-\sqrt{-1+g^2}z}{g}$. Pour l'invariant de Riemann $r^1(t,x)$, il y a une singularité en terme de x lorsque le dénominateur de l'invariant de Riemann r^1 donné à (6.62) est nul, c'est-à-dire à la coordonnée $x = 1$. De plus, l'invariant de Riemann n'est réel que sous les conditions $2t < 2 + \sqrt{4t^2+4t(-3+x)+(1+x)^2}$ ou $4t(3-x) < 4t^2 + (1+x)^2$.

Les Figures 6.4, 6.5 et 6.6 représentent la densité $\rho(t,x,y,z)$ au temps $t = 0$ sur les plans (y,z), (x,z) et (x,y), respectivement.

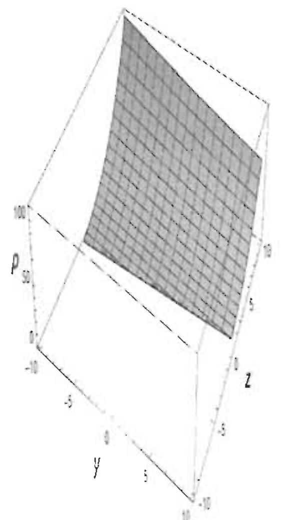

FIGURE 6.4 – Représentation graphique de la densité $\rho(0,0,y,z)$ sur le plan (y,z)

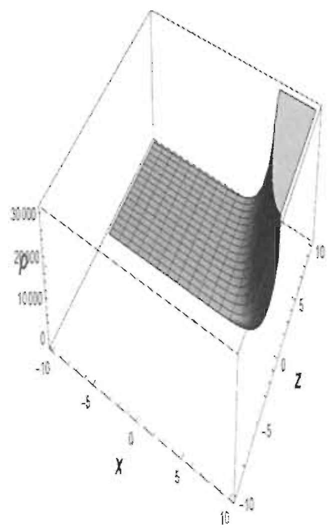

FIGURE 6.5 – Représentation graphique de la densité $\rho(0,x,0,z)$ sur le plan (x,z)

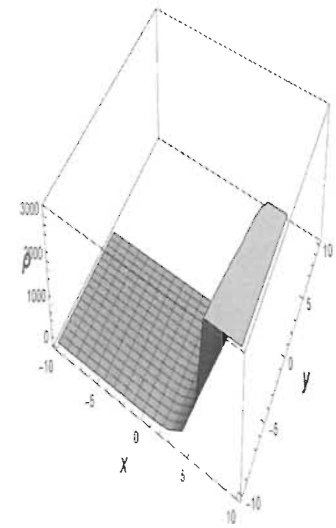

FIGURE 6.6 – Représentation graphique de la densité $\rho(0,x,y,0)$ sur le plan (x,y)

6.3 Onde entropique simple sur état acoustique simple $A_{\epsilon}^{0}E$

En substituant l'élément acoustique simple non-homogène (3.8) et l'élément entropique homogène (3.11) dans l'équation (5.3), on trouve le système d'équations différentielles partielles

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = \gamma_{\rho_0}, && \frac{\partial \rho}{\partial r^1} = \gamma_{\rho_1},\\
&\frac{\partial p}{\partial r^0} = \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_{\rho_0}, && \frac{\partial p}{\partial r^1} = 0,\\
&\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = \left[\epsilon\rho\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^0\right|\right]^{-1}\left[\rho(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v}) - \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_{\rho_0}\vec{\lambda}^0\right], && \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \vec{\alpha}\times\vec{\lambda}^1,
\end{aligned}
\tag{6.63a}
$$

sujet aux contraintes

$$\lambda^0 = \begin{pmatrix} \epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^0\right| - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}^0 \\ \vec{\lambda}^0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^1 = \begin{pmatrix} -\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1 \\ \vec{\lambda}^1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\lambda}^0\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0. \quad (6.63b)$$

Une étude de (6.63) révèle rapidement que λ^0 peut satisfaire la condition d'intégrabilité $\partial\lambda^0/\partial r^1 = \alpha_1\lambda^1$ pour $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$. Les solutions obtenues pour chaque cas sont présentées dans les théorèmes suivants.

Théorème 6.3.1. *Si l'élément acoustique simple non-homogène (3.8) et l'élément entropique simple homogène (3.11) dans l'équation (5.1) sont satisfaisants à (5.3) et aux conditions de compatibilité (5.5) avec $\alpha_1 = 0$, une solution au système non-homogène (3.1) existe à condition que $\vec{\lambda}^0 = \epsilon_1\left|\vec{\lambda}^0\right|\vec{\Omega}$ et $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$. Elle aura la forme suivante :*

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_0, \qquad\qquad p = p_0, \\ &\vec{v} = a_1(r^1)\cos\left[\epsilon\left(\frac{\rho_0}{\kappa r_0}\right)^{1/2}\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)}dr + b_1(r^1)\right]\vec{g} + B_0\vec{\Omega} \\ &\qquad + \left\{a_1(r^1)\sin\left[\epsilon\left(\frac{\rho_0}{\kappa r_0}\right)^{1/2}\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)}dr + b_1(r^1)\right] + 1\right\}(\vec{g}\times\vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (6.64a)$$

où les invariants de Riemann sont

$$\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)}dr = \left[\epsilon\left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{1/2} - \epsilon_1 B_0\right]t + \epsilon_1\vec{\Omega}\cdot\vec{x} + c_1, \quad \psi(r^1) = B_0 t - \vec{\Omega}\cdot\vec{x}. \quad (6.64b)$$

$\rho_0 > 0$, $p_0 > 0$, B_0 ainsi que c_1 sont des constantes arbitraires et $a_1(r^1) \neq 0$, $b_1(r^1)$, $\phi(r^0)$ et $\psi(r^1)$ sont des fonctions arbitraires. La fonction arbitraire $a_1(r^1)$ est sujette à la condition $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$.

Preuve : On résout (6.63) en faisant l'hypothèse que les conditions (5.5) sont valides avec $\alpha_1 = 0$. On remarque immédiatement que $p = p(r^0)$ et que $\rho(r^0, r^1) = p(r^0)^{1/\kappa}A(r^1)^{-1/\kappa}$.

Les conditions (5.9) et (5.10), qui sont équivalentes aux conditions (6.5), doivent être respectées. En substituant l'expression pour λ^0 donnée par (6.63b) ainsi que l'expression pour ρ dans (6.5a), on trouve

$$\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0)}\vec{c}, \qquad |\vec{c}| = 1, \tag{6.65a}$$

$$\epsilon\left[\kappa p(r^0)^{(\kappa-1)/\kappa}A(r^1)^{1/\kappa}\right]^{1/2} - \vec{v}\cdot\vec{c} = c_0, \tag{6.65b}$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0. \tag{6.65c}$$

En dérivant (6.65b) par rapport à l'invariant de Riemann r^0, on trouve

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}\cdot\vec{c} = \epsilon\kappa^{1/2}\left(\frac{\kappa-1}{2\kappa}\right)p^{-(\kappa+1)/2}A^{1/(2\kappa)}\frac{dp}{dr^0}. \tag{6.66}$$

Les équations (6.63), (6.65a) et (6.65c) donnent

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}\cdot\vec{c} = \left[\epsilon\rho\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^0\right|\right]^{-1}\left(-\frac{\kappa p}{\rho}\right)\gamma_{\rho_0}\vec{\lambda}^0\cdot\vec{c} = -\epsilon\left(\kappa p^{\kappa+1}\right)^{-1/2}A^{1/(2\kappa)}\frac{dp}{dr^0}. \tag{6.67}$$

En égalant (6.66) et (6.67), on remarque

$$\frac{\kappa+1}{2\kappa}\frac{dp}{dr^0} \Rightarrow \frac{dp}{dr^0} = 0.$$

Ainsi, la pression est une constante $p = p_0$ et la densité est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1. Il en suit que le champ de vitesse est donné par

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} = \left[\epsilon\left|\vec{\lambda}^0\right|\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\right]^{-1}(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = \epsilon e^{-\phi(r^0)}\left(\frac{\rho}{\kappa p_0}\right)^{1/2}(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}).$$

Traitons les cas **(i)** $\vec{c}\times\vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{c}\times\vec{\Omega} = 0$ individuellement.

(i) Si $\vec{c}\times\vec{\Omega} \neq 0$, alors $(\vec{c}, \vec{\Omega}, \vec{c}\times\vec{\Omega})$ est une base pour $\mathbb{R}^3$. On pose $\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{c} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + T(r^0, r^1)(\vec{c}\times\vec{\Omega})$. L'équation (6.65c) est alors équivalente à l'expression constante $\vec{v}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) = \vec{c}\cdot\vec{g}$. On remarque aussi que $\vec{v}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) = T\left|\vec{c}\times\vec{\Omega}\right|^2$, ce qui implique que T est une constante qu'on notera T_0. Définissons le vecteur constant $\vec{v}_0 = T_0(\vec{c} \times \vec{\Omega})$, de sorte qu'on ait maintenant $\vec{v}(r^0, r^1) = \alpha(r^0, r^1)\vec{c} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + \vec{v}_0$. En insérant cette nouvelle définition du champ de vitesse $\vec{v}$ dans (6.65c), on trouve $\vec{c} \cdot (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0) = 0$. En écrivant le champ de vitesse $\vec{v}$ en termes de notre base vectorielle dans (6.67), on trouve maintenant

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r^0}\vec{c} + \frac{\partial \beta}{\partial r^0}\vec{\Omega} = \epsilon e^{-\phi(r^0)} \left(\frac{\rho}{\kappa p_0}\right)^{1/2} \left[\vec{g} - \alpha(\vec{\Omega} \times \vec{v}_0) - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0\right]. \tag{6.68}$$

En calculant le produit scalaire entre (6.68) et $\vec{c}$, on remarque

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r^0} + \frac{\partial \beta}{\partial r^0}\vec{\Omega} \cdot \vec{c} = 0. \tag{6.69}$$

Si on calcule plutôt le produit scalaire entre (6.68) et le vecteur $(\vec{\Omega} \times \vec{c})$, on obtient $0 = \left[\vec{g} - \alpha(\vec{\Omega} \times \vec{c}) - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0\right] \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{c})$, ou $\alpha \left|\vec{\Omega} \times \vec{c}\right|^2 = \left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}_0\right) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{c})$, ce qui implique que α est constant. Par conséquent, (6.69) devient $(\partial\beta/\partial r^0)\vec{\Omega} \cdot \vec{c} = 0$, ce qui laisse présager deux possibilités, soit $\partial\beta/\partial r^0 = 0$ ou $\vec{\Omega} \cdot \vec{c} = 0$. Cependant, si $\partial\beta/\partial r^0 = 0$, alors la densité est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1 et il n'y a pas de superposition.

On fait donc l'hypothèse que $\vec{\Omega} \cdot \vec{c} = 0$. L'équation (6.65b) donne alors $A^{1/(2\kappa)} = \epsilon \left(\frac{p_0^{(1-\kappa)/\kappa}}{\kappa}\right)^{1/2} (c_0 + \alpha_0)$. $A(r^1)$ est donc une constante qu'on notera A. Par conséquent, la densité $\rho = p_0^{1/\kappa} A^{-1/\kappa}$ est aussi une constante qu'on notera ρ_0. Dans ce cas, on a $\gamma_i = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r^i}, \frac{\partial p}{\partial r^i}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^i}\right) = \left(0, 0, \frac{\partial \beta}{\partial r^i}\vec{\Omega}\right), \quad i = 0, 1$. On conclut donc que γ_0 et γ_1 sont linéairement dépendant et qu'aucune solution de rang 2 n'existe.

(ii) Si $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$, on doit avoir $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{\Omega}$, où $\epsilon_1 = \pm 1$ puisque $|\vec{c}| = 1$. En remplaçant $\vec{c}$ par $\vec{\Omega}$ dans (6.65c), on remarque que $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$. On peut alors choisir $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g} \times \vec{\Omega})$ comme base de $\mathbb{R}^3$. On pose alors $\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{g} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + T(r^0, r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$. En substituant cette expression dans (6.65b) ainsi que $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{\Omega}$, on trouve

$$\beta = \epsilon_1 \left\{\epsilon \left[\kappa p_0^{1-1/\kappa} A(r^1)^{1/\kappa}\right]^{1/2} - c_0\right\}. \tag{6.70}$$

De (6.70), on remarque que β est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1. Il en découle que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = \frac{e^{-\phi(r^0)}}{c_0+\epsilon_1\beta}(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v})$. En écrivant le champ de vitesse $\vec{v}$ en terme de la base vectorielle établie et en comparant les coefficients, on trouve

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r^0} = e^{-\phi(r^0)}\frac{1-T}{c_0+\epsilon_1\beta}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r^0} = e^{-\phi(r^0)}\frac{\alpha}{c_0+\epsilon_1\beta}. \tag{6.71}$$

Comme $\alpha\partial\alpha/\partial r^0 = (1-T)\partial T/\partial r^0$, il est clair que $\alpha^2 + (1-T)^2 = f(r^1)^2$, où $f(r^1)$ est une fonction d'intégration (générée lorsqu'on intègre une dérivée partielle). La deuxième équation de (6.71) peut ainsi être réécrite comme $\frac{\partial T}{\partial r^0} = \pm\frac{e^{-\phi(r^0)}}{c_0+\epsilon_1\beta}\left[f(r^1)^2 - (T-1)^2)\right]^{1/2}$. Après séparation des variables T et r^0, on intègre et on trouve $\arcsin\left[\frac{T(r^0,r^1)-1}{f(r^1)}\right] = \pm\left[c_0 + \epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi g(r^1)$, où $g(r^1)$ est une fonction d'intégration. Cette équation est équivalente à $T(r^0,r^1) = a_1(r^1)\sin\left\{\left[c_0+\epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + b_1(r^1)\right\}+1$, où a_1 et b_1 sont des fonctions arbitraires de l'invariant de Riemann r^1. La valeur de α peut maintenant être déterminée avec (6.71) : $\alpha(r^0,r^1) = a_1(r^1)\cos\left\{\left[c_0+\epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + b_1(r^1)\right\}$ L'équation (6.63) donne $\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\vec{g} + \dot{\beta}(r^1)\vec{\Omega} + \frac{\partial T}{\partial r^1}(\vec{g}\times\vec{\Omega}) = \vec{\alpha}\times\vec{\lambda}^1$. Comme les valeurs de λ^1 dans (6.2) et (6.63b) sont égales, les équations (6.14) et (6.15) sont aussi valides dans cette section et les conditions suivantes doivent être respectées :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1}\cdot\vec{\lambda}^1 = \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1}\cdot\mu(r^0,r^1)\left[\epsilon_1\chi(r^0,r^1)\vec{\Omega} + \vec{A}(r^1)\right], \\ A(r^1) &= -\chi(r^0,r^1)(c_0+\epsilon_1\vec{v}\cdot\vec{\Omega}) - \vec{v}\cdot\vec{A}(r^1). \end{aligned} \tag{6.72}$$

En posant $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{g} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + A_3(r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$ dans l'équation (6.72), on trouve

$$\begin{aligned} & A_1\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\left|\vec{g}\right|^2 + \dot{\beta}(r^1)\left[\epsilon_1\chi(r^0,r^1) + A_2\right] + A_3\frac{\partial T}{\partial r^1}\left|\vec{g}\right|^2 = 0, \\ & A(r^1) = -\chi(r^0,r^1)(c_0+\epsilon_1\beta) - \left|\vec{g}\right|^2(\alpha A_1 + TA_3) - \beta A_2. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Nous étudierons maintenant les possibilités $\dot{\beta}(r^1) \neq 0$ et $\dot{\beta}(r^1) = 0$.

Commençons en faisant l'hypothèse que $\dot{\beta}(r^1) \neq 0$. Dans ce cas, (6.73) donne deux expressions pour $\chi(r^0, r^1)$:

$$\begin{aligned}\chi(r^0, r^1) &= -\epsilon_1 |\vec{g}|^2 \left[\dot{\beta}(r^1)\right]^{-1} \left(A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} + A_3 \frac{\partial T}{\partial r^1}\right) - \epsilon_1 A_2 \\ &= -(c_0 + \epsilon_1 \beta)^{-1} \left[A(r^1) + |\vec{g}|^2 (\alpha A_1 + T A_3) + \beta A_2\right].\end{aligned} \tag{6.74}$$

En dérivant (6.74) par rapport à r^0 et en utilisant (6.71), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi}{\partial r^0} =& \frac{-\epsilon_1 |\vec{g}|^2 e^{-\phi(r^0)}}{\dot{\beta}(r^1)(c_0 + \epsilon_1 \beta)^2} \\ & \cdot \left[-\frac{\partial T}{\partial r^1}(c_0 + \epsilon_1 \beta) A_1 - \epsilon_1 (1 - T) \dot{\beta} A_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial r^1}(c_0 + \epsilon_1 \beta) A_3 - \epsilon_1 \alpha \dot{\beta} A_3\right] \\ =& - |\vec{g}|^2 e^{-\phi(r^0)} (c_0 + \epsilon_1 \beta)^{-2} \left[A_1(1 - T) + A_3 \alpha\right],\end{aligned}$$

ce qui nous permet de noter

$$2\epsilon_1 \dot{\beta}(r^1) \left[A_1(1 - T) + A_3 \alpha\right] = (c_0 + \epsilon_1 \beta) \left[A_3 \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} - A_1 \frac{\partial T}{\partial r^1}\right]. \tag{6.75}$$

En dérivant (6.75) par rapport à r^0 et en employant (6.71), on trouve

$$3\epsilon_1 \dot{\beta}(r^1) \left[A_1(1 - T) + A_3 \alpha\right] = (c_0 + \epsilon_1 \beta) \left[A_1 \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} + A_3 \frac{\partial T}{\partial r^1}\right]. \tag{6.76}$$

En dérivant cette fois (6.76) par rapport à r^0 et en utilisant (6.71), on obtient

$$4\epsilon_1 \dot{\beta}(r^1) \left[A_1(1 - T) + A_3 \alpha\right] = (c_0 + \epsilon_1 \beta) \left[A_3 \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} - A_1 \frac{\partial T}{\partial r^1}\right]. \tag{6.77}$$

Comme $\dot{\beta}(r^1) \neq 0$, en combinant (6.75) avec (6.77) on remarque la relation

$$A_3 \alpha + A_1(1 - T) = 0. \tag{6.78}$$

En dérivant par rapport à r^0 et en utilisant (6.71), on déduit

$$-A_1 \alpha + A_3(1 - T) = 0. \tag{6.79}$$

On impose $\vec{\lambda}^1 \neq 0$, autrement dit $A_1 \neq 0$, $A_3 \neq 0$ ou $\epsilon_1\chi(r^0, r^1) + A_2 \neq 0$. L'équation (6.73) implique que $\epsilon_1\chi(r^0, r^1) + A_2 = 0$, ce qui implique donc que $A_1 \neq 0$ ou $A_3 \neq 0$. Ainsi, A_1 ou A_3 doit être non-nulle. En résolvant (6.78) et (6.79), on obtient $\alpha = 0$ et $T = 1$. Il en suit que le champ de vitesse $\vec{v}$ est uniquement dépendant de l'invariant de Riemann r^1 et donc qu'il n'y a pas de superposition puisque c'est aussi le cas de la densité $\rho(r^1)$ et que la pression p_0 est constante.

On étudie maintenant l'hypothèse $\dot{\beta}(r^0) = 0$. Dans ce cas, β est une constante qu'on notera β_0. L'équation (6.70) implique que $A(r^1)$ est aussi une constante qu'on notera A. Conséquemment, la densité $\rho = \rho_0$ est une constante. On émet l'hypothèse que $\partial\alpha/\partial r^1 = 0$ si et seulement si $\partial T/\partial r^1 = 0$. Pour le prouver, on commence par faire l'hypothèse que $\partial\alpha/\partial r^1 = 0$. En utilisant (6.71), on montre que $0 = \frac{\partial}{\partial r^0}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right) = \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\right) = -e^{-\phi(r^0)}(c_0 + \epsilon_1 B_0)^{-1}\frac{\partial T}{\partial r^1}$, d'où on conclut que $\partial T/\partial r^1 = 0$. L'inverse se prouve de manière similaire. Ainsi, on ne considère que les cas $(\partial\alpha/\partial r^1), (\partial T/\partial r^1) = 0$ et $(\partial\alpha/\partial r^1), (\partial T/\partial r^1) \neq 0$. Or, si $(\partial\alpha/\partial r^1), (\partial T/\partial r^1) = 0$, alors le champ de vitesse $\vec{v}$ ne dépend que de r^0, il n'y a donc pas de superposition.

On fait donc l'hypothèse que $(\partial\alpha/\partial r^1), (\partial T/\partial r^1) \neq 0$. De l'équation (6.73), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial r^1}(A_1\alpha + A_3 T) = 0, \tag{6.80}$$

on doit donc considérer les cas $A_1, A_3 = 0$ et $A_1, A_3 \neq 0$. Si $A_1, A_3 \neq 0$, alors (6.80) mène à l'équation $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} = -\frac{A_3}{A_1}$ dont le côté droit n'est fonction que de r^1. En dérivant cette expression par rapport à r^0 et en employant (6.71), on trouve $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^2 = 0$, il n'y a donc pas de solution de rang 2 dans ce cas.

Si on fait l'hypothèse que $A_1, A_3 = 0$, alors (6.73) donne $\chi(r^0, r^1) = -(c_0 + \epsilon_1 B_0)^{-1}\left[A(r^1) + B_0 A_2(r^1)\right]$. En notant que $\vec{A}(r^1) - A_2(r^1)\vec{\Omega}$ et que $c_0 = -\epsilon(\kappa p_0/\rho_0)^{1/2} - \epsilon_1 B_0$, on applique les équations (6.7) pour calculer les invariants de Riemann (6.64b). L'indépendance linéaire de γ_0 et γ_1 est garantie si $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$

est satisfaite si $A(r^1) \neq \epsilon_1 c_0 A_2(r^1)$. Ainsi, en calculant les invariants de Riemann, on peut diviser par $A - \epsilon_1 c_0 A_2$. La solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donc donnée par (6.64a). □

La solution (6.64a) décrit l'écoulement d'un fluide incompressible à l'entropie constante avec vorticité.

Théorème 6.3.2. *Si l'élément acoustique non-homogène simple* (3.8) *et l'élément entropique homogène simple dans l'équation* (5.1) *sont satisfaisants à l'équation* (5.3) *et aux conditions de compatibilité* (5.5) *avec* $\alpha_1 \neq 0$, *alors la solution au système non-homogène* (3.1) *a une des formes suivantes :*

(i) *Le cas* $\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} = 0$. *Une solution existe seulement si* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$ *et elle est donnée par*

$$\begin{aligned} &\rho = \rho(r^1), \qquad\qquad p = p_0, \\ &\vec{v} = \vec{g} \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{h}(r^1)]\vec{h}(r^1) + \left(\epsilon \frac{(\vec{g} \cdot \vec{\Omega})}{(\kappa p_0)^{1/2}} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(r)} dr + V_2(r^1)\right) \vec{\Omega} \\ &\qquad + (\vec{h}(r^1) \cdot \vec{g})(\vec{h}(r^1) \times \vec{\Omega}) \end{aligned} \tag{6.81}$$

et les invariants de Riemann sont donnés par

$$\begin{aligned} \phi(r^1) + \frac{1}{\rho(r^1)^{1/2}} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(r)} dr &= \left\{ \epsilon \left[\frac{\kappa p_0}{\rho(r^1)}\right]^{1/2} - \vec{g} \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{h}(r^1)] \right\} t \\ &\qquad + \vec{h}(r^1) \cdot \vec{x}, \\ \dot{\phi}(r^1) - \frac{\dot{\rho}(r^1)}{2\rho(r^1)^{3/2}} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(r)} dr &= \left\{ -\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\kappa p_0}{\rho(r^1)^3}\right)^{1/2} \dot{\rho}(r^1) - \vec{g} \cdot [\vec{\Omega} \times \dot{\vec{h}}(r^1)] \right\} t \\ &\qquad + \dot{\vec{h}}(r^1) \cdot \vec{x}. \end{aligned} \tag{6.82}$$

où $\rho(r^1) > 0$, $\vec{h}(r^1)$, $\phi_0(r^1)$, $B_1(r^1)$, $V_2(r^1)$ *et* $\phi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires alors que* $p_0 > 0$ *et* V_0 *sont des constantes arbitraires. La densité* $\rho(r^1)$ *est telle que* $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$.

(ii) *Le cas* $\vec{\lambda}^0 = \epsilon_1 \left|\vec{\lambda}^0\right| \vec{\Omega}$. *Une solution existe seulement si* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$ *et est donnée par*

$$
\begin{aligned}
&\rho = \rho(r^1), \qquad\qquad p = p_0, \\
&\vec{v} = A_1(r^1) \sin\left(\frac{\epsilon}{(\kappa p_0)^{1/2}} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(r)} dr + B_1(r^1) \right) \vec{g} + V_0 \vec{\Omega} \\
&\qquad + \left\{ -A_1(r^1) \cos\left[\frac{\epsilon}{(\kappa p_0)^{1/2}} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(r)} dr + B_1(r^1) \right] + 1 \right\} (\vec{g} \times \vec{\Omega})
\end{aligned}
\tag{6.83}
$$

et les invariants de Riemann sont donnés par

$$
\begin{aligned}
&\phi(r^1) + \frac{1}{\rho(r^1)^{1/2}} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(r)} dr = \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho(r^1)} \right)^{1/2} - \epsilon_1 V_0 \right] t + \epsilon_1 \vec{\Omega} \cdot \vec{x}, \\
&\dot{\phi}(r^1) - \frac{\dot{\rho}(r^1)}{2\rho(r^1)^{3/2}} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(r)} dr = -\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\kappa p_0}{\rho(r^1)^3} \right)^{1/2} \dot{\rho}(r^1) t.
\end{aligned}
\tag{6.84}
$$

$\rho(r^1) > 0$, $\phi_0(r^0)$, $A_1(r^1) \neq 0$, $B_1(r^1)$ *et* $\phi(r^1)$ *sont et fonctions arbitraires alors que* $p_0 > 0$ *et* V_0 *sont des constantes arbitraires. La densité* $\rho(r^1)$ *est telle que* $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$.

Preuve : On résout (6.63) en faisant l'hypothèse que (5.5) est valide avec $\alpha_1 \neq 0$. Clairement, on a alors $p = p(r^0)$ et $p = A(r^1)\rho^\kappa$.

Les conditions (5.6), équivalentes aux équations (6.26), doivent être respectées. En substituant l'expression pour λ^0 donnée par (6.63b) dans (6.26a), on trouve

$$
\begin{aligned}
&\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0, r^1)} \vec{h}(r^1), \qquad \left|\vec{h}(r^1)\right| = 1, \\
&\epsilon \left[\kappa p(r^0)^{1-1/\kappa} A(r^1)^{1/\kappa} \right]^{1/2} - \vec{v} \cdot \vec{h}(r^1) = f(r^1), \qquad \vec{h} \cdot \left(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} \right).
\end{aligned}
\tag{6.85}
$$

Comme pour le Théorème 6.3.1, on obtient deux expressions pour $\partial \vec{v} / \partial r^0 \cdot \vec{h}$. La première est obtenue en dérivant (6.85) par rapport à r^0 et la deuxième est obtenue par l'entremise de (6.63a) et (6.85) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} \cdot \vec{h}(r^1) &= \epsilon \left(\frac{\kappa - 1}{2\kappa}\right) \left(\kappa \frac{A(r^1)^{1/\kappa}}{p(r^0)^{1+1/\kappa}}\right)^{1/2}, \\ &= -\epsilon \left(\frac{A(r^1)^{1/\kappa}}{\kappa p(r^0)^{1+1/\kappa}}\right)^{1/2} \dot{p}(r^0). \end{aligned} \tag{6.86}$$

On note que la pression $p = p_0$ est constante, la densité $\rho = \rho(r^1)$ est uniquement fonction de r^1 et

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = \epsilon \left(\frac{p(r^1)}{\kappa p_0}\right)^{1/2} e^{-\phi(r^0, r^1)} (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}). \tag{6.87}$$

On étudie les cas **(i)** $\vec{h} \times \vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{h} \times \vec{\Omega} = 0$.

(i) On fait l'hypothèse $\vec{h} \times \vec{\Omega} \neq 0$. L'ensemble de vecteurs $(\vec{h}, \vec{\Omega}, \vec{h} \times \vec{\Omega})$ forme donc une base vectorielle pour $\mathbb{R}^3$. On exprime le champ de vitesse en terme des vecteurs de notre nouvelle base de manière à ce que $\vec{v} = v_1(r^0, r^1)\vec{h} + v_2(r^0, r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0, r^1)(\vec{h} \times \vec{\Omega})$. L'équation (6.86) donne $v_3 \left|\vec{h} \times \vec{\Omega}\right|^2 = \vec{v} \cdot (\vec{h} \times \vec{\Omega}) = \vec{h} \cdot \vec{g}$, donc v_3 est uniquement fonction de r^1. Pour simplifier, posons $\vec{v}_3(r^1) = v_3 \vec{h} \times \vec{\Omega}$, On peut alors écrire $\vec{v} = v_1(r^0, r^1)\vec{h} + v_2(r^0, r^1)\vec{\Omega} + \vec{v}_3$ et (6.85) impose $\vec{h} \cdot (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}_3) = 0$.

Reformuler $\vec{v}$ dans (6.87) en termes de notre base vectorielle résulte en l'équation

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^0}\vec{h} + \frac{\partial v_2}{\partial r^0}\vec{\Omega} = \epsilon \left(\frac{\rho(r^1)}{\kappa p_0}\right)^{1/2} e^{-\phi(r^0, r^1)} \left[\vec{g} - v_1(\vec{\Omega} \times \vec{h}) - \vec{\Omega} \times \vec{v}_3\right]. \tag{6.88}$$

En calculant le produit scalaire entre (6.88) et $\vec{h}$ puis $\vec{\Omega} \times \vec{h}$, on trouve les conditions

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^0} + \frac{\partial v_2}{\partial r^0}\vec{\Omega} \cdot \vec{h} = 0, \qquad v_1 = (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}_3) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{x}h) \left|\vec{\Omega} \times \vec{h}\right|^{-2}. \tag{6.89}$$

Les équations (6.89) indiquent que v_1 est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1 et donc, par conséquent, que $\partial v_2/\partial r^0 (\vec{\Omega} \cdot \vec{h}) = 0$. Si $\partial v_2/\partial r^0 = 0$, alors $\partial \vec{v}/\partial r^0 = 0$ et il n'y a pas de superposition. On conclut donc $\vec{\Omega} \cdot \vec{h} = 0$.

En calculant le produit scalaire entre (6.88) et $\vec{\Omega}$ puis en intégrant le résultat par rapport à l'invariant de Riemann r^0 on trouve

$$v_2(r^0, r^1) = \epsilon \left(\frac{\rho(r^1)}{\kappa p_0}\right)^{1/2} \vec{g} \cdot \vec{\Omega} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi + V_2(r^1), \tag{6.90}$$

où $V_2(r^1)$ est la fonction d'intégration. Comme $\left|\vec{\Omega} \times \vec{h}\right|^2 = |\Omega|^2 \left|\vec{h}\right|^2 = (\vec{\Omega} \cdot \vec{h})^2 = 1$, il est clair que $v_1 = \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{h})$ et $v_3 = \vec{h} \cdot \vec{g}$.

En substituant l'expression pour λ^1 donnée par (6.63b) dans (6.26b), on remarque que les équations (6.42) et (6.43) sont aussi valides pour le cas présent. La dérivée du champ de vitesse $\vec{v}$ par rapport à l'invariant de Riemann r^1 donne

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \dot{v}_1(r^1)\vec{h} + \frac{\partial v_2}{\partial r^1}\vec{\Omega} + \dot{v}_3(r^1)(\vec{h} \times \vec{\Omega}) + v_1 \dot{\vec{h}}(r^1) + v_3 \dot{\vec{h}}(r^1) \times \vec{\Omega}. \tag{6.91}$$

Les équations (6.63) requièrent $\partial \vec{v}/\partial r^1 = \vec{\alpha} \times \vec{\lambda}^1$ pour un vecteur $\vec{\alpha}$ arbitraire. De manière équivalente, on note

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} \cdot \vec{\lambda}^1 = \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} \cdot \mu \left[\frac{\partial \phi}{\partial r^1}\vec{h} + \dot{\vec{h}}(r^1)\right] \\ &= \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial r^1}\dot{v}_1(r^1) + v_3 \frac{\partial \phi}{\partial r^1}\vec{h} \cdot (\dot{\vec{h}}(r^1) \times \vec{\Omega}) + \dot{v}_3(r^1)\dot{\vec{h}}(r^1)(\vec{h} \times \vec{\Omega}) + v_1 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|^2\right). \end{aligned} \tag{6.92}$$

Comme $\dot{\vec{h}}(r^1) \times (\vec{h} \times \vec{\Omega}) = (\dot{\vec{h}}(r^1) \cdot \vec{\Omega}) - (\dot{\vec{h}}(r^1) \cdot \vec{h})\vec{\Omega} = 0$ et $\left|\vec{h} \times \vec{\Omega}\right| = 1$, il apparait évident que $\dot{\vec{h}}(r^1) = \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| (\vec{h} \times \vec{\Omega})$ et que $\dot{\vec{h}}(r^1) \cdot (\vec{h} \times \vec{\Omega}) = \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|$, où $\epsilon_2 = \pm 1$. En substituant ces grandeurs ainsi que $v_1 = \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{h})$ et $v_3 = \vec{g} \cdot \vec{h}$ dans (6.92), on trouve la condition

$$\begin{aligned} 0 = \mu \Bigg\{ &\frac{\partial \phi}{\partial r^1} \left[\vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \dot{\vec{h}}(r^1)) - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \vec{g} \cdot \vec{h}\right] \\ &+ \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \left[\vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{h}) \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| + \epsilon_2 \vec{g} \cdot \dot{\vec{h}}(r^1)\right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.93}$$

Or, on a $\vec{\Omega} \times \dot{\vec{h}}(r^1) = \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \vec{h}$ et $\vec{g} \cdot \dot{\vec{h}}(r^1) = \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \vec{g} \cdot (\vec{h} \times \vec{\Omega})$. On conclut donc que

(6.93) est automatiquement satisfaite par des fonctions arbitraires $\phi(r^0, r^1)$ et $\vec{h}(r^1)$.

De (6.85), on remarque

$$f = \epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{1/2} - \vec{v} \cdot \vec{h} = \left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{1/2} - \vec{g} \cdot \vec{\Omega} \times \vec{h}, \tag{6.94}$$

ce qui, de paire avec (6.43), permet d'obtenir $-\vec{g} \cdot \dot{\vec{h}}(r^1)\vec{h}(\vec{h} \times \vec{\Omega}) = -\vec{v} \cdot \dot{\vec{h}}(r^1) = \frac{\partial \phi}{\partial r^1}\left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{1/2} + \epsilon(\kappa p_0)^{1/2}\frac{\partial \rho^{-1/2}}{\partial r^1} - \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \dot{\vec{h}}(r^1))$. Du paragraphe précédent, il est clair que $\vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \dot{\vec{h}}(r^1)) = (\vec{g} \cdot \vec{h})\dot{\vec{h}}(r^1) \cdot (\vec{h} \times \vec{\Omega})$ et donc que

$$\frac{\partial \phi}{\partial r^1} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\rho}(r^1)}{\rho}. \tag{6.95}$$

En intégrant (6.95) par rapport à r^1, on obtient

$$\phi(r^0, r^1) = \phi_0(r^1) + \frac{1}{2}\ln \rho, \tag{6.96}$$

où $\phi_0(r^0)$ est une fonction d'intégration.

Les invariants de Riemann (6.82) peuvent maintenant être calculés avec les équations (6.28) en utilisant les équations (6.94) et (6.96). Après avoir comparé (6.90) et (6.96), on remarque immédiatement que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.81). La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est satisfaite pourvu que $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$ ou $\dot{\vec{h}}(r^1) \neq 0$. Les résultats précédents indiquent que $\frac{d}{dr^1}\left[\vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{h})\vec{h} + \vec{g} \cdot \vec{h}(\vec{h} \times \vec{\Omega})\right] = 0$, d'où il suit que

$$\gamma_0 = \left(0 \ , \ 0 \ , \ \frac{\vec{g} \cdot \vec{\Omega}}{c(\kappa p_0)^{1/2}} e^{-\phi_0(r^0)}\vec{\Omega}\right) \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = \left(\dot{\rho}(r^1) \ , \ 0 \ , \ \dot{V}_2(r^1)\vec{\Omega}\right).$$

Ainsi, γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendant si $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$ et $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$.

(ii) Si $\vec{h} \times \vec{\Omega} = 0$, alors $\left|\vec{h}\right| = \left|\vec{\Omega}\right| = 1$ ce qui implique que $\vec{h} = \epsilon_1\vec{\Omega}$ $(\epsilon_1 = \pm 1)$ est constant et que (6.86) donne $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$. Ainsi, l'ensemble de vecteurs $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g} \times \vec{\Omega})$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. On pose alors $\vec{v} = v_1(r^0, r^1)\vec{g} + v_2(r^0, r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0, r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$, où les fonctions v_i $(i = 1, 2, 3)$ sont arbitraires. Insérer cette expression dans (6.85) et dans (6.63a) montre que

$$v_2 = \epsilon_1 \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho} \right)^{1/2} - f \right] \tag{6.97}$$

est uniquement fonction de r^1 ainsi que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = \frac{\partial v_1}{\partial r^0}\vec{g} + \frac{\partial v_3}{\partial r^0}(\vec{g} \times \vec{\Omega}) = \epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho}\right)^{-1/2} e^{-\phi(r^0, r^1)}$ $\left[(1 - v_3)\vec{g} + v_1(\vec{g} \times \vec{\Omega})\right]$. Les équations

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^0} = \epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho} \right)^{-1/2} e^{-\phi(r^0, r^1)}(1 - v_3), \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = \epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho} \right)^{1/2} e^{-\phi(r^0, r^1)} v_1$$

sont résolues de manière similaire à (6.71) et donnent

$$\begin{aligned} v_1 &= A(r^1) \sin \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho} \right)^{-1/2} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi + B_1(r^1) \right], \\ v_3 &= -A(r^1) \cos \left[\epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho} \right)^{-1/2} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi + B_1(r^1) \right] + 1. \end{aligned} \tag{6.98}$$

Avec (6.63) et $\vec{h} = \epsilon_1 \vec{\Omega}$, les équations (6.42) et (6.43) mènent à

$$\vec{\lambda}^1 = \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial r^1} \epsilon_1 \vec{\Omega} \right), \qquad -\frac{\partial \phi}{\partial r^1} \vec{v} \cdot \epsilon_1 \vec{\Omega} = \frac{\partial \phi}{\partial r^1} f + \dot{f}(r^1). \tag{6.99}$$

La condition $\partial \vec{v} / \partial r^1 \cdot \vec{\lambda}^1 = 0$ est équivalente à $0 = \left[\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\vec{g} + \dot{v}_2(r^1)\vec{\Omega} + \frac{\partial v_3}{\partial r^1}(\vec{g} \times \vec{\Omega})\right] \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r^1}\vec{\Omega} = \dot{v}_2(r^1)\frac{\partial \phi}{\partial r^1}$. Comme $\vec{\lambda}^1 \neq 0$ requière $\partial \phi / \partial r^1 \neq 0$, on conclut que $\dot{v}_2(r^1) = 0$, donc $v_2 = V_0$ est une constante. De (6.97), on a

$$f = \epsilon \left(\frac{\kappa p_0}{\rho} \right)^{1/2} - \epsilon_1 V_0 \tag{6.100}$$

ce qui, de pair avec (6.99), donne $\partial \phi / \partial r^1 = (2\rho)^{-1} \dot{\rho}(r^1)$. En intégrant cette équation par rapport à r^1, on trouve la relation

$$e^{\phi(r^0,r^1)} = e^{\phi_0(r^0)}\rho(r^1)^{1/2}, \tag{6.101}$$

où $\phi_0(r^0)$ est une fonction d'intégration. Les invariants de Riemann (6.84) peuvent maintenant être calculés par (6.28) en utilisant (6.100), (6.101) et $\vec{h} = \epsilon_1\vec{\Omega}$. Ensemble, (6.98) et (6.101) mènent à (6.83). Les vecteurs γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendant pourvu que $A_1(r^1) \neq 0$ et que soit $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$ ou $\dot{A}_1(r^1) \neq 0$. On satisfait aussi la condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ pourvu que $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$. □

Les écoulements de fluide décrits par les solutions (6.81) et (6.83) sont incompressibles et ont de la vorticité. L'entropie des deux écoulements n'est pas constante.

Solution explicite

Faisons les hypothèses suivantes pour rendre explicite la solution (6.83). Soit le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = (1, 0, 0)$ et le vecteur de gravitation $\vec{g} = (0, 0, g)$. Si on choisit les constantes $p_0 = 1/\kappa$ et $V_0 = 0$ ainsi que les branches $\epsilon = -1$ et $\epsilon_1 = 1$, on peut alors exprimer les invariants de Riemann de manière explicite en choisissant les fonctions arbitraires $\phi_0(r^0) = -\ln r^0$, $\rho(r^1) = (r^1)^2$ et $\phi(r^1) = (r^1)^2$.

À titre d'illustration, pour tracer le graphique des solutions, on choisit les bumps algébriques en termes de l'invariant de Riemann r^1 :

$$A_1(r^1) = 1 - \frac{4}{1 - 4(r^1)^2}, \qquad B_1(r^1) = 1 - \frac{4}{1 + 4(r^1)^2}.$$

Sous ces hypothèses, les solutions explicites de rang 2 sont

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho(t,x) = \frac{x}{3}, \quad p_0 = \frac{1}{\kappa}, \\ &\vec{v}(t,x) = \left(1 + \frac{12}{4x-3}\right)\sin\left(1 + t - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{3}} - \frac{12}{3+4x}\right)\vec{g} \\ &\quad + \left[1 - \left(1 + \frac{12}{4x-3}\right)\cos\left(1 + t - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{3}} - \frac{12}{3+4x}\right)\right](\vec{g}\times\vec{\Omega}) \end{aligned}} \tag{6.102}$$

Les invariants de Riemann sont donnés par

$$r^0(t,x) = \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}} - t, \quad r^1(t,x) = \sqrt{\frac{x}{3}}.$$

Les solutions (6.102) représentent un écoulement barotropique et compressible avec une densité linéaire en x et un champ de vitesse ayant une forme périodique.

Pour que les invariants soient réels, la condition $x \geq 0$ doit être respectée. On note que cette condition implique le respect de la condition $\rho \geq 0$.

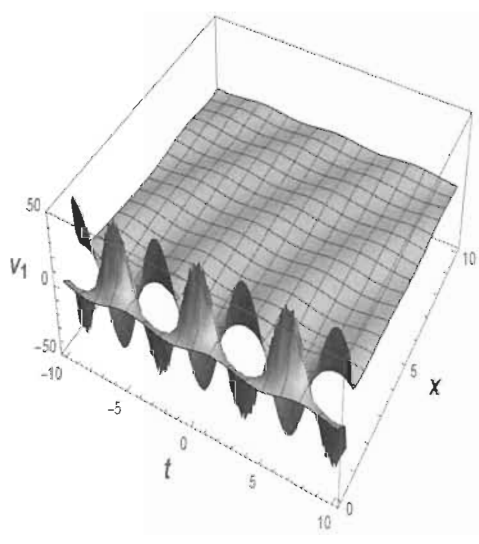

FIGURE 6.7 – Représentation graphique du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan engendré par le vecteur de gravitation $\vec{g}$

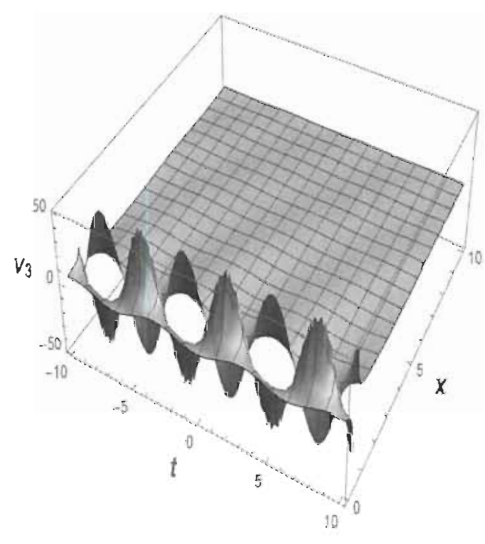

FIGURE 6.8 – Représentation graphique du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan engendré par $(\vec{g}\times\vec{\Omega})$

Les Figures 6.7 et 6.8, représentent le champ de vitesse dans le plan engendré par le vecteur de gravitation $\vec{g}$ et $\vec{g} \times \vec{\Omega}$, respectivement. Des singularités en terme de x sont observées lorsque les dénominateurs de l'équation du champ de vitesse donnée à (6.102) deviennent nuls, c'est-à-dire aux coordonnées $x = \pm 3/4$.

6.4 Ondes acoustiques simples sur états acoustiques simples $A_\epsilon^0 A_\epsilon$

En substituant les éléments acoustiques simples non-homogènes (3.8) et les éléments acoustiques simples homogènes (3.13) dans l'équation (5.3), on trouve le système d'équations différentielles partielles

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = \gamma_{\rho_0}, && \frac{\partial \rho}{\partial r^1} = \gamma_{\rho_1}, \\
&\frac{\partial p}{\partial r^0} = \frac{\partial p}{\partial r^1} = \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_{\rho_0}, && \frac{\partial p}{\partial r^1} = \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_{\rho_1}, \\
&\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = \frac{\rho(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) - \frac{\kappa p}{\rho}\gamma_{\rho_0}\vec{\lambda}^0}{\epsilon\rho\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^0\right|}, && \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = -\epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\frac{\gamma_{\rho_1}}{\rho}\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|},
\end{aligned} \tag{6.103}$$

où les vecteurs d'ondes sont donnés par

$$\lambda^0 = \begin{pmatrix} \epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^0\right| - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}^0 \\ \vec{\lambda}^0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^1 = \begin{pmatrix} \epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^1\right| - \vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1 \\ \vec{\lambda}^1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\lambda}^0 \cdot (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0.$$

Les équations (6.103) montrent que λ^0 peut satisfaire la condition $\partial\lambda^0/\partial r^1 = \alpha_1\lambda^1$ lorsque $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_1 \neq 0$. Les résultats obtenus pour chacun de ces cas sont indiqués dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 6.4.1. *Si les éléments acoustiques simples non-homogènes* (3.8) *et les éléments acoustiques simples homogènes* (3.13) *satisfont à l'équation* (5.3) *et les condi-*

tions de compatibilité (5.5) *avec* $\alpha_1 = 0$, *alors le système non-homogène* (3.1) *n'a pas de solution de rang 2 en terme des invariants de Riemann.*

Preuve : De manière analogue aux cas précédents, on résout (6.103) en faisant l'hypothèse que (5.5) est valide avec $\alpha_1 = 0$. Clairement, $\partial p/\partial r^i = (\kappa p/\rho)\partial\rho/\partial r^i$ ($i = 0, 1$) et, en intégrant, on conclut que $p = A\rho^\kappa$, où A est une constante d'intégration. Les équations correspondants à (6.67) sont données par

$$\begin{aligned} &\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0)}\vec{c}, && |\vec{c}| = 1, \\ &\epsilon\left(\kappa A\rho^{(\kappa-1)}\right)^{1/2} - \vec{v}\cdot\vec{c} = c_0, && \vec{c}\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0. \end{aligned} \tag{6.104}$$

On obtient alors deux expressions pour $\partial\vec{v}/\partial r^0 \cdot \vec{c}$. La première est obtenue en dérivant (6.104) et la deuxième par (6.103) :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}\cdot\vec{c} = \epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\rho^{(\kappa-3)/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^0} = -\epsilon(\kappa A)^{1/2}\rho^{(\kappa-3)/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^0}.$$

On conclut alors que $\left(\frac{\kappa-1}{2}+1\right)\frac{\partial\rho}{\partial r^0} = 0$. Ainsi, $\partial\rho/\partial r^0 = 0$, ce qui implique que la densité ρ et donc la pression p ne sont fonctions que de l'invariant de Riemann r^1.

(i) Faisons d'abord l'hypothèse que $\vec{c}\times\vec{\Omega} \neq 0$ comme pour la superposition $A^0_\epsilon E$. On pose $\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{c} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + \vec{v}_0$, où $\vec{c}\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}_0) = 0$ et le vecteur constant $\vec{v}_0 = T_0(\vec{c}\times\vec{\Omega})$. On calcule alors

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} = \frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\vec{c} + \frac{\partial\beta}{\partial r^0}\vec{\Omega} = \epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{-1/2} e^{-\phi(r^0)}\left[\vec{g} - \alpha(\vec{\Omega}\times\vec{c}) - \vec{\Omega}\times\vec{v}_0\right]. \tag{6.105}$$

En procédant comme dans la section précédente, on remarque que la fonction $\alpha = (\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}_0)\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{c})\left|\vec{\Omega}\times\vec{c}\right|^{-2}$ est constante et que $\partial\beta/\partial r^0\vec{\Omega}\cdot\vec{c} = 0$. Si $\partial\beta/\partial r^0 = 0$, alors $\vec{v}$ est uniquement fonction de r^1 et il n'y a pas de superpositions. On a donc forcément $\vec{\Omega}\cdot\vec{c} = 0$.

En substituant l'expression pour le champ de vitesse dans (6.104), on trouve

$\rho^{(\kappa-1)/2} = \epsilon(\kappa A)^{-1/2}(c_0 + \alpha)$. Si $\kappa \neq 1$, la densité ρ est alors constante, donc la pression p aussi et, par (6.103), $\partial\vec{v}/\partial r^1 = 0$, le champ de vitesse est donc uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^0 et il n'y a pas de superposition.

On fait donc l'hypothèse que $\kappa = 1$. En calculant le produit scalaire entre (6.105) et $\vec{\Omega}$, on trouve

$$\frac{\partial\beta}{\partial r^0} = \epsilon A^{-1/2} e^{-\phi(r^0)}(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})$$

et donc $\beta(r^0, r^1) = \epsilon A^{-1/2}(\vec{g}\cdot\vec{\Omega}) \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + B(r^1)$, où $B(r^1)$ est une fonction d'intégration. Clairement, $\partial\vec{v}/\partial r^1 = \partial\beta/\partial r^1 \vec{\Omega} = \dot{B}(r^1)\vec{\Omega}$ et l'équation (6.103) permet de trouver $\vec{\lambda}^1 \left|\vec{\lambda}^1\right|^{-1} = -\dot{B}(r^1)\rho(r^1)\epsilon \left[A^{1/2}\dot{\rho}(r^1)\right]^{-1} \vec{\Omega}$. Dans ce cas, les conditions (6.5) deviennent

$$\begin{aligned} \epsilon A^{1/2} - \vec{v}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} &= \mu(r^0, r^1)\left[\chi(r^0, r^1)c_0 + A(r^1)\right], \\ \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} &= \mu(r^0, r^1)\left[\chi(r^0, r^1)\vec{c} + \vec{A}(r^1)\right]. \end{aligned} \tag{6.106}$$

Lorsqu'elles sont comparées, les équations (6.106) mènent aux relations

$$\begin{aligned} \mu(r^0, r^1)A(r^1) &= \epsilon A^{1/2} - \mu(r^0, r^1)\chi(r^0, r^1)(\vec{v}\cdot\vec{c} + c_0) - \mu(r^0, r^1)\vec{v}\cdot\vec{A}(r^1), \\ \mu(r^0, r^1)\chi(r^0, r^1)\vec{c} + \mu(r^0, r^1)\vec{A}(r^1) &= -\dot{B}(r^1)\rho(r^1)\epsilon\left[A^{1/2}\dot{\rho}(r^1)\right]^{-1}\vec{\Omega}. \end{aligned} \tag{6.107}$$

En posant $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + A_3(r^1)(\vec{c}\times\vec{\Omega})$ et en comparant les coefficients, on trouve

$$\begin{aligned} &\chi(r^0, r^1) = -A_1(r^1), \qquad A_3(r^1) = 0, \\ &\mu(r^0, r^1)A_2(r^1) = -\dot{B}(r^1)\rho(r^1)\epsilon\left[A^{1/2}\dot{\rho}(r^1)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{6.108}$$

L'équation (6.107) prend alors la forme

$$\mu(r^0, r^1)A(r^1) = \epsilon A^{1/2} + \mu(r^0, r^1)A_1(r^1)c_0 - \mu(r^0, r^1)A_2(r^1)\beta(r^0, r^1). \tag{6.109}$$

Si $A_2 \neq 0$, alors (6.108) implique que μ est uniquement fonction de r^1. Conséquemment, (6.109) requière que β ne dépende que de r^1 ce qui mène à une absence de superposition. Si $A_2 = 0$, (6.108) donne $\dot{B}(r^1) = 0$, ce qui donne lieu à la contradiction $\dot{\rho}(r^1)\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right| = 0$. On note que $\dot{\rho}(r^1)$ ne peut pas être nul puisque si c'était le cas, il n'y aurait pas de superposition.

(ii) On fait maintenant l'hypothèse que $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$, autrement dit, que $\vec{c} = \epsilon_1\vec{\Omega}$ ($\epsilon_1 = \pm 1$). L'équation (6.104) implique que $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$, on pose donc $\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{g} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + T(r^0, r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$. La première équation de (6.104) prend alors la forme $\beta = \epsilon_1\left[\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2} - c_0\right]$, ce qui montre que la fonction β est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1. Comme $\epsilon\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2} = \epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}$, on obtient $\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} = \epsilon\left[\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^0\right|\right]^{-1}(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) = \frac{e^{-\phi(r^0)}}{c_0+\epsilon_1\beta}(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) \neq 0$. En écrivant cette équation en termes de notre base vectorielle puis en comparant les coefficients, on trouve les relations

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r^0} = e^{-\phi(r^0)}\frac{1-T}{c_0 + \epsilon_1\beta}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r^0} = e^{-\phi(r^0)}\frac{\alpha}{c_0 + \epsilon_1\beta}. \tag{6.110}$$

Clairement, $\alpha\partial\alpha/\partial r^0 = (1-T)$ et on trouve donc $\alpha^2 + (1-T)^2 = f(r^1)^2$, où $f(r^1)$ est une fonction d'intégration. On note qu'on doit forcément avoir $\alpha\partial\alpha/\partial r^0 \neq 0$ ou $\partial T/\partial r^0 \neq 0$. De retour à l'équation (6.103) on peut en déduire

$$\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = -\epsilon\left(\frac{\rho}{\kappa p}\right)^{1/2}\frac{\rho}{\gamma_{\rho_1}}\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1} = -\epsilon\left[\kappa A\rho^{(\kappa-3)/2}\dot{\rho}(r^1)\right]^{-1}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\vec{g} + \beta(r^1)\vec{\Omega} + \frac{\partial T}{\partial r^1}(\vec{g} \times \vec{\Omega})\right].$$

Notons que le cas où $\dot{\rho}(r^1) = 0$ n'a pas à être considéré étant donné qu'il n'y aurait alors pas de superposition. Pour ce cas, les conditions devant être satisfaites prennent la forme

$$\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = \mu(r^0, r^1)\left[\chi(r^0, r^1)\epsilon_1\vec{\Omega} + \vec{A}(r^1)\right], \tag{6.111a}$$

$$\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}-\vec{v}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}=\mu(r^0,r^1)\left[\chi(r^0,r^1)c_0+A(r^1)\right]. \tag{6.111b}$$

Après un comparaison entre (6.111a) et (6.111b), on obtient

$$\begin{aligned}\mu(r^0,r^1)A(r^1)&=\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}-\mu(r^0,r^1))\chi(r^0,r^1)(c_0+\epsilon\vec{v}\cdot\vec{\Omega})\\&\quad-\mu(r^0,r^1)\vec{v}\cdot\vec{A}(r^1),\\ \epsilon_1\mu(r^0,r^1)\chi(r^0,r^1)\vec{\Omega}+\mu(r^0,r^1)\vec{A}(r^1)&=-\epsilon\left[(\kappa A)^{1/2}\dot{\rho}(r^1)\right]^{-1}\rho^{-(\kappa-3)/2}\\&\quad\cdot\left[\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\vec{g}+\dot{\beta}(r^1)\vec{\Omega}+\frac{\partial T}{\partial r^1}(\vec{g}\times\vec{\Omega})\right].\end{aligned}$$

Afin de simplifier ces équations, on définit $\mu(r^0,r^1)=-\epsilon\left[(\kappa A)^{1/2}\dot{\rho}(r^1)\right]^{-1}\rho^{-(\kappa-3)/2}\tilde{\mu}(r^0,r^1)$ et on obtient alors

$$\begin{aligned}&\epsilon_1\tilde{\mu}(r^0,r^1)\chi(r^0,r^1)\vec{\Omega}+\tilde{\mu}(r^0,r^1)\vec{A}(r^1)=\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\vec{g}+\dot{\beta}(r^1)\vec{\Omega}+\frac{\partial T}{\partial r^1}(\vec{g}\times\vec{\Omega})\\&A(r^1)=-\kappa A\dot{\rho}(r^1)\rho^{\kappa-2}\tilde{\mu}(r^0,r^1)^{-1}-\chi(r^0,r^1)(c_0+\epsilon_1\vec{v}\cdot\vec{\Omega})-\vec{v}\cdot\vec{A}(r^1).\end{aligned}$$

En posant $\vec{A}(r^1)=A_1(r^1)\vec{g}+A_2(r^1)\vec{\Omega}+A_3(\vec{g}\times\vec{\Omega})$, on peut trouver

$$\begin{aligned}&\tilde{\mu}(r^0,r^1)A_1(r^1)=\frac{\partial\alpha}{\partial r^1},\quad\tilde{\mu}(r^0,r^1)A_3(r^1)=\frac{\partial T}{\partial r^1},\\&\tilde{\mu}(r^0,r^1)\left[\epsilon_1\chi(r^0,r^1)+A_2(r^1)\right]=\dot{\beta}(r^1),\\&A(r^1)=-\kappa A\dot{\rho}(r^1)\rho^{\kappa-2}\tilde{\mu}(r^0,r^1)^{-1}-\chi(r^0,r^1)(c_0+\epsilon_1\beta)-|\vec{g}|^2(\alpha A_1+TA_3)-\beta A_2,\end{aligned}$$

d'où on trouve

$$A_1\frac{\partial T}{\partial r^1}=A_3\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}. \tag{6.112}$$

On doit exiger le critère suivant : α est fonction de r^0 si et seulement si T est seulement fonction de r^0. Peu importe le cas, β est une constante β_0. La preuve de ce critère va comme suit. Si α est uniquement fonction de r^0, l'équation (6.110) peut être écrite sous la forme $e^{\phi(r^0)}d\alpha/dr^0=\left[c_0+\epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-1}\left[1-T(r^0,r^1)\right]$. En dérivant cette égalité par rapport à r^0 et en utilisant (6.110), on obtient $\frac{d}{dr^0}\left(e^{\phi(r^0)}\frac{d\alpha}{dr^0}\right)=-\alpha e^{-\phi(r^0)}\left[c_0+\epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-2}$ ou, de manière équivalente $\left[c_0+\epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-2}=-\left(\alpha e^{-\phi(r^0)}\right)^{-1}$

$\frac{d}{dr^0}\left(e^{\phi(r^0)}\frac{d\alpha}{dr^0}\right)$. Comme le côté droit de l'équation ne dépend que de l'invariant de Riemann r^1 alors que le coté gauche n'est fonction que de l'invariant de Riemann r^0, chacun des côtés doit être constant. On conclut alors que $\beta = \beta_0$ est une constante et que (6.110) implique que T est uniquement fonction de r^0. L'inverse est prouvé similairement.

Par conséquence du dernier paragraphe et de l'équation (6.112), il n'est nécessaire de considérer que les cas $\partial\alpha/\partial r^1$, $\partial T/\partial r^1 = 0$ et $\partial\alpha/\partial r^1$, $\partial T/\partial r^1 \neq 0$. Si $\partial\alpha/\partial r^1$, $\partial T/\partial r^1 \neq 0$, alors l'équation (6.112) peut être réécrite sous la forme $\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} = \frac{A_1(r^1)}{A_3(r^1)}$. En dérivant cette équation par rapport à r^0 et en changeant l'ordre de dérivation, on obtient l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial r^1}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\right) - \frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial T}{\partial r^0}\right) = 0. \tag{6.113}$$

On peut alors utiliser les équations (6.110) pour obtenir $\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^2\right](c_0+\epsilon_1\beta) = \epsilon_1\dot{\beta}(r^1)(c_0+\epsilon_1\beta)^{-1}f(r^1)\dot{f}(r^1)$. dériver par rapport à r^0 et changer l'ordre de dérivation mène à

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\right) + \frac{\partial T}{\partial r^1}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial T}{\partial r^0}\right) = 0. \tag{6.114}$$

Les équations (6.113) et (6.114) impliquent

$$\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial T}{\partial r^0}\right) = 0. \tag{6.115}$$

En substituant (6.110) dans (6.115), on trouve $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} = \epsilon_1\dot{\beta}(r^1)(c_0+\epsilon_1\beta)^{-1}$. On remarque de cette expression que le côté droit de l'équation est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1. En dérivant par rapport à r^0 et en utilisant (6.115), on trouve

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial r^0} = 0.$$

Alors, (6.110) implique $T = 1$ et $\alpha = 0$, ce qui est une contradiction.

Si $\partial\alpha/\partial r^1$, $\partial T/\partial r^1 = 0$, il a été démontré que $\beta = \beta_0$ est constant. Évidemment, on a alors $\partial\vec{v}/\partial r^1 = 0$ ce qui, par (6.103), implique que $\dot{\rho}(r^1) = 0$, il n'y a donc pas de superposition et donc pas de solution de rang 2. □

Théorème 6.4.2. *Si les éléments acoustiques simples non-homogènes* (3.8) *et les éléments acoustiques simples homogènes* (3.13) *sont satisfaisants à l'équation* (5.3) *et aux conditions de compatibilité* (5.5) *avec* $\alpha_1 \neq 0$, *alors le système non-homogène* (3.1) *n'a pas de solution.*

Preuve : On résout le système (6.103) sujet aux conditions (5.5) avec $\alpha_1 \neq 0$. On obtient immédiatement $p = A\rho^\kappa$, où A est une constante d'intégration. On a donc le système

$$\begin{aligned} &\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0,r^1)}\vec{h}(r^1), && \left|\vec{h}(r^1)\right| = 1, \\ &\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right) - \vec{v}\cdot\vec{h} = f(r^1), && \vec{h}\cdot(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) = 0. \end{aligned} \tag{6.116}$$

En dérivant la deuxième équation de (6.116) par rapport à r^0 et en employant (6.103), on obtient

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}\cdot\vec{h}(r^1) = \epsilon\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^0} = -\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^0},$$

ce qui implique que $\partial\rho/\partial r^0 = 0$. Ainsi, la densité ρ et la pression p sont uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^1.

(i) On fait d'abord l'hypothèse que $\vec{h}\times\vec{\Omega} \neq 0$. On pose alors $\vec{v} = v_1(r^0,r^1)\vec{h} + v_2(r^0,r^1)\vec{\Omega} + \vec{v}_3$, où $\vec{v}_3 = v_3(\vec{h}\times\vec{\Omega})$. Il en découle naturellement

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} = \frac{\partial v_1}{\partial r^0}\vec{h} + \frac{\partial v_2}{\partial r^0}\vec{\Omega} = \epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{-1/2}e^{-\phi(r^0,r^1)}\left[\vec{g} - v_1(\vec{\Omega}\times\vec{h}) - \vec{\Omega}\times\vec{v}_3\right].$$

En procédant de manière analogue à la dernière section, on trouve que la grandeur $v_1 = (\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}_3)\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{h})\left|\vec{\Omega}\times\vec{h}\right|^{-2}$ est uniquement fonction de r^1, tout comme la densité ρ et la pression p, il n'y a donc pas de superposition. Conséquemment, on a

$\vec{\Omega} \cdot \vec{h} = 0$ et il est clair que $v_1 = \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{h})$ et que $v_3 = \vec{h} \cdot \vec{g}$.

La dérivée du champ de vitesse $\vec{v}$ par rapport à r^1 est donnée par (6.91) qui, après y avoir inséré nos expressions pour v_1 et v_3, devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} &= \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \dot{\vec{h}}(r^1))\vec{h} + \frac{\partial V_2}{\partial r^1}\vec{\Omega} + \dot{\vec{h}}(r^1) \cdot \vec{g}(\vec{h} \times \vec{\Omega}) + \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{h})\dot{\vec{h}}(r^1) \\ &\quad + \vec{h} \cdot \vec{g}(\dot{\vec{h}}(r^1) \times \vec{\Omega}) \\ &= \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \vec{g} \cdot \vec{h}\vec{h} + \frac{\partial V_2}{\partial r^1}\vec{\Omega} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \vec{g} \cdot (\vec{h} \times \vec{\Omega})\vec{h} \times \vec{\Omega} \\ &\quad + \vec{g} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{h})\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| (\vec{h} \times \vec{\Omega}) - \vec{h} \cdot \vec{g}\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \vec{h} = \frac{\partial V_2}{\partial r^1}\vec{\Omega}.\end{aligned} \tag{6.117}$$

De retour à (6.103), on remarque que $\vec{v}$ doit satisfaire

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = -\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2} \dot{\rho}(r^1) \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}. \tag{6.118}$$

L'équation (6.26) doit être respectée. L'équation (6.26b) montre que

$$\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = \mu(r^0, r^1) \left[\frac{\partial \phi}{\partial r^1}\vec{h}(r^1) + \dot{\vec{h}}(r^1)\right]. \tag{6.119}$$

En substituant (6.117) et (6.119) dans (6.118), on trouve la condition

$$\frac{\partial V_2}{\partial r^1}\vec{\Omega} = -\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2} \dot{\rho}(r^1)\mu(r^0, r^1) \left[\frac{\partial \phi}{\partial r^1}\vec{h} + \dot{\vec{h}}(r^1)\right]. \tag{6.120}$$

En calculant le produit scalaire entre (6.120) et $\vec{\Omega}$, on remarque que $\partial V_2/\partial r^1 = 0$ et que le champ de vitesse $\vec{v}$ n'a pas de dépendance à r^1. L'équation (6.118) implique quant à elle que $\dot{\rho}(r^1) = 0$ et donc qu'il n'y a pas de superposition, donc pas de solution de rang 2.

(ii) On fait maintenant l'hypothèse que $\vec{h} \times \vec{\Omega} = 0$ ou, de manière équivalente, $\vec{h} = \epsilon_1\vec{\Omega}$ ($\epsilon_1 = \pm 1$). L'équation (6.116) implique $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$, on pose donc $\vec{v} = v_1(r^0, r^1)\vec{g} +$

$v_2(r^0,r^1)\vec{\Omega}+v_3(r^0,r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$. La deuxième équation de (6.116) prend alors la forme

$$v_2=\epsilon_1\left[\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}-f(r^1)\right], \tag{6.121}$$

d'où on note que v_2 est uniquement fonction de r^1. Il est clair que $\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}=\epsilon\left[\left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2}\left|\vec{\lambda}^0\right|\right]^{-1}$ $(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})=\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{-1/2}e^{-\phi(r^0,r^1)}$. En écrivant cette équation en terme des vecteurs de notre base vectorielle et en comparant les coefficients, on trouve

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^0}=\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{-1/2}e^{-\phi(r^0,r^1)}(1-v_3),\quad \frac{\partial v_3}{\partial r^0}=\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{-1/2}e^{-\phi(r^0,r^1)}v_1. \tag{6.122}$$

En substituant la valeur de λ^1 donnée par (6.103) dans (6.26), on obtient

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{-1/2}-\vec{v}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}&=\mu(r^0,r^1)\left(\frac{\partial\phi}{\partial r^1}f+\dot{f}(r^1)\right),\\ \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}&=\mu(r^0,r^1)\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\epsilon_1\vec{\Omega}.\end{aligned} \tag{6.123}$$

Comme $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right|$ et $\vec{\Omega}$ sont des vecteurs unitaires colinéaires, on doit avoir

$$\mu\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\epsilon_1=\epsilon_2,\qquad \epsilon_2=\vec{\Omega}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}=\pm1.$$

Ainsi, on a $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right|=\epsilon\vec{\Omega}$ et $\mu(r^0,r^1)=\epsilon_1\epsilon_2(\partial\phi/\partial r^1)^{-1}$. La condition $\vec{\lambda}^1\neq 0$ implique que $\partial\phi/\partial r^1\neq 0$. Ensemble, les équations (6.123) et (6.121) donnent

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}-\epsilon_2 v_2=&\epsilon_1\epsilon_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\right)^{-1}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\left[\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{-1/2}-\epsilon_1 v_2\right]\right.\\ &\left.+\left[\epsilon\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\dot{\rho}(r^1)-\epsilon_1\dot{v}_2(r^1)\right]\right\}\end{aligned}$$

ou, de manière équivalente,

$$\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\frac{\partial\phi}{\partial r^1}(\epsilon_1\epsilon_2-1)=\epsilon\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\dot{\rho}(r^1)-\epsilon_1\dot{v}_2(r^1). \tag{6.124}$$

De retour à (6.103), on remarque que le champ de vitesse $\vec{v}$ doit satisfaire l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} &= \frac{\partial v_1}{\partial r^1}\vec{g} + \dot{v}_2(r^1)\vec{\Omega} + \frac{\partial v_3}{\partial r^1}(\vec{g} \times \vec{\Omega}) = -\epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{1/2} \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} \\ &= -\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{-1/2} \dot{\rho}(r^1)\epsilon_2\vec{\Omega}.\end{aligned} \tag{6.125}$$

En comparant les coefficients dans (6.125), on trouve

$$\frac{\partial v_i}{\partial r^1} = 0, \qquad i = 1, 3, \qquad \dot{v}_1(r^1) = -\epsilon_2\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2} \dot{\rho}(r^1). \tag{6.126}$$

Ainsi, v_1 et v_3 sont uniquement fonctions de r^0. Si v_1 et v_3 sont constants, alors $\vec{v}$ est uniquement fonction de r^1 tout comme ρ et p ce qui implique une absence de superposition. Ainsi, v_1 et v_3 ne peuvent pas être constants. Plus particulièrement on a $v_1 \neq 0$ et $v_3 \neq 1$.

L'équation (6.122) peut être écrite sous la forme $\epsilon\,(\kappa A)^{1/2}\, v_1(r^0)^{-1}\dot{v}_3(r^0) = e^{-\phi(r^0,r^1)}$ $\rho(r^1)^{-(\kappa-1)/2}$. Autrement dit, on a $\phi(r^0, r^1) = \phi_0(r^0) - 2^{-1}(\kappa - 1)\ln \rho(r^1)$ et il en découle que

$$\frac{\partial \phi}{\partial r^1} = -\left(\frac{\kappa - 1}{2}\right) \rho^{-1}\dot{\rho}(r^1). \tag{6.127}$$

En substituant (6.126) et (6.127) dans (6.124) et en simplifiant l'équation résultante, on obtient

$$\begin{aligned}0 &= \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2} \dot{\rho}(r^1) \left[\epsilon_1\epsilon_2 + \frac{\kappa - 1}{2} + \frac{\kappa - 1}{2}(\epsilon_1\epsilon_2 - 1)\right] \\ &= \epsilon_1\epsilon_2\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2} \dot{\rho}(r^1)\frac{\kappa + 1}{2},\end{aligned}$$

ce qui implique que la densité est uniquement fonction de l'invariant de Riemann r^0. Or, dans ce cas, il n'y a pas de superposition et donc pas de solution de rang 2 en terme des invariants de Riemann. $\square$

6.5 Onde entropique simple sur états hydrodynamiques simples H^0E

En substituant les éléments hydrodynamiques simples non-homogènes H^0 (3.9) et les éléments entropiques simples homogènes E (3.11) dans l'équation (5.3), on trouve le système d'équations différentielles partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial r^0} &= -\rho\frac{(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}^0}{\delta^2-\frac{\kappa p}{\rho}\left|\vec{\lambda}^0\right|^2}, & \frac{\partial\rho}{\partial r^1} &= \gamma_{\rho_1},\\
\frac{\partial p}{\partial r^0} &= -\kappa p\frac{(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}^0}{\delta^2-\frac{\kappa p}{\rho}\left|\vec{\lambda}^0\right|^2}, & \frac{\partial p}{\partial r^1} &= 0,\\
\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0} &= \frac{1}{\rho\delta}\left[\rho(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})+\kappa p\frac{(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}^0}{\delta^2-\frac{\kappa p}{\rho}\left|\vec{\lambda}^0\right|^2}\vec{\lambda}^0\right] & \frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1} &= \vec{\alpha}\times\vec{\lambda}^1
\end{aligned} \tag{6.128a}$$

où les vecteurs d'ondes sont donnés par

$$\lambda^0 = \begin{pmatrix} \delta-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^0 \\ \vec{\lambda}^0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^1 = \begin{pmatrix} -\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1 \\ \vec{\lambda}^1 \end{pmatrix}. \tag{6.128b}$$

Une étude de (6.128) révèle que λ^0 peut satisfaire la condition d'intégrabilité $\partial\lambda^0/\partial r^1 = \alpha_1\lambda^1$ pour les possibilités $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_1 \neq 0$. Les solutions obtenues pour chacun des cas sont présentées dans les théorèmes suivants.

Théorème 6.5.1. *Si les éléments hydrodynamiques simples non-homogènes* (3.9) *et les éléments entropiques simples homogènes* (3.11) *dans l'équation* (5.1) *sont satisfaisants à l'équation* (5.3) *et aux conditions de compatibilité* (5.5) *avec* $\alpha_1 = 0$*, la solution du système non-homogène* (3.1) *a une des formes suivantes :*

(i) *Le cas* $\vec{\lambda}^0\times\vec{\Omega}\neq 0$, $\vec{\lambda}^0\cdot\vec{\Omega} = 0$ ***(a)*** *Pour* $\dot{p}(r^0) = 0$*, une solution existe seulement* *lorsque* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\neq 0$ *et elle est donnée par*

$$
\begin{aligned}
&\rho=\rho(r^1), \qquad\qquad p=p_0,\\
&\vec{v}=-\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})\vec{c}+\left[\frac{-\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\int_0^{r^0}e^{-\phi(r)}dr+B(r^1)\right]\vec{\Omega} \qquad (6.129)\\
&\qquad+(\vec{g}\cdot\vec{c})(\vec{c}\times\vec{\Omega}),
\end{aligned}
$$

où les invariants de Riemann sont donnés par

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{r^0}e^{-\phi(r)}dr=-c_0t+\vec{c}\cdot\vec{x}+a_0,\\
&\psi(r^1)=\frac{c_0t+\vec{c}\cdot\vec{x}+a_0}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\\
&\qquad\cdot\left[A_0(r^1)-\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})A_1(r^1)+B(r^1)A_2(r^1)+\vec{g}\cdot\vec{c}A_3(r^1)\right] \qquad (6.130)\\
&\qquad-\frac{1}{2}(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})A_2(r^1)\left[\frac{c_0t+\vec{c}\cdot\vec{x}+a_0}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\right]^2+A_0(r^1)t\\
&\qquad+[A_1(r^1)\vec{c}+A_2(r^1)\vec{\Omega}+A_3(r^1)(\vec{c}\times\vec{\Omega})]\cdot\vec{x}.
\end{aligned}
$$

Les fonctions $\rho(r^1)>0$, $\phi(r^0)$, $\psi(r^1)$, $A_i(r^1)$ $(i=0,1,2,3)$ *ainsi que* $B(r^1)$ *et les constantes arbitraires* $p_0>0$, a_0 $c_0\neq\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})$ *et* $\vec{c}=\vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|$ *sont telles que* $\dot{B}(r^1)A_2=0$, $\dot{\rho}(r^1)\neq 0$, $A_2\neq 0$ *ou* $A_3\neq 0$ *et* $A_0\neq c_0A_1$.

(b) *Pour* $\dot{p}(r^0)\neq 0$, *la solution est*

$$
\begin{aligned}
&\rho=\left(\frac{p(r^0)}{A}\right)^{1/\kappa}, \qquad p=p(r^0),\\
&\vec{v}=\left(\frac{1}{S_1p^{1/\kappa}}-c_0\right)\vec{c}+\left(\vec{g}\cdot\vec{\Omega}S_1\int_0^{r^1}e^{-\phi(r)}p(r)^{1/\kappa}dr+B(r^1)\right)\vec{\Omega} \qquad (6.131)\\
&\quad+\left[(\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0)S_1\int_0^{r^0}e^{-\phi(r)}p(r)^{1/\kappa}dr+\int_0^{r^0}e^{-\phi(r)}+T_1\right](\vec{c}\times\vec{\Omega}),
\end{aligned}
$$

où la relation entre ϕ *et* p *est définie par*

$$\begin{aligned}
e^{-\phi(r^0)} = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}(T_1 - \vec{g}\cdot\vec{c})^2 - [\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) - c_0]\left[\frac{1}{S_1}\left(\frac{1}{p(r^0)^{1/\kappa}} - \frac{1}{p(0)^{1/\kappa}}\right)\right.\right. \\
& \left.+ S_1 A^{1/\kappa}[p(r^0) - p(0)]\right] - \frac{1}{2S_1^2}\left[\frac{1}{p(r^0)^{2/\kappa}} - \frac{1}{p(0)^{2/\kappa}}\right] \\
& \left. - F[p(r^0)] + F[p(0)]\right]^{-1/2} \cdot \left[\frac{1}{\kappa S_1^2 p(r^0)^{1+1/\kappa}} - A^{1/\kappa}\right]\frac{\dot{p}(r^0)}{p(r^0)^{1/\kappa}} \qquad (6.132) \\
\textit{où} \quad & F(p) = \begin{cases} \left(\dfrac{\kappa}{\kappa-1}\right)p^{1-1/\kappa} & \kappa \neq 1 \\ -\ln p & \kappa = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

et où les invariants de Riemann sont donnés par

$$\begin{aligned}
& \int_0^{r^0} e^{-\phi(r)dr} = c_0 t + \vec{c}\cdot\vec{x} + c_1, \\
& \psi(r^1) = -[A(r^1) - A_1(r^1) + A_3(r^1)T_1]S_1 \\
& \quad \cdot \int_0^{r^0} e^{-\phi(r)} p(r)^{1/\kappa} dr - A_3(r^1) S_1 \int_0^{r^0} e^{-\phi(r)} p(r)^{1/\kappa}\left(\int_0^r e^{-\phi(s)} ds\right) dr \qquad (6.133) \\
& \quad - \frac{1}{2} A_3(r^1) S_1^2 [\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) - c_0]\left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)} p(r)^{1/\kappa} dr\right)^2 \\
& \quad + [A(r^1) - c_0 A_1(r^1)]t + A_3(r^1)(\vec{c}\times\vec{\Omega})\cdot\vec{x}.
\end{aligned}$$

Les fonctions $A(r^1)$, $A_i(r^1)$ $(i = 1, 3)$,$\psi(r^1)$, $B(r^1)$, $p(r^0) > 0$ *et les constantes* $A > 0$, $S_1 \neq 0$, T_1, c_0, c_1, $\vec{c} = \vec{\lambda}^0 / \left|\vec{\lambda}^0\right|$ *sont des paramètres arbitraires tels que* $\vec{c}\cdot\vec{\Omega} = 0$, $\dot{p}(r^0) \neq 0$, $\dot{B}(r^1) \neq 0$, $A_3 \neq 0$ *ou* $A \neq c_0 A_1$.

(ii) *Le cas* $\vec{\lambda}^0 = \epsilon_1 \left|\vec{\lambda}^0\right| \vec{\Omega}$ ***(a)*** *Lorsque* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$, *la solution est*

$$\begin{aligned}
& \rho = \rho(r^1) \qquad p = p_0 \\
& \vec{v} = a_1(r^1)\cos\left[\frac{1}{c_0 + \epsilon_1 B_0}\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)} dr + B_1(r^1)\right]\vec{g} + B_0\vec{\Omega} \qquad (6.134) \\
& \quad + \left\{a_1(r^1)\sin\left[\frac{1}{c_0 + \epsilon_1 B_0}\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)} dr + B_1(r^1)\right] + 1\right\}(\vec{g}\times\vec{\Omega}),
\end{aligned}$$

où les invariants de Riemann sont donnés par

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{r^0} e^{-\phi(r)} dr = c_0 t + \epsilon_1 \vec{c} \cdot \vec{x} + a_0, \\
&\psi(r^1) = \left[\frac{\epsilon_1 A_0(r^1) - c_0 A_2(r^1)}{c_0 + \epsilon_1 B_0} \right] (B_0 t - \vec{\Omega} \cdot \vec{x}) - \frac{|\vec{g}|^2 A_3(r^1)}{c_0 + \epsilon_1 B_0} (c_0 t + \epsilon_1 \vec{\Omega} \cdot \vec{x}) \\
&\quad - |\vec{g}|^2 A_1(r^1) a_1(r^1) \sin \left[\frac{c_0 t + \epsilon_1 \vec{\Omega} \cdot \vec{x} + c_1}{c_0 + \epsilon_1 B_0} + b_1(r^1) \right] \\
&\quad + |\vec{g}|^2 A_3(r^1) a_1(r^1) \cos \left[\frac{c_0 t + \epsilon_1 \vec{\Omega} \cdot \vec{x} + c_1}{c_0 + \epsilon_1 B_0} + b_1(r^1) \right] \\
&\quad + A_1(r^1) \vec{g} \cdot \vec{x} + A_3(r^1) (\vec{g} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{x}.
\end{aligned}
\tag{6.135}
$$

Les fonctions $\phi(r^0)$, $\rho(r^1) > 0$, $a_1(r^1) \neq 0$, $b_1(r^1)$, $\psi(r^1)$, $A_i(r^1)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ *et les constantes* $p_0 > 0$, B_0, $c_0 \neq \epsilon_1 B_0$, a_0 *sont des paramètres arbitraires tels que* $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$ *ou* $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$, $A_1 \neq 0$ *ou* $A_3 \neq 0$, $A_0 \neq \epsilon_1 c_0 A_3$. *Si* $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$ *ou* $\dot{b}_1(r^1) \neq 0$, *alors* $A_1 = A_3 = 0$.

(b) *Lorsque* $\vec{g} = \epsilon_2 |\vec{g}| \vec{\Omega}$ *la solution est donnée par*

$$
\begin{aligned}
&\rho = \left(\frac{p(r^0)}{A} \right), \qquad p = p(r^0), \\
&\vec{v} = a_1(r^1) \sin \left[\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{|\vec{g}|} \left(\frac{S_0}{p(r^0)^{1/\kappa}} + \frac{A^{1/\kappa} p(r^0)}{S_0} \right) + b_1(r^1) \right] \vec{e}_1 \\
&\quad + a_1(r^1) \cos \left[\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{|\vec{g}|} \left(\frac{S_0}{p(r^0)^{1/\kappa}} + \frac{A^{1/\kappa} p(r^0)}{S_0} \right) + b_1(r^1) \right] \vec{e}_2 \\
&\quad + \epsilon_1 \left(\frac{S_0}{p(r^0)^{1/\kappa}} - c_0 \right) \vec{e}_3
\end{aligned}
\tag{6.136}
$$

où les invariants de Riemann sont donnés par

$$
\begin{aligned}
&\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{|\vec{g}|} \left(\frac{S_0^2}{2p(r^0)^{1/\kappa}} + A^{1/\kappa} F[p(r^0)] \right) = c_0 t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x} + a_0, \\
&\psi(r^1) = t - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{|\vec{g}|} \left(\frac{S_0}{p(r^0)^{1/\kappa}} + \frac{A^{1/\kappa} p(r^0)}{S_0} \right)
\end{aligned}
\tag{6.137}
$$

et où

$$F(p) = \begin{cases} \left(\dfrac{\kappa}{\kappa-1}\right) p^{1-1/\kappa} & \kappa \neq 1 \\ \ln p & \kappa = 1 \end{cases}.$$

Les fonctions $p(r^0) > 0$, $a_1(r^1) \neq 0$, $b_1(r^1)$, $\psi(r^1)$ et les constantes $A > 0$, $S_0 \neq 0$, c_0, a_0 sont des paramètres arbitraires tels que $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$ ou $\dot{b}_1(r^1) \neq 0$, $\vec{e}_3 = \vec{\Omega}$ et $\dot{p} \neq 0$.

Preuve : On résout (6.128) en faisant l'hypothèse que les conditions (5.5) sont valides avec $\alpha_1 = 0$. Il est évident que $p = p(r^0)$ et que $(\partial p/\partial r^0) = \kappa p \rho^{-1}(\partial \rho/\partial r^0)$, ce qui, après une intégration, implique que $\rho = p(r^0)^{1/\kappa} A(r^1)^{-1/\kappa}$, où $A_1(r^1)$ est une fonction d'intégration.

Les conditions (6.5) doivent être respectées. En substituant la valeur de λ^0 donnée par (6.128b) dans (6.5), on trouve $\delta - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0)} c_0$ et $\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0)} \vec{c}$. De ces deux expressions, on obtient

$$\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0)} \vec{c}, \qquad |\vec{c}| = 1, \qquad \delta = e^{\phi(r^0)}(c_0 + \vec{c} \cdot \vec{v}). \tag{6.138}$$

On considère les cas **(i)** $\vec{c} \times \vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$ individuellement.

(i) Faisons d'abord l'hypothèse que $\vec{c} \times \vec{\Omega} \neq 0$. On peut alors utiliser le trio de vecteurs $(\vec{c}, \vec{\Omega}, \vec{c} \times \vec{\Omega})$ comme base de $\mathbb{R}^3$. On pose $\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{c} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + T(r^0, r^1)(\vec{c} \times \vec{\Omega})$ et $\vec{g} = g_1 \vec{c} + g_2 \vec{\Omega} + g_3(\vec{c} \times \vec{\Omega})$, où g_i, $1 = 1, 2, 3$ sont des constantes. En insérant ces deux expressions dans (6.138), on trouve

$$\begin{aligned} &\delta = e^{\phi(r^0)} \left[c_0 + \alpha(r^0, r^1) + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} \cdot \vec{c}\right], \\ &\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} = \left[g_1 - T(r^0, r^1)\right] \vec{c} + \left[g_2 + T(r^0, r^1)\vec{\Omega} \cdot \vec{c}\right] \vec{\Omega} \\ &\qquad\qquad + \left[g_3 + \alpha(r^0, r^1)\right] (\vec{c} \times \vec{\Omega}), \\ &(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0)} \left\{\left[g_1 - T(r^0, r^1)\right] + \left[g_2 + T(r^0, r^1)\vec{\Omega} \cdot \vec{c}\right] \vec{\Omega} \cdot \vec{c}\right\}. \end{aligned} \tag{6.139}$$

Avec $\rho = p(r^0)^{1/\kappa} A(r^1)^{-1/\kappa}$, on obtient $\delta^2 - \kappa p \rho^{-1} \left|\vec{\lambda}^0\right| = e^{2\phi}(c_0 + \alpha + \beta \vec{\Omega} \cdot \vec{c})^2 -$

$\kappa p(r^0)^{1-1/\kappa}A(r^1)^{1/\kappa}e^{2\phi}$. De ces résultats et de (6.128a), on calcule

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} =& \frac{\partial \alpha}{\partial r^0}\vec{c} + \frac{\partial \beta}{\partial r^0}\vec{\Omega} + \frac{\partial T}{\partial r^0}(\vec{c}\times\vec{\Omega}) \\
=& \frac{1}{\delta}(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v}) + \frac{\kappa p}{\rho\delta}\frac{(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}^0}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho}\left|\vec{\lambda}^0\right|^2}\vec{\lambda}^0 \\
=& e^{-\phi}\frac{(g_1 - T)\vec{c} + (g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega} + (g_3+\alpha)(\vec{c}\times\vec{\Omega})}{c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c}} \\
&+ \frac{\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}e^{\phi}\left[(g_1 - T)\vec{c} + (g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega}\cdot\vec{c}\right]e^{\phi}\vec{c}}{e^{\phi}(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})e^{2\phi}\left[(c_0 + \alpha + \beta\vec{c}\cdot\vec{\Omega})^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]} \\
=& \left[(g_1 - T) + \frac{\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\left[(g_1 - T) + (g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega}\cdot\vec{c}\right]}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})^1 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}\right] \\
&\cdot \frac{e^{-\phi}\vec{c}}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})} + \frac{e^{-\phi}(g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})}\vec{\Omega} + \frac{e^{-\phi}(g_3+\alpha)}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})}(\vec{c}\times\vec{\Omega}) \\
=& \frac{\left[(g_1 - T)(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})^2 + \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}(g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega}\cdot\vec{c}\right]}{\left(c_0 + \alpha + \beta\vec{c}\cdot\vec{\Omega}\right)\left[\left(c_0 + \alpha + \beta\vec{c}\cdot\vec{\Omega}\right)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]}e^{-\phi}\vec{c} \\
&+ \frac{e^{-\phi}(g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})}\vec{\Omega} + \frac{e^{-\phi}(g_3+\alpha)}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})}(\vec{c}\times\vec{\Omega})
\end{aligned} \tag{6.140}
$$

et

$$
\frac{dp}{dr^0} = -\kappa p\frac{(\vec{g} - \vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}^0}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho}\left|\vec{\lambda}^0\right|^2} = -\kappa p e^{-\phi}\left[\frac{(g_1 - T) + (g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega}\cdot\vec{c}}{\left(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c}\right)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}\right].
$$

Après une comparaison des composantes de vecteur dans (6.140), on obtient le système d'équations suivant

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{dr^0} &= -\kappa p e^{-\phi}\left[\frac{(g_1 - T) + (g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega}\cdot\vec{c}}{\left(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c}\right)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}\right], \\
\frac{\partial \alpha}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\frac{\left[(g_1 - T)(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c})^2 + \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}(g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c})\vec{\Omega}\cdot\vec{c}\right]}{\left(c_0 + \alpha + \beta\vec{c}\cdot\vec{\Omega}\right)\left[\left(c_0 + \alpha + \beta\vec{c}\cdot\vec{\Omega}\right)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]}, \\
\frac{\partial \beta}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\frac{g_2 + T\vec{\Omega}\cdot\vec{c}}{c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c}}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r^0} = e^{-\phi}\frac{g_3 + \alpha}{c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega}\cdot\vec{c}}.
\end{aligned} \tag{6.141}
$$

Afin de faciliter la résolution de ce système d'équations différentielles partielles, on fait l'hypothèse $\vec{\Omega}\cdot\vec{c}=0$. Sous cette hypothèse, les équations (6.141) deviennent

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr^0} &= -\kappa p e^{-\phi}(g_1-T)\left[(c_0+\alpha)^2-\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]^{-1},\\
\frac{\partial\alpha}{\partial r^0} &= e^{-\phi}(g_1-T)(c_0+\alpha)\left[(c_0+\alpha)^2-\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]^{-1},\\
\frac{\partial\beta}{\partial r^0} &= e^{-\phi}g_2(c_0+\alpha)^{-1},\\
\frac{\partial T}{\partial r^0} &= e^{-\phi}(g_3+\alpha)(c_0+\alpha)^{-1}=e^{-\phi}\left[(g_3-c_0)(c_0+\alpha)^{-1}+1\right].
\end{aligned}\tag{6.142}$$

Les deux dernières équations de (6.142) peuvent être directement intégrées et donnent respectivement $\beta=g_2\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}\left[\alpha(\xi,r^1)+c_0\right]^{-1}B(r^1)$ et $T=(g_3-c_0)\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}\Big[\alpha(\xi,r^1)+c_0\Big]^{-1}d\xi+\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}\,d\xi+T_1(r^1)$, où $B(r^1)$ et $T_1(r^1)$ sont des fonctions d'intégration. En comparant maintenant les deux premières équations de (6.142), on trouve $-\frac{1}{\kappa p}\frac{dp}{dr^0}=(\alpha+c_0)^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}=e^{-\phi}(g_1-T)\left[(c_0+\alpha)^2-\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]^{-1}$. Intégrer cette expression nous permet alors de découvrir les relations $\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}\left[\alpha(\xi,r^1)+c_0\right]^{-1}d\xi=S(r^1)\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi$ et $\frac{dp}{dr^0}=-\kappa p e^{-\phi}(g_1-T)\left[p^{-2/\kappa}S^{-2}-\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]^{-1}$. Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme équivalente $\left[\frac{1}{\kappa S(r^1)p^{1+1/\kappa}}-A(r^1)^{1/\kappa}\right]p(r^0)^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)=e^{-\phi}(T-g_1)$.

Ensemble, les résultats du dernier paragraphe permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
&\alpha=p(r^0)^{-1/\kappa}S(r^1)^{-1}-c_0,\qquad \beta=g_2S(r^1)\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi+B(r^1),\\
&T=(g_3-c_0)S(r^1)\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi+\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi+T_1(r^1),\\
&\rho=p(r^0)^{1/\kappa}A(r^1)^{-1/\kappa},\\
&\left[\frac{1}{\kappa S(r^1)p^{1+1/\kappa}}-A(r^1)^{1/\kappa}\right]p(r^0)^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)=\\
&e^{-\phi(r^0)}\left[(g_3-c_0)S(r^1)\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi+\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi+T_1(r^1)-g_1\right].
\end{aligned}\tag{6.143}$$

Montrons que la dernière équation de (6.143) a seulement une solution lorsque $S(r^1)$ et $T_1(r^1)$ sont constants. Faisons d'abord l'hypothèse que la fonction $S(r^1)$ n'est pas constante. Si la pression $p = p_0$ est constante, alors (6.143) donne la relation $0 = \left[(g_3 - c_0)p_0^{1/\kappa}S(r^1) + 1\right] \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + T_1(r^1) - g_1$. En dérivant cette égalité par rapport à r^0, on trouve $0 = \left[(g_3 - c_0)p_0^{1/\kappa}S(r^1) + 1\right] e^{-\phi(r^0)}$, ce qui implique que $S(r^1) = -(g_3 - c_0)^{-1}p_0^{-1/\kappa}$. Cette dernière équation est une contradiction à l'hypothèse $\dot{S}(r^1) \neq 0$. On doit donc exiger $\dot{p}(r^0) \neq 0$.

En dérivant la dernière équation de (6.143) par rapport à r^1 puis en divisant le résultat par $\dot{S}(r^1)p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)$, on remarque

$$-\frac{2}{\kappa}p^{-1-1/\kappa}S^{-3} - \frac{1}{\kappa}A^{1/\kappa-1}\frac{\dot{A}}{\dot{S}(r^1)} = \frac{(g_3 - c_0)}{p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)e^{\phi}} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi + \frac{\dot{T}_1(r^1)}{\dot{S}(r^1)p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)e^{\phi}}.$$

dériver ce résultat par rapport à r^1 permet de trouver

$$\frac{6}{\kappa}p^{-1-1/\kappa}\frac{\dot{S}(r^1)}{S^4} + \frac{d}{dr^1}\left[-\frac{1}{\kappa}A^{1/\kappa-1}\frac{\dot{A}(r^1)}{\dot{S}(r^1)}\right] = \frac{d}{dr^1}\left[\frac{\dot{T}_1(r^1)}{\dot{S}(r^1)}\right](p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)e^{\phi})^{-1}.$$

En dérivant une dernière fois par rapport à r^0, on obtient

$$\frac{6}{\kappa}\frac{\dot{S}(r^1)}{S^4}\left(-1 - \frac{1}{\kappa}\right)p^{-2-1/\kappa}\dot{p}(r^0) = \frac{d}{dr^1}\left(\frac{\dot{T}_1(r^1)}{\dot{S}(r^1)}\right)\frac{d}{dr^0}\left[p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)e^{\phi}\right]. \tag{6.144}$$

Comme $\dot{S}(r^1) \neq 0$ et $\dot{p}(r^0) \neq 0$, le côté droit de l'équation (6.144) doit aussi être non-nul. Plus particulièrement, cela implique que la situation $\dot{S}(r^1) \neq 0$, $\dot{T}_1(r^1) = 0$ n'est pas possible. Comme nous avons maintenant des variables séparables, on obtient

$$\frac{p^{2+1/\kappa}}{\dot{p}(r^0)}\frac{d}{dr^0}(p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)e^{\phi})^{-1} = -\frac{6}{\kappa}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)S^{-4}\dot{S}(r^1)\left[\frac{d}{dr^1}\left(\frac{\dot{T}_1(r^1)}{\dot{S}(r^1)}\right)\right]^{-1} = K_1,$$

où K_1 est une constante non-nulle. L'intégration de $\frac{d}{dr^0}(p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)e^{\phi})^{-1}$ par rapport à r^0 mène à la relation

$$e^{-\phi} = \left[-K_1\left(\frac{\kappa}{\kappa+1}\right)p^{-1-1/\kappa} + K_2\right]p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0), \tag{6.145}$$

où K_2 est une constante d'intégration. Intégrer $-6\kappa^{-2}S^{-4}\dot{S}(r^1) = K_1\frac{d}{dr^1}(\dot{T}_1(r^1)/\dot{S}(r^1))$

produit le résultat $2\kappa^{-2}(\kappa+1)S^{-3}\dot{S}(r^1) = K_1\dot{T}_1(r^1) - K_1c_2\dot{S}(r^1)$ qu'on peut encore intégrer de manière à trouver

$$T_1 = -K_1^{-1}\left(\frac{\kappa+1}{\kappa^2}\right)S^{-2} + c_2 S + c_3, \tag{6.146}$$

où c_2 et c_3 sont des constantes d'intégration.

En définissant $k_1 = K = 1\kappa^2(\kappa+1)^{-1}$ puis en substituant (6.145) et (6.146) dans la dernière équation de (6.143), on remarque

$$\begin{aligned}\left[(\kappa S^2)^{-1}p^{-1-1/\kappa} - A^{1/\kappa}\right]p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0) &= \left[-\frac{k_1}{\kappa p^{1+1/\kappa}} + K_2\right]p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)\\ &\cdot\left[(g_3-c_0)S(k_1p^{-1/\kappa}+K_2p) + \frac{k_1}{2\dot{p}^{-1/\kappa}} + K_2F(p) - k_1^{-1}S^{-2} + c_2S + c_3 - g_1\right],\end{aligned}$$

où

$$F(p) = \begin{cases}\left(\dfrac{\kappa}{\kappa-1}\right)p^{1-1/\kappa} & \kappa\neq 1\\ -\ln p & \kappa = 1\end{cases}.$$

De manière équivalente, on a

$$\begin{aligned}-A^{1/\kappa} &= -\frac{K_2}{k_1}S^{-2} + \left(-\frac{k_1}{\kappa}p^{-1-1/\kappa} + K_2\right)\\ &\cdot\left\{S\left[(g_3-c_0)(k_1p^{-1/\kappa}+K_2p) + c_2\right] + \frac{k_1}{2}p^{-2/\kappa} + K_2F(p) + c_3 - g_1\right\}.\end{aligned} \tag{6.147}$$

dériver ce résultat par rapport à r^1 nous permet de séparer les variables :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\dot{S}(r^1)}\frac{d}{dr^1}\left(A^{1/\kappa}\right) - 2\frac{K_2}{k_1}S^{-3} - K_2c_2 &= -\frac{k_1^2}{\kappa}(g_3-c_0)p^{-1-2/\kappa}\\ &+ K_2^2(g_3-c_0)p - \frac{k_1c_2}{\kappa}p^{-1-1/\kappa} + k_1K_2(g_3-c_0)\left(1-\kappa^{-1}\right)p^{-1/\kappa}.\end{aligned} \tag{6.148}$$

Clairement, chaque côté de (6.148) a une valeur constante. Comme la pression p n'est pas constante, l'ensemble de fonctions $\left\{1, p, p^{-1/\kappa}, p^{-1-2/\kappa}\right\}$ est linéairement indépendant et les coefficients de ces fonctions dans (6.148) sont tous nuls. Comme $k_1 \neq 0$, cela implique que $g_3 - c_0 = 0$ et $c_2 = 0$. L'équation (6.147) peut alors être reformulée

$$-A^{1/\kappa} + \frac{K_2}{k_1}S^{-2} = \left[-\frac{k_1}{\kappa}p^{-1-1/\kappa} + K_2\right]\left[\frac{k_1}{2}p^{-2/\kappa} + K_2F(p) + c_3 - g_1\right], \qquad (6.149)$$

où chaque côté de l'équation a une valeur constante. Pour $\kappa \neq 1$, le côté droit de (6.149) devient

$$-(2\kappa)^{-1}k_1^2p^{-1-3/\kappa} + K_2^2\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)p^{1-1/\kappa} - (c_3 - g_1)\frac{k_1}{\kappa}p^{-1-1/\kappa}$$
$$+ k_1K_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\kappa-1}\right)p^{-2/\kappa} + K_2(c_3 - g_1),$$

soit une constante. Comme l'ensemble de fonctions $\left\{1, p^{-2/\kappa}, p^{-1-1/\kappa}, p^{-1-3/\kappa}, p^{1-1/\kappa}\right\}$ est linéairement indépendant lorsque la pression p n'est pas constante et $\kappa \neq 1$, on remarque que $k_1 = 0$, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. Pour $\kappa = 1$ le côté droit de l'équation (6.149) prend la forme constante $-\frac{1}{2}k_1^2p^{-4} + \left[\frac{1}{2}K_2 - (c_3 - g_1)\right]k_1p^{-2}$ $-k_1K_2p^{-2}\ln p + K_2^2\ln p + K_2(c_3 - g_1)$. En dérivant cette équation par rapport à r^0 et en multipliant le résultat par $p^2\left[\dot{p}(r^1)\right]^{-1}$, on obtient l'expression $0 = -4k_1^2p^{-2} - 2k_1\left(\frac{1}{2}K_2 - c_3 + g_1\right) + K_2^2p^2 - k_1K_2 + 2k_1K_2\ln p$ qui, une fois dérivée et multipliée par $p^3[\dot{p}(r^1)]^{-1}$, permet de trouver $0 = -4k_1^2 + 2K_2^2p^4 + 2k_1K_2p^2$. Cependant, comme $(1, p^2, p^4)$ est un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, cela implique que $k_1 = 0$ ce qui est une contradiction. Ainsi, on conclut que la cinquième équation de (6.143) n'a pas de solution lorsque $\dot{S}(r^1) \neq 0$.

À partir d'ici, on émet l'hypothèse que la fonction $S(r^1) = S_1$ est constante. En dérivant la dernière équation de (6.143) par rapport à r^1, on trouve la condition

$$-p(r^0)^{-1/\kappa}\dot{p}(r^1)\frac{1}{\kappa}A(r^1)^{-1+1/\kappa}\dot{A}(r^1) = e^{-\phi(r^0)}\dot{T}_1(r^1). \qquad (6.150)$$

On fait l'hypothèse $\dot{T}_1(r^1) \neq 0$. Dans ce cas, $\dot{A}(r^1) \neq 0$ et $\dot{p}(r^0) \neq 0$, ce qui nous permet de séparer les variables dans l'équation (6.150) de manière à obtenir

$$e^{\phi(r^0)}p(r^0)^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0) = \dot{T}_1(r^1)\left[-\frac{1}{\kappa}A(r^1)^{-1+1/\kappa}\dot{A}(r^1)\right]^{-1} = k_1, \qquad (6.151)$$

où $k_1 \neq 0$ est une constante. Le côté gauche de l'équation (6.151) permet de trouver $p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0) = k_1 e^{-\phi}$. En intégrant cette relation par rapport à r^0, on trouve une expression pour la pression :

$$p(r^0) = \begin{cases} \left[\left(\dfrac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1 \displaystyle\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + k_2\right)\right]^{\kappa/(\kappa-1)} & \kappa \neq 1 \\ k_1 \exp\left(k_1 \displaystyle\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\right) & \kappa = 1 \end{cases}, \tag{6.152}$$

où k_2 est une constante d'intégration. Le côté droit de l'équation (6.151) implique $\dot{T}_1(r^1) = -\kappa^{-1} k_1 A^{-1+1/\kappa} \dot{A}(r^1)$, d'où on obtient

$$T_1(r^1) = -k_1 A(r^1)^{1/\kappa} + k_3, \tag{6.153}$$

où k_3 est la constante d'intégration.

On fait d'abord l'hypothèse $\kappa \neq 1$. Comme $e^{-\phi} p^{1/\kappa} = k_1^{-1} \dot{p}(r^0)$, on peut remplacer dans l'équation (6.143) $\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} p(\xi)^{1/\kappa} d\xi$ par $\frac{p(r^0)}{k_1}$ et y insérer (6.152) et (6.152) de manière à obtenir

$$\begin{aligned} &\left\{(\kappa S_1^2)^{-1}\left[\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1 \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + k_2\right)\right]^{-(\kappa+1)/(\kappa-1)} - A(r^1)^{1/\kappa}\right\} k_1 e^{-\phi(r^0)} \\ &= e^{-\phi(r^0)}\left\{(g_3 - c_0) S_1 k_1^{-1}\left[\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1 \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + k_2\right)\right]^{\kappa/(\kappa-1)}\right. \\ &\left.+ \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi - k_1 A(r^1)^{1/\kappa} + k_3 - g_1\right\}. \end{aligned}$$

De manière équivalent, on peut écrire

$$\begin{aligned} &(\kappa S_1^2)^{-1}\left\{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1 \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + k_2\right)\right\}^{-(\kappa+1)/(\kappa-1)} = (g_3 - c_0) S_1 k_1^{-1} \\ &\cdot\left\{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1 \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + k_2\right)\right\}^{\kappa/(\kappa-1)} + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi - k_1 A(r^1)^{1/\kappa} + k_3 - g_1. \end{aligned}$$

Après une dérivation par rapport à r^0 et une simplification du facteur commun $e^{-\phi(r^0)}$, on trouve

$$- k_1^2(\kappa S_1^2)^{-1}(\kappa+1)\left\{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)\right\}^{-2\kappa/(\kappa-1)}$$
$$= (g_3-c_0)S_1\left\{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)\right\}^{1/(\kappa-1)} + 1.$$

On dérive cette dernière expression par rapport à r^0 et on obtient la relation

$$\left\{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\left(k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)\right\}^{-\kappa/(\kappa-1)} = \left[\frac{(g_3-c_0)\kappa S_1^3}{2(\kappa+1)k_1^2}\right]^{\kappa/(2\kappa+1)},$$

où le côté droit est constant. En considérant la première équation de (6.152), cela implique que la pression $p(r^0)$ est constante, ce qui est une contradiction et qui montre qu'aucune solution n'existe dans ce cas.

On fait maintenant l'hypothèse $\kappa = 1$. Sous cette hypothèse ainsi qu'avec (6.153) et la deuxième équation de (6.152), la dernière équation de (6.143) devient alors

$$\left\{S_1^{-2}\left[k_2\exp\left(k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right)\right]^{-2} - A(r^1)\right\} k_1 e^{-\phi(r^0)} = e^{-\phi(r^0)}$$
$$\cdot\left\{(g_3-c_0)S_1k_1^{-1}\left[k_2\exp\left(k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right)\right] + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi - k_1A(r^1) + k_3 - g_1\right\}.$$

On peut aussi écrire, de manière équivalent$k_1k_2^{-2}S_1^{-2}\exp\left(-2k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right) = (g_3 - c_0)S_1k_2k_1^{-1}\exp\left(k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right) + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_3 - g_1$.

En dérivant cette expression par rapport à r^0 et en simplifiant, on trouve$-2k_1^2k_2^{-2}$ $S_1^{-2}\exp\left(-2k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right) = (g_3-c_0)S_1k_2\exp\left(k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right) + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + 1$.

En dérivant une autre fois par rapport à r^0, on obtient l'équation $\exp\left[-3k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right] = (g_3-c_0)S_1^3k_2^3(4k_1^2)^{-1}$, où le côté droit est constant. En dérivant une dernière fois, toujours par rapport à r^0, on découvre cette fois $\exp\left(-3k_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right)(-3k_1)$ $e^{-\phi(r^0)} = 0$, ce qui implique que $k_1 = 0$. Il s'agit d'une contradiction avec l'hypothèse $\dot{p}(r^0) \neq 0$, il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

À partir de maintenant, on opère sous l'hypothèse que les fonctions $S(r^1) = S_1$ et $T_1(r^1) = T_1$ sont constantes. La première et la troisième équation de (6.143) impliquent donc que les fonctions α et T sont uniquement fonction de r^0. De plus, (6.150) implique que **(a)** $\dot{p}(r^0) = 0$ ou **(b)** $\dot{A}(r^1) = 0$, traitons donc ces possibilités séparément.

Penchons nous sur les conditions (6.5). La deuxième équation doit être respectée. En y substituant la valeur de λ^1 donnée par (6.128), on remarque que les équations (6.14) et (6.15) sont aussi valides pour le cas actuel. En utilisant (6.128), on note que $\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \dot{B}(r^1)\vec{\Omega} = \vec{\alpha} \times \vec{\lambda}^1$, ou, de manière équivalente,

$$0 = \dot{B}(r^1)\vec{\Omega} \cdot \vec{\lambda}^1 = \dot{B}(r^1)\vec{\Omega} \cdot \mu(r^0, r^1)\left[\chi(r^0, r^1)\vec{c} + \vec{A}(r^1)\right]. \qquad (6.154)$$

On exprime le vecteur $\vec{A}(r^1)$ en terme de la base vectorielle $\left(\vec{c}, \vec{\Omega}, \vec{c} \times \vec{\Omega}\right)$ en posant $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + A_3(r^1)(\vec{c} \times \vec{\Omega})$. En substituant cette expression dans (6.15) et (6.154), on obtient les conditions

$$\dot{B}(r^1)A_2(r^1) = 0, \qquad A(r^1) = -\chi(r^0, r^1)(\alpha + c_0) - (\alpha A_1 + \beta A_2 + TA_3). \quad (6.155)$$

(a) Si $\dot{p}(r^0) = 0$, alors la pression $p = p_0$ est constante. En remplaçant $p(r^0)$, $S(r^1)$ et $T_1(r^1)$ par leur valeur constante dans la dernière équation de (6.143), on trouve

$$0 = (g_3 - c_0)S_1 p_0^{1/\kappa} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T_1 - g_1. \qquad (6.156)$$

dériver (6.156) permet d'obtenir $0 = \left[(g_3 - c_0)S_1 p_0^{1/\kappa} + 1\right] e^{-\phi(r^0)}$. On remarque immédiatement qu'on doit avoir $\left[(g_3 - c_0)S_1 p_0^{1/\kappa} + 1\right] = 0$, d'où, avec (6.156), on doit avoir $T_1 - g_1 = 0$. La troisième équation de (6.143) implique alors $T = g_1$. En substituant $S_1 = -(g_3 - c_0)^{-1} p_0^{-1/\kappa}$ dans les deux premières équations de (6.143), on obtient $\alpha = -g_3$ et $\beta = -g_2(g_3 - c_0)^{-1} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + B(r^1)$. Par la quatrième équation de (6.143), on remarque alors $\rho = p_0^{1/\kappa} A(r^1)^{-1/\kappa}$ et, comme A est une fonction arbitraire de r^1, on peut simplement noter $\rho = \rho(r^1)$.

Considérons maintenant les équations (6.155). La deuxième de ces équations nous permet d'obtenir l'expression

$$\begin{aligned}\chi(r^0, r^1) = & -(\alpha c_0)^{-1}\left[A(r^1) + \alpha A_1 + \beta A_2 + T A_3\right] \\ = & (g_3 - c_0)^{-1}\left\{\left[-g_2(g_3 - c_0)^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + B(r^1)\right] A_2(r^1)\right. \\ & \left. + A(r^1) - g_3 A_1(r^1) + g_1 A_3(r^1)\right\}.\end{aligned}$$

En remarquant que $\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)} d\xi = \left(\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)} d\xi\right)^2/2$, on peut calculer

$$\begin{aligned}\int_0^{r^0} \chi(\xi, r^1) e^{-\phi(\xi)} d\xi = & (g_3 - c_0)^{-1}\left[A(r^1) - g_3 A_1(r^1) + B(r^1) A_2(r^1) + g_1 A_3(r^1)\right] \\ & \cdot \int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)} d\xi - \frac{1}{2} g_2 (g_3 - c_0)^{-2} A_2(r^1)\left(\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)} d\xi\right)^2.\end{aligned}$$

Les invariants de Riemann sont donnés par les équations (6.7). En vertu de ces équations, on peut donc remplacer $\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)} d\xi$ par $c_0 t + \vec{c}\cdot\vec{x} + c_1$. En substituant l'expression résultante pour $\int_0^{r^0} \chi(\xi, r^1) e^{\phi(\xi)} d\xi$ dans (6.7), on trouve les équations (6.130). Les conditions (6.155) requièrent soit $A_2 = 0$ ou $B(r^1) = B_1$.

En comparant toutes nos conclusions précédentes, on remarque que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ a la forme (6.129). Les vecteurs γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendants pourvu que $\dot\rho(r^1) \neq 0$ et que $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est respectée à condition que $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$ ou $A \neq c_0 A_1$.

(b) On fait maintenant l'hypothèse que $\dot{A}(r^1) = 0$. En posant $S(r^1) = S_1$, $A(r^1) = A$ et $T_1(r^1) = T_1$ dans (6.143), on observe que $\alpha = \alpha(r^0)$, $\beta = \beta(r^0, r^1)$, $T = T(r^0)$ et $\rho = \rho(r^0)$. Ainsi, pour qu'on ait la superposition d'une onde simple sur un état simple, on impose $\partial\beta/\partial r^1 = \dot{B}(r^1) \neq 0$. La première équation de (6.155) force alors

$A_2 = 0$. En susbstituant dans la deuxième équation de (6.155) les expressions pour α et T données par (6.143) et en réarrangeant les termes, on obtient

$$\begin{aligned}\chi(r^0, r^1) &= -\,(\alpha + c_0)^{-1}\left[A(r^1) + \alpha A_1 + T A_3\right]\\ &= -\,A_1(r^1) - \left[A(r^1) - A_1(r^1)c_0 + A_3(r^1)T_1\right] S_1 p(r^0)^{1/\kappa}\\ &\quad - A_3(r^0)(g_3 - c_0)S_1^2 p(r^0)^{1/\kappa}\\ &\quad \cdot \int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)} p(\xi)d\xi - A_3(r^1)S_1 p(r^0)^{1/\kappa}\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi.\end{aligned}$$

En remarquant que $\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}\left(\int_0^{\xi} e^{\phi(s)}p(s)^{1/\kappa}ds\right)d\xi = 2^{-1}\left(\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi\right)^2$, on peut déduire

$$\begin{aligned}\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}\chi(\xi, r^1)d\xi = &-\,A_1(r^1)\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi - \left[A(r^1) - A_1(r^1)c_0 + A_3(r^1)T_1\right] S_1\\ &\cdot \int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi - A_3(r^1)S_1\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}\\ &\cdot \left(\int_0^{\xi} e^{\phi(s)}p(s)^{1/\kappa}ds\right) - A_3(r^1)(g_3 - c_0)\frac{S_1^2}{2}\left(\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi\right)^2.\end{aligned}$$

En posant $\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi = c_0 t + \vec{c}\cdot\vec{x} + c_1$ et $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_3(r^1)\vec{c}\times\vec{\Omega}$ puis en remplaçant $\psi(r^1)$ par $\psi(r^1) - A_1(r^1)c_1$, on obtient par l'entremise de l'équation (6.7) les invariants de Riemann tels que définis par l'équation (6.133).

La forme (6.131) de la solution $(\rho, p, \vec{v})$ suit des équations (6.143). La condition d'indépendance linéaire entre γ_0 et γ_1 est satisfaite si $\dot{p}(r^0) \neq 0$ et $\dot{B}(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1$ est quant à elle satisfaite si $A_3 \neq 0$ ou $A \neq c_0 A_1$.

Les fonctions arbitraires de r^0, p et ϕ, sont mises en relation par la dernière condition de (6.16). On remarque que cette condition est uniquement en termes de l'invariant de Riemann r^0. En la multipliant par $e^{\phi(r^0)}$ et en dérivant le résultat par rapport à r^0, on obtient l'équation

$$\left[(g_3-c_0)s_1p^{1/\kappa}+1\right]e^{-2\phi(r^0)} = p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)\left[\frac{1}{\kappa S_1^2p^{1+1/\kappa}}-A^{1/\kappa}\right]+\left[\frac{1}{\kappa S_1^2p^{1+1/\kappa}}-A^{1/\kappa}\right] \cdot\left[\frac{d}{dr^0}\left(p-1/\kappa\dot{p}(r^0)\right)+p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)\dot{\phi}(r^0)\right],$$

qui peut être réécrite sous la forme d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 pour ϕ :

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi}(r^0) = e^{-2\phi}g(r^0)+f(r^0),\\
&g(r^0) = \left[(g_3-c_0)s_1p^{1/\kappa}+1\right]\left[p(r^0)^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)\left(\frac{1}{\kappa S_1^2p^{1+1/\kappa}}-A^{1/\kappa}\right)\right],\\
&f(r^0) = -\frac{p(r^0)^{1/\kappa}}{\dot{p}(r^0)}\frac{d}{dr^0}\left(\frac{\dot{p}(r^0}{p(r^0)^{1/\kappa}}\right)\\
&\qquad -\left(\frac{1}{\kappa S_1^2p^{1+1/\kappa}}-A^{1/\kappa}\right)^{-1}\frac{d}{dr^0}\left(\frac{1}{\kappa S_1^2p^{1+1/\kappa}}-A^{1/\kappa}\right).
\end{aligned} \tag{6.157}$$

En faisant le changement de variable $u=e^{2\phi}$, on obtient l'équation linéaire $du/dr^0 - 2fu = 2g$ dont la solution est $u=\exp\left[2\int_0^{r^0}f(\xi)d\xi\right]\left\{2\int_0^{r^0}g(\xi)\exp\left[2\int_0^{\xi}f(s)ds\right]d\xi+C\right\}$, où C est une constante arbitraire. La solution à (6.157) est donc

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_0^{r^0}f(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\ln\left[2\int_0 r^0 g(\xi)\exp\left(2\int_0^{\xi}f(s)ds\right)d\xi+C\right]\\
&=\ln\left\{\left[\frac{\dot{p}(r^0)}{p^{1/\kappa}}\left(\frac{1}{\kappa S_1^2p^{1+1/\kappa}}\right)\right]^{-1}2^{1/2}\left[C-\frac{g_0-c_0}{S_1p^{1/\kappa}}-(g_3-c_0)S_1A^{1/\kappa}p\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-(2S_1)^{-1}p^{-2/\kappa}-F(p)\right]^{1/2}\right\},
\end{aligned} \tag{6.158}$$

où

$$F(p)=\begin{cases}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)p^{1-1/\kappa} & \kappa\neq 1\\ -\ln p & \kappa=1\end{cases}.$$

En évaluant la dernière équation de (6.143) à $r^0=0$, on remarque $p(0)^{-1/\kappa}\dot{p}(0)\left[\frac{1}{\kappa S_1^2p(0)^{1+1/\kappa}}-A^{1/\kappa}\right]=e^{-\phi(0)}(T_1-g_1)$. La valeur $\phi(0)$ est quant à elle donnée par (6.158). Cela implique $C+\frac{(T_1-g_1)^2}{2}+(g_3-c_0)\left[\frac{1}{S_1^2p(0)^{1/\kappa}}+S_1A^{1/\kappa}p(0)\right]+(2S_1^2)^{-1}p(0)^{-2/\kappa}+F(p(0))$. On conclut donc que la relation entre la pression p et ϕ est telle que décrite dans (6.132).

(ii) Faisons l'hypothèse que $\vec{c}\times\vec{\Omega}=0$. On a donc $|\vec{c}|=\left|\vec{\Omega}\right|=1$, ce qui implique $\vec{c}=\epsilon_1\vec{\Omega}$, où $\epsilon_1=\pm1$. **(a)** Faisons la deuxième hypothèse $\vec{g}\times\vec{\Omega}\neq 0$. On peut alors employer la base vectorielle de $\mathbb{R}^3$ $(\vec{g},\vec{\Omega},\vec{g}\times\vec{\Omega})$. On pose donc $\vec{v}(r^0,r^1)=\alpha(r^0,r^1)\vec{g}+\beta(r^0,r^1)\vec{\Omega}+T(r^0,r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$. Les équations (6.138) impliquent $\vec{\lambda}^0=\epsilon_1 e^{\phi}\vec{\Omega}$ et $\delta=e^{\phi}[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\times\vec{\Omega}+\beta)]$. On a aussi $\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v}=(1-T)\vec{g}+(\vec{g}\cdot\vec{\Omega}T)\vec{\Omega}+\alpha(\vec{g}\times\vec{\Omega})$, $(\vec{g}-\vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot\vec{\lambda}^0=\epsilon_1 e^{\phi}\vec{g}\cdot\vec{\Omega}$ et $\rho=p(r^0)^{1/\kappa}A(r^1)^{-1/\kappa}$. En substituant ces quantités dans (6.128), on observe

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^0}=&\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\vec{g}+\frac{\partial\beta}{\partial r^0}\vec{\Omega}+\frac{\partial T}{\partial r^0}(\vec{g}\times\vec{\Omega})\\ =&\frac{e^{-\phi}}{\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]}\left[(1-T)\vec{g}\cdot\vec{\Omega}T\vec{\Omega}+\alpha(\vec{g}\times\vec{\Omega})\right]+\frac{\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}{e^{\phi}\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]}\\ &\cdot\frac{\epsilon_1 e^{\phi}\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{e^{2\phi}\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]^2-\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}e^{2\phi}}.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients ainsi qu'en étudiant l'équation (6.128), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}&=e^{-\phi}(1-T)\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]^{-1},\\ \frac{\partial\beta}{\partial r^0}&=\frac{e^{-\phi}\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]}\left\{T+\frac{\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}{\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]^2-\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}\right\},\\ \frac{\partial T}{\partial r^0}&=e^{-\phi}\alpha\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]^{-1},\\ \frac{dp}{dr^0}&=-\epsilon_1 e^{-\phi}\kappa p\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\left\{\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]^2-\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right\}^{-1}.\end{aligned}\tag{6.159}$$

On résout le système (6.159) en faisant l'hypothèse que $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}=0$. Dans ce cas, le système (6.159) se réduit à

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}&=e^{-\phi}(1-T)\left[c_0+\epsilon_1\beta\right]^{-1}, & \frac{\partial\beta}{\partial r^0}&=0,\\ \frac{\partial T}{\partial r^0}&=e^{-\phi}\alpha\left[c_0+\epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega}+\beta)\right]^{-1}, & \frac{dp}{dr^0}&=-\epsilon_1 e^{-\phi}\alpha(c_0+\epsilon_1\beta)^{-1}.\end{aligned}\tag{6.160}$$

On remarque immédiatement que la pression $p=p_0$ est constante et que la densité ρ

et la fonction β dépendent uniquement de r^1. La deuxième et la quatrième équation de (6.160) ont, tel que démontré dans le chapitre 4, comme solution

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1(r^1)\cos\left\{\left[c_0+\epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + b_1(r^1)\right\} \\ T &= a_1(r^1)\sin\left\{\left[c_0+\epsilon_1\beta(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + b_1(r^1)\right\} + 1, \end{aligned} \tag{6.161}$$

où a_1 et b_1 sont des fonctions arbitraire de r^1.

Une inspection du Chapitre 4 (pour le cas $\vec{c}\times\vec{\Omega}=0$) révèle que les calculs de ce chapitre sont aussi valables pour le cas présent. Plus particulièrement, ils prouvent qu'il n'y a une superposition que lorsque $\dot{\beta}(r^1)=0$. On conclut aussi dans ce chapitre que $\partial\alpha/\partial r^1$ et $\partial T/\partial r^1$ sont tous deux nuls ou non-nuls et que les équations

$$\begin{aligned} &A_1\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} + A_3\frac{\partial T}{\partial r^1} = 0, \\ &A(r^1) = -\chi(r^0,r^1)(c_0+\epsilon_1 B_0) - |\vec{g}|^2(\alpha A_1 + TA_3) - B_0A_2 \end{aligned} \tag{6.162}$$

doivent être satisfaites. Tel qu'indiqué dans le Chapitre 4, la situation $\partial\alpha/\partial r^1, \partial T/\partial r^1 \neq 0$ requière A_1, $A_3=0$. En ce qui concerne le cas $\partial\alpha/\partial r^1$, $\partial T/\partial r^1=0$, A_1 et A_3 peuvent rester arbitraires. La deuxième équation de (6.162) révèle $\chi(r^0,r^1) = -(c_0+\epsilon_1 B_0)^{-1}\left[A(r^1)\,|\vec{g}|^2(\alpha A_1+TA_3)+B_0A_2\right]$. En utilisant la deuxième et la quatrième équation de (6.160), on calcule

$$\begin{aligned} \int_0^{r^0}\chi(\xi,r^1)e^{-\phi(\xi)}d\xi = &-\left[\frac{A(r^1)+B_0A_2(r^1)}{c_0+\epsilon_1 B_0}\right]\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi - |\vec{g}|^2 \\ &\cdot\left[A_1(r^1)T - A_3(r^1)\alpha\right] - \frac{|\vec{g}|^2 A_3(r^1)}{(c_0+\epsilon_1 B_0)}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi. \end{aligned} \tag{6.163}$$

Les invariants de Riemann peuvent maintenant être calculés par l'entremise de (6.7). D'abord, on substitue (6.163) dans la deuxième équation de (6.7). Par vertu de la première équation de (6.7), on remplace $\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi$ par $c_0t+\epsilon_1\vec{\Omega}\cdot\vec{x}+c_1$, puis on réarrange les termes et, avec l'aide de (6.161), on trouve finalement (6.135).

La solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donc donnée par (6.134). L'indépendance linéaire entre les vecteurs γ_0 et γ_1 est garantie si $a_1 \neq 0$ et $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$ ou $\dot{a}_1 \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1$ est quant à elle respectée pourvu que $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$ ou $A \neq A_1 c_0$.

(b) Finalement, on fait l'hypothèse que $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$, $\vec{g} \times \vec{\Omega} = 0$. Comme on peut choisir $\vec{\Omega} = (0, 0, 1)$, on choisit la base standard orthonormale pour $\mathbb{R}^3$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On pose $\vec{v}(r^0, r^1) = \sum_{i=1}^{3} v_1(r^0, r^1)\vec{e}_i$. On note de plus $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{e}_3$, $\vec{g} = \epsilon_2 |\vec{g}|\, \vec{e}_3$, où ϵ_1, $\epsilon_2 = \pm 1$. On a aussi $\vec{\lambda}^0 = \epsilon_1 e^{\phi} \vec{e}_3$. On peut ainsi calculer $\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v} = \epsilon_2 |\vec{g}|\, \vec{e}_3 + v_2 \vec{e}_1 - v_1 \vec{e}^2$, $(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{\lambda}^0 = \epsilon_1 \epsilon_2 |\vec{g}|\, e^{\phi}$ et $\delta = e^{\phi}(c_0 + \epsilon_1 v_3)$. En substituant ces quantités ainsi que $\rho = p^{1/\kappa} A^{-1/\kappa}$ dans (6.128a), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} = &\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial r^0} \vec{e}_i = e^{-\phi}(c_0 + \epsilon_1 v_3)^{-1} \left[v_2 \vec{e}_1 - v_1 \vec{e}_2 + \epsilon_2 |\vec{g}|\, \vec{e}_3 \right] \\ &+ \frac{\kappa p^{1-1/\kappa} A^{1/\kappa}}{e^{\phi}(c_0 + \epsilon_1 v_3)} \frac{\epsilon_2 |\vec{g}|\, e^{\phi}}{e^{2\phi}(c_0 + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa} A^{1/\kappa} e^{2\phi}} e^{\phi} \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Une comparaison des coefficients révèle

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi} v_2 (c_0 + \epsilon_1 v_3)^{-1}, &&\frac{\partial v_2}{\partial r^0} = -e^{-\phi} v_1 (c_0 + \epsilon_1 v_3)^{-1}, \\ &\frac{\partial v_3}{\partial r^0} = \frac{\epsilon_2 |\vec{g}|\, e^{-\phi}(c_0 + \epsilon_1 v_3)}{(c_0 + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa} A^{1/\kappa}}, &&\frac{dp}{dr^0} = \frac{-\epsilon_1 \epsilon_2 |\vec{g}|\, e^{-\phi} \kappa p}{(c_0 + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa} A^{1/\kappa}}.\end{aligned} \tag{6.164}$$

La première et la deuxième équation de (6.164) impliquent $v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = \frac{e^{-\phi} v_1 v_2}{c_0 + \epsilon_1 v_3} = -v_2 \frac{\partial v_2}{\partial r^0}$, ce qui, après intégration, nous donne la relation $v_1^2 + v_2^2 = f(r^1)^2$, où $f(r^1)$ est une fonction d'intégration. Ainsi, la première équation de (6.164) peut être reformulée comme $[f(r^1)^2 - v_1^2]^{-1/2} \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = \pm e^{-\phi(r^0)} p(r^0)^{1/\kappa} S(r^1)^{-1}$ puis intégrée par rapport à r^0 de manière à donner

$$v_1 = a_1(r^1) \sin \left[S(r^1)^{-1} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} p(\xi)^{1/\kappa} d\xi + b_1(r^1) \right], \tag{6.165}$$

où a_1 et b_1 sont des fonctions arbitraires de r^1. Toujours en utilisant la première équation de (6.164), on peut maintenant calculer

$$v_2 = a_1(r^1)\cos\left[S(r^1)^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}p(\xi)^{1/\kappa}d\xi + b_1(r^1)\right]. \tag{6.166}$$

Finalement, on remarque que $v_3 = \epsilon_1[S(r^1)p(r^0)^{-1/\kappa} - c_0]$.

Ces résultats nous permettent de noter la quatrième équation de (6.164) comme $\frac{dp}{dr^0} = -\epsilon_1\epsilon_2 |\vec{g}|\, e^{-\phi}\kappa p \left[S(r^1)^2 p^{-2/\kappa} - \kappa p^{1-1/\kappa}A(r^1)^{1/\kappa}\right]^{-1}$, ou, de manière équivalente,

$$\left[S(r^1)^2 p^{-1-1/\kappa} - \kappa A(r^1)^{1/\kappa}\right] p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0) = -\epsilon_1\epsilon_2 |\vec{g}|\, \kappa e^{-\phi}. \tag{6.167}$$

En dérivant (6.167) par rapport à r^1, on obtient $\left[2S(r^1)\dot{S}(r^1)p(r^0)^{-1-1/\kappa} - \dot{A}(r^1) A(r^1)^{-1+1/\kappa}\right] p(r^0)^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0) = 0$, ce qui implique que

$$2S(r^1)\dot{S}(r^1)p(r^0)^{-1-1/\kappa} = A(r^1)^{-1+1/\kappa}\dot{A}(r^1) \tag{6.168}$$

étant donné que la quatrième équation de (6.164) exige $\dot{p} \neq 0$. Si $\dot{S}(r^1) \neq 0$, alors les variables r^0 et r^1 peuvent être séparées dans (6.168) de manière à obtenir $p(r^0)^{-1-1/\kappa} = A(r^1)^{-1+1/\kappa}\dot{A}(r^1)\left[2S(r^1)\dot{S}(r^1)\right]^{-1}$. Or, cela implique que la pression p est constante ce qui contredit la condition $\dot{p} \neq 0$. Ainsi, on doit avoir $\dot{S} = 0$ ce qui implique que la fonction $S = S_0$ est constante et, de (6.168), que la fonction A est constante.

La condition (6.167) détaille maintenant une relation entre les fonctions $p(r^0)$ et $\phi(r^0)$

$$e^{-\phi} = \epsilon_1\epsilon_2 |\vec{g}|^{-1}\left[A^{1/\kappa} - \kappa^{-1}S_0^2 p^{-1-1/\kappa}\right] p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0) \tag{6.169}$$

qu'on peut employer pour reformuler (6.165) et (6.166) de manière à ce que

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1(r^1)\sin\left\{\epsilon_1\epsilon_2 |\vec{g}|^{-1}\left[S_0 p(r^0)^{-1/\kappa} + S_0^{-1}A^{1/\kappa}p(r^0)\right] + b_1(r^1)\right\}, \\ v_2 &= a_1(r^1)\cos\left\{\epsilon_1\epsilon_2 |\vec{g}|^{-1}\left[S_0 p(r^0)^{-1/\kappa} + S_0^{-1}A^{1/\kappa}p(r^0)\right] + b_1(r^1)\right\}. \end{aligned} \tag{6.170}$$

On note aussi $v_3 = \epsilon_1 \left[s_0 p(r^0)^{-1/\kappa} - c_0\right]$ et $\rho = A^{-1/\kappa} p(r^0)^{1/\kappa}$. Autrement dit, v_3 et ρ sont uniquement fonction de r^0.

Comme pour **(i)**, les conditions (6.14) et (6.15) doivent être satisfaites. De toute évidence, on a $\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \sum_{i=1}^{1} \frac{\partial v_i}{\partial r^1}\vec{e}_i = \vec{\alpha} \times \vec{\lambda}^1$. En posant $\vec{A}(r^1) = \sum_{i=3}^{3} v_i \vec{e}_i$ et en se rappelant que $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{e}_3$ et $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$, (6.14) et (6.15) donnent

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} \cdot \vec{\lambda}^1 = \sum_{i=1} \frac{\partial v_i}{\partial r^1} \vec{e}_i \cdot \mu(r^0, r^1) \left[\chi(r^0, r^1)\epsilon_1 \vec{e}_3 + \sum_{i=1}^{3} A_i(r^1)\vec{e}_i\right] \\ &= \mu \left(A_1 \frac{\partial v_1}{\partial r^1} + A_2 \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \right), \\ A(r^1) &= -\chi(r^0, r^1)(c_0 + \epsilon_1 v_3) - v_1 A_1 - v_2 A_2 - v_3 A_3. \end{aligned} \tag{6.171}$$

Comme les fonctions v_3 et ϕ dépendent uniquement de r^0, les deux premières équations de (6.164) démontrent que $\partial v_1/\partial r^1 = 0$ si et seulement si $\partial v_2/\partial r^1 = 0$. Si $\partial v_1/\partial r^1 = 0$, alors v_1 est uniquement fonction de r^0. Ainsi, de $v_2 = e^{\phi}(c_0 + \epsilon_1 v_3)\partial v_1/\partial r^1$, il est évident que v_2 est uniquement dépendant de r^0. Autrement dit, on a $\partial v_2/\partial r^1$. L'inverse est prouvé de manière semblable. Ainsi, les deux grandeurs $\partial v_1/\partial r^1$ et $\partial v_2/\partial r^1$ sont toutes deux nulles ou non nulles. Cependant, lorsque ces deux grandeurs sont nulles, il n'y a pas de superposition et donc pas de solutions de rang 2. On a donc comme condition $\partial v_1/\partial r^1$, $\partial v_2/\partial r^1 \neq 0$.

Ainsi, puisque la première équation de (6.171) est satisfaite avec $\partial v_1/\partial r^1, \partial v_2/\partial r^1 \neq 0$, nous considérons les deux possibilités A_1, $A_1 = 0$ et A_1, $A_2 \neq 0$. Faisons d'abord l'hypothèse A_1, $A_2 \neq 0$. La première équation de (6.143) nous permet alors d'écrire $\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial r^1}\right)^{-1} = -\frac{A_2}{A_1}$. On remarque que le côté droit de cette équation est uniquement fonction de r^1. En dérivant par rapport à r^0, en changeant l'ordre de dérivation puis en employant les deux premières équations de (6.164), on obtient $\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial r^1}\right)^2 = 0$, ce qui nous indique qu'il n'y a pas de solution dans ce cas.

Si on fait maintenant l'hypothèse A_1, $A_2 = 0$, alors l'équation (6.171) est réduite à $A(r^1) = -\chi(r^0, r^1)(c_0 + \epsilon_1 v_3) - v_3 A_3$, d'où on tire une expression pour $\chi(r^0, r^1) : \chi(r^0, r^1) = -\left[c_0 + \epsilon_1 v_3(r^0)\right]^{-1}\left[A(r^1) + v_3(r^0)A_3(r^1)\right]$. Les équations (6.169) et (6.170) se pairent maintenant de manière à donner $\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi = \epsilon_1\epsilon_2 \left|\vec{g}\right|^{-1}\Big[(A - \epsilon_1 c_0 A_3)(S_0 p^{-1/\kappa} + S_0^{-1}p^{-2/\kappa} + A^{1/\kappa}F(p)\Big]$ ainsi que

$$\begin{aligned} \int_0^{r^0} \xi(\xi, r^1)e^{-\phi(\xi)}d\xi = &- \epsilon_1\epsilon_2 \left|\vec{g}\right|^{-1}\left[(A - \epsilon_1 c_0 A_3)\left(\frac{S_0}{p^{1/\kappa}} + \frac{A^{1/\kappa}p}{S_0}\right)\right. \\ &\left. + \epsilon_1 A_3 \frac{S_0^{2}{}^{-2/\kappa}}{2} + \epsilon_1 A_3 A^{1/\kappa}F(p)\right] \\ = &- \epsilon_1\epsilon_2 \left|\vec{g}\right|^{-1}(A - \epsilon_1 c_0 A_3)\left(\frac{S_0}{p^{1/\kappa}} + \frac{A^{1/\kappa}p}{S_0}\right) \\ &- \epsilon_1 A_3 \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi, \end{aligned} \tag{6.172}$$

où

$$F(p) = \begin{cases} \left(\dfrac{\kappa}{\kappa - 1}\right)p^{1-1/\kappa} & \kappa \neq 1 \\ \ln p & \kappa = 1 \end{cases}.$$

On calcule les invariants de Riemann par l'entremise des équations (6.7). Avec les grandeurs $\vec{c} = \epsilon_1\vec{e}_3$ et $\vec{A}(r^1) = A_3(r^1)\vec{e}_3$, on peut substituer (6.172) dans la deuxième équation de (6.7), utiliser la première équation de (6.7) pour remplacer $\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi$ par $c_0 t + \epsilon_1\vec{e}_3 \cdot \vec{x}$, remplacer $\psi(r^1)$ par $\psi(r^1)[A(r^1) - \epsilon_1 c_0 A_3(r^1)]$ et on obtient (6.137).

Les équations (6.170) indiquent que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ a la forme (6.136). Pour que les vecteur γ_0 et γ_1 soient linéairement indépendants, on exige $\dot{p}(r^0) \neq 0$, $a_1 \neq 0$ et $\dot{a}_1 \neq 0$ ou $\dot{b}_1 \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1$ est quant à elle respectée à condition que $A \neq \epsilon_1 c_0 A_3$. □

La solution (6.129) représente un écoulement incompressible avec vorticité et dont l'entropie n'est pas constante. La solution (6.134) représente l'écoulement d'un fluide incompressible exhibant une vorticité et dont l'entropie est constante si et seulement si la densité est constante. Les solutions (6.131) et (6.136) représentent l'écoulement de fluides compressibles avec vorticité et entropie constante.

Théorème 6.5.2. *Si les éléments hydrodynamiques simples non-homogènes (3.9) et les éléments entropiques simples homogènes (3.11) dans l'équation (5.1) satisfont l'équation (5.3) et les conditions de compatibilité (5.5) avec $\alpha_1 \neq 0$, la solution du système non-homogène (3.1) a une des formes suivantes :*

***(i)** Le cas $\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} \neq 0$, $\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} = 0$*

La solution est donnée par

$$
\begin{aligned}
\rho &= \left(\frac{p(r^0)}{A(r^1)}\right)^{1/\kappa}, \qquad p = p(r^0),\\
\vec{v} &= \left[\left(\frac{1}{p(r^0)S(r^1)}\right)^{1/\kappa} - f(r^1)\right]\vec{h}(r^1) + \left[\vec{g}\cdot\vec{\Omega}S(r^1)\int_0^{r^0} e^{-\phi(r,r^1)}p(r)^{1/\kappa}\right.\\
&\left. + V_2(r^1)dr\right]\vec{\Omega} + \left\{\left(\vec{g}\cdot(\vec{h}(r^1)\times\vec{\Omega}) - f(r^1)\right)S(r^1)\int_0^{r^0} e^{-\phi(r,r^1)}p(r)^{1/\kappa}dr\right.\\
&\left. + \int_0^{r^0} e^{-\phi(r,r^1)}dr + V_3(r^1)\right\}(\vec{h}(r^1)\times\vec{\Omega}).
\end{aligned}
\tag{6.173}
$$

Cette dernière existe pourvu que les fonctions $p(r^0)$, $f(r^1)$, $\vec{h}(r^1)$, $A(r^1)$, $S(r^1)$, $V_3(r^1)$ et $T(r^0)$ puissent simultanément satisfaire les conditions

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\kappa S(r^1)^2 p(r^0)^{1+1/\kappa}} - A(r^1)^{1/\kappa}\right]\frac{\dot{p}(r^0)}{p(r^0)^{1/\kappa}} = e^{-\phi(r^0,r^1)}\left[(\vec{g}\cdot(\vec{h}(r^1)\times\vec{\Omega})\right.\\
&\left. - f(r^1))S(r^1)\int_0^{r^0} e^{-\phi(r,r^1)}p(r)^{1/\kappa}dr + \int_0^{r^0} e^{-\phi(r,r^1)}dr + V_3(r^1) - \vec{g}\cdot\vec{h}(r^1)\right],
\end{aligned}
\tag{6.174}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{(\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}\right|\vec{g}\cdot\vec{h} + \dot{f})\left[\frac{\dot{S}}{S} + (\dot{f} + \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}\right|\vec{g}\cdot\vec{h})Sp^{1/\kappa}\right]\right.\\
&\left. + \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}\right|\left[\vec{g}\cdot\dot{\vec{h}} + \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}\right|\left(\frac{S}{p^{1/\kappa}} - f\right)\right]\right\}e^{-\phi} =\\
&\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}\right|\frac{\dot{p}}{p^{1/\kappa}}\left\{\frac{2\dot{S}}{\kappa p1 + 1/(\kappa)S^3} + \frac{\dot{A}}{\kappa A^{1-1/\kappa}} - \left(\frac{1}{\kappa S^2 p^{1+1/\kappa}} - A^{1/\kappa}\right)\right.\\
&\left.\cdot\left[\frac{\dot{S}}{S} + (\dot{f} + \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}\right|\vec{g}\cdot\vec{h})Sp^{1/\kappa}\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{6.175}
$$

où

$$
\begin{aligned}
e^{-\phi(r^0,r^1)} = exp & \left[p(r^0)^{1/\kappa}\int^{r^1}(\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(q)\right|\vec{g}\cdot\vec{h}(q)+\dot{f}(q))S(q)dq\right] \\
& \cdot\left\{\dot{p}(r^0)\int^{e^1}\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(q)\right|\cdot S(q)\left(\frac{1}{\kappa S(q)p(r^0)^{1+1/\kappa}}-A(q)^{1/\kappa}\right)\right. \\
& \left.\cdot\, exp\Big[-p(r^0)^{1/\kappa}\int^{q}(\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(u)\right|\vec{g}\cdot\vec{h}(u)+\dot{f}(u))S(u)du\Big]dq+T(r^0)\right\}.
\end{aligned}
\tag{6.176}
$$

Les invariants de Riemann sont définis par

$$
\begin{aligned}
&\phi(r^1)+\int_0^{r^0}e^{-\phi(r,r^1)}dr = f(r^1)t+\vec{h}(r^1)\cdot\vec{x}, \\
&\dot{\phi}(r^1)-\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|S(r^1)\left[\frac{1}{S(r^1)^2p(r^0)^{1+1/\kappa}}+A(r^1)^{1/\kappa}p(r^0)\right]+[\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\vec{g} \\
&\cdot\vec{h}(r^1)+\dot{f}(r^1)]S(r^1)\int_0^{r^0}e^{-\phi(r,r^1)}p(r)^{1/\kappa}dr = \dot{f}(r^1)t+\dot{\vec{h}}(r^1)\cdot\vec{x},
\end{aligned}
\tag{6.177}
$$

où $p(r^0)>0$, $T(r^0)$, $f(r^1)$, $\vec{h}(r^1)=\vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|$, $A(r^1)>0$ $S(r^1)\neq 0$, $V_2(r^1)$, $V_3(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires telles que* $\vec{h}\cdot\vec{\Omega}=0$ *et* $\dot{f}(r^1)\neq 0$ *ou* $\dot{\vec{h}}(r^1)\neq 0$.

(ii) *Le cas* $\vec{\lambda}^0=\epsilon_1\left|\vec{\lambda}^0\right|\vec{\Omega}$

Une solution n'existe seulement que lorsque $\vec{g}\times\vec{\Omega}\neq 0$ *et* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}$. *Elle est donnée par*

$$
\begin{aligned}
&\rho=\rho(r^1), \qquad p=p_0, \\
&\vec{v}=A_1(r^1)\sin\theta(r^0,r^1)\vec{g}+V_0\vec{\Omega}+\left[1-A_1(r^1)\cos\theta(r^0,r^1)\right](\vec{g}\times\vec{\Omega}),
\end{aligned}
\tag{6.178}
$$

où $\theta(r^0,r^1)=\int_0^{r^0}e^{-\phi_0(r)}dr+B_1(r^1)$. *Les invariants de Riemann sont donnés par*

$$
\begin{aligned}
&\dot{f}(r^1)t=\dot{\phi}(r^1)+\dot{f}(r^1)\int_0^{r^0}e^{-\phi_0(r)}dr, \\
&f(r^1)t+\epsilon_1\vec{\Omega}\cdot\vec{x}=\phi(r^1)+(f(r^1)+\epsilon_1V_0)\int_0^{r^0}e^{-\phi_0(r)}dr,
\end{aligned}
\tag{6.179}
$$

où $\rho(r^1)>0$, $A_1(r^1)\neq 0$ $B_1(r^1)$, $f(r^1)$, *et* $\phi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires telles que* $\dot{f}(r^1)\neq 0$ *et* $\dot{\rho}(r^1)\neq 0$ *ou* $\dot{A}_1\neq 0$. *Les paramètres* $p_0>0$ *et* V_0 *sont des constantes* *arbitraires.*

Preuve : On résout (6.128) en faisant l'hypothèse que les conditions (5.5) sont valides avec $\alpha_1 \neq 0$. Comme précédemment, on a immédiatement $p = p(r^0)$ et $\rho = p(r^0)^{1/\kappa} A(r^1)^{-1/\kappa}$, où $A(r^1)$ est une fonction arbitraire. Les conditions (6.26) doivent être respectées. En substituant la valeur de λ^0 donnée par (6.128b) dans la première équation de (6.26), on obtient

$$\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0,r^1)}\vec{h}(r^1), \qquad \left|\vec{h}(r^1)\right| = 1, \qquad \delta = e^{\phi(r^0,r^1)}\left[f(r^1) + \vec{v}\cdot\vec{h}(r^1)\right]. \quad (6.180)$$

On étudie les cas **(i)** $\vec{h} \times \vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{h} \times \vec{\Omega} = 0$.

(i) On fait d'abord l'hypothèse que $\vec{h} \times \vec{\Omega} \neq 0$. Alors, l'ensemble de vecteurs $(\vec{h}, \vec{\Omega}, \vec{h} \times \vec{\Omega})$ forme une base pour $\mathbb{R}^3$ et on peut poser $\vec{v} = v_1(r^0,r^1)\vec{h} + v_2(r^0,r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0,r^1)(\vec{h}\times\vec{\Omega})$ ainsi que $\vec{g} = g_1(r^1)\vec{h} + g_2(r^1)\vec{\Omega} + g_3(r^1)(\vec{h}\times\vec{\Omega})$. En substituant ces expressions dans (6.128a), on trouve le système d'équations

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr^0} &= -\kappa p e^{-\phi}\left[\frac{(g_1 - v_3) + (g_2 + v_3\vec{\Omega}\cdot\vec{h})\vec{\Omega}\cdot\vec{h}}{(f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{h})^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}\right],\\
\frac{\partial v_1}{\partial r^0} &= \frac{e^{-\phi}\left[(g_1 - v_3)(f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{g})^2 + \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}(g_2 + v_3\vec{\Omega}\cdot\vec{h})\vec{\Omega}\cdot\vec{h}\right]}{(f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{g})\left[(f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{g})^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]},\\
\frac{\partial v_2}{\partial r^0} &= e^{-\phi(r^0,r^1)}\frac{g_2 + v_3\vec{\Omega}\cdot\vec{h}}{f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{g}}, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = e^{-\phi(r^0,r^1)}\frac{g_3 + v_1}{f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{g}}.
\end{aligned}$$

On fait l'hypothèse que $\vec{\Omega}\cdot\vec{h} = 0$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr^0} &= -\kappa p e^{-\phi}\left[\frac{(g_1 - v_3)}{(f + v_1 + v_2)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}\right],\\
\frac{\partial v_1}{\partial r^0} &= \frac{e^{-\phi}\left[(g_1 - v_3)(f + v_1)\right]}{\left[(f + v_1 +)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right]},\\
\frac{\partial v_2}{\partial r^0} &= e^{-\phi(r^0,r^1)}\frac{g_2}{f + v_1 + v_2}, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = e^{-\phi(r^0,r^1)}\left(\frac{g_3 - f}{f + v_1} + 1\right).
\end{aligned} \quad (6.181)$$

Notons que $\vec{\Omega}\cdot\vec{h} = 0$ implique que $g_2 = \vec{g}\cdot\vec{\Omega}$ est une constante.

Les équations (6.181) peuvent être résolues similairement aux équations (6.142) et donnent comme solutions

$$\begin{aligned}
v_1 =& p(r^0)^{-1/\kappa} S(r^1)^{-1} - f(r^1), \quad v_2 = g_2 S(r^1) \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} p(\xi)^{1/\kappa} d\xi + V_2(r^1), \\
v_3 =& \left[g_3(r^1) - f(r^1)\right] S(r^1) \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi,r^1)} p(\xi)^{1/\kappa} d\xi + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi,r^1)} d\xi + V_3(r^1), \\
\rho =& p(r^0)^{1/\kappa} A(r^1)^{-1/\kappa} \left[\frac{p(r^1)^{-1-1/\kappa}}{\kappa S(r^1)^2} - A(r^1)^{1/\kappa}\right] p(r^0)^{-1/\kappa} \dot{p}(r^0) \\
=& e^{-\phi(r^0, r^1)} \Bigg[(g_3(r^1) - f(r^1)) S(r^1) \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} p(\xi)^{1/\kappa} d\xi \\
&+ \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi + (V_3(r^1) - g_1(r^1)) \Bigg],
\end{aligned} \tag{6.182}$$

où $S(r^1)$, $V_2(r^1)$ et $V_3(r^1)$ sont des fonctions d'intégration.

La deuxième équation de (6.26) doit maintenant être satisfaite. De paire, l'équation (6.128b) et la deuxième équation de (6.26) indiquent que les conditions (6.42) et (6.43) doivent être respectées dans le cas présent. Comme $\vec{h} \cdot \vec{\Omega} = 0$ et $\left|\vec{h}\right| = 1$, on obtient $\dot{\vec{h}}(r^1) = \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| (\vec{h} \times \vec{\Omega})$, où $\epsilon_2 = \pm 1$. La condition (6.43) devient quant à elle

$$\frac{\partial \phi}{\partial r^1} = -\frac{\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3 + \dot{f}(r^1)}{v_1 + f}. \tag{6.183}$$

Ensemble, la deuxième équation de (6.42) et (6.128a) donnent

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} \cdot \vec{\lambda}^1 = \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial r^1} \vec{h} + \dot{\vec{h}}(r^1)\right) \\
&\cdot \left[\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \vec{h} + \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \vec{\Omega} + \frac{\partial v_3}{\partial r^1} (\vec{h} \times \vec{\Omega}) + v_1 \dot{\vec{h}}(r^1) + v_3 \dot{\vec{h}}(r^1) \times \vec{\Omega}\right] \\
=& \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3\right) \vec{h} + \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \vec{\Omega} + \left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1\right) (\vec{h} \times \vec{\Omega})\right] \\
&\cdot \mu \left[\frac{\partial \phi}{\partial r^1} \vec{h} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| (\vec{h} \times \vec{\Omega})\right] \\
=& \mu \left[\frac{\partial \phi}{\partial r^1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3\right) + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1\right)\right].
\end{aligned} \tag{6.184}$$

De la troisième et cinquième équation de (6.182), on obtient la relation $v_3 = \left(\frac{p^{-1-1/\kappa}}{\kappa S^2} - A^{1/\kappa}\right) p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)e^{\phi} + g_1$, qui, une fois substituée avec la première équation de (6.182) dans (6.183) et (6.184) permet de trouver

$$\frac{\partial \phi}{\partial r^1} = -\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \dot{p}(r^0) S \left(\frac{p^{-1-1/\kappa}}{\kappa S^2} - A^{1/\kappa}\right) e^{\phi} - \left[\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| g_1 + \dot{f}(r^1)\right] p^{1/\kappa} S \quad (6.185)$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \phi}{\partial r^1}\left[\frac{\dot{S}(r^1)}{S^2 p^{1/\kappa}} + \dot{f}(r^1) + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| g_1\right] + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| p^{-1/\kappa}\dot{p}(r^0)\left[\frac{2\dot{S}(r^1)}{\kappa S^3 p^{1+1/\kappa}}\right. \\ &\left. + \frac{A^{1/\kappa-1}\dot{A}(r^1)}{\kappa}\right] e^{\phi} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \left[\dot{g}_1(r^1) + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \left(\frac{1}{p^{1/\kappa} S} - f\right)\right] = 0.\end{aligned} \quad (6.186)$$

En multipliant (6.185) par $e^{-\phi}$, on obtient l'équation différentielle linéaire $\frac{\partial}{\partial r^1} e^{-\phi} + F_1(r^0, r^1) e^{-\phi} + F_2(r^0, r^1) = 0$, où $F_1 = -\left[\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| g_1 + \dot{f}(r^1)\right] p^{1/\kappa} S$ et $F_2 = -\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \dot{p}(r^0) S \left(\frac{1}{\kappa S^2 p^{1+1/\kappa}} - A^{1/\kappa}\right)$. La solution de l'équation différentielle a la forme (6.176). De paire, les équations (6.185) et (6.186) nous donnent la condition (6.175). De plus, la cinquième équation de (6.182) est équivalente à la condition (6.174).

Ainsi, on a trois expressions en terme de $e^{-\phi}$ soient (6.174), (6.175) et (6.176). En substituant (6.176) dans (6.174) et (6.175), on trouve deux équations en terme des fonction $p(r^0)$, $T(r^0)$, $A(r^1)$, $S(r^1)$, $f(r^1)$, $\vec{h}(r^1)$ et $V_3(r^1)$. Comme démontré pour la cinquième équation de (6.143), il est possible de séparer les variables. Les expressions résultantes seraient alors (6.174), (6.175) et (6.176).

Les équations (6.182) indiquent que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.173) et est sujette aux conditions (6.174), (6.175) et (6.176). Les invariants de Riemann (6.177) sont calculés par l'entremise des équations (6.28) et de (6.185). La condition $\vec{\lambda}^0 \wedge \vec{\lambda}^1 \neq 0$ est respectée pourvu que $\dot{f}(r^1) \neq 0$ ou $\dot{\vec{h}}(r^1) \neq 0$.

(ii) Faisons maintenant l'hypothèse $\vec{h} \times \vec{\Omega} = 0$, $\left|\vec{h}\right| = \left|\vec{\Omega}\right| = 1$. On doit alors avoir $\vec{h} = \epsilon_1\vec{\Omega}$, $\epsilon_1 = \pm 1$. **(a)** Faisons l'hypothèse supplémentaire que $\vec{g} \times \vec{\Omega} \neq 0$, alors l'ensemble de vecteurs $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g} \times \vec{\Omega})$ forme une base vectorielle pour $\mathbb{R}^3$. On pose $\vec{v} = v_1(r^0, r^1)\vec{g} + v_2(r^0, r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0, r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$. Écrire les équations (6.128a) et (6.180) en terme de notre base vectorielle mène à

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial r^0} &= -\epsilon_1 e^{-\phi}\kappa p \vec{g}\cdot\vec{\Omega}\left\{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]^2 - \kappa p^{-1-1/\kappa}A^{1/\kappa}\right\}^{-1}, \\
\frac{\partial v_1}{\partial r^0} &= e^{-\phi}(1 - v_3)\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]^{-1}, \\
\frac{\partial v_2}{\partial r^0} &= \frac{e^{-\phi}\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]}\left\{v_3 + \frac{\kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}\right\}, \\
\frac{\partial v_3}{\partial r^0} &= \frac{e^{-\phi}}{v_1}\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right].
\end{aligned}$$

Sujet à l'hypothèse $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$, ce système devient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial r^0} = 0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi}(1 - v_3)\left[f + \epsilon_1 v_2\right]^{-1}, \\
&\frac{\partial v_2}{\partial r^0} = 0, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = \frac{e^{-\phi}v_1}{[f + \epsilon_1 v_2]}.
\end{aligned} \tag{6.187}$$

On remarque sans peine que la pression $p = p_0$ est constante et que la fonction v_2 est uniquement dépendante de r^1. Il s'ensuit que la densité $\rho(r^1)$ est uniquement fonction de r^1. La deuxième et la quatrième équation de (6.187) ont pour solution

$$\begin{aligned}
v_1 &= A_1(r^1)\sin\left\{\left[f(r^1) + \epsilon_1 v_2(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)}d\xi + B_1(r^1)\right\}, \\
v_2 &= A_1(r^1)\cos\left\{\left[f(r^1) + \epsilon_1 v_2(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)}d\xi + B_1(r^1)\right\} + 1,
\end{aligned} \tag{6.188}$$

où $A_1(r^1)$ et $B_1(r^1)$ sont des fonctions d'intégration. On remarque que les calculs actuels sont analogues à ceux du cas $\vec{h} \times \vec{\Omega} = 0$ du théorème 6.3.2. En particulier, les équations (6.99) demeurent valides et la fonction $v_2 = V_0$ est encore une constante. Comme $\vec{v}\cdot\epsilon_1\vec{\Omega} = \epsilon_1 v_2 = \epsilon_1 V_0$, la deuxième équation de (6.99) donne la condition

$\partial\phi/\partial r^1 = -(f+\epsilon_1 V_0)^{-1}\dot{f}(r^1)$ qui, une fois intégrée, produit

$$e^{\phi(r^0,r^1)} = e^{\phi_0(r^0)}\left[f(r^1)+\epsilon_1 V_0\right]^{-1}, \tag{6.189}$$

où $\phi_0(r^0)$ est une fonction d'intégration.

Les invariants de Riemann (6.179) peuvent maintenant être calculés à partir des équations (6.28), (6.189) et $\vec{h} = \epsilon_1\vec{\Omega}$. De paire, les équations (6.188) et (6.189) mènent aux équations (6.178). Les vecteur γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendants pourvu que $A_1 \neq 0$ et $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$ ou $\dot{A}_1(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est quant à elle respectée si $\dot{f}(r^1) \neq 0$.

(b) Faisons maintenant l'hypothèse $\vec{h}\times\vec{\Omega} = 0$ et $\vec{g}\times\vec{\Omega} = 0$. On choisit la base orthogonale standard de $\mathbb{R}^3$ $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ainsi que $\vec{\Omega} = \vec{e}_3$. On pose $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i(r^0, r^1)\vec{e}_i$. On a finalement $\vec{h} = \epsilon_1\vec{e}_3$ et $\vec{g} = \epsilon_3\left|\vec{g}\right|\vec{e}_3$, où ϵ_1, $\epsilon_3 = \pm 1$. Substituer ces quantités dans les équations (6.128a) et (6.180) révèle le système d'équations différentielles partielles

$$\begin{aligned} &\frac{dp}{dr^0} = -\epsilon_1\epsilon_3\frac{\left|\vec{g}\right| e^{-\phi}\kappa p}{(f+\epsilon_1 v_3)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi}\frac{v_2}{f+\epsilon_1 v_3},\\ &\frac{\partial v_2}{\partial r^0} = e^{-\phi}\frac{v_1}{f+\epsilon_1 v_3}, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = \epsilon_3\frac{\left|\vec{g}\right| e^{-\phi}(f+\epsilon_1 v_3)}{(f+\epsilon_1 v_3)^2 - \kappa p^{1-1/\kappa}A^{1/\kappa}}. \end{aligned} \tag{6.190}$$

On note que le côté droit de la première équation de (6.190) n'est jamais nul, ce qui indique $dp/dr^0 \neq 0$. La première et la quatrième équations de (6.190) impliquent

$$v_3 = \epsilon_1\left[S(r^1)p(r^0)^{-1/\kappa} - f(r^1)\right], \tag{6.191}$$

où $S(r^1)$ est une fonction d'intégration.

Les conditions (6.42) et (6.43) doivent toujours être satisfaites. La deuxième équation de (6.42) prend alors la forme $\vec{\lambda}^1 = \mu\epsilon_1\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\vec{e}_3$. L'équation (6.128a) implique $0 = \frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1}\cdot\vec{\lambda}^1 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial r^1}\vec{e}_i\cdot\mu\epsilon_1\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\vec{e}_3 = \mu\epsilon_1\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\frac{\partial\phi}{\partial r^1}$. De plus, la condition $\vec{\lambda}^1 \neq 0$ impose $\partial\phi/\partial r^1 \neq 0$, on conclut donc $\partial v_3/\partial r^1 = 0$. De (6.191), on obtient la condition

$$\dot{S}(r^1)p(r^0)^{-1/\kappa} = \dot{f}(r^1). \tag{6.192}$$

Comme $\vec{h} = \epsilon_1\vec{e}_3$ et $\dot{h}(r^1) = 0$, la condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est respectée pourvu que $\dot{f}(r^1) \neq 0$. Par conséquent, on doit imposer la condition $\dot{S}(r^1) \neq 0$. Les variables r^0 et r^1 peuvent alors être séparées dans (6.192) révélant ainsi que la pression $p(r^0)^{-1/\kappa} = \frac{\dot{f}(r^1)}{\dot{S}(r^1)} = K$ est constante. Comme c'est une contradiction avec $\dot{p}(r^0) \neq 0$, on conclut qu'il n'y a pas de solution dans ce cas. $\square$

L'écoulement de fluide décrit par la solution (6.173) est à entropie constante et le fluide est compressible pourvu que $\dot{p}(r^0) \neq 0$ ou $\dot{\vec{h}}(r^1) \neq 0$ et $[\vec{g}\cdot(\vec{h}\times\vec{\Omega}) - f]Sp^{1/\kappa} + 1 \neq 0$. La solution (6.178) représente quant à elle l'écoulement d'une fluide incompressible exhibant une vorticité. L'entropie y est constante précisément lorsque la densité ρ est constante.

Solutions explicite

Afin de rendre explicite la solution (6.131), faisons les hypothèses suivantes. Soit le vecteur $\vec{c} = (1, 0, 0)$, le vecteur de gravitation $\vec{g} = (0, 0, g)$ et le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = (0, 0, 1)$. Pour exprimer les invariants de Riemann de manière explicite, on choisit les constantes $c_0 = 1$, $a_0 = 0$, $l_1 = 1$, $l_2 = g - 1$, $S_1 = 1$ et $A = 1$ ainsi que les fonctions arbitraires $Y_0(r^1) = r^1$, $Y_1(r^1) = 3r^1$, $Y_2(r^1) = \sqrt{r^1}$, $Y_3(r^1) = 0$, $\psi(r^1) = \sqrt{r^1}$, $p(r^0) = (r^0)^\kappa$ et

$$G[p(r^0)] = \frac{1}{2[1 + (g-1)p(r^0)^{1/\kappa}]\kappa p(r^0)^{(\kappa-1)/\kappa}}.$$

À titre d'illustration, pour tracer les graphiques des solutions, on choisit le coefficient polytropique $\kappa = 1,4$ et le bump algébrique en terme de l'invariant de Riemann r^1

$$V_2(r^1) = 1 - \frac{4}{1-4(r^1)^2}.$$

Sous ces hypothèses, on trouve les solutions explicites de rang 2 de type kink

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho(t,x) = \frac{\tan\left(\sqrt{g-1}(t+x)\right)^2}{g-1}, \quad p(t,x) = \left(\frac{\tan\left(\sqrt{g-1}(t+x)\right)^2}{g-1}\right)^\kappa \\ &\vec{v}(t,x) = \left[\left(\frac{g-1}{\tan\left(\sqrt{g-1}(t+x)\right)}\right)\right]\vec{c} + \frac{\tan(\sqrt{g-1}(t+x))}{\sqrt{g-1}}(\vec{c}\times\vec{\Omega}) \\ &\qquad + \left[1 - \frac{9604(t+x)^4}{2401(t+x)^4 - 4(6\sqrt{2}-11)(x-1)^4} + \sqrt{2}g(t+x)\right]\vec{\Omega} \end{aligned}} \tag{6.193}$$

où les invariants de Riemann sont donnés par

$$r^0(t,x) = \frac{\tan\left(\sqrt{g-1}(t+x)\right)^2}{g-1}, \qquad r^1(t,x) = -\frac{(x-1)^2\left[-11+6\sqrt{2}\right]}{49(t+x)^2}. \tag{6.194}$$

Les solutions (6.193) représentent un écoulement compressible pour lequel la densité présente une forme périodique.

Un structure de singularité en terme de t et x est observée pour l'invariant de Riemann $r^1(t,x)$ lorsque le dénominateur de l'invariant de Riemann r^1 donnée à l'équation (6.194) est nul, c'est-à-dire le long de la droite $t = -x$.

Les Figures 6.9 et 6.10 représentent respectivement la densité $\rho(t,x)$ et la pression $p(t,x)$. La pression et la densité présentent la même structure de singularité que l'invariant de Riemann $r^1(t,x)$.

Les Figures 6.11, 6.12 et 6.13 représentent respectivement le champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan engendré par le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, $\vec{c}$ et $\vec{c}\times\vec{\Omega}$. La composante du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan généré par le vecteur $\vec{c}$ présente une structure de singularité en termes de t et x sur les droites

$$t = -x + \frac{n\pi}{\sqrt{-1+g}} \qquad\qquad n \in \mathbb{Z}.$$

La composante du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan généré par le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ présente une structure de singularité en termes de t et x lorsque le dénominateur de la fonction $V_2(t,x)$ est nul, soit sur les droites $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{7}(6\sqrt{2} - 11)^{1/4}(x-1) - x$.

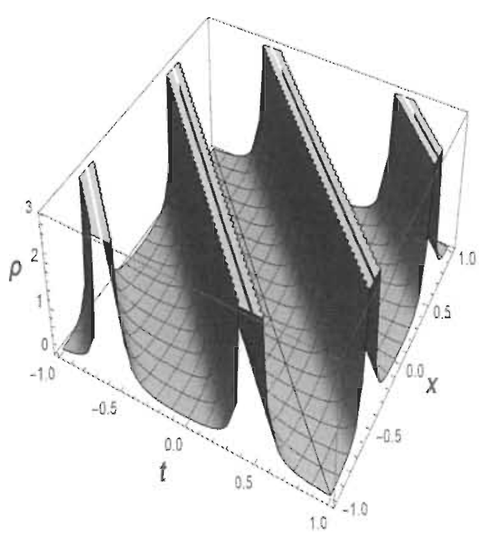

FIGURE 6.9 – Représentation graphique de la densité $\rho(t,x)$

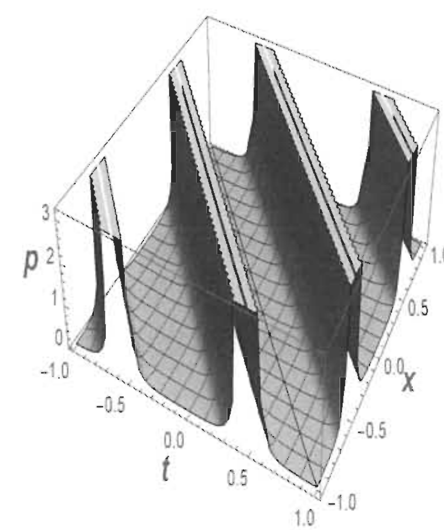

FIGURE 6.10 – Représentation graphique de la pression $p(t,x)$

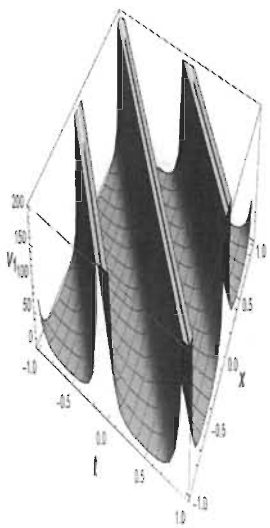

FIGURE 6.11 – Représentation graphique du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan engendré par $\vec{c}$

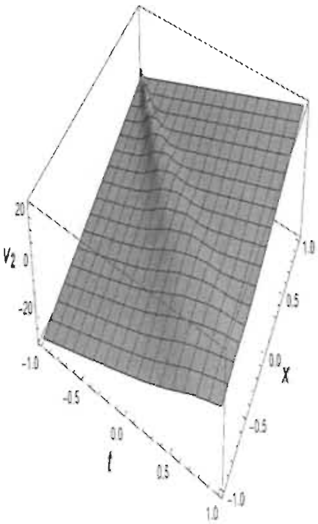

FIGURE 6.12 – Représentation graphique du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan engendré par le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$

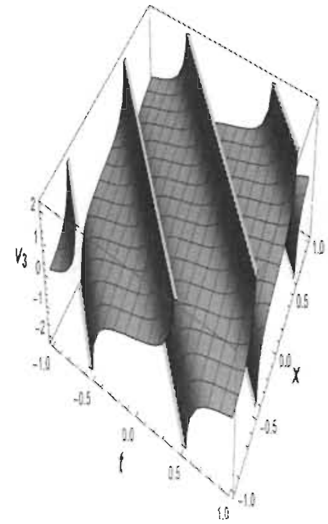

FIGURE 6.13 – Représentation graphique du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan engendré par $\vec{c}\times\vec{\Omega}$

6.6 Onde acoustique simple sur état hydrodynamique simple H^0A_ϵ

En substituant les éléments hydrodynamiques simples non-homogènes H^0 (3.9) et les éléments acoustiques simples homogènes A_ϵ (3.13) dans l'équation (5.3), on trouve le système d'équations différentielles partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial r^0} &= -\rho \frac{(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{\lambda}^0}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho} \left| \vec{\lambda}^0 \right|^2}, & \frac{\partial \rho}{\partial r^1} &= \gamma_{\rho_1}, \\
\frac{\partial p}{\partial r^0} &= -\kappa p \frac{(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{\lambda}^0}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho} \left| \vec{\lambda}^0 \right|^2}, & \frac{\partial p}{\partial r^1} &= \frac{\kappa p}{\rho} \gamma_{\rho_1}, \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^0} &= \frac{1}{\rho \delta} \Bigg[\rho (\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}), & \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} &= -\epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\gamma_{\rho_1}}{\rho} \frac{\vec{\lambda}^1}{\left| \vec{\lambda}^1 \right|} \\
&\quad + \kappa p \frac{(\vec{g} - \vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{\lambda}^0}{\delta^2 - \frac{\kappa p}{\rho} \left| \vec{\lambda}^0 \right|^2} \vec{\lambda}^0 \Bigg], & &
\end{aligned} \tag{6.195a}$$

où les vecteurs d'ondes sont donnés par

$$\lambda^0 = \begin{pmatrix} \delta - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}^0 \\ \vec{\lambda}^0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^1 = \begin{pmatrix} -\epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho} \right)^{1/2} \left| \vec{\lambda}^1 \right| - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}^1 \\ \vec{\lambda}^1 \end{pmatrix}. \tag{6.195b}$$

Les équations (6.195) montrent que λ^0 peut satisfaire la condition d'intégrabilité $\partial \lambda^0 / \partial r^1 = \alpha_1 \lambda^1$ pour les cas $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_1 \neq 0$. Les résultats obtenus pour chacun des cas sont présentés dans les théorèmes suivants.

Théorème 6.6.1. *Si les éléments hydrodynamiques simples non-homogènes H^0 (3.9) et les éléments acoustiques simples homogènes A_ϵ (3.13) dans l'équation (5.1) satisfaisont l'équation (5.3) et les conditions de compatibilité (5.5) avec $\alpha_1 = 0$, alors la solution au système non-homogène (3.1) aura une des formes suivantes.*

(i) *Le cas $\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} \neq 0$, $\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} = 0$* ***(a)*** *Sous l'hypothèse $\partial \vec{v} / \partial r^1 \cdot \vec{\Omega} = 0$ et $\partial \vec{v} / \partial r^1 \cdot (\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega}) = 0$, une solution existe lorsque $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$, $\kappa = 3$ et $\partial \vec{v} / \partial r^1 \cdot \vec{\lambda}^0 \neq 0$. Elle est donnée par*

$$\begin{aligned}
\rho(r^0, r^1) &= \frac{S(r^1)}{\alpha(r^0, r^1) + \vec{g} \cdot (\vec{c} \times \vec{\Omega})}, \qquad p = A \rho(r^0, r^1)^3 \\
\vec{v} &= \alpha(r^0, r^1) \vec{c} + B_1 \vec{\Omega} + \left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T_1 \right) \vec{c} \times \vec{\Omega},
\end{aligned} \tag{6.196}$$

où la fonction $\alpha(r^0, r^1)$ *est donnée par l'équation quadratique*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\alpha+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})\right]^2+\frac{3}{2}A\left[\frac{S(r^1)}{\alpha+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})}\right]^2+\epsilon_4\epsilon(3A)^{1/2}S(r^1)+S_1\\&-(\vec{g}\cdot\vec{c}-T_1)\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi+\frac{1}{2}\left[\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi\right]^2=0.\end{aligned} \tag{6.197}$$

Les invariants de Riemann sont implicitement donnés par

$$\begin{aligned}&\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})t+\vec{c}\cdot\vec{x}+c_1=\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi,\\&t+\epsilon_4\epsilon\left[(3A)^{1/2}\dot{S}(r^1)\right]^{-1}\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}\frac{\partial\alpha(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi=\psi(r^1).\end{aligned} \tag{6.198}$$

Ici, c_1*,* $A(>0)$*,* B_1*,* T_1 *et* S_1 *sont des constantes arbitraires,* $\vec{c}=\vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|$ *est un vecteur constant tel que* $\vec{c}\cdot\vec{\Omega}=0$*,* $\epsilon_4=\pm1$*,* $\phi(r^0)$*,* $S(r^1)(\neq 0)$*,* $\psi(r^1)$ *et* $\alpha(r^0,r^1)$ *sont des fonctions satisfaisant* (6.197) *et* $\dot{S}(r^1)\neq 0$*,* $\partial\alpha r^1/\partial r^1\neq 0$*, et* $\frac{S}{\alpha+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})}>0$.

(b) *Sous l'hypothèse* $\partial\vec{v}/\partial r^1\cdot\vec{\Omega}\neq 0$ *et* $\partial\vec{v}/\partial r^1\cdot(\vec{\lambda}^0\times\vec{\Omega})=0$.

(I) *Si* $\vec{g}\cdot[(\vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|)\times\vec{\Omega}]-c_0\neq 0$ *ou* $\partial\vec{v}/\partial r^1\cdot\vec{\lambda}^0=0$*, alors une solution n'existe que lorsque* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}=0$*,* $\kappa=1$ *et* $\frac{d}{dr^0}(\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^0)\neq 0$*. Cette solution a la forme*

$$\begin{aligned}&\rho=\frac{S(r^1)}{\alpha(r^0)+c_0},\qquad p=A\rho,\\&\vec{v}=\alpha(r^0)\vec{c}-\left\{\epsilon_4\epsilon A^{1/2}\ln[S(r^1)]+S_1\right\}\vec{\Omega}\\&+\left\{\left[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0\right]\int_0^{r^0}\frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi)+c_0}d\xi+\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi+T_1^0\right\}(\vec{c}\times\vec{\Omega}),\end{aligned} \tag{6.199}$$

où les fonctions α et ϕ sont reliées par

$$
\begin{aligned}
e^{-\phi(r^0)} = 2^{-1/2}\Bigg\{ & \frac{1}{2}[\alpha(0)+c_0]^2 - \frac{1}{2}\left[\alpha(r^0)+c_0\right]^2 + A\ln\left[\alpha(r^0)+c_0\right] \\
& + \left[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) - c_0\right]\left[\alpha(0)-\alpha(r^0)+\frac{A}{\alpha(r^0)+c_0}\right] + \frac{1}{2}(\vec{g}\cdot\vec{c}-T_1^0)^2\Bigg\}^{-1/2} \\
& \cdot\left\{\left[\alpha(r^0)+c_0\right] - A\left[\alpha(r^0)+c_0\right]^{-1}\right\}\frac{d\alpha}{dr^0} - A\ln\left[\alpha(0)+c_0\right].
\end{aligned}
\tag{6.200}
$$

Les invariant de Riemann sont donnés par

$$
\begin{aligned}
& c_0 t + \vec{c}\cdot\vec{x} + c_1 = \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi, \\
& \left\{\epsilon_4\epsilon A^{1/2}\left[\ln S(r^1)+1\right] + S_1\right\}t + \vec{\Omega}\cdot\vec{x} = \psi(r^1).
\end{aligned}
\tag{6.201}
$$

Ici, c_0 $(\neq -\alpha, \neq \vec{g}\cdot[\vec{c}\times\vec{\Omega}])$, c_1, $A(>0)$, T_1^0 *et* S_1 *sont des constantes arbitraires.* $\vec{c} = \vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|$ *est un vecteur constant satisfaisant* $\vec{c}\cdot\vec{\Omega} = 0$ *et* $\epsilon_4 = \pm 1$*. De plus,* $\alpha(r^0)$, $S(r^1)$ $(\neq 0)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires satisfaisant* (6.200) *et* $d\alpha/dr^0 \neq 0$, $\dot{S}(r^1) \neq 0$ *et* $S(\alpha+c_0)^{-1} > 0$.

(II) *Si* $\partial\vec{v}/\partial r^1\cdot\vec{\lambda}^0 \neq 0$*, alors une solution de la forme*

$$
\begin{aligned}
\rho =& \frac{S(r^1)}{\alpha(r^0,r^1)+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})}, \qquad p = A\rho^{\kappa}, \\
\vec{v} =& \alpha(r^0,r^1)\vec{c} + \left[\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\int_0^{r^0}\frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi,r^1)+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})}d\xi + B(r^1)\right]\vec{\Omega} \\
& + \left[\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + T_1\right](\vec{c}\times\vec{\Omega})
\end{aligned}
\tag{6.202}
$$

existe pourvu qu'une fonction α puisse être choisie de sorte que les conditions

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left[\alpha+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})\right]^2 + \kappa A F(r^0,r^1) - (\vec{g}\cdot\vec{c}-T_1)\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi \\
& \quad + \frac{1}{2}\left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right)^2 - T(r^1) = 0,
\end{aligned}
\tag{6.203}
$$

où

$$F(r^0, r^1) = \begin{cases} \dfrac{S(r^1)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)\left[\alpha + \vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})\right]^{\kappa-1}} & \kappa \neq 1 \\ \ln\left[\dfrac{S(r^1)}{\alpha + \vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})}\right] & \kappa = 1 \end{cases},$$

et

$$\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial r^1}\right)^2\right]^{1/2} = -\,\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\left[\frac{S}{\alpha + \vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})}\right]^{(\kappa-1)/2} \cdot \left\{\frac{\dot{S}(r^1)}{S} - \left[\alpha + \vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})\right]^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right\} \tag{6.204}$$

soient satisfaites. De plus, l'expression

$$\dot{T}(r^1)\left(\frac{\partial\beta}{\partial r^1}\right)^{-1} + \beta, \tag{6.205}$$

où $\beta = \vec{g}\cdot\vec{\Omega}\int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi,r^1)+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})}d\xi + B(r^1)$, *doit uniquement dépendre de* r^1. *Dans ce cas, les invariants de Riemann sont donnés par*

$$\begin{aligned} \left[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})\right]t + \vec{c}\cdot\vec{x} + c_1 &= \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi, \\ \psi(r^1) &= \int_0^{r^0} \frac{\partial\alpha(\xi,r^1)}{\partial r^1}\left(\frac{\partial\beta(\xi,r^1)}{\partial r^1}\right)^{-1} e^{-\phi(\xi)}d\xi \\ &\quad - \left[\dot{T}(r^1)\left(\frac{\partial\beta}{\partial r^1}\right)^{-1} + \beta\right]t + \vec{\Omega}\cdot\vec{x}. \end{aligned} \tag{6.206}$$

Ici, c_1, $A(>0)$ *et* T_1 *sont des constantes arbitraires,* $\vec{c} = \vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|$ *est un vecteur constant tel que* $\vec{c}\cdot\vec{\Omega} = 0$ *et* $\epsilon_4 = \pm 1$. $\alpha(r^0, r^1)$, $\phi(r^0)$, $S(r^1)$ $(\neq 0)$, $B(r^1)$, $T(r^1)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires satisfaisant* (6.203) - (6.205) *ainsi que* $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$, $\partial\beta/\partial r^1 \neq 0$ *et* $\frac{S(r^1)}{\alpha+\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})} > 0$.

(c) *Si* $\partial\vec{v}/\partial r^1 = 0$ *et* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot (\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega}) \neq 0$, *alors il n'existe une solution que* *lorsque* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}=0$ *et* $\partial\vec{v}/\partial r^1\cdot\vec{\lambda}^0\neq 0$. *La solution aura alors la forme*

$$
\begin{aligned}
&\rho=\frac{S(r^1)}{\alpha(r^0,r^1)+c_0}, \qquad p=A\rho^\kappa,\\
&\vec{v}=\alpha(r^0,r^1)\vec{c}+B_1\vec{\Omega}\\
&\quad+\left\{\left[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0\right]\int_0^{r^0}\frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi,r^1)+c_0}d\xi+\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi+T_1(r^1)\right\}(\vec{c}\times\vec{\Omega}),
\end{aligned}
\tag{6.207}
$$

pourvu qu'on puisse choisir une fonction α *telle que,*

$$
\frac{1}{2}(\alpha+c_0)^2+\kappa AF(r^0,r^1)-\int_0^{r^0}\left[g_1-\tau(\xi,r^1)\right]e^{-\phi(\xi)}d\xi-T(r^1)=0,
\tag{6.208}
$$

$$
F(r^0,r^1)=\begin{cases}\dfrac{S(r^1)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)\left[\alpha+c_0\right]^{\kappa-1}} & \kappa\neq 1\\ \ln\left[\dfrac{S(r^1)^{\kappa-1}}{\alpha+c_0}\right] & \kappa=1\end{cases},
\tag{6.209}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^2\right]^{1/2}&=-\,\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{S}{\alpha+c_0}\right)^{(\kappa-1)/2}\\
&\quad\cdot\left[\frac{\dot{S}(r^1)}{S}-(\alpha+c_0)^{-1}\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right]
\end{aligned}
\tag{6.210}
$$

et que la quantité

$$
\left[\dot{T}(r^1)-\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}\frac{\partial\tau(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi\right]\left[\frac{\partial\tau(r^0,r^1)}{\partial r^1}\right]^{-1}+\tau(r^0,r^1),
\tag{6.211}
$$

où

$$
\tau=\left[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})\right]\int_0^{r^0}\frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi,r^1)+c_0}d\xi+\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi+T_1(r^1),
$$

soit uniquement fonction de r^1. *Les invariants de Riemann sont*

$$
\begin{aligned}
&c_0t+\vec{c}\cdot\vec{x}+c_1=\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi,\\
&\psi(r^1)=\int_0^{r^0}\frac{\partial\alpha(\xi,r^1)}{\partial r^1}\left[\frac{\partial\tau(\xi,r^1)}{\partial r^1}\right]^{-1}e^{-\phi(\xi)}d\xi+(\vec{c}\times\vec{\Omega})\cdot\vec{x}\\
&\quad+\left[\left(-\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}\frac{\partial T(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi+\dot{T}(r^1)\right)\left(\frac{\partial\tau(r^0,r^1)}{\partial r^1}\right)^{-1}+\tau(r^0,r^1)\right]t.
\end{aligned}
\tag{6.212}
$$

Ici, c_0 *(*$\neq -\alpha$*),* c_1*,* A *(*> 0*) et* B_1 *sont des constantes arbitraires,* $\vec{c} = \vec{\lambda}^0 / \left|\vec{\lambda}^0\right|$ *est un vecteur constant tel que* $\vec{c} \cdot \vec{\Omega} = 0$ *et* $\epsilon_4 = \pm 1$*. De plus,* $\alpha(r^0, r^1)$*,* $\phi(r^0)$*,* $T_1(r^1)$*,* $S(r^1)$ *(*$\neq 0$*),* $T(r^1)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions respectant les conditions* (6.208) - (6.211) *ainsi que* $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$*,* $\partial\tau/\partial r^1 \neq 0$*,* $(\alpha + c_0)^{-1} S > 0$ *et* $\dot{S}(r^1) \neq 0$ *ou*

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}\frac{\partial\tau}{\partial r^1} - \frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\frac{\partial\tau}{\partial r^0} \neq 0.$$

(d) *Si* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \neq 0$ *et* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot (\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega}) \neq 0$*, une solution n'existe que lorsque* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot \vec{\lambda}^0 \neq 0$.

(I) *Si* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$*, la solution aura la forme*

$$\begin{aligned} &\rho = \frac{S(r^1)}{\alpha(r^0, r^1) + c_0}, \qquad p = A\rho^\kappa, \\ &\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{c} + B(r^1)\vec{\Omega} + \left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T(r^1)\right)(\vec{c} \times \vec{\Omega}), \end{aligned} \tag{6.213}$$

où α *doit satisfaire*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\alpha + c_0)^2 + \kappa A F(r^0, r^1) \\ &- \left[\vec{g} \cdot \vec{c} - T_1(r^1)\right] \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + \frac{1}{2}\left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\right)^2 - T(r^1) = 0 \end{aligned} \tag{6.214}$$

et

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)^2 + \dot{B}(r^1)^2 + \dot{T}_1(r^1)^2\right]^{1/2} &= -\epsilon_4 \epsilon (\kappa A)^{1/2} \left(\frac{S}{\alpha + c_0}\right)^{(\kappa-1)/2} \\ &\cdot \left[\frac{\dot{S}(r^1)}{S} - (\alpha + c_0)^{-1} \frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right], \end{aligned} \tag{6.215}$$

où $F(r^0, r^1)$ *est défini comme* (6.209)*. Les invariants de Riemann sont implicitement* *définis par*

$$
\begin{aligned}
c_0 t + \vec{c}\cdot\vec{x} + c_1 &= \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi, \\
\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial \alpha(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi &- \left[\dot{T}(r^1) + B\dot{B}(r^1) + T_1\dot{T}_1(r^1)\right] t \\
&+ \dot{B}(r^1)\vec{\Omega}\cdot\vec{x} + \dot{T}_1(r^1)(\vec{c}\times\vec{\Omega})\cdot\vec{x} = \psi(r^1).
\end{aligned}
\tag{6.216}
$$

Ici, c_0 *(*$\neq -\alpha$*) et* A *(*> 0*) sont des constantes arbitraires,* $\vec{c} = \vec{\lambda}^0 / \left|\vec{\lambda}^0\right|$ *est un vecteur constant tel que* $\vec{c}\cdot\vec{\Omega} = 0$ *et* $\epsilon_4 = \pm 1$*. De plus,* $\alpha(r^0, r^1)$*,* $\phi(r^0)$*,* $S(r^1)$ *(*$\neq 0$*),* $B(r^1)$*,* $T_1(r^1)$*,* $T(r^1)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions satisfaisant les conditions* (6.214), (6.215), $\dot{B}(r^1) \neq 0$*,* $\dot{T}_1(r^1) \neq 0$*,* $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$ *et* $(\alpha + c_0)^{-1} S(r^1) > 0$.

(II) *Si* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$*, la solution aura la forme*

$$
\begin{aligned}
&\rho = \frac{S(r^1)}{\alpha(r^0, r^1) + c_0}, \qquad p = A\rho^\kappa, \\
&\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{c} + \left[\frac{\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) - c_0}\right] \\
&\cdot \left\{\left[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) - c_0\right] \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi, r^1) + c_0} d\xi + T_1(r^1) + T_0\right\} \vec{\Omega} \\
&+ \left\{\left[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) - c_0\right] \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi, r^1) + c_0} d\xi + \int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)} d\xi + T_1(r^1)\right\} (\vec{c}\times\vec{\Omega}),
\end{aligned}
\tag{6.217}
$$

pourvu que la fonction α *soit satisfasse la condition*

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)^2 + \left[\left(\frac{\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega}) - c_0}\right)^2 + 1\right] \left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^2 \right\}^{1/2} \\
&\qquad = -\epsilon_4 \epsilon (\kappa A)^{1/2} \left(\frac{S}{\alpha + c_0}\right)^{(\kappa-1)/2} \left[\frac{\dot{S}(r^1)}{S} - (\alpha + c_0)^{-1} \frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right]
\end{aligned}
\tag{6.218}
$$

et que l'expression

$$\left[-\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}\frac{\partial T(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi+\dot{T}(r^1)\right]\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1}+\left\{1+\left[\frac{\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\right]^2\right\}T$$
$$-\left[\frac{\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\right]^2\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi, \tag{6.219}$$

où $T=[\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0]\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}[\alpha(\xi,r^1)+c_0]^{-1}d\xi+\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi+T_1(r^1)$*, soit uniquement fonction de* r^1*. Les invariants de Riemann sont alors*

$$c_0t+\vec{c}\cdot\vec{x}+c_1=\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi,$$
$$\int_0^{r^0}\frac{\partial\alpha(\xi,r^1)}{\partial r^1}\left[\frac{\partial T(\xi,r^1)}{\partial r^1}\right]^{-1}e^{\phi(\xi)}d\xi-\left\{\left[\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}\frac{\partial T(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi+\dot{T}(r^1)\right]\right.$$
$$\cdot\left(\frac{\partial T(r^0,r^1)}{\partial r^1}\right)^{-1}+\left[1+\left(\frac{\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\right)^2\right]T(r^0,r^1) \tag{6.220}$$
$$\left.-\left[\frac{\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\right]^2\left(\int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi-T_0\right)\right\}t$$
$$+\left[\frac{\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})-c_0}\right]\vec{\Omega}\cdot\vec{x}+(\vec{c}\times\vec{\Omega})\cdot\vec{x}=\psi(r^1).$$

Ici, c_0 *(*$\neq\vec{g}\cdot[\vec{c}\times\vec{\Omega}]$*,* $\neq-\alpha$*),* c_1*,* A *(*>0*) et* T_0 *sont des constante arbitraires,* $\vec{c}=\vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|$ *est une vecteur constant tel que* $\vec{c}\cdot\vec{\Omega}=0$ *et* $\epsilon_4=\pm1$*. De plus,* $\alpha(r^0,r^1)$*,* $\phi(r^0)$*,* $T_1(r^1)$*,* $S(r^1)$ *(*$\neq 0$*),* $T(r^1)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions satisfaisant les conditions* (6.208)-(6.209), (6.218)-(6.219) *ainsi que* $\partial\alpha/\partial r^1\neq0$*,* $\partial\beta/\partial r^1\neq0$*,* $\partial T/\partial r^1\neq0$ *et* $(\alpha+c_0)^{-1}S(r^1)>0$.

(ii) *Le cas* $\vec{\lambda}^0=\epsilon_1\left|\vec{\lambda}^0\right|\vec{\Omega}$*,* $\epsilon_1=\pm1$ ***(a)*** $\vec{g}\times\vec{\Omega}\neq0$*,* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}=0$

Il n'y a aucun solution pour ce cas.

(b) $\vec{g}=\epsilon_2\left|\vec{g}\right|\vec{\Omega}$*,* $\vec{\Omega}=\vec{e}_3$*,* $\epsilon_2=\pm1$

(I) *Si* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot \vec{e}_1$, $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, *une solution n'existe que lorsque* $\kappa = 3$ *et est donnée par*

$$\rho = \rho(r^0, r^1), \qquad p = A\rho^3, \qquad \vec{v} = \epsilon_1 \left[\frac{S(r^1)}{\rho(r^0, r^1)} - c_0 \right] \vec{e}_3, \tag{6.221}$$

où la densité ρ *satisfait l'équation quadratique*

$$\frac{S(r^1)^2}{2\rho(r^0, r^1)^2} + \frac{3}{2} A\rho(r^0, r^1)^2 - \epsilon_1\epsilon_2 \, |\vec{g}| \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + \epsilon_1\epsilon_4\epsilon(3A)^{1/2} S(r^1) + S_1 = 0. \tag{6.222}$$

Les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned} &c_0 t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x} + c_1 = \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi, \\ &\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{S(r^1)}{\rho(\xi, r^1)} \right) d\xi + \epsilon_1\epsilon_4\epsilon(3A)^{1/2} \dot{S}(r^1) t = \psi(r^1), \end{aligned} \tag{6.223}$$

où c_0, c_1, $A (> 0)$ *et* S_1 *sont des constantes arbitraires,* $\epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon = \pm 1$ *et* ρ (> 0), $\phi(r^0)$, $S(r^1)$ $(\neq 0)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires satisfaisant* (6.222) *et* $\dot{S}(r^1) \neq 0$, $\partial\rho/\partial r^i \neq 0$, $i = 0, 1$.

(II) *Si* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot \vec{e}_1 \neq 0$ *et* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, *une solution existe et est donnée par*

$$\begin{aligned} &\rho = \rho(r^0, r^1), \qquad p = A\rho^\kappa, \\ &\vec{v} = a_1(r^1) \sin \left[\frac{1}{S(r^1)} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \rho(\xi, r^1) d\xi + b_1(r^1) \right] \vec{e}_1 \\ &\qquad + a_1(r^1) \cos \left[\frac{1}{S(r^1)} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \rho(\xi, r^1) d\xi + b_1(r^1) \right] \vec{e}_2 \\ &\qquad + \epsilon_1 \left[\frac{S(r^1)}{\rho(r^0, r^1)} - c_0 \right] \vec{e}_3, \end{aligned} \tag{6.224}$$

où la densité ρ *doit satisfaire les équations*

$$\frac{S(r^1)^2}{2\rho(r^0, r^1)^2} + \kappa A F[\rho(r^0, r^1)] - \epsilon_1\epsilon_2 \, |\vec{g}| \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + \frac{1}{2} a_1(r^1)^2 - a_0 = 0, \tag{6.225}$$

où

$$F(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^{\kappa-1}}{\kappa-1} & \kappa \neq 1 \\ \ln \rho & \kappa = 1 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \dot{a}_1(r^1)^2 \left[\sin \left(\frac{1}{S} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \rho(\xi, r^1) d\xi + b_1 \right) \right]^{-2} + \left(\frac{\dot{S}(r^1)}{\rho} - \frac{S}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\qquad = -\epsilon_4 \epsilon (\kappa A)^{1/2} \rho^{(\kappa-1)/2-1} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} \end{aligned} \tag{6.226}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}_1(r^1)}{a_1(r^1)} &= \tan \left(\frac{1}{S} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \rho(\xi, r^1) d\xi + b_1 \right) \\ &\quad \cdot \left\{ \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{S(r^1)}{\rho(\xi, r^1)} \right) d\xi + \dot{b}_1(r^1) \right\}. \end{aligned} \tag{6.227}$$

Les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned} c_0 t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x} + c_1 &= \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi, \\ \psi(r^1) &= \frac{1}{\dot{a}_1(r^1)} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \left(\frac{1}{S} \int_0^{\xi} e^{-\phi(s)} \rho(s, r^1) ds + b_1 \right) \cdot \frac{\partial}{\partial r^1} \left(\frac{S(r^1)}{\rho(\xi, r^1)} \right) d\xi \\ &\quad + \vec{e}_1 \cdot \vec{x}. \end{aligned} \tag{6.228}$$

Ici, c_0, c_1, A (> 0) *et* a_0 *sont des constantes arbitraires,* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon = \pm 1$ *et* ρ (> 0), $\phi(r^0)$, $S(r^1)$ $(\neq 0)$, $a_1(r^1)$, $b_1(r^1)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires satisfaisant les conditions* (6.225)-(6.227), $\dot{a}(r^1) \neq 0$ *et* $\partial \rho / \partial r^1 \neq 0$.

(III) *Si* $\partial \vec{v} / \partial r^1 \cdot \vec{e}_1 = 0$ *et* $\partial \vec{v} / \partial r^1 \cdot \vec{e}_2 \neq 0$, *la solution est alors donnée par* (6.224) *pourvu que la densité* ρ *satisfasse les conditions* (6.225),

$$\begin{aligned} &\left\{ \dot{a}_1(r^1)^2 \left[\cos \left(\frac{1}{S} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \rho(\xi, r^1) d\xi + b_1 \right) \right]^{-2} + \left(\frac{\dot{S}(r^1)}{\rho} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\qquad = -\epsilon_4 \epsilon (\kappa A) \rho^{(\kappa-1)/2-1} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} \end{aligned} \tag{6.229}$$

et

$$\frac{\dot{a}_1(r^1)}{a_1} = -\cot\left(\frac{1}{S}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}\rho(\xi, r^1)d\xi + b_1\right) \cdot \left[\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\rho(\xi, r^1)}{S}\right)d\xi + \dot{b}_1(r^1)\right]. \tag{6.230}$$

Les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned} c_0 t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x} + c_1 &= \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi, \\ \psi(r^1) &= \frac{1}{\dot{a}_1(r^1)}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}\cos\left[\frac{1}{S(r^1)}\int_0^{\xi} e^{-\phi(s)}\rho(s, r^1)ds + b_1(r^1)\right] \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial r^1}\left[\frac{S(r^1)}{\rho(\xi, r^1)}\right]d\xi + \vec{e}_2 \cdot \vec{x}. \end{aligned} \tag{6.231}$$

Ici, c_0*,* c_1*,* A (>0) *et* a_0 *sont des constantes arbitraires,* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon = \pm 1$ *et* ρ (>0)*,* $\phi(r^0)$*,* $S(r^1)$ $(\neq 0)$*,* $a_1(r^1)$*,* $b_1(r^1)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires satisfaisant les conditions* (6.229)-(6.230)*,* $\dot{a}(r^1) \neq 0$ *et* $\partial\rho/\partial r^1 \neq 0$.

(IV) *Si* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot \vec{e}_1$*,* $\partial\vec{v}/\partial r^1 \cdot \vec{e}_2 \neq 0$*, la solution* $(\rho, p, \vec{v})$ *a la forme* (6.224) *et la densité* ρ *devra satisfaire*

$$\left\{-a_1\dot{a}_1(r^1)\frac{S}{\rho}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\rho}{S}\right) + \left[\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{S}{\rho}\right)\right]^2\right\}^{1/2} = -\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\rho^{(\kappa-1)/2-1}\frac{\partial\rho}{\partial r^1} \tag{6.232}$$

et

$$0 = \left[\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\rho(\xi, r^1)}{S(r^1)}\right)d\xi + \dot{b}_1(r^1)\right]^2 + \left(\frac{\dot{a}_1(r^1)}{a_1}\right)\frac{S}{\rho}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\rho}{S}\right) + \left(\frac{\dot{a}_1(r^1)}{a_1}\right). \tag{6.233}$$

Les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned}
&c_0 t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x} + c_1 = \int_0^{r^0} e^{-\phi} d\xi, \\
&\frac{1}{a_1(r^1)} \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi} \sec\theta(\xi, r^1)}{(\dot{a}_1(r^1)/a_1)\tan\theta(\xi, r^1) + \frac{\partial\theta(\xi,r^1)}{\partial r^1}} \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{S(r^1)}{\rho(\xi, r^1)}\right) d\xi \vec{e}_1 \cdot \vec{x} \\
&+ \left[\frac{(\dot{a}_1(r^1)/a_1) - \tan\theta(r^0, r^1)\frac{\partial\theta(r^0,r^1)}{\partial r^1}}{(\dot{a}_1(r^1)/a_1(r^1))\tan\theta(r^0, r^1) + \frac{\partial\theta(r^0,r^1)}{\partial r^1}}\right] = \psi(r^1),
\end{aligned} \tag{6.234}$$

où $\theta(r^0, r^1) = S(r^1)^{-1} \int_0^{r^0} e^{-\phi}\rho(\xi, r^1) d\xi + b_1(r^1)$. *Ici,* c_0, c_1, A (> 0) *et* a_0 *sont des constantes arbitraires,* $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon = \pm 1$ *et* ρ (> 0), $\phi(r^0)$, $S(r^1)$ $(\neq 0)$, $a_1(r^1)$, $b_1(r^1)$ *et* $\psi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires satisfaisant les conditions* (6.232)-(6.233), $\dot{a}(r^1) \neq 0$ *et* $\partial\rho/\partial r^1 \neq 0$.

Preuve : On résout le système (6.195) sujet aux conditions (5.5) avec $\alpha_1 = 0$. Une brève étude de (6.195a) révèle $\partial p/\partial r^i = (\kappa p/\rho)\partial\rho/\partial r^i$ $(i = 0, 1)$, d'où on conclut $p = A\rho^\kappa$, où A est une constante d'intégration. Comme pour le Théorème 6.5.1, on a

$$\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0)}\vec{c}, \qquad |\vec{c}| = 1, \qquad \delta = e^{\phi(r^0)}(c_0 + \vec{v} \cdot \vec{c}) \tag{6.235}$$

et on considère les cas **(i)** $\vec{c} \times \vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$ séparément.

(i) Si $\vec{c} \times \vec{\Omega} \neq 0$, on pose $\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{c} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + T(r^0, r^1)(\vec{c} \times \vec{\Omega})$ et $\vec{g} = g_1\vec{c} + g_2\vec{\Omega} + g_3(\vec{c} \times \vec{\Omega})$, où g_i, $i = 1, 2, 3$ sont des constantes. Les équations (6.139) sont toujours valides pour le cas présent alors que $\kappa p/\rho = \kappa A \rho^{\kappa-1}$. De (6.195a), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial r^0} = -\rho e^{-\phi}\left\{\frac{(g_1 - T) + [g_2 + T(\vec{\Omega} \cdot \vec{c})]\vec{\Omega} \cdot \vec{c}}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}}\right\}, \\
&\frac{\partial\alpha}{\partial r^0} = e^{-\phi}\frac{(g_1 - T)(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})^2 + \kappa A\rho^{\kappa-1}[g_2 + T(\vec{\Omega} \cdot \vec{c})]\vec{\Omega} \cdot \vec{c}}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})\left[(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}\right]}, \\
&\frac{\partial\beta}{\partial r^0} = e^{-\phi}\left[\frac{g_2 + T\vec{\Omega} \cdot \vec{c}}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})}\right], \qquad \frac{\partial T}{\partial r^0} = e^{-\phi}\left[\frac{g_3 + \alpha}{(c_0 + \alpha + \beta\vec{\Omega} \cdot \vec{c})}\right]
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\vec{c} \cdot \vec{\Omega} = 0$, le système (6.235) devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial r^0} &= -\rho e^{-\phi} \left\{ \frac{(g_1 - T)}{(c_0 + \alpha)^2 - \kappa A \rho^{\kappa - 1}} \right\}, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial r^0} &= -\rho e^{-\phi} \left\{ \frac{(g_1 - T)(c_0 + \alpha)}{(c_0 + \alpha)^2 - \kappa A \rho^{\kappa - 1}} \right\}, \\
\frac{\partial \beta}{\partial r^0} &= e^{-\phi} \left[\frac{g_2}{(c_0 + \alpha)} \right], \qquad \frac{\partial T}{\partial r^0} = e^{-\phi} \left[\frac{g_3 - c_0}{(c_0 + \alpha)} + 1 \right].
\end{aligned} \tag{6.236}$$

La première et la deuxième équation de (6.236) impliquent $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = \frac{1}{\alpha + c_0}\frac{\partial \alpha}{\partial r^0}$, ainsi $\rho(r^0, r^1) = S(r^1)[\alpha(r^0, r^1) + c_0]^{-1}$, où $S(r^1)$ est une fonction d'intégration. Substituer cette expression de la densité dans la deuxième équation de (6.236) nous permet de trouver $e^{-\phi}(g_1 - T) = \left[\alpha + c_0 - \kappa A \frac{S(r^1)^{\kappa-1}}{(\alpha + c_0)^\kappa}\right] \frac{\partial \alpha}{\partial r^0}$. Après avoir intégré la troisième et quatrième équation de (6.236), on obtient

$$\begin{aligned}
&\rho = \frac{S(r^1)}{\alpha(r^0, r^1) + c_0}, \qquad p = A\rho^\kappa, \\
&\left\{ \left[\alpha(r^0, r^1) + c_0\right] - \kappa A \frac{S(r^1)^{\kappa-1}}{[\alpha(r^0, r^1) + c_0]^\kappa} \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial r^0} \\
&\quad = e^{-\phi(r^0)} \left[g_1 - T_1(r^1) - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi - (g_3 - c_0) \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi, r^1) + c_0} d\xi \right], \\
&\beta = g_2 \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi, r^1) + c_0} d\xi + B(r^1), \\
&T = (g_3 - c_0) \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi, r^1) + c_0} d\xi + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T_1(r^1),
\end{aligned} \tag{6.237}$$

où $B(r^1)$ et $T_1(r^1)$ sont des fonctions d'intégration. Si on revient aux équations (6.195a), on observe la relation

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\lambda}^1}{|\vec{\lambda}^1|} &= - \left[-\epsilon \left(\frac{\kappa p}{\rho} \right)^{1/2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} \right]^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} \\
&= -\, \epsilon (\kappa A)^{-1/2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r^1} \right)^{-1} p^{-(\kappa-1)/2+1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r^1} \vec{c} + \frac{\partial \beta}{\partial r^1} \vec{\Omega} + \frac{\partial T}{\partial r^1} (\vec{c} \times \vec{\Omega}) \right),
\end{aligned} \tag{6.238}$$

qui, en vertu de (6.195b) et de la deuxième équation de (6.200) doit satisfaire les conditions

$$\begin{aligned} &\epsilon\left[\kappa A\rho^{\kappa-1}\right]^{1/2} - \vec{v}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = \tilde{\mu}(r^0,r^1)\left[\chi(r^0,r^1)c_0 + A(r^1)\right], \\ &\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = \left[\chi(r^0,r^1)\vec{c} + \vec{A}(r^1)\right]. \end{aligned} \tag{6.239}$$

Ensemble, les équations (6.238) et (6.239) donnent

$$\begin{aligned} &\tilde{\mu}(r^0,r^1)A(r^1) = \\ &\qquad \epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2} - \tilde{\mu}(r^0,r^1)\chi(r^0,r^1)(\vec{v}\cdot\vec{c}+c_0) - \tilde{\mu}(r^0,r^1)\vec{v}\cdot\vec{A}(r^1), \\ &\tilde{\mu}(r^0,r^1)\chi(r^0,r^1)\vec{c} + \tilde{\mu}(r^0,r^1)\vec{A}(r^1) \\ &\qquad = -\epsilon(\kappa A)^{-1/2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)^{-1}\rho^{(1-\kappa)/2+1}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\vec{c} + \frac{\partial\beta}{\partial r^1}\vec{\Omega} + \frac{\partial T}{\partial r^1}(\vec{c}\times\vec{\Omega})\right]. \end{aligned} \tag{6.240}$$

En posant $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + A_3(r^1)(\vec{c}\times\vec{\Omega})$ et en comparant les composantes de la deuxième équation de (6.240), on trouve

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(r^0,r^1)\left[\chi(r^0,r^1) + A_1\right] &= -\epsilon(\kappa A)^{-1/2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)^{-1}\rho^{(1-\kappa)/2+1}\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}, \\ \tilde{\mu}(r^0,r^1)A_2 &= -\epsilon(\kappa A)^{-1/2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)^{-1}\rho^{(1-\kappa)/2+1}\frac{\partial\beta}{\partial r^1}, \\ \tilde{\mu}(r^0,r^1)A_3 &= -\epsilon(\kappa A)^{-1/2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)^{-1}\rho^{(1-\kappa)/2+1}\frac{\partial T}{\partial r^1}, \end{aligned}$$

alors que la première équation de (6.240) nous donne

$$A(r^1) = \epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\tilde{\mu}(r^0,r^1)^{-1} - \chi(r^0,r^1)(\alpha+c_0) - (\alpha A_1 + \beta A_2 + TA_3).$$

Afin de simplifier (6.241), on définit $\tilde{\mu}(r^0,r^1) = -\epsilon(\kappa A)^{-1/2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)^{-1}\rho^{-(\kappa-1)/2+1}\mu(r^0,r^1)$.

On trouve alors le système simplifié

$$\mu(r^0,r^1)\left[\chi(r^0,r^1)+A_1\right]=\frac{\partial\alpha}{\partial r^1},\quad \mu(r^0,r^1)A_2=\frac{\partial\beta}{\partial r^1},\quad \mu(r^0,r^1)A_3=\frac{\partial T}{\partial r^1},$$
$$A(r^1)=-\kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\mu(r^0,r^1)^{-1}-\chi(r^0,r^1)(\alpha+c_0) \tag{6.242a}$$
$$-(\alpha A_1+\beta A_3+TA_3).$$

Comme $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right|$ est un vecteur unitaire, (6.238) impose,

$$\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial r^1}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^2\right]^{1/2}=-\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\right)^{1/2}\rho^{(\kappa-1)/2-1}\frac{\partial\rho}{\partial r^1},$$

où $\epsilon_4=\pm1$.

On remarque immédiatement que $A_3\partial\beta/\partial r^1=A_2\partial T/\partial r^1$. Le problème se divise donc en deux cas. **(a)** On fait d'abord l'hypothèse $(\partial\beta/\partial r^1)$, $\partial T/\partial r^1=0$. Si $g_2\neq0$ ou $g_3-c_0\neq0$, alors il n'y a pas de solution. En dérivant la quatrième équation de (6.237) par rapport à r^1, on trouve l'équation $\frac{\partial\beta}{\partial r^1}=g_2\int_0^{r^0}\frac{-e^{-\phi(\xi)}}{[\alpha(\xi,r^1)+c_0]^2}\frac{\partial\alpha(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi+\dot{B}(r^1)=0$, qui, une fois dérivée par rapport à r^0 donne $-g_2\left\{\frac{-e^{-\phi(r^0)}}{[\alpha(r^0,r^1)+c_0]^2}\right\}\frac{\partial\alpha(r^0,r^1)}{\partial r^1}=0$. Si $g_2\neq0$, cela implique $\partial\alpha/\partial r^1=0$. Si $g_3-c_0\neq0$, on arrive a la même conclusion en dérivant $\partial t/\partial r^1=0$ par rapport à r^0. Clairement, $\partial\vec{v}/\partial r^1=0$ et, de (6.195a), il n'y a pas de superpositions et donc pas de solution de rang 2.

Considérons donc à partir de maintenant que g_2, $(g_3-c_0)=0$ et $\partial\alpha/\partial r^1\neq0$. La quatrième et la cinquième équation de (6.237) donnent immédiatement $\beta=B_1$ et $T=\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi+T_1$, où T_1 et B_1 sont des constantes. La troisième équation de (6.237) devient quant à elle

$$\left[\alpha+c_0-\kappa A\frac{S(r^1)}{(\alpha+c_0)^\kappa}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial r^0}=e^{-\phi}\left[g_1-T_1-\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi)}d\xi\right]. \tag{6.243}$$

On définit

$$F(r^0, r^1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\kappa - 1}\left[\dfrac{S(r^1)}{\alpha + c_0}\right]^{\kappa - 1} & \kappa \neq 1 \\ -\ln\left[\dfrac{S(r^1)}{\alpha + c_0}\right] & \kappa = 1 \end{cases} \tag{6.244}$$

de manière à pouvoir réécrire (6.243) comme $\frac{\partial}{\partial r^0}\frac{(\alpha+c_0)^2}{2} + \kappa A \frac{\partial}{\partial r^0} F(r^0, r^1) = e^{-\phi(r^0)}\Big[g_1 - T_1 - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\Big]$. En intégrant cette dernière équation par rapport à r^0, on obtient

$$\frac{(\alpha + c_0)^2}{2} + \kappa A F(r^0, r^1) = (g_1 - T_1)\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi - \frac{1}{2}\left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\right)^2 + T(r^1), \tag{6.245}$$

où $T(r^1)$ est une fonction d'intégration. De plus, on remarque

$$\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \int_0^{\xi} e^{-\phi(s)} ds d\xi = \int_0^{r^0}\left[\int_0^{\xi} e^{-\phi(s)} ds\right]\frac{d}{d\xi}\left[\int_0^{\xi} e^{-\phi(s)} ds\right] d\xi = \frac{1}{2}\left[\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\right]^2.$$

L'équation (6.242a) implique A_2, $A_3 = 0$ et $\mu(r^0, r^1)^{-1} = [\chi(r^0, r^1) + A_1]\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right)^{-1}$. Substituer ces quantités dans la quatrième équation de (6.242a) puis utiliser la première équation de (6.237) et (6.245) nous permet de trouver

$$\begin{aligned} \chi(r^0, r^1) = &- \left[\alpha + c_0 + \kappa A \rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right)^{-1}\right]^{-1} \\ &\cdot \left\{A(r^1) + A_1(r^1)\left[\alpha + \kappa A \rho^{\kappa - 2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right)^{-1}\right]\right\} \\ = &- \left\{(A(r^1) - A_1(r^1)c_0)\frac{\partial \alpha}{\partial r^1} + A_1(r^1)\Bigg[(\alpha + c_0)\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right. \\ &\left. + \kappa A \frac{\partial}{\partial r^1}F(r^0, r^1)\Bigg]\right\} \cdot \left[(\alpha + + c_0)\frac{\partial \alpha}{\partial r^1} + \kappa A \frac{\partial F(r^0, r^1)}{\partial r^1}\right]^{-1} \\ = &- \Big[A(r^1) - A_1(r^1)c_0\Big]\dot{T}(r^1)^{-1}\frac{\partial \alpha}{\partial r^1} - A_1(r^1). \end{aligned} \tag{6.246}$$

Dans ce cas, $A(r^1)$ est arbitraire et $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c}$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est satisfaite lorsque $A \neq c_0 A_1$. On remarque qu'une solution n'existe que lorsque $\dot{T}(r^1) \neq 0$ puisque $-\dot{T}(r^1)\chi(r^0, r^1) = [A(r^1) - A_1(r^1)c_0]\frac{\partial \alpha}{\partial r^1} + A_1(r^1)\dot{T}(r^1)$, $A - c_0 A_1 \neq 0$ et $\partial \alpha / \partial r^1 \neq 0$.

En substituant la première équation de (6.237) dans la cinquième de (6.242a), on trouve la condition $\left[\alpha + c_0 - \epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{S}{\alpha+c_0}\right)^{(\kappa-1)/2}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} = -\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{S}{\alpha+c_0}\right)^{(\kappa-3)/2}$ $\dot{S}(r^1)$. dériver (6.245) par rapport à r^1 puis utiliser la cinquième équation de (6.242a) révèle la condition

$$\begin{aligned}\dot{T}(r^1) =& (\alpha + c_0)\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} + \left[-\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{S}{\alpha+c_0}\right)^{(\kappa-1)/2}\right] \\ &\cdot\left[-\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{S}{\alpha+c_0}\right)^{(\kappa-1)/2-1}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{S}{\alpha+c_0}\right)\right] \\ =& \left[\alpha + c_0 - \epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\left(\frac{S}{\alpha+c_0}\right)^{(\kappa-1)/2}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}.\end{aligned}$$

De paire, ces deux équations donnent

$$(\alpha + c_0)^{(\kappa-3)/2} = -\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A S^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\dot{S}(r^1)}{\dot{T}(r^1)}. \tag{6.247}$$

Pour $\kappa \neq 3$, α est uniquement fonction de r^1. Cependant, en dérivant (6.247) par rapport à r^0, on remarque alors la contradiction $0 = e^{-\phi}\left[g_1 - T_1 - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi\right]$. Ainsi, l'existence d'une solution requière $\kappa = 3$. Dans ce cas, l'équation (6.247) nous donne

$$T(r^1) = -\epsilon_4\epsilon(3A)^{1/2}S(r^1) - S_1, \tag{6.248}$$

où S_1 est une constante d'intégration et on impose $\dot{S}(r^1) \neq 0$.

En posant $\kappa = 3$ et $c_0 = g_3 = \vec{g}\cdot(\vec{c}\times\vec{\Omega})$, il est évident que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ est (6.196), où la fonction α est donnée par l'équation quadratique (6.197). Les vecteurs γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendant puisque $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$. Les invariants de Riemann (6.198) sont calculés via (6.7), (6.246) et (6.248).

(b) Faisons maintenant l'hypothèse $\partial\beta/\partial r^1 \neq 0$, $\partial T/\partial r^1 = 0$. **(I)** Si $g_3 - c_0 \neq 0$, alors on a $\frac{\partial T}{\partial r^1} = (g_3 - c_0)\int_0^{r^0}\frac{e^{-\phi(\xi)}}{(\alpha(\xi,r^1)+c_0)^2}\frac{\partial\alpha(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi + \dot{T}_1(r^1) = 0$, ce qui implique $\partial\alpha/\partial r^1 = 0$ lorsque $\dot{T}_1(r^1) = 0$. Ainsi, $T_1(r^1) = T_1^0$ est une constante et les fonctions α et T ne dépendent que de r^0. En dérivant la troisième équation de (6.237) par rapport à r^1, on obtient $\left[\frac{-\kappa A}{(\alpha+c_0)^\kappa}(\kappa-1)S(r^1)^{\kappa-2}\dot{S}(r^1)\right]\frac{d\alpha}{dr^0}=0$ ou

$$(\kappa-1)\dot{S}(r^1)\frac{d\alpha}{dr^0}=0. \tag{6.249}$$

Les trois premières équations de (6.242a) impliquent $A_2\neq 0$, $A_3=0$ et

$$\begin{aligned} &\chi(r^0,r^1)=-A_1(r^1), \qquad \mu(r^0,r^1)=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\beta}{\partial r^1}=\frac{1}{A_2}\dot{B}(r^1),\\ &\vec{A}(r^1)=A_1(r^1)\vec{c}+A_2(r^1)\vec{\Omega}. \end{aligned} \tag{6.250}$$

Autrement dit, les fonctions χ et μ ne dépendent que de r^1.

Si $d\alpha/dr^0=0$ alors, en vertu de la première équation de (6.237), la densité ρ est uniquement fonction de r^1. Comme $A_2\neq 0$ et $A_3=0$, la quatrième équation de (6.242a) implique que β est uniquement fonction de r^1. De plus, la troisième équation de (6.237) impose que la fonction $T(r^0)=g_1$ soit constante. On conclut qu'il n'y a pas de superposition (puisque $(\rho,p,\vec{v})$ sont uniquement fonctions de r^1) et donc qu'il n'y a pas de solution de rang 2.

Si $d\alpha/dr^0\neq 0$ et $\kappa\neq 1$, alors par (6.249) on a $\dot{S}(r^1)=0$. Autrement dit, la fonction S est une constante et la densité ρ ne dépend que de r^0. Les équations (6.195a) révèlent alors que les fonctions ρ, p et $\vec{v}$ ne dépendent que de r^0, il n'y a donc pas de solution de rang 2.

On fait maintenant l'hypothèse $\kappa=1$. En vertu de (6.250), la quatrième équation de (6.242a) devient

$$\begin{aligned} A(r^1)&=-\frac{A}{\rho\mu(r^0,r^1)}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}-\chi(r^0,r^1)(\alpha+c_0)-\alpha A_1-\beta A_2\\ &=-A\frac{\dot{S}(r^1)}{S}\frac{A_2(r^1)}{\dot{B}(r^1)}+c_0A_1(r^1)-\beta A_2(r^1). \end{aligned} \tag{6.251}$$

En dérivant (6.251) par rapport à r^0, on trouve $\frac{\partial\beta}{\partial r^0}=\frac{g_2}{\alpha(r^0)+c_0}e^{-\phi(r^0)}=0$, ce qui implique $g_2 = 0$ et $\beta = B(r^1)$. En substituant cette dernière grandeur dans (6.251), on obtient une expression pour $A(r^1)$.

En posant $\kappa = 1$ et $\beta = B(r^1)$, la première équation de (6.237) et la cinquième de (6.242a) donnent $\dot{B}(r^1) = -\epsilon_4 \epsilon A^{1/2} \rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} = -\epsilon_4 \epsilon A^{1/2} \frac{\dot{S}(r^1)}{S}$, d'où

$$B(r^1) = -\epsilon_4 \epsilon A^{1/2} \ln S(r^1) - S_1, \tag{6.252}$$

où S_1 est une constante d'intégration.

La solution $(\rho, p, \vec{v})$ a donc la forme (6.199). L'indépendance linéaire de γ_0 et γ_1 est assurée par les conditions $d\alpha/dr^0 \neq 0$ et $\dot{S}(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est aussi garantie d'être respectée puisque $A_2 \neq 0$. Les invariants de Riemann (6.201) sont calculés via (6.7), (6.250), (6.251) et (6.252).

Dans ce cas, la troisième équation de (6.237) devient une équation uniquement en terme de r^0 :

$$\left(\alpha + c_0 - \frac{A}{\alpha + c_0}\right) \frac{d\alpha}{dr^0} = \left[g_1 - T_1 - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi - (g_3 - c_0) \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi)}}{\alpha(\xi) + c_0} d\xi \right] e^{-\phi(r^0)}.$$

En la multipliant par e^{ϕ} puis en dérivant par rapport à r^0, on obtient

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi}(r^0) = f(r^0) + e^{-2\phi(r^0)} g(r^0), \\
&f(r^0) = -\left[\left(\alpha + c_0 - \frac{A}{\alpha + c_0}\right) \frac{d\alpha}{dr^0}\right]^{-1} \frac{d}{dr^0} \left[\left(\alpha + c_0 - \frac{A}{\alpha + c_0}\right)\right], \\
&g(r^0) = -\left(1 + \frac{g_3 - c_0}{\alpha + c_0}\right) \left[\left(\alpha + c_0 - \frac{A}{\alpha + c_0}\right)\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.253}$$

En substituant les expressions de f et g de (6.253) dans (6.158), on trouve (6.200).

Si $g_3 - c_0 = 0$ et $\partial\alpha/\partial r^1 = 0$, la solution est un cas particulier de (6.199) - (6.201). Continuons avec l'hypothèse $g_3 - c_0 = 0$ et $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$.

(II) Si $g_3 - c_0 = 0$, alors la fonction T ne dépend que de r^0 et elle est définie telle que $T = \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T_1$, où T_1 est une constante d'intégration. Comme pour le cas **(a)**, l'intégration de la troisième équation de (6.237) par rapport à r^0 révèle que la condition (6.245) doit être satisfaite. La première et la deuxième équation de (6.242a) produisent

$$\chi(r^0, r^1) = A_2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial r^1}\right)^{-1} - A_1, \qquad \mu(r^0, r^1) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta}{\partial r^1}, \tag{6.254}$$

alors que la troisième révèle

$$\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_2(r^1)\vec{\Omega}. \tag{6.255}$$

Substituer ces quantités dans la quatrième équation de (6.242a) donne

$$\begin{aligned} A(r^1) &= -A_2 \left\{ \left[\kappa A \rho^{\kappa-2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} + (\alpha + c_0) \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} \right] \left(\frac{\partial \beta}{\partial r^1}\right)^{-1} + \beta \right\} + A_1 c_0 \\ &= -A_2 \left[\dot{T}(r^1) \left(\frac{\partial \beta}{\partial r^1}\right)^{-1} + \beta \right] + A_1 c_0, \end{aligned} \tag{6.256}$$

où la deuxième égalité est obtenue en dérivant (6.245) par rapport à r^1. Par conséquent, $\dot{T}(r^1)(\partial \beta / \partial r^1)^{-1}$ doit uniquement dépendre de r^1, ce qui impose une restriction sur α via la quatrième équation de (6.237). De plus, substituer la première équation de (6.237) dans la cinquième de (6.242a) donne lieu à la condition (6.204).

Ainsi, la solution $(\rho, p, \vec{v})$ prend la forme (6.202) pourvu que les conditions (6.203), (6.204) et (6.205) soient respectées. En employant la première équation de (6.254), (6.255) et (6.256), les invariants de Riemann (6.206) sont calculés via (6.7). L'indépendance linéaire entre γ_0 et γ_1 est garantie par $\partial \alpha / \partial r^1 \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1$ est quant à elle assurée par la condition $A_2 \neq 0$.

Avant de considérer les cas **(c)** et **(d)**, prenons quelques faits en considération. Pour $\partial T / \partial r^1 \neq 0$, une solution n'existe que si $\partial \alpha / \partial r^1 \neq 0$. Émettons l'hypothèse que $\partial T/\partial r^1 \neq 0$ et que $\partial\alpha/\partial r^1 = 0$. En dérivant la troisième équation de (6.237) par rapport à r^1, on obtient

$$\frac{-\kappa A}{(\alpha+c_0)^\kappa}\frac{d\alpha}{dr^0}(\kappa-1)S(r^1)^{\kappa-2}\dot{S}(r^1) - \dot{T}_1(r^1)e^{-\phi(r^0)}. \tag{6.257}$$

Comme $\dot{T}(r^1) \neq 0$, on remarque immédiatement que $\kappa - 1 \neq 0$, $\dot{S}(r^1) \neq 0$ et $\partial\alpha/\partial r^0 \neq 0$. Ainsi, il n'y a pas de solution pour $\kappa = 1$.

Si $\kappa \neq 1$, une séparation des variables dans (6.257) révèle $\frac{-\kappa(\kappa-1)A}{(\alpha+c_0)^\kappa}\frac{d\alpha}{dr^0}e^{\phi(r^0)} = \frac{-\dot{T}_1(r^1)}{S(r^1)^{\kappa-2}\dot{S}(r^1)} = k_1$, où k_1 est une constante arbitraire. Le côté gauche de cette équation peut être réécrit comme $-\kappa(\kappa-1)A(\alpha+c_0)^{-\kappa}d\alpha/dr^0 = k_1 e^{-\phi(r^0)}$. Si on intègre cette nouvelle relation par rapport à r^0, on trouve

$$\alpha + c_0 = \left(\frac{k_1}{\kappa A}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)^{-1/(\kappa-1)}, \tag{6.258}$$

où k_2 est une constante d'intégration. En réécrivant le côté droit comme $\dot{T}_1(r^1) = -k_1 S(r^1)^{\kappa-2}\dot{S}(r^1)$ puis en intégrant par rapport à r^1, on obtient

$$T_1(r^1) = \frac{-k_1}{\kappa-1}S(r^1)^{\kappa-1} + k_3, \tag{6.259}$$

où k_3 est une constante d'intégration.

Remplacer la grandeur $-\kappa A(\alpha+c_0)^{-\kappa}d\alpha/dr^0$ par $k_1(\kappa-1)^{-1}e^{-\phi(r^0)}$ et utiliser (6.258) de paire avec (6.259) transforme la troisième équation de (6.237) en

$$\begin{aligned}
&\frac{-1}{\kappa-1}\left(\frac{k_1}{\kappa A}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)^{-1-2/(\kappa-1)}\frac{k_1}{\kappa A}e^{-\phi(r^0)} + \frac{k_1}{\kappa-1}e^{-\phi(r^0)}S(r^1)^{\kappa-1}\\
&\quad= \left[g_1 - (g_3 - c_0)\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}\left(\frac{k_1}{\kappa A}\int_0^{\xi} e^{-\phi(s)}ds + k_2\right)^{1/(\kappa-1)} d\xi\right.\\
&\qquad\left. - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + \frac{k_1}{\kappa-1}S(r^1)^{\kappa-1} - k_3\right]\cdot e^{-\phi(r^0)}.
\end{aligned}$$

En simplifiant le facteur commun, $e^{-\phi(r^0)}$, puis en dérivant par rapport à r^0, on trouve

$$\left[\frac{k_1}{\kappa A(\kappa-1)}\right]^2(\kappa+1)\left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)^{-2\kappa/(\kappa-1)} e^{-\phi(r^0)} = -e^{-\phi(r^0)} + (c_0-g_3)e^{-\phi(r^0)}\left(\frac{k_1}{\kappa A}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)^{1/(\kappa-1)}.$$

Si on répète le processus, on obtient la relation

$$\left(\frac{k_1}{\kappa A}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + k_2\right)^{-1/(\kappa-1)} = \left\{\frac{(g_3-c_0)[\kappa A(\kappa-1)]^2}{2\kappa(\kappa+1)k_1^2}\right\}^{1/(2\kappa+1)}, \tag{6.260}$$

d'où on remarque que $k_1 \neq 0$ puisque la grandeur $\alpha + c_0$ n'est pas constante. Considérant (6.258), l'équation (6.260) implique que la grandeur $\alpha + c_0$ est constante, ce qui entre en contradiction avec la condition $d\alpha/dr^0 \neq 0$. On conclut donc qu'il n'y a pas de solutions pour $\partial T/\partial r^1 \neq 0$ et $\partial\alpha/\partial r^1 = 0$.

(c) Considérons maintenant le cas $\partial\beta/\partial r^1 = 0$, $\partial T/\partial r^1 \neq 0$. Si $g_2 \neq 0$, alors la dérivation de $\partial\beta/\partial r^1$ par rapport à r^0 implique que $\partial\alpha/\partial r^1 = 0$, il n'y a donc pas de solution de rang 2 dans ce cas.

Considérons donc le cas $g_2 = 0$, $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$. Sous ces hypothèses, la troisième équation de (6.237) indique que la fonction $\beta = B_1$ est constante. Si on réécrit le côté droit de la troisième équation de (6.237) comme $e^{-\phi(r^0)}[g_1 - T(r^0, r^1)]$, on peut intégrer l'équation résultante de manière à obtenir

$$\frac{(\alpha+c_0)^2}{2} + \kappa A F(r^0, r^1) = g_1\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}T(\xi, r^1)d\xi + \tau(r^1), \tag{6.261}$$

où la fonction $F(r^0, r^1)$ est donnée par (6.244) et $\tau(r^1)$ est une fonction d'intégration. La première et la troisième équation de (6.242a) impliquent

$$\chi(r^0, r^1) = A_3\frac{\partial\alpha}{\partial r^1}\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} - A_1, \qquad \mu(r^0, r^1) = \frac{1}{A_3}\frac{\partial T}{\partial r^1}, \tag{6.262}$$

alors que la troisième révèle $A_2 = 0$ et

$$\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_3(r^1)(\vec{c} \times \vec{\Omega}). \tag{6.263}$$

En substituant ces quantités dans la quatrième équation de (6.242a), on trouve

$$\begin{aligned} A(r^1) &= -A_3 \left\{ \left[\kappa A \rho^{\kappa-2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} + (\alpha + c_0) \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} \right] \left(\frac{\partial T}{\partial r^1} \right)^{-1} + T \right\} + A_1 c_0 \\ &= -A_3 \left\{ \left[-\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial T(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi + \dot{T}(r^1) \right] \left(\frac{\partial T}{\partial r^1} \right)^{-1} + T \right\} + A_1 c_0, \end{aligned} \tag{6.264}$$

où la relation $\kappa A \rho^{\kappa-2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} + (\alpha + c_)) \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} = -\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial T(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi + \dot{\tau}(r^1)$ provient de la dérivation de (6.261) par rapport à r^1. Par conséquent, la relation $\Big[-\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial T(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi + \dot{\tau}(r^1) \Big] \left(\frac{\partial T(r^0, r^1)}{\partial r^1} \right)^{-1} + T(r^0, r^1)$ doit uniquement dépendre de r^1. De plus, en substituant la première équation de (6.237) dans la cinquième de (6.242a), on découvre la condition (6.210).

Les invariants de Riemann (6.212) sont calculés avec l'aide de la première équation de (6.262), (6.263), (6.264) et (6.7). De plus, on remarque sans peine que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.207) et qu'elle est sujette aux conditions (6.210) et (6.211). La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est garantie par la condition $A_3 \neq 0$. De plus, l'indépendance linéaire entre γ_0 et γ_1 est garantie pourvu que $\dot{S}(r^1) \neq 0$ ou que $\frac{\partial \alpha}{\partial r^0} \frac{\partial T}{\partial r^1} - \frac{\partial \alpha}{\partial r^1} \frac{\partial T}{\partial r^0} \neq 0$.

(d) Finalement, traitons le cas $\partial \beta / \partial r^1$, $\partial T / \partial r^1 \neq 0$. De la deuxième et troisième équation de (6.242a), on conclut que A_2, $A_3 \neq 0$ et $\frac{\partial \beta}{\partial r^1} \left(\frac{\partial T}{\partial r^1} \right)^{-1} = \frac{A_2}{A_3}$. Notons que le côté droit de cette relation ne dépend que de r^1. dériver par rapport à r^0 produit

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial T}{\partial r^1}\frac{\partial \beta}{\partial r^1 \partial r^0} - \frac{\partial \beta}{\partial r^1}\frac{\partial^2 T}{\partial r^0 \partial r^1} \\
=& \left[(g_3 - c_0)\int_0^{r^0} \frac{-e^{-\phi(\xi)}}{(\alpha(\xi, r^1) + c_0)^2}\frac{\partial \alpha(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi + \dot{T}_1(r^1)\right]\left[\frac{-g_2 e^{-\phi}}{(\alpha + c_0)^2}\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right] \\
&- \left[g_2 \int_0^{r^0} \frac{-e^{-\phi(\xi)}}{(\alpha(\xi, r^1) + c_0)^2}\frac{\partial \alpha(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi + \dot{B}(r^1)\right]\left[\frac{(g_3 - c_0)e^{-\phi}}{(\alpha + c_0)^2}\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right] \\
0 =& \frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\left[g_2 \dot{T}_1(r^1) - (g_3 - c_0)\dot{B}(r^1)\right].
\end{aligned}$$

Comme montré précédemment, une solution n'existe que lorsque $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$, on a donc par conséquent

$$g_2 \dot{T}_1(r^1) = (g_3 - c_0)\dot{B}(r^1). \tag{6.265}$$

Étudions les cas **(I)** $g_2 = 0$ et **(II)** $g_2 \neq 0$ individuellement.

(I) Si $g_2 = 0$, alors on a $\beta = B(r^1)$ avec $\partial\beta/\partial r^1 = \dot{B}(r^1) \neq 0$. L'équation (6.265) implique quant à elle $(g_3 - c_0) = 0$ et $T = \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T_1(r^1)$. La troisième équation de (6.237) a alors la forme

$$\left[(\alpha + c_0) - \kappa A \frac{S(r^1)^{\kappa-1}}{(\alpha + c_0)^\kappa}\right]\frac{\partial \alpha}{\partial r^0} = \left(g_1 - T_1(r^1) - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\right) e^{-\phi(\xi)}.$$

Si on intègre cette relation par rapport à r^0, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{(\alpha + c_0)^2}{2} + \kappa A F(r^0, r^1) = \\
&\qquad [g_1 - T_1(r^1)]\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi - \frac{1}{2}\left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\right)^2 + \tau(r^1),
\end{aligned} \tag{6.266}$$

où

$$F(r^0, r^1) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\kappa - 1)\left[\frac{S(r^1)}{\alpha + c_0}\right]^{\kappa-1}} & \kappa \neq 1 \\ \ln\left[\dfrac{S(r^1)}{\alpha + c_0}\right] & \kappa = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\rho^{\kappa-1}}{\kappa - 1} & \kappa \neq 1 \\ \ln \rho & \kappa = 1 \end{cases}$$

et $\tau(r^1)$ est une fonction d'intégration. La substitution de la première équation de (6.237) dans la cinquième de (6.242a) résulte en la condition (6.215).

La première et la deuxième équation de (6.242a) indiquent $\mu(r^0, r^1) = A_2^{-1}\dot{B}(r^1)$ et $A_3 = A_2\dot{T}_1(r^1)\dot{B}(r^1)^{-1}$ alors qu'une comparaison des deux dernières révèle $\chi(r^0, r^1) = \frac{A_1}{\dot{B}(r^1)}\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} - A_1$. En substituant ces quantités dans la quatrième équation de (6.242a), on obtient

$$
\begin{aligned}
A(r^1) = & -\kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\frac{A_2}{\dot{B}(r^1)} - \left(\frac{A_2}{\dot{B}(r^1)}\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} - A_1\right)(\alpha + c_0) - \alpha A_1 - B(r^1)A_2 \\
& - \left(\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + T_1(r^1)\right) A_2\frac{\dot{T}_1(r^1)}{\dot{B}(r^1)} \\
= & c_0 A_1(r^1) + \frac{A_2(r^1)}{\dot{B}(r^1)} \\
& \cdot \left[(\alpha + c_0)\frac{\partial\alpha}{\partial r^1} + \kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1} + \dot{T}_1(r^1)\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + B(r^1)\dot{B}(r^1) + T_1(r^1)\dot{T}_1(r^1)\right].
\end{aligned}
$$

dériver (6.266) par rapport à r^1 produit $(\alpha+c_0) = c_0A_1(r^1)+\kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}+\dot{T}_1(r^1)\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi = \dot{\tau}(r^1)$. On a donc $A(r^1) = c_0A_1(r^1) - \frac{A_2(r^1)}{\dot{B}(r^1)}\left[\dot{\tau}(r^1) + B(r^1)\dot{B}(r^1) + T_1(r^1)\dot{T}_1(r^1)\right]$. On note aussi $\vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_2(r^1)\vec{\Omega} + A_2(r^1)\frac{\dot{T}_1(r^1)}{\dot{B}(r^1)}(\vec{c}\times\vec{\Omega})$.

Les invariants de Riemann (6.216) peuvent maintenant être calculés à l'aide de (6.7). Il est évident que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ a la forme (6.213), où α doit satisfaire (6.214) et (6.215). L'indépendance linéaire entre γ_0 et γ_1 est assurée pourvu que $\dot{B}(r^1) \neq 0$ et la condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est respectée lorsque $A_2 \neq 0$.

(II) Faisons maintenant l'hypothèse $g_2 \neq 0$. On remarque que $g_2 \neq 0$ si et seulement si $(g_3 - c_0) \neq 0$. En effet, si $(g_3 - c_0) = 0$ et $g_2 \neq 0$, alors (6.265) implique $\dot{T}_1(r^1) = 0$ ce qui, à son tour, implique que la fonction $T = \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi + T_1$ est uniquement fonction de r^0. Or, cela entre en contradiction avec la condition $\partial T/\partial r^1 \neq 0$. On doit donc avoir $(g_3 - c_0) \neq 0$. L'inverse est prouvé similairement.

Comme pour la section **(c)**, la troisième équation de (6.237) donne lieu à l'équation (6.261). L'équation (6.265) peut être intégrée par rapport à r^1 de manière à obtenir $B(r^1) = \frac{g_2}{g_3-c_0}[T_1(r^1) + T_0]$, où T_0 est une constante d'intégration et la fonction β peut être écrite comme

$$\beta = \left(\frac{g_2}{g_3 - c_0}\right)\left(T - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi\right). \tag{6.267}$$

On calcule sans problème $\frac{\partial \beta}{\partial r^1} = \left(\frac{g_2}{g_3 - c_0}\right)\frac{\partial T}{\partial r^1}$, d'où on calcule alors de la deuxième et troisième équation de (6.242a)

$$A_2 = \frac{g_2}{g_3 - c_0} A_3, \qquad \vec{A}(r^1) = A_1(r^1)\vec{c} + A_3(r^1)\left[\frac{g_2}{g_3 - c_0} - (\vec{c} \times \vec{\Omega})\right]. \tag{6.268}$$

La première et la troisième équation de (6.242a) impliquent donc

$$\chi(r^0, r^1) = A_3 \frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} - A_1, \qquad \mu(r^0, r^1) = \frac{1}{A_3}\frac{\partial T}{\partial r^1}. \tag{6.269}$$

En substituant (6.269), (6.267) et la première équation de (6.268) dans la quatrième de (6.242a), on trouve

$$\begin{aligned}
A(r^1) =& -\kappa A \rho^{\kappa-2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} A_3 \left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} - \left[A_3 \frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} - A_1\right](\alpha + c_0) \\
& - \alpha A_1 - T A_3 - \left(\frac{g_2}{g_3 - c_0}\right) A_3 \left[\frac{g_2}{g_3 - c_0}\left(T - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T_0\right)\right] \\
=& - A_3 \Bigg[\left[\kappa A \rho^{\kappa-2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} + (\alpha + c_0)\frac{\partial \alpha}{\partial r^1}\right]\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} + \tau \\
& + \left(\frac{g_2}{g_3 + c_0}\right)^2 \left(T - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T_0\right)\Bigg] + A_1 c_0 \\
=& - A_3 \Bigg[\left(\dot{\tau}(r^1) - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial T(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi\right)\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} + A_1 c_0 \\
& + \left[1 + \left(\frac{g_2}{g_3 - c_0}\right)\right] T - \left(\frac{g_2}{g_3 - c_0}\right)^2 \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + \left(\frac{g_2}{g_3 + c_0}\right)^2 T_0\Bigg]
\end{aligned} \tag{6.270}$$

La dernière égalité dans (6.270) provient de la dérivation de (6.261) par rapport à r^1. L'expression

$$\left[\dot{\tau}(r^1) - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial T(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi\right]\left(\frac{\partial T}{\partial r^1}\right)^{-1} + \left[1 + \left(\frac{g_2}{g_3 - c_0}\right)^2\right] T - \left(\frac{g_2}{g_3 - c_0}\right)^2 \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi$$

est uniquement fonction de r^1 par conséquence de (6.270). De plus, en substituant (6.270) et la première équation de (6.237) dans la cinquième de (6.242a), on obtient la condition (6.218).

Les invariants de Riemann (6.220) sont calculés par l'entremise de (6.7) et l'utilisation de la deuxième équation de (6.268), la première de (6.269) et (6.270). La solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.217) et est sujette aux conditions (6.208), (6.218) et (6.219). L'indépendance linéaire des vecteurs γ_0 et γ_1 est garantie par la condition $\partial\alpha/\partial r^1 \neq 0$. Quant à elle, la condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est garantie par $A_3 \neq 0$.

(ii) Si $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$, alors on a $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{\Omega}$, où $\epsilon_1 = \pm 1$. **(a)** Pour $\vec{g} \times \vec{\Omega} \neq 0$, l'ensemble de vecteur $(\vec{g}, \vec{\Omega}, \vec{g} \times \vec{\Omega})$ forme une base pour $\mathbb{R}^3$ et on pose $\vec{v} = \alpha(r^0, r^1)\vec{g} + \beta(r^0, r^1)\vec{\Omega} + \tau(r^0, r^1)(\vec{g} \times \vec{\Omega})$. En substituant ces expressions dans (6.235) et (6.195a) puis en comparant les composantes vectorielles, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial r^0} &= -\epsilon_1(\vec{g}\cdot\vec{\Omega})\rho e^{-\phi}\left\{\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta)\right]^2 - \kappa A \rho^{\kappa-1}\right\}^{-1}, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial r^0} &= e^{-\phi}(1-\tau)\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta)\right]^{-1}, \\
\frac{\partial \beta}{\partial r^0} &= \frac{e^{-\phi}\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{c_0 + \epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta)}\left\{\tau + \frac{\kappa A \rho^{\kappa-1}}{\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta)\right]^2 - \kappa A \rho^{\kappa-1}}\right\}, \\
\frac{\partial \tau}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\alpha\left[c_0 + \epsilon_1(\alpha + \vec{g}\cdot\vec{\Omega} + \beta)\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.271}$$

Avec l'hypothèse $\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$, le système (6.271) se réduit à

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial r^0} &= 0, & \frac{\partial \alpha}{\partial r^0} &= e^{-\phi}(1-\tau)\left[c_0 + \epsilon_1\beta\right]^{-1}, \\
\frac{\partial \beta}{\partial r^0} &= 0, & \frac{\partial \tau}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\alpha\left[c_0 + \epsilon_1\alpha\beta\right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Le cas $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0$ du Théorème 6.4.1 montre que ces calculs demeurent valides dans le cas présent, il n'y a donc pas de solutions possible.

(b) Pour $\vec{c} \times \vec{\Omega} = 0 = \vec{g} \times \vec{\Omega}$, on a $\vec{c} = \epsilon_1 \vec{e}_3$ et $\vec{g} = \epsilon_2 |\vec{g}|\, \vec{e}_3$, où ϵ_1, $\epsilon_2 = \pm 1$ et

$\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Utilisons $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ comme base pour $\mathbb{R}^3$. On pose $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i(r^0, r^1)\vec{e}_i$. En insérant ces grandeurs dans (6.235) et (6.195a), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = -\epsilon_1\epsilon_2 \left|\vec{g}\right| \rho e^{-\phi} \left[(c_0 + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa A \rho^{\kappa-1}\right]^{-1}, \\
&\frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi} v_2 \left(c_0 + \epsilon_1 v_3\right)^{-1}, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial r^0} = e^{-\phi} v_1 \left(c_0 + \epsilon_1 v_3\right)^{-1}, \\
&\frac{\partial v_3}{\partial r^0} = \epsilon_2 \left|\vec{g}\right| e^{-\phi}(c_0 + \epsilon_1 v_3) \left[(c_0 + \epsilon_1 v_3) - \kappa A \rho^{\kappa-1}\right]^{-1}
\end{aligned} \tag{6.272}$$

Le système (6.272) est semblable au système (6.164) et est résolu de manière analogue. La deuxième et la troisième équation de (6.272) produisent $v_1^2 + v_2^2 = a_1(r^1)^2$ alors que la première et la quatrième donnent $c_0 + \epsilon_1 v_3 = S(r^1)\rho^{-1}$, où $a_1(r^1)$ et $S(r^1)$ sont des fonctions arbitraires. De plus, la deuxième équation de (6.272) peut être réécrite comme $[\alpha_1(r^1) - v_1^2]^{-1/2} \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = \pm e^{-\phi} \frac{\rho}{S(r^1)}$ puis intégrée par rapport à r^0 de manière à obtenir v_1. La fonction v_2 peut quant à elle être obtenue par la deuxième équation de (6.272). La solution au système (6.272) est donc

$$\begin{aligned}
&v_1 = a_1(r^1) \sin\left[\frac{1}{S(r^1)} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \rho(\xi, r^1) d\xi + b_1(r^1)\right], \\
&v_2 = a_1(r^1) \cos\left[\frac{1}{S(r^1)} \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \rho(\xi, r^1) d\xi + b_1(r^1)\right], \quad v_3 = \epsilon_1 \left[\frac{S(r^1)}{\rho} - c_0\right],
\end{aligned} \tag{6.273}$$

où $b_1(r^1)$ est une fonctions arbitraire. La première équation de (6.270) est équivalente à l'expression$\left[\frac{S(r^1)^2}{\rho^3} - \kappa A \rho^{\kappa-2}\right] \frac{\partial \rho}{\partial r^0} = -\epsilon_1\epsilon_2 \left|\vec{g}\right| e^{-\phi}$, qui, une fois intégrée par rapport à r^0, résulte en

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\frac{S(r^1)}{\rho}\right]^2 + \kappa A F(\rho) = \epsilon_1\epsilon_2 \left|\vec{g}\right| \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi + T(r^1) \\
&F(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^{\kappa-1}}{\kappa-1} & \kappa \neq 1 \\ \ln \rho & \kappa = 1 \end{cases},
\end{aligned} \tag{6.274}$$

où $T(r^1)$ est une fonction d'intégration.

Les équations (6.195a) impliquent $\frac{\vec{\lambda}^1}{|\vec{\lambda}^1|} = -\epsilon \left[(\kappa A \rho^{\kappa-1})^{1/2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_1}{\partial r^1} \vec{e}_i$, où $\vec{\lambda}^1$

doit satisfaire la deuxième équation de (6.239) et la première de (6.240). On définit $\vec{A}(r^1) = \sum_{i=1}^{3} A_i(r^1)\vec{e}_i$ et $\tilde{\mu}(r^0, r^1) = -\epsilon \left[(\kappa A \rho^{\kappa-1})^{1/2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1}\right]^{-1} \mu(r^0, r^1)$. En substituant ces quantités dans la deuxième équation de (6.239) et la première de (6.240) puis en comparant les coefficients, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mu(r^0, r^1)\left[\chi(r^0, r^1)\epsilon_1 + A_3\right] = \frac{\partial v_3}{\partial r^1},\\
&\mu(r^0, r^1)A_1 = \frac{\partial v_1}{\partial r^1}, \qquad \mu(r^0, r^1)A_2 = \frac{\partial v_2}{\partial r^1},\\
&A(r^1) = -\kappa A \rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\mu(r^0, r^1)^{-1} - \chi(r^0, r^1)(c_0 + \epsilon_1 v_3)\\
&\qquad - (v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3),\\
&\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r^1}\right)^2\right]^{1/2} = -\epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}, \qquad \epsilon_4 = \pm 1.
\end{aligned} \tag{6.275}$$

Considérons maintenant les cas suivants : **(I)** $\frac{\partial v_1}{\partial r^1}, \frac{\partial v_2}{\partial r^1} = 0$, **(II)** $\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \neq 0$, $\frac{\partial v_2}{\partial r^1} = 0$, **(III)** $\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = 0$, $\frac{\partial v_2}{\partial r^1} \neq 0$ et **(IV)** $\frac{\partial v_1}{\partial r^1}, \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \neq 0$.

(I) On fait d'abord l'hypothèse que $\frac{\partial v_1}{\partial r^1}, \frac{\partial v_2}{\partial r^1} = 0$. Alors, la première équation de (6.272) peut être écrite sous la forme $e^{\phi} v_2^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = (c_0 + \epsilon_1 v_3)^{-1}$, où le côté gauche de l'équation ne dépend que de r^0. On conclut ainsi que v_3 est uniquement fonction de r^0, ce qui produit la contradiction $\partial \vec{v}/\partial r^1 = 0$. Ainsi, on impose $v_2 = 0$ et, par la deuxième équation de (6.272), $v_1 = 0$.

Les équations (6.275) démontrent que A_1, $A_2 = 0$ et

$$\begin{aligned}
\mu^{-1} &= \left[\chi(r^0, r^1)\epsilon_1 + A_3\right]\left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\right)^{-1}\left[\kappa A \rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \epsilon_1(c_0 + \epsilon_1 v_3)\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\right] + \epsilon_1 c_0 A_3\\
&= -\,\epsilon_1\left[\chi(r^0, r^1) + \epsilon_1 A_3\right]\left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\right)\dot{T}(r^1) + \epsilon_1 c_0 A_3,
\end{aligned}$$

établissant par le fait même la relation $\chi(r^0, r^1) = \frac{-\epsilon_1\left[A(r^1) - A_3\epsilon_1 c_0\right]}{\dot{T}(r^1)}\frac{\partial v_3}{\partial r^1} - \epsilon_1 A_3$. La fonction $A(r^1)$ demeure arbitraire alors que $\vec{A}(r^1) = A_3\vec{e}_3$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 = 0$ est respectée pourvu que $A \neq \epsilon_1 c_0 A_3$. On impose $\dot{T}(r^1) \neq 0$ pour qu'une solution existe étant donné que $\dot{T}(r^1) = 0$ implique $A = \epsilon_1 c_0 A_3$. En substituant $v_1 = v_2 = 0$ et la troisième équation de (6.277) dans la cinquième donne l'expression $\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{S}{\rho}\right) = -\epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}$ qui est équivalente à $\left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1\epsilon_5\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]\frac{\partial\rho}{\partial r^1} = \dot{S}(r^1)$. dériver (6.274) par rapport à r^1 permet alors de trouver

$$\begin{aligned}\dot{T}(r^1) =& \frac{S}{\rho}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{S}{\rho}\right) - \left[\epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]\left[-\epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right]\\ =& \left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1\epsilon_4\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]\left(\frac{\dot{S}(r^1)}{\rho} - \frac{S}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)\\ =& \left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]\frac{\dot{S}(r^1)}{\rho} - \frac{S}{\rho^2}\dot{S}(r^1),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\rho^{(3-\kappa)/2} = -\epsilon_1\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}\frac{\dot{S}(r^1)}{\dot{T}(r^1)}. \tag{6.276}$$

Si $\kappa \neq 3$, alors la densité ρ est uniquement fonction de r^1. Cependant, comme $\vec{v} = \epsilon_1(\rho^{-1}S - c_0)\vec{e}_3$, on doit avoir $\partial\rho/\partial r^0 \neq 0$ et $\dot{S}(r^1) \neq 0$ pour que γ_0 et γ_1 soient linéairement indépendants. Ainsi, une solution de rang 2 n'existe que lorsque $\kappa = 3$ et l'équation (6.276) implique alors

$$T(r^1) = -\epsilon_1\epsilon_4\epsilon(3A)^{1/2}S(r^1) - S_1. \tag{6.277}$$

En posant $\kappa = 3$, les équations (6.273), (6.274) et (6.277) indiquent que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.221) et est sujette aux conditions (6.222). Les invariants de Riemann (6.223) sont quant à eux calculés par (6.7) avec l'aide de (6.277) et de la relation $c_0 t + \epsilon_1\vec{e}_3\cdot\vec{x} + c_1 = \int_0^{r^0} e^{\phi(\xi)}d\xi$.

(II) Si on fait maintenant l'hypothèse $\partial v_1/\partial r^1 \neq 0$, $\partial v_2/\partial v_1 = 0$, l'équation (6.275) implique $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$. Des deux premières équations de (6.275), on obtient

$$\begin{gathered}\chi(r^0, r^1) = \epsilon_1 A_1\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1} - \epsilon_1 A_3, \qquad \frac{1}{\mu(r^0, r^1)} = A_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1},\\ \vec{A}(r^1) = A_1\vec{e}_1 + A_3\vec{e}_3.\end{gathered} \tag{6.278}$$

Lorsqu'on substitue les deux premières équations de (6.278) et $A_2 = 0$ dans la quatrième équation de (6.275), on trouve

$$\begin{aligned} A(r^1) &= -A_1\left\{\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1}\left[\kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \epsilon_1(c_0+\epsilon_1 v_3)\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\right] + v_1\right\} + \epsilon_1 c_0 A_3 \\ &= -A_1\left[\dot{T}(r^1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1} + v_1\right] + \epsilon_1 c_0 A_3, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence de (6.274). Conséquemment, la grandeur $\dot{T}(r^1)(\partial v_1/\partial r^1)^{-1}$ ne doit dépendre que de r^1, on la renomme donc comme $g(r^1)$. Comme $v_1^2 + v_2^2 = a_1(r^1)^2$, on calcule sans problème

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial r^1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial r^1} = a_1(r^1)\dot{a}_1(r^1). \tag{6.279}$$

Ainsi, pour $\partial v_2/\partial r^1 = 0$, on a $g(r^1)\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \dot{T}(r^1) + v_1\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \dot{T}(r^1) + a_1(r^1)\dot{a}_1(r^1)$. Si $g(r^1) \neq 0$, alors $\partial v_1/\partial r^1$ est uniquement fonction de r^1. La deuxième équation de (6.272) permet de trouver $0 = \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right) = \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^0}\right) = -e^{-\phi}\epsilon_1 v_2(c_0+\epsilon_1 v_3)^{-2}\frac{\partial v_3}{\partial r^1}$, c'est à dire que $v_2\frac{\partial v_3}{\partial r^1} = 0$. Si $v_2 = 0$, alors la troisième équation de (6.272) implique la contradiction $v_1 = 0$. Si $\partial v_3/\partial r^1 = 0$, alors la troisième équation de (6.272) implique cette fois que la fonction v_1 ne dépend que de r^0 ce qui est une contradiction.

Par conséquent, la condition $g(r^1) = 0$ est nécessaire pour assurer l'existence d'une solution. Dans ce cas, on a $\dot{T}(r^1) = -a_1\dot{a}_1(r^1)$ et $A(r^1) = \epsilon_1 c_0 A_3$. On calcule alors sans problème $T(r^1) = -a_1(r^1)^2/2 + a_0$, où a_0 est une constante d'intégration. En substituant cette grandeur, la première et la troisième équation de (6.278) dans (6.7), il est possible de trouver

$$\begin{aligned} c_0 t + \epsilon_1\vec{e}_3\cdot\vec{x} + c_1 &= \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}d\xi, \\ \int_0^{r^0}\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1} e^{-\phi(\xi)}d\xi + \epsilon_1\vec{e}_1\cdot\vec{x} &= \psi(r^1). \end{aligned} \tag{6.280}$$

dériver la deuxième équation de (6.273) par rapport à r^1 permet de trouver la condition

$\partial v_2/\partial r^1 = 0$, équivalente à la condition (6.227). dériver la première équation de (6.273) par rapport à r^1 permet, avec (6.227) d'établir la relation

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \dot{a}_1(r^1)\left\{\sin\left[\frac{1}{S(r^1)}\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)}\rho(\xi, r^1)d\xi + b_1(r^1)\right]\right\}^{-1}. \tag{6.281}$$

On fait l'hypothèse que la grandeur $\partial v_1/\partial r^1$ est non nulle, donc que $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$. En substituant (6.281) et la troisième équation de (6.273) dans la cinquième de (6.247), on trouve la condition (6.226). Si on substitue plutôt la troisième équation de (6.273) et (6.281) dans (6.280), on obtient les invariants de Riemann (6.228).

La solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.224) et la densité ρ doit satisfaire (6.225), (6.226) et (6.227). L'indépendance linéaire entre les vecteurs γ_0 et γ_1 est assurée pourvu que $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est aussi respectée puisque $A_1 \neq 0$.

(III) Étudions maintenant l'hypothèse $\partial v_1/\partial r^1 = 0$, $\partial v_2/\partial r^1 \neq 0$. Le cas est analogue au cas **(II)**. Les seules différences sont que les fonctions A_1 et v_1 sont remplacées par A_2 et v_2 et les fonctions sinus et cosinus sont inter-changées. En suivant la même démarche, on trouve les invariants de Riemann (6.231) et les conditions (6.229) et (6.230).

(IV) Faisons maintenant l'hypothèse $\partial v_1/\partial r^1$, $\partial v_2/\partial r^1 \neq 0$. Les équations (6.275) indiquent que la première et la deuxième équation de (6.278) sont encore valides pour le cas présent et que

$$A_2 = A_1\frac{\partial v_2}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1} \neq 0. \tag{6.282}$$

La substitution de ces quantités dans la quatrième équation de (6.275) produit

$$\begin{aligned} A(r^1) =& -A_1 \left\{ \left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \right)^{-1} \left[\kappa A \rho^{\kappa-2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \epsilon_1 (c_0 + \epsilon_1 v_3) \frac{\partial v_3}{\partial r^1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \right] + v_1 \right\} \\ & + \epsilon_1 c_0 A_3 \\ =& -A_1 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \right)^{-1} \left(\dot{T}(r^1) + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \right) + v_1 \right] + \epsilon_1 c_0 A_3. \end{aligned}$$

Par conséquent, les deux quantités

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \left(\frac{\partial v_2}{\partial r^1} \right)^{-1}, \qquad \left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \right)^{-1} \left(\dot{T}(r^1) + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \right) + v_1 \tag{6.283}$$

sont uniquement fonction de r^1. Si on renomme la deuxième quantité de (6.283) comme $G(r^1)$ et qu'on applique (6.279), on trouve

$$G(r^1) \frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \dot{T}(r^1) + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial r^1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \dot{T}(r^1) + a_1(r^1) \dot{a}_1(r^1). \tag{6.284}$$

Si $G(r^1) \neq 0$, alors (6.284) et la première équation de (6.283) impliquent que les grandeurs $\partial v_1 / \partial r^1$ et $\partial v_2 / \partial r^1$ ne dépendent que de r^1. De (6.272), on obtient $0 = \frac{\partial}{\partial r^0} \left(\frac{\partial v_i}{\partial r^1} \right) = \pm e^{-\phi} (c_0 + \epsilon_1 v_3)^{-2} \left[\frac{\partial v_j}{\partial r^1} (c_0 + \epsilon_1 v_3) - v_j \epsilon_1 \frac{\partial v_3}{\partial r^1} \right]$, $i, j \in [1,2]$, $i \neq j$ ou, de manière équivalente $\frac{1}{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial r^1} = \epsilon_1 (c_0 + \epsilon_1 v_3)^{-1} \frac{\partial v_3}{\partial r^1}, \quad j = 1,2$. Ainsi, on a la relation $\frac{1}{v_1} \frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial v_2}{\partial r^1}$ qui, une fois intégrée par rapport à r^1 nous donne $v_1 = v_2 Z(r^0)$, où $Z(r^0)$ est une fonction d'intégration. Comme $a_1(r^1)^2 = v_1^2 + v_2^2 = v_2^2 (Z(r^0)^2 + 1)$, on peut écrire $v_2 = a_1(r^1) g_2(r^0)$ et $v_1 = a_1(r^1) g_1(r^0)$, où $g_1(r^0) = g_2(r^0) Z(r^0)$ et $g_2(r^0) = \pm [Z(r^0)^2 + 1]^{-1/2}$. Par contre, la relation non-nulle $\frac{\partial v_i}{\partial r^1} = \dot{a}_1(r^1) g_i(r^0), \quad i = 1,2$ est uniquement dépendante de r^1, on déduit donc que les fonctions $g_i(r^0) = k_i$ sont constantes et que les fonctions $v_i = k_i a_1(r^1)$ dépendent uniquement de r^1. Cependant, la relation $\partial v_i / \partial r^0 = 0$ $(i = 1,2)$ de paire avec (6.272) produit la contradiction $v_1 = v_2 = 0$.

On émet donc l'hypothèse que la fonction $G(r^1) = 0$ est nulle. Dans ce cas, on a $A(r^1) = \epsilon_1 c_0 A_3$, $\dot{T}(r^1) = -a_1 \dot{a}_1(r^1)$ et $T(r^1) = -a_1(r^1)^2/2 + a_0$, où a_0 est une constante arbitraire. L'équation (6.282) implique quant à elle $\vec{A}(r^1) = A_1\vec{e}_1 + A_1\frac{\partial v_2}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1}\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$. Substituer ces grandeurs ainsi que la première équation de (6.278) dans (6.7) permet de trouver

$$
\begin{aligned}
&c_0 t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x} + c_1 = \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} d\xi, \\
&\int_0^{r^0} \frac{\partial v_3(\xi, r^1)}{\partial r^1} \left(\frac{\partial v_1(\xi, r^1)}{\partial r^1}\right)^{-1} e^{-\phi(\xi)} d\xi + \epsilon_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{x} + \epsilon_1 \frac{\partial v_2}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1} \vec{e}_2 \cdot \vec{x} = \psi(r^1).
\end{aligned}
$$

Les invariants de Riemann (6.234) sont calculés à partir de (6.273). La condition (6.233) est obtenue en calculant la condition $\frac{\partial}{\partial r^0}\left[\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial r^1}\right)^{-1}\right] = 0$ avec l'aide de (6.273). Si on applique les équations (6.273) puis la condition (6.233), on obtient

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial r^1}\right)^2 =& \dot{a}_1(r^1)^2 + a_1(r^1)^2 \left[\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi)} \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\rho(\xi, r^1)}{S(r^1)}\right) d\xi + \dot{b}_1(r^1)\right]^2 \\
=& -a_1 \dot{a}_1(r^1) \frac{S}{\rho} \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{\rho}{S}\right).
\end{aligned}
$$

Si on substitue maintenant cette grandeur et la troisième équation de (6.273) dans la cinquième, on découvre la condition (6.232).

La solution $(\rho, p, \vec{v})$ a donc la forme (6.224). La densité ρ doit satisfaire (6.274) avec $T = -a_1^2/2 + a_0$ ainsi que (6.232) et (6.233). L'indépendance linéaire entre γ_0 et γ_1 est garantie si $\dot{a}_1(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est respectée pourvu que $A_1 \neq 0$. □

Toutes les solutions du Théorème 6.6.1 représentent des écoulements compressibles à l'entropie constante. La solution (6.221) représente un écoulement potentiel au contraire des autres solutions exhibant toutes une vorticité.

Théorème 6.6.2. *Si les éléments hydrodynamiques simples non-homogènes* (3.9) *et les éléments acoustiques simples homogènes* (3.13) *dans l'équation* (5.1) *satkisfont l'équation* (5.3) *et les conditions de compatibilités* (5.5) *avec* $\alpha_1 \neq 0$*, alors la solution au système non-homogène* (3.1) *aura une des formes suivantes.*

(i) *Le cas* $\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} \neq 0$, $\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} = 0$. *Dans ce cas, les solutions n'existent que lorsque* $\frac{d}{dr^1}\frac{\vec{\lambda}^0}{\left|\vec{\lambda}^0\right|} \neq 0$ *et* $\frac{\partial}{\partial r^1}\left|\vec{\lambda}^0\right| \neq 0$.

(I) *Sous l'hypothèse* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$, *une solution de la forme*

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{S(r^1)}{v_1(r^0, r^1) + f(r^1)}, \qquad p = A\rho^\kappa, \\
\vec{v} =& v_1(r^0, r^1)\vec{h}(r^1) + \left[\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)} d\xi + V_2\right]\vec{\Omega} \\
&+ \left\{\int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)} \left[v_1(\xi, r^1) + \vec{g} \cdot (\vec{h}(r^1) \times \vec{\Omega})\right] d\xi + V_3(r^1)\right\} (\vec{h}(r^1) \times \vec{\Omega})
\end{aligned} \tag{6.285}$$

existe pourvu que la fonction v_1 *soit satisfaisante aux conditions*

$$\left[1 - \kappa A \frac{S^{\kappa-1}}{(v_1 + f)^{\kappa+1}}\right] \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi_0}(\vec{g} \cdot \vec{h} - v_3), \tag{6.286}$$

$$\begin{aligned}
0 =& \left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} + \dot{f}(r^1)\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1}\epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1\right) \\
&+ \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| (v_1 + f) \left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3\right),
\end{aligned} \tag{6.287}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1\right) = \\
&- \epsilon_2 \kappa A \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \frac{S^{\kappa-1}}{(v_1 + f)^\kappa} \frac{\partial v_1}{\partial r^1} + \epsilon_2 \kappa A \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \left(\frac{S}{v_1 + f}\right)^{\kappa-1} \left(\frac{\dot{S}(r^1)}{S} - \frac{\dot{f}(r^1)}{v_1 + f}\right),
\end{aligned} \tag{6.288}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1\right)^2\right]^{1/2} = \\
&\epsilon_4 \epsilon \left[\kappa A S^{\kappa-1} (v_1 + f)^{(-\kappa-1)}\right]^{1/2} \frac{\partial v_1}{\partial r^1} \\
&- \epsilon_4 \epsilon \left[\kappa A S^{\kappa-1} (v_1 + f)^{-\kappa-1}\right]^{1/2} \left(\frac{\dot{S}(r^1)}{S} - \frac{\dot{f}(r^1)}{v_1 + f}\right),
\end{aligned} \tag{6.289}$$

où $v_3 = \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)} \left[v_1(\xi, r^1) + \vec{g} \cdot (\vec{h}(r^1) \times \vec{\Omega})\right] d\xi + V_3(r^1)$.

Les invariants de Riemann sont

$$
\begin{aligned}
f(r^1)t + \vec{h}(r^1)t \cdot \vec{x} =& \Phi(r^1) = \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)} \left[v_1(\xi, r^1) + f(r^1)\right] d\xi, \\
\dot{f}(r^1)t + \dot{\vec{h}}(r^1) \cdot \vec{x} =& \dot{\Phi}(r^1) + \dot{f}(r^1) \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)} d\xi + \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)} \frac{\partial v_1(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi,
\end{aligned}
\tag{6.290}
$$

où A (>0) *et* V_2 *sont des constantes arbitraires,* ϵ_2, $\epsilon_4 = \pm 1$ *et* $v_1(r^0, r^1)$ $(\neq -f(r^1))$, $\phi_0(r^0)$, $f(r^1)$, $\vec{h}(r^1) = \vec{\lambda}^0 / \left|\vec{\lambda}^0\right|$, $S(r^1)$ $(\neq 0)$, $V_3(r^1)$ *et* $\Phi(r^1)$ *sont des fonctions satisfaisant* (6.286) - (6.289) *avec* $\vec{h} \cdot \vec{\Omega} = 0$, $\dot{\vec{h}}(r^1) \neq 0$, $\partial\rho/\partial r^1 \neq 0$ *et* $S(v_1 + f)^{-1} > 0$.

(II) *Si* $\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$, *une solution de la forme*

$$
\begin{aligned}
\rho =& \frac{S(r^1)}{v_1(r^0, r^1) + f(r^1)}, \qquad p = A\rho^\kappa, \\
\vec{v} =& v_1(r^0, r^1)\vec{h}(r^1) + V_2\vec{\Omega} \\
=& \left\{ \left[\vec{g} \cdot (\vec{h}(r^1) \times \vec{\Omega}) - f(r^1)\right] \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi, r^1)}}{v_1(\xi, r^1) + f(r^1)} d\xi \right. \\
& \left. + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi + V_3(r^1) \right\} (\vec{h}(r^1) \times \vec{\Omega})
\end{aligned}
\tag{6.291}
$$

existe pourvu que la fonction v_1 *soit satisfaisante à l'équation* (6.289) *ainsi qu'aux conditions*

$$
\left[v_1 + f - \kappa A \frac{S^{\kappa-1}}{(v_1 + f)^\kappa}\right] \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi}(\vec{g} \cdot \vec{h} - v_3), \tag{6.292}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[v_1 + f - \kappa A \frac{S^{\kappa-1}}{(v_1 + f)^\kappa}\right] \frac{\partial v_1}{\partial r^1} + \left(v_3 + \epsilon_2 \frac{\dot{f}(r^1)}{\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|} \right) \frac{\partial v_3}{\partial r^1} \\
&= \kappa A \frac{S^{\kappa-1}}{(v_1 + f)^{\kappa-1}} \left[\frac{\dot{S}(r^1)}{S} - \frac{\dot{f}(r^1)}{v_1 + f}\right] + v_1 \dot{f}(r^1) - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3 f = 0
\end{aligned}
$$

et

$$
\frac{\partial \phi}{\partial r^1} \left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1 \right) = \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3 \right), \tag{6.293}
$$

où $v_3 = \left[\vec{g} \cdot (\vec{h}(r^1) \times \vec{\Omega}) - f(r^1)\right] \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi, r^1)}}{v_1(\xi, r^1) + f(r^1)} d\xi + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi + V_3(r^1)$. *Les inva-*

riants de Riemann sont

$$f(r^1)t+\vec{h}(r^1)\cdot\vec{x}=\Phi(r^1)+\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi,r^1)}d\xi,$$
$$\dot{f}(r^1)t+\dot{\vec{h}}(r^1)\cdot\vec{x}=\dot{\Phi}(r^1)-\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi,r^1)}\frac{\partial\phi(\xi,r^1)}{\partial r^1}d\xi,$$

où A *(*>0*) et* V_2 *sont des constantes arbitraires,* $\epsilon_2,\epsilon_4=\pm1$ *et* $v_1(r^0,r^1)$ *(*$\neq -f(r^1)$*),* $\phi(r^0,r^1)$, $f(r^1)$, $\vec{h}(r^1)=\vec{\lambda}^0/\left|\vec{\lambda}^0\right|$, $S(r^1)$ *(*$\neq 0$*),* $V_3(r^1)$ *ainsi que* $\Phi(r^1)$ *sont des fonctions satisfaisant* (6.289) *et* (6.292)-(6.293) *avec* $\vec{h}\cdot\vec{\Omega}=0$, $\dot{\vec{h}}(r^1)\neq 0$, $\partial v_1/\partial r^0\neq 0$, $S(v_1+f)>0$ *et* $v_3\neq\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|^{-1}\left[\frac{\dot{S}(r^1)}{S}(v_1+f)-\dot{f}(r^1)\right]$.

(ii) *Le cas* $\vec{\lambda}^0=\epsilon_1\left|\vec{\lambda}^0\right|\vec{\Omega}$.

(a) *Si* $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}=0$*, la solution est donnée par*

$$\begin{aligned}\rho=&\rho(r^1),\qquad p=A\rho^\kappa,\\ \vec{v}=&A_1\sin\left(\int_0^{r^0}e^{-\phi_0(\xi)}d\xi+B_1\right)\vec{g}+\left[\rho_0-\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}F(\rho(r^1))\right]\vec{\Omega}\\ &+\left[1-A_1\cos\left(\int_0^{r^0}e^{-\phi_0(\xi)}d\xi+B_1\right)\right](\vec{g}\times\vec{\Omega}),\end{aligned}\tag{6.294}$$

où

$$F(\rho)=\begin{cases}\dfrac{2}{\kappa-1}\rho^{(\kappa-1)/2} & ,(\kappa\neq1)\\ \ln\rho & ,(\kappa=1)\end{cases}.$$

Les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{V_2\rho(r^1)}+\epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\right)^{1/2}F(\rho(r^1))-\epsilon_1\rho_0\right]t+\epsilon_1\vec{\Omega}\cdot\vec{x}=\phi(r^1)\\ &\qquad+\frac{1}{V_2\rho(r^1)}\int_0^{r^0}e^{-\phi_0(\xi)}d\xi,\\ &\left[\frac{-1}{V_2\rho(r^1)^2}+\epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\right]\dot{\rho}(r^1)t=\dot{\phi}(r^1)-\frac{\dot{\rho}(r^1)}{V_2\rho(r^1)^2}\int_0^{r^0}e^{-\phi_0(\xi)}d\xi.\end{aligned}\tag{6.295}$$

Ici, ρ_0, A *(*>0*),* A_1 *(*$\neq 0$*),* B_1 *et* V_2 *(*$\neq 0$*) sont des constantes arbitraires,* $\epsilon_1,\epsilon_4,\epsilon=\pm1$

et $\phi_0(r^0)$, $\rho(r^1)$ *(*> 0*) et* $\phi(r^1)$ *sont des fonctions arbitraires avec* $\dot{\rho}(r^1) > 0$.

(b) *Si* $\vec{g} = \epsilon_3 |\vec{g}| \vec{e}_3$, $\vec{\Omega} = \vec{e}_3$, *une solution de la forme*

$$\rho = \rho(r^0, r^1), \qquad p = A\rho^\kappa, \qquad \vec{v} = \epsilon_1 \left[\frac{S(r^1)}{\rho(r^1)} - f(r^1)\right] \vec{e}_3 \tag{6.296}$$

existe pourvu que la densité ρ *satisfasse les conditions*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{S^2}{\rho^3} - \kappa A \rho^{\kappa-2}\right)^{-1} \left\{ \frac{-2S\dot{S}(r^1)}{\rho^3} \left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right] \right. \\ &\left. + \left(\dot{S}(r^1) - \dot{f}(r^1)\rho\right) \left[3\frac{S^2}{\rho^4} + \kappa(\kappa-2) A \rho^{\kappa-3}\right] \right\} - \left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-1}\right)\right]^{-1} \\ &\cdot \left(\dot{S}(r^1) - \dot{f}(r^1)\rho\right) \left[\frac{S}{\rho^2} + \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\frac{\kappa-1}{2}\right) \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\right] + 2\dot{f}(r^1) = 0, \end{aligned} \tag{6.297}$$

$$\left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right] \frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \dot{f}(r^1)\rho - \dot{S}(r^1) = 0. \tag{6.298}$$

Les invariants de Riemann sont

$$\begin{aligned} &f(r^1)t + \epsilon_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{x} = \phi(r^1) + \epsilon_1 \epsilon_3 |\vec{g}|^{-1} \left[\frac{S(r^1)^2}{2\rho(r^0, r^1)^2} + \kappa A F(\rho(r^0, r^1))\right] \\ &\dot{f}(r^1)t = \dot{\phi}(r^1) + \epsilon_1 \epsilon_3 |\vec{g}|^{-1} \frac{S(r^1)\dot{S}(r^1)}{\rho(r^0, r^1)^2} \\ &- \epsilon_1 \epsilon_3 |\vec{g}|^{-1} \left[-\dot{f}(r^1)\rho(r^0, r^1) + \dot{S}(r^1)\right] \left[\frac{S(r^1)^2}{\rho(r^0, r^1)^3} - \kappa A \rho(r^0, r^1)^{\kappa-2}\right] \\ &\cdot \left[\frac{S(r^1)}{\rho(r^0, r^1)} - \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{6.299}$$

où

$$F(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^{\kappa-1}}{\kappa - 1} & ,(\kappa \neq 1) \\ \ln \rho & ,(\kappa = 1) \end{cases}.$$

Ici, A *(*> 0*) est une constante arbitraire,* $\epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon = \pm 1$ *et* $\rho(r^0, r^1)$ *(*> 0*),* $S(r^1)$ *(*$\neq 0$*),* $f(r^1)$ *ainsi que* $\phi(r^1)$ *sont des fonctions satisfaisant* (6.297) *et* (6.298) *avec* $\dot{f}(r^1) \neq 0$ *et* $\partial\rho/\partial r^0 \neq 0$.

Preuve : On résout le système (6.195) sujet aux conditions (5.5) avec $\alpha_1 \neq 0$. Comme précédemment, la pression est donnée par $p = A\rho^\kappa$, où A est une constante arbitraire. Comme pour le Théorème 6.5.2, on a

$$\vec{\lambda}^0 = e^{\phi(r^0,r^1)}\vec{h}(r^1), \qquad \left|\vec{h}(r^1)\right| = 1, \qquad \delta = e^{\phi(r^0,r^1)}\left[f(r^1) + \vec{v}\cdot\vec{h}(r^1)\right]. \tag{6.300}$$

On traite séparément les cas **(i)** $\vec{h}\times\vec{\Omega} \neq 0$ et **(ii)** $\vec{h}\times\vec{\Omega} = 0$.

(i) Si on fait l'hypothèse $\vec{h}\times\vec{\Omega} \neq 0$, on peut alors poser $\vec{v} = v_1(r^0,r^1)\vec{h} + v_2(r^0,r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0,r^1)(\vec{h}\times\vec{\Omega})$, et $\vec{g} = g_1(r^1)\vec{h} + g_2(r^1)\vec{\Omega} + g_3(\vec{h}\times\vec{\Omega})$. Les équations (6.195a) et (6.300) donnent alors le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial r^0} &= -\rho e^{-\phi}\left[\frac{(g_1 - v_3) + (g_2 + v_3\vec{\Omega}\cdot\vec{h})\vec{\Omega}\cdot\vec{h}}{(f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{h})^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}}\right],\\
\frac{\partial v_1}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\left\{\frac{(g_1 - v_3)(f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{h})^2 + \kappa A\rho^{\kappa-1}(g_2 + v_3\vec{\Omega}\cdot\vec{h})\vec{\Omega}\cdot\vec{h}}{(f + v_1 + v_1\vec{\Omega}\cdot\vec{h})\left[(f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{h})^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}\right]}\right\},\\
\frac{\partial v_2}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\frac{g_2 + v_3\vec{\Omega}\cdot\vec{h}}{f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{h}}, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = e^{-\phi}\frac{g_3 + v_1}{f + v_1 + v_2\vec{\Omega}\cdot\vec{h}}.
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\vec{\Omega}\cdot\vec{h} = 0$, ce système devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial r^0} &= -\rho e^{-\phi}\left[\frac{(g_1 - v_3)}{(f + v_1)^2 - \kappa A\rho\kappa - 1}\right],\\
\frac{\partial v_1}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\left\{\frac{(g_1 - v_3)(f + v_1)}{[(f + v_1)^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}]}\right\},\\
\frac{\partial v_2}{\partial r^0} &= e^{-\phi}\frac{g_2}{f + v_1}, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = e^{-\phi}\left(\frac{g_3 - f}{f + v_1} + 1\right),
\end{aligned} \tag{6.301}$$

où la fonction $g_2 = \vec{g}\cdot\vec{\Omega}$ est une constante.

On résout le système (6.301) de manière similaire au système (6.236) et on trouve

$$
\begin{aligned}
&\rho = \frac{S(r^1)}{v_1(r^0, r^1) + f(r^1)}, \qquad p = A\rho^\kappa, \\
&\left\{ v_1(r^0, r^1) + f(r^1) - \kappa A \frac{S(r^1)^{\kappa - 1}}{[v_1(r^0, r^1) + f(r^1)]^\kappa} \right\} \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi(r^0, r^1)} \\
&\cdot \left[g_1(r^1) - V_3(r^1) - \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi - (g_3(r^1) - f(r^1)) \right. \\
&\qquad \left. \cdot \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi, r^1)}}{v_1(\xi, r^1) + f(r^1)} d\xi \right], \\
&v_2 = g_2 \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi, r^1)}}{v_1(\xi, r^1) + f(r^1)} d\xi + V_2(r^1), \\
&v_3 = \left[g_3(r^1) - f(r^1) \right] \int_0^{r^0} \frac{e^{-\phi(\xi, r^1)}}{v_1(\xi, r^1) + f(r^1)} d\xi + \int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi, r^1)} d\xi + V_3(r^1),
\end{aligned}
\tag{6.302}
$$

où $S(r^1)$ $(\neq 0)$, $V_2(r^1)$ et $V_3(r^1)$ sont des fonctions d'intégration.

Comme $\vec{h} \cdot \vec{\Omega} = 0$ et que $\left|\vec{h}\right| = 1$, on obtient le même résultat qu'au Chapitre 4, soit $\dot{\vec{h}}(r^1) = \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| (\vec{h} \times \vec{\Omega})$, $\epsilon_2 = \pm 1$. Les équations (6.195a) indiquent alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} &= -\epsilon \left[\left(\frac{\kappa p}{\rho} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r^1} \right]^{-1} \frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} \\
&= -\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa - 3} \right)^{-1/2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r^1} \right)^{-1} \\
&\quad \cdot \left[\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \vec{h} + \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \vec{\Omega} + \frac{\partial v_3}{\partial r^1} (\vec{h} \times \vec{\Omega}) + v_1 \dot{\vec{h}}(r^1) + v_3 (\dot{h}(r^1) \times \vec{\Omega}) \right] \\
&= -\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa - 3} \right)^{-1/2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r^1} \right)^{-1} \\
&\quad \cdot \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3 \right) \vec{h} + \frac{\partial v_2}{\partial r^1} \vec{\Omega} + \left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1 \right) (\vec{h} \times \vec{\Omega}) \right].
\end{aligned}
\tag{6.303}
$$

En substituant (6.195b) dans la deuxième équation de (6.26), on remarque que la grandeur $\vec{\lambda}^1 / \left|\vec{\lambda}^1\right|$ doit satisfaire les conditions

$$\begin{aligned}
&\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}-\vec{v}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}=\tilde{\mu}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r^1}f+\dot{f}(r^1)\right),\\
&\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}=\tilde{\mu}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\vec{h}+\dot{\vec{h}}(r^1)\right)=\tilde{\mu}\left[\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\vec{h}+\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|(\vec{h}\times\vec{\Omega})\right].
\end{aligned}\tag{6.304}$$

Ensemble, ces deux conditions produisent $\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\frac{1}{\tilde{\mu}}-\left[\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_3+\dot{f}(r^1)\right]=\frac{\partial\phi}{\partial r^1}(v_1+f)$. Comme l'équation (6.303) et la deuxième de (6.304) sont égales, on définit $\tilde{\mu}=-\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{-1/2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)^{-1}\mu\neq 0$. En comparant les coefficients des vecteurs de base, on trouve alors

$$\begin{aligned}
&\mu\frac{\partial\phi}{\partial r^1}=\frac{\partial v_1}{\partial r^1}-\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_3,\qquad 0=\frac{\partial v_2}{\partial r^1},\\
&\mu\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|=\frac{\partial v_3}{\partial r^1}+\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_1,\\
&\kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\frac{1}{\mu}+\left[\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_3+\dot{f}(r^1)\right]+\frac{\partial\phi}{\partial r^1}(v_1+f)=0\\
&\left\{\left[\frac{\partial v_1}{\partial r^1}-\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_3\right]^2+\left[\frac{\partial v_3}{\partial r^1}+\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_1\right]^2\right\}^{1/2}=\\
&\qquad\qquad-\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1},\qquad \epsilon_4=\pm 1.
\end{aligned}\tag{6.305}$$

En considérant la quatrième équation de (6.302), la deuxième condition de (6.305) devient $0=g_2\int_0^{r^0}\frac{\partial}{\partial r^1}\left[\frac{e^{-\phi(\xi,r^1)}}{v_1(\xi,r^1)+f(r^1)}\right]d\xi+\dot{V}_2(r^1)$. Une fois dérivée par rapport à r^0, cette relation implique $\dot{V}_2(r^1)=0$ et $g_2\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{e^{-\phi}}{v_1+f}\right)=0$. Si $g_2=0$, alors $v_2=V_2$ est une constante. Si $g_2\neq 0$, alors on a

$$e^{-\phi(r^0,r^1)}=e^{-\phi_0(r^0)}\left[v_1(r^0,r^1)+f(r^1)\right],\tag{6.306}$$

où $\phi_0(r^0)$ est une fonction arbitraire.

Comme $\vec{\lambda}^1\neq 0$, il existe trois possibilités : **(a)** $\dot{\vec{h}}(r^1)=0$, $\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\neq 0$; **(b)** $\dot{\vec{h}}(r^1)\neq 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial r^1}=0$ et **(c)** $\dot{\vec{h}}(r^1)\neq 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\neq 0$.

(a) Si $\dot{\vec{h}}(r^1) = 0$ et $\partial\phi/\partial r^1 \neq 0$, les équations (6.305) se réduisent à

$$\begin{aligned}
&\mu\frac{\partial \phi}{\partial r^1} = \frac{\partial v_1}{\partial r^1} \neq 0, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial r^1} = 0, \quad i = 2, 3\ ,\\
&\kappa A \rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\frac{1}{\mu} + \frac{\partial \phi}{\partial r^1}(v_1 + f) + \dot{f}(r^1) = 0, \\
&\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = -\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}.
\end{aligned} \tag{6.307}$$

Notons que les fonctions $g_1 = \vec{g}\cdot\vec{h}$ et $g_3 = \vec{g}\cdot(\vec{h}\times\vec{\Omega})$ sont constantes dans ce cas. La dérivation de la cinquième équation de (6.302) par rapport à r^1 puis l'application de la deuxième équation de (6.307) démontre que la fonction V_3 est constante et que

$$e^{-\phi(r^0,r^1)} = e^{-\psi_0(r^0)}\frac{v_1(r^0,r^1) + f(r^1)}{v_1(r^0,r^1) + g_3}, \tag{6.308}$$

où $\psi_0(r^0)$ est un fonction arbitraire.

Si $g_2 \neq 0$, alors l'équation (6.306) est valide, on peut alors la comparer à (6.308) et trouver $v_1(r^0,r^1) + g_3 = e^{\phi_0(r^0)}e^{-\psi_0(r^0)}$. Autrement dit, la fonction v_1 ne dépend que de r^0. Cependant, cela entre directement en contradiction avec la première équation de (6.307) et implique par conséquent qu'il n'y a pas de solution dans ce cas.

On fait donc l'hypothèse $g_2 = 0$. La fonction $v_2 = V_2$ est alors constante et l'équation (6.308), de paire avec la cinquième de (6.302), produit la relation $v_3 = \int_0^{r^0} e^{-\psi_0(\xi)}d\xi + V_3$, où V_3 est une constante. En vertu de l'équation (6.308), la troisième condition de (6.302) est équivalente à l'équation

$$\left[v_1 + g_3 - \frac{\kappa A S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^\kappa} - \frac{\kappa A S^{\kappa-1}(g_3 - f)}{(v_1+f)^{\kappa+1}}\right]\frac{\partial v_1}{\partial r^0} = -e^{-\psi_0(r^0)}\int_0^{r^0} e^{-\psi_0(\xi)}d\xi + (g_1 - V_3)e^{-\psi_0(r^0)}.$$

Une fois intégrée par rapport à r^0, cette relation révèle

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(v_1+g_3)^2 + \kappa A F + A S^{\kappa-1}(g_3 - f)(v_1+f)^{-\kappa}\\
&= (g_1 - v_3)\int_0^{r^0} e^{-\psi_0(\xi)}d\xi - \frac{1}{2}\left(\int_0^{r^0} e^{-\psi_0(\xi)}d\xi\right)^2 + T(r^1),
\end{aligned} \tag{6.309}$$

où $T(r^1)$ est une fonction d'intégration et

$$F = \begin{cases} \dfrac{1}{\kappa-1}\left(\dfrac{S}{v_1+f}\right)^{\kappa-1} & ,(\kappa \neq 1) \\ \ln\left(\dfrac{S}{v_1+f}\right) & ,(\kappa = 1) \end{cases}.$$

Avec la première équation de (6.302), la quatrième condition de (6.307) prend la forme

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = -\epsilon_4\epsilon\left[\kappa A\left(\frac{S}{v_1+f}\right)^{\kappa-3}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\frac{S}{v_1+f}\right) \tag{6.310}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\left[1-\epsilon_4\epsilon\left(\frac{(v_1+f)^{\kappa-3}}{\kappa A S^{\kappa-1}}\right)^{1/2}\right]\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = -\dot{f}(r^1)+(v_1+f)\frac{\dot{S}(r^1)}{S}. \tag{6.311}$$

La première et la quatrième équation de (6.307) donnent $\frac{1}{\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial r^1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)^{-1} = -\epsilon_4\epsilon\Big(\kappa A\rho^{\kappa-3}\Big)^{-1/2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial r^1}$. L'équation (6.308) permet quant à elle de trouver $\frac{\partial\phi}{\partial r^1} = -\frac{1}{v_1+f}\left(\dot{f}(r^1)+\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)+\frac{1}{v_1+g_3}\frac{\partial v_1}{\partial r^1}$. La substitution de ces équations dans la troisième de (6.307) résulte en la relation $\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{v_1+f}\left(\dot{f}(r^1)+\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right)-\frac{1}{v_1+g_3}\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\right]-\frac{g_3-f}{v_1+g_3}\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = 0$. Si on remplace ρ par $S(v_1+f)^{-1}$, l'expression se simplifie à

$$\frac{f-g_3}{v_1+g_3}\left[1-\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A S^{\kappa-1}(v_1+f)^{\kappa+1}\right)^{1/2}\right]\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \dot{f}(r^1). \tag{6.312}$$

Comme $\dot{\vec{h}} = 0$, la condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ nécessite qu'on ait $\dot{f}(r^1) \neq 0$, ce qui implique qu'on doit avoir $f - g_3 \neq 0$.

Une étude de (6.311) et (6.312) révèle $v_1\left[\frac{\dot{S}(r^1)}{S}-\frac{\dot{f}(r^1)}{f-g_3}\right]$. Comme on a $\delta = e^{\phi}(f+v_1) \neq 0$, alors la fonction $v_1 \neq 0$. Ainsi, on doit avoir la relation $\dot{S}(r^1)/S = \dot{f}(r^1)/(f-g_3)$. Une fois intégrée par rapport à r^1, cette dernière nous donne $S = f_1(f-g_3)$, où f_1 est une constante arbitraire.

De cette expression et de (6.310), on dérive (6.309) par rapport à r^1 de manière à trouver

$$\begin{aligned}
\dot{T}(r^1) =& (v_1 + g_3)\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_4\epsilon \left[\kappa A \left(\frac{S}{v_1+f}\right)^{\kappa-1}\right]^{1/2} \frac{\partial v_1}{\partial r^1} \\
=& \epsilon_4\epsilon\frac{1}{f_1}\left[\kappa A \left(\frac{S}{v_1+f}\right)^{\kappa+1}\right]^{1/2} \frac{\partial v_1}{\partial r^1} \\
=& (v_1+g_3)\left\{1 - \epsilon_4\epsilon\left[\kappa A \frac{S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^{\kappa+1}}\right]^{1/2}\right\}\frac{\partial v_1}{\partial r^1} \\
=& -\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\frac{S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^{\kappa+1}}\right)^{1/2}\frac{\dot{f}(r^1)(v_1+g_3)^2}{f-g_3}
\end{aligned}$$

ce qui implique que la grandeur $\frac{(v_1+g_3)^2}{(v_1+f)^{\kappa+1}}$ ne dépend que de r^1. En dérivant par rapport à r^0, on obtient $0 = \frac{v_1+g_3}{(v_1+f)^{(\kappa+3)/2}}\left[2(v_1+f) - (v_1+g_3)\left(\frac{\kappa-1}{2}+1\right)\right]\frac{\partial v_1}{\partial r^0}$. Cependant, si $\partial v_1/\partial r^0 = 0$, alors de l'équation (6.302) on peut déduire que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ ne dépend que de r^1, il n'y a donc pas de superposition et de pas de solution de rang 2. Si on pose $2(v_1+f) - (v_1+g_3)[(\kappa-1)/2+1] = 0$, cela implique que $(\kappa-3)v_1 = 4f - (\kappa+1)g_3$. Si $\kappa \neq 3$, alors cela contredit la condition que v_1 ne dépende que de r^1. Si au contraire $\kappa = 3$, on trouve alors la contradiction que la fonction $f = g_3$ est constante. Il n'y a donc pas de solutions pour le cas $\dot{\vec{h}}(r^1) = 0$.

(b) Si $\dot{\vec{h}}(r^1) \neq 0$ et $\partial\phi/\partial r^1 = 0$, les équations (6.305) se simplifient à

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial r^1} = 0, \\
&\mu\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| = \frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1 \\
&\kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\frac{1}{\mu} + \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3 + \dot{f}(r^1) = 0, \\
&\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1 = -\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}.
\end{aligned} \tag{6.313}$$

Si $g_2 \neq 0$, alors l'équation (6.306) est valide et démontre que $\frac{\partial\phi}{\partial r^1} = -\frac{1}{v_1+f}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} + \dot{f}(r^1)\right) = 0$. Cette relation implique $\partial v_1/\partial r^1 = -\dot{f}(r^1)$ ce qui, une fois substitué avec la première équation de (6.313) dans la quatrième produit la contradiction $\kappa A\rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\frac{1}{\mu} = 0$. On conclut donc qu'il n'y a pas de solution pour $g_2 \neq 0$.

Dorénavant, opérons sous l'hypothèse que $g_2 = 0$. Ensemble, la troisième et la cinquième équation de (6.313) impliquent la relation $\mu = -\epsilon_4\epsilon_2\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}$ qui, une fois substituée dans la quatrième équation de (6.313), produit à son tour $v_3 = \epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2} - \epsilon_2\frac{\dot{f}(r^1)}{\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|}$. Avec la première équation de (6.313) et en posant $\rho = -S/(v_1+f)$, on trouve

$$v_3 = \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|^{-1}\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \epsilon_4\epsilon\left[\kappa A\left(\frac{S}{v_1+f)}\right)^{\kappa-1}\right]^{1/2} - \epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|^{-1}\dot{f}(r^1). \tag{6.314}$$

La dérivée de v_3 par rapport à r^1 est obtenue en appliquant deux fois l'équation (6.314) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_3}{\partial r^1} =& \epsilon_4\epsilon\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\left[\kappa A\frac{S^{\kappa-3}}{(v_1+f)^{\kappa+1}}\right]^{1/2}\dot{S}(r^1) - \epsilon_2\frac{d}{dr^1}\left(\frac{\dot{f}(r^1)}{\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|}\right)\\ &- \epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\frac{S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^{\kappa+1}}\right)^{1/2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} + \dot{f}(r^1)\right)\\ =& \epsilon_4\epsilon\frac{\kappa-1}{2}\left(\kappa A\frac{S^{\kappa-3}}{(v_1+f)^{\kappa-1}}\right)^{1/2}\dot{S}(r^1)\\ &- \epsilon_2\kappa\frac{\kappa-1}{2}A\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\frac{S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^{\kappa}} - \epsilon_2\frac{d}{dr^1}\left(\frac{\dot{f}(r^1)}{\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|}\right).\end{aligned} \tag{6.315}$$

Avec la première équation de (6.302) et de (6.314), on calcule

$$\begin{aligned}\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1} &= \epsilon_4\epsilon\left[\kappa A\left(\frac{S}{v_1+f}\right)^{\kappa-3}\right]^{1/2}\\ &\quad\cdot\left[\frac{\dot{S}(r^1)}{v_1+f} - \frac{S}{(v_1+f)^2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} + \dot{f}(r^1)\right)\right]\\ &= \epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\frac{S^{\kappa-3}}{(v_1+f)^{\kappa-1}}\right)^{1/2}\dot{S}(r^1) - \epsilon_2\kappa A\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\frac{S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^{\kappa}}.\end{aligned} \tag{6.316}$$

L'insertion des équations (6.315) et (6.316) dans la cinquième équation de (6.313) produit la condition

$$\begin{aligned}
&\epsilon_4\epsilon\frac{\kappa+1}{2}\left(\kappa A\frac{S^{\kappa-3}}{(v_1+f)^{\kappa-1}}\right)^{1/2}\dot{S}(r^1)\\
&-\epsilon_2\kappa\frac{\kappa+1}{2}A\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\frac{S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^{\kappa}}+\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_1-\epsilon_2\frac{d}{dr^1}\left(\frac{\dot{f}(r^1)}{\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|}\right)=0.
\end{aligned} \tag{6.317}$$

On remarque que $\partial v_1/\partial r^0 \neq 0$, sinon l'équation (6.302) permettrait de conclure qu'il n'y a pas de superposition et donc pas de solution de rang 2. dériver (6.317) par rapport à r^0 permet de trouver

$$\begin{aligned}
&-\epsilon_4\epsilon\frac{(\kappa+1)(\kappa-1)}{2}A\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\left(\frac{S^{\kappa-3}}{(v_1+f)^{\kappa+1}}\right)^{1/2}\dot{S}(r^1)\\
&\qquad+\epsilon_2\kappa^2\frac{\kappa+1}{2}A\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\frac{S^{\kappa-1}}{(v_1+f)^{\kappa+1}}+\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|=0.
\end{aligned}$$

Multipliée par $(v_1+f)^{(\kappa+1)/2}$ puis dérivée par rapport à r^1, cette relation révèle $-\kappa^2(\kappa+1)2^{-1}A\left[S^{\kappa-1}\right](v_1+f)^{-(\kappa+3)/2}+(v_1+f)^{(\kappa-1)/2}=0$, d'où il s'ensuit que $(v_1+f)^{\kappa+1}=2^{-1}\kappa^2(\kappa+1)AS^{\kappa+1}$. Autrement dit, la fonction v_1 ne dépend que de r^1 ce qui entre directement en contradiction avec $\partial v_1/\partial r^0 \neq 0$. On conclut donc qu'il n'y a pas de solution dans le cas présent.

(c) Traitons finalement l'hypothèse $\dot{\vec{h}}(r^1) \neq 0$ et $\partial\phi/\partial r^1 \neq 0$. Après l'élimination du facteur μ, les équations (6.305) deviennent

$$\begin{aligned}
&\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1}-\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_3\right)=\left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1}+\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_1\right)\frac{\partial\phi}{\partial r^1},\\
&\epsilon_2\kappa A\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|\rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}+\left[\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_3+\dot{f}(r^1)+(v_1+f)\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\right]\\
&\qquad\cdot\left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1}+\epsilon_2\left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right|v_1\right)=0.
\end{aligned} \tag{6.318}$$

On traite séparément les cas **(I)** $g_2 \neq 0$ et **(II)** $g_2 = 0$.

(I) Faisons d'abord l'hypothèse que $g_2 \neq 0$. L'équation (6.306) est alors valide et indique que $\frac{\partial\phi}{\partial r^1} = -\frac{1}{v_1+f}\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} + \dot{f}(r^1)\right)$. En substituant cette grandeur ainsi que la condition (6.287) dans (6.318), on trouve

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial r^1} - \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_3\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial r^1} + \epsilon_2 \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| v_1\right) = \epsilon_2 \kappa A \left|\dot{\vec{h}}(r^1)\right| \rho^{\kappa-2}\frac{\partial\rho}{\partial r^1}. \tag{6.319}$$

Le remplacement de la densité ρ par $S/(v_1+f)$ dans la cinquième équation de (6.305) et dans (6.319) nous permet d'obtenir les conditions (6.288) et (6.289).

Poser $e^{-\phi} = e^{-\phi_0(r^0)}(v_1+f)$ dans (6.302) permet d'établir $v_2 = g_2\int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)}d\xi + V_2$ et $v_3 = \int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)}\left[v_1(\xi, r^1) + g_3(r^1)\right] d\xi + V_3(r^1)$, où V_2 est une constante, puis de réduire la troisième condition de (6.302) à la forme (6.286).

La solution $(\rho, p, \vec{v})$ est alors donnée par (6.285) et est sujette aux conditions (6.286) - (6.289). De paire, (6.28) et (6.306) donnent les invariants de Riemann (6.290). Les vecteurs γ_0 et γ_1 sont linéairement indépendants pourvu que $\partial\rho/\partial r^1 \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1$ est garantie puisque $\dot{\vec{h}}(r^1) \neq 0$.

(II) On fait l'hypothèse $\vec{h}\times\vec{\Omega} = 0$, alors $\vec{h} = \epsilon_1\vec{\Omega}$, où $\epsilon_1 = \pm 1$. **(a)** Avec l'hypothèse supplémentaire $\vec{g}\times\vec{\Omega} \neq 0$, on peut poser $\vec{v} = v_1(r^0,r^1)\vec{g} + v_2(r^0,r^1)\vec{\Omega} + v_3(r^0,r^1)(\vec{g}\times\vec{\Omega})$. Réécrire (6.195a) et (6.300) en terme des vecteurs de base $(\vec{g}, \vec{\Omega}, (\vec{g}\times\vec{\Omega}))$ mène au système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial r^0} = -\epsilon_1 \frac{\rho e^{-\phi}\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = \frac{\rho e^{-\phi}(1-v_3)}{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]},\\
&\frac{\partial v_2}{\partial r^0} = \frac{e^{-\phi}\vec{g}\cdot\vec{\Omega}}{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]^2}\left\{v_3 + \frac{\kappa A\rho^{\kappa-1}}{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]^2 - \kappa A\rho^{\kappa-1}}\right\},\\
&\frac{\partial v_3}{\partial r^0} = \frac{\rho e^{-\phi}v_1}{\left[f + \epsilon_1(v_1\vec{g}\cdot\vec{\Omega} + v_2)\right]}.
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $\vec{g}\cdot\vec{\Omega}=0$, ce système devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial r^0}&=0, &\qquad \frac{\partial v_1}{\partial r^0}&=\frac{\rho e^{-\phi}(1-v_3)}{[f+\epsilon_1 v_2]},\\ \frac{\partial v_2}{\partial r^0}&=0, &\qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0}&=\frac{\rho e^{-\phi}v_1}{[f+\epsilon_1 v_2]}. \end{aligned} \tag{6.320}$$

On remarque que la densité ρ et la fonction v_2 ne dépendent que de r^1 et que la deuxième et la quatrième équation de (6.320) ont comme solution

$$\begin{aligned} v_1&=A_1(r^1)\sin\left[\frac{1}{f(r^1)+\epsilon_1 v_2(r^1)}\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi,r^1)}d\xi+B_1(r^1)\right]\\ v_3&=-A_1(r^1)\cos\left[\frac{1}{f(r^1)+\epsilon_1 v_2(r^1)}\int_0^{r^0}e^{-\phi(\xi,r^1)}d\xi+B_1(r^1)\right]+1, \end{aligned} \tag{6.321}$$

où $A_1(r^1)$ et $B_1(r^1)$ sont des fonctions d'intégration.

La substitution de (6.195b) et de $\vec{h}=\epsilon_1\vec{\Omega}$ dans la deuxième équation de (6.221) produit les conditions

$$\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}-\vec{v}\cdot\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}=\mu\left[\frac{\partial\phi}{\partial r^1}+\dot{f}(r^1)\right],\qquad \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}=\mu\frac{\partial\phi}{\partial r^1}\epsilon_1\vec{\Omega}. \tag{6.322}$$

On note que $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right|=\epsilon_4\vec{\Omega}$ et $\mu^{-1}=\epsilon_1\epsilon_4\partial\phi/\partial r^1\neq 0$, où $\epsilon_4=\pm1$. Ainsi, la première équation de (6.322) devient

$$\left[\epsilon_1\epsilon_4\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}-(f+\epsilon_1 v_2)\right]\frac{\partial\phi}{\partial r^1}=\dot{f}(r^1). \tag{6.323}$$

L'équation (6.195a) indique

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial r^1}=\frac{\partial v_1}{\partial r^1}\vec{g}+\dot{v}_2(r^1)\vec{\Omega}+\frac{\partial v_3}{\partial r^1}(\vec{g}\times\vec{\Omega})=-\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)\dot{\rho}(r^1)\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}. \tag{6.324}$$

Poser $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right|$ et comparer les coefficients dans (6.324) permet de trouver

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \frac{\partial v_3}{\partial r^1} = 0, \qquad \dot{v}_2(r^1) = -\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\dot{\rho}(r^1). \tag{6.325}$$

On impose $\partial\vec{v}/\partial r^0 \neq 0$, on a donc $v_1 \neq 0$ et $v_3 \neq 1$. La quatrième équation de (6.320) peut alors être écrite sous la forme $\dot{v}_3(r^0)v_1^{-1} = e^{-\phi(r^0,r^1)}\left(f(r^1)+\epsilon_1 v_2(r^1)\right)^{-1}$. En notant le côté gauche comme $e^{-\phi_0(r^0)}$, on peut alors reformuler comme $e^{\phi(r^0,r^1)} = e^{\phi_0(r^0)}\left(f(r^1)+\epsilon_1 v_2(r^1)\right)^{-1}$, d'où on trouve $\frac{\partial\phi}{\partial r^1} = \frac{\dot{f}(r^1)+\epsilon_1\dot{v}_2(r^1)}{f+\epsilon_1 v_2}$. En substituant cette relation dans (6.323) puis en utilisant la deuxième équation de (6.325), on remarque que $\frac{\dot{f}(r^1)\epsilon_1\dot{v}_2(r^1)}{f+\epsilon_1 v_2} = -\frac{\dot{\rho}(r^1)}{\rho}$. Autrement dit, on note que $f+\epsilon_1 v_2 = (V_2\rho)^{-1}$, où V_2 est une constante d'intégration. Il s'ensuit que

$$e^{\phi(r^0,r^1)} = V_2 e^{\phi_0(r^0)}\rho(r^1). \tag{6.326}$$

L'intégration de la deuxième équation de (6.325) par rapport à r^1 mène à la relation $v_2 = -\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2}F(\rho)+\rho_0$, où ρ_0 est une constante d'intégration et

$$F(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2}{\kappa-1}\rho^{(\kappa-1)/2} & ,(\kappa\neq 1) \\ \ln\rho & ,(\kappa = 1) \end{cases}.$$

Par conséquent, on a

$$f = \frac{1}{V_2\rho} + \epsilon_1\epsilon_4\epsilon(\kappa A)^{1/2} - \epsilon_1\rho_0. \tag{6.327}$$

De plus, en posant $e^{\phi} = e^{\phi_0}/(f+\epsilon_1 v_2)$ dans l'équation (6.321) et en se rappelant la première équation de (6.325), on remarque que les fonctions A_1 et B_1 doivent être constantes.

La précédente discussion établit sans équivoque que la solution $(\rho, p, \vec{v})$ est donnée par (6.294). Les invariants de Riemann (6.295) sont obtenus via (6.28) avec l'aide des équations (6.326) et (6.327) ainsi que de la relation $\vec{h} = \epsilon_1\vec{\Omega}$. L'indépendance linéaire entre les vecteurs γ_0 et γ_1 est respectée pourvu que $A_1 \neq 0$ et que $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est aussi respectée lorsque $\dot{\rho}(r^1) \neq 0$.

(b) Faisons maintenant l'hypothèse $\vec{h} \times \vec{\Omega} = 0$, $\vec{g} \times \vec{\Omega} = 0$. On choisit $\vec{\Omega} = \vec{e}_3$ et on pose $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i(r^0, r^1)\vec{e}_i$. On doit donc avoir $\vec{h} = \epsilon_1 \vec{e}_3$ et $\vec{g} = \epsilon_3 |\vec{g}| \vec{e}_3$, où $\epsilon_1, \epsilon_3 = \pm 1$. En substituant ces quantités dans les équations (6.195a) et (6.300), on trouve le système

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = -\epsilon_1 \epsilon_3 |\vec{g}| \frac{\rho}{e^{\phi}(f + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa A \rho^{\kappa-1}}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial r^0} = e^{-\phi} v_2 (f + \epsilon_1 v_3)^{-1}, \\ &\frac{\partial v_2}{\partial r^0} = -v_1 (f + \epsilon_1 v_3)^{-1}, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^0} = \epsilon_3 |\vec{g}| e^{-\phi} \frac{(f + \epsilon_1 v_3)}{e^{\phi}(f + \epsilon_1 v_3)^2 - \kappa A \rho^{\kappa-1}}. \end{aligned} \tag{6.328}$$

La résolution du système (6.328) se déroule de manière similaire à celle du système (6.272) et résulte en

$$\begin{aligned} &v_3 = \epsilon_1 \left[\frac{S(r^1)}{\rho(r^0, r^1)} - f(r^1) \right], \\ &\left[\frac{S(r^1)^2}{\rho(r^0, r^1)^3} - \kappa A \rho(r^0, r^1)^{\kappa-2} \right] \frac{\partial \rho}{\partial r^0} = -\epsilon_1 \epsilon_3 |\vec{g}| e^{-\phi(r^0, r^1)}, \end{aligned} \tag{6.329}$$

où $S(r^1)$ est une fonction d'intégration non-nulle.

La substitution de (6.195b) et de $\vec{h} = \epsilon_1 \vec{e}_3$ dans la deuxième équation de (6.26) mène aux conditions

$$\epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-1}\right)^{-1} - \vec{v} \cdot \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = \mu \left[\frac{\partial \phi}{\partial r^1} f + \dot{f}(r^1) \right], \qquad \frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|} = \mu \epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial r^1} \vec{e}_3. \tag{6.330}$$

On remarque sans peine que $\vec{\lambda}^1 / \left|\vec{\lambda}^1\right| = \epsilon_4 \vec{e}_3$ et $\mu^{-1} = \epsilon_1 \epsilon_4 \partial\phi / \partial r^1 \neq 0$, où $\epsilon_4 = \pm 1$. La première équation de (6.330) devient

$$\left[\epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-1}\right)^{1/2} - (f + \epsilon_1 v_3) \right] \frac{\partial \phi}{\partial r^1} = \dot{f}(r^1). \tag{6.331}$$

Les équations (6.195a) exigent

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r^1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial r^1}\vec{e}_i = -\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\frac{\vec{\lambda}^1}{\left|\vec{\lambda}^1\right|}. \tag{6.332}$$

Remplacer $\vec{\lambda}^1/\left|\vec{\lambda}^1\right| = \epsilon_4\vec{e}_3$ puis comparer les coefficients dans (6.332) nous permet d'obtenir

$$\frac{\partial v_1}{\partial r^1} = \frac{\partial v_2}{\partial r^1} = 0, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial r^1} = -\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}. \tag{6.333}$$

De la deuxième et de la troisième équation de (6.328), on remarque que les fonctions v_1 et v_2 sont soit nulles toutes les deux, soient non-nulles. Étudions chacune de ces possibilités séparément.

Faisons d'abord l'hypothèse $v_1, v_2 \neq 0$. La deuxième équation de (6.328) peut alors être écrite comme $\frac{\dot{v}_1(r^0)}{v_2(r^0)} = \frac{e^{-\phi(r^0,r^1)}}{f(r^1)+\epsilon_1 v_3(r^1)}$. Si on note le côté gauche comme $e^{-\phi_0(r^0)}$, on obtient $e^{\phi(r^0,r^1)} = \frac{e^{\phi_0(r^0)}}{f(r^1)+\epsilon_1 v_3(r^1)}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial r^1} = -\frac{1}{f(r^1)+\epsilon_1 v_3(r^1)}\left[\dot{f}(r^1) + \epsilon_1\dot{v}_3(r^1)\right]$. En substituant ces grandeurs dans (6.331) et en employant la deuxième équation de (6.333), on trouve la relation $\frac{1}{f+\epsilon_1 v_3}\left(\dot{f}(r^1) + \epsilon_1\dot{v}_3(r^1)\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}$ qui, une fois intégrée par rapport à r^1 produit $f + \epsilon_1 v_3 = \frac{1}{V_3(r^0)\rho}$, où $V_3(r^1)$ est une fonction d'intégration. La première équation de (6.329) nous donne cependant $f + \epsilon_1 v_3 = S(r^1)/\rho$, ce qui implique que $S(r^1) = 1/V_3(r^0)$ et que les fonctions S et V_3 sont constantes. On en conclut que $e^{\phi(r^0,r^1)} = \rho\phi_0(r^0)/S$. De paire avec la deuxième équation de (6.329), cette relation permet d'obtenir

$$\left[\frac{S^2}{\rho^2} - \kappa A\rho^{\kappa-1}\right]\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = -\epsilon_1\epsilon_3\left|\vec{g}\right| S e^{-\phi_0(r^0)}. \tag{6.334}$$

L'intégration de cette relation par rapport à r^0 révèle

$$\left(\frac{S^2}{\rho^2} - \kappa A\rho^{\kappa-1}\right)\frac{\partial \rho}{\partial r^0} = \epsilon_1\epsilon_3\left|\vec{g}\right| S\int_0^{r^0} e^{-\phi_0(\xi)}d\xi + T(r^1), \tag{6.335}$$

où $T(r^1)$ est une fonction d'intégration.

En considérant la première équation de (6.329), la deuxième condition de (6.333) devient $\epsilon_1 \frac{S}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \epsilon_1 \dot{f}(r^1) = \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right) \frac{\partial \rho}{\partial r^1}$. Ainsi, la dérivation de (6.335) par rapport à r^1 résulte en

$$\begin{aligned}
\dot{T}(r^1) =& -\frac{S^2}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \left[\epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa+1}\right)^{1/2}\right]\left[\epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-3}\right)^{1/2} \frac{\partial \rho}{\partial r^1}\right] \\
=& -\frac{S^2}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa+1}\right)^{1/2}\left[\epsilon_1 \frac{S}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1} + \epsilon_1 \dot{f}(r^1)\right] \\
=& \epsilon_1 S \left[\epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa 3}\right)^{1/2} - \epsilon_1 \frac{S}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial r^1}\right] + \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa+1}\right)^{1/2} \dot{f}(r^1) \\
=& \left[S + \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa+1}\right)^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

Comme $\vec{h} = \epsilon_1 \vec{e}_3$ est constant, on remarque que la condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ est respectée si et seulement si $\dot{f}(r^1) \neq 0$. Il s'ensuit que $\rho^{(\kappa+1)/2} = \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A\right)^{-1/2} \left[\frac{\dot{T}(r^1)}{\dot{S}(r^1)} - S\right]$, autrement dit, la densité ne dépend que de r^1. Or, l'équation (6.334) produit alors la contradiction $\epsilon_1 \epsilon_3 \left|\vec{g}\right| e^{-\phi_0(r^0)} = 0$. On conclut donc qu'il n'y a pas de solution lorsque $v_1,\, v_2 = 0$.

Faisons finalement l'hypothèse $v_1,\, v_2 = 0$. La première équation de (6.329) démontre que $\vec{v} = \epsilon_1 \left(\frac{S}{\rho} - f\right) \vec{e}_3$. De paire avec cette équation, la deuxième de (6.333) mène à l'équation différentielle pour ρ :

$$\left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right] \frac{\partial \rho}{\partial r^1} = -\dot{f}(r^1)\rho + \dot{S}(r^1). \tag{6.336}$$

La deuxième équation de (6.329) impose $\partial \rho / \partial r^0 \neq 0$. Comme le vecteur $\vec{h} = \epsilon_1 \vec{e}_3$ est constant, on remarque que la condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1 \neq 0$ lorsque $\dot{f}(r^1) \neq 0$. Ainsi, les deux côtés de l'équation (6.336) doivent être non-nuls. L'équation (6.336) peut alors être utilisée pour calculer

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\rho}{\partial r^1\partial r^0} =& \frac{\partial}{\partial r^0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right)\\ =& \Bigg\{ - \dot{f}(r^1) + \left[\dot{S}(r^1) - \dot{f}(r^1)\rho\right]\left[\frac{S}{\rho^2} + \epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\right]\\ &\cdot\left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]^{-1}\Bigg\}\cdot\left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial r^0}.\end{aligned} \tag{6.337}$$

La deuxième équation de (6.329) peut quant à elle être réécrite comme étant $\phi = \ln(-\epsilon_1\epsilon_3\,|\vec{g}|) - \ln\left(\frac{S^2}{\rho^3} - \kappa A\rho^{\kappa-2}\right) - \ln\left(\frac{\partial\rho}{\partial r^0}\right)$ puis dérivée par rapport à r^1 de manière à donner, avec l'aide des équations (6.336) et (6.337)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial r^1} =& \left(\frac{S^2}{\rho^3} - \kappa A\rho^{\kappa-2}\right)^{-1}\left\{2S\dot{S}(r^1) - \left[\frac{3S^2}{\rho^4} + \kappa(\kappa-2)A\rho^{\kappa-3}\right]\frac{\partial\rho}{\partial r^1}\right\}\\ &- \left(\frac{\partial\rho}{\partial r^0}\right)^{-1}\frac{\partial^2\rho}{\partial r^1\partial r^0}\\ =& \left(\frac{S^2}{\rho^3} - \kappa A\rho^{\kappa-2}\right)^{-1}\left\{-2\frac{S\dot{S}(r^1)}{\rho^3} - \left[3\frac{S^2}{\rho^4} + \kappa(\kappa-2)A\rho^{\kappa-3}\right]\right\}\\ &\cdot\left[\dot{S}(r^1) - \dot{f}(r^1)\rho\right]\left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]^{-1} - \left[\dot{S}(r^1) - \dot{f}(r^1)\rho\right]\\ &\cdot\left[\frac{S}{\rho^2} + \epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\frac{\kappa-1}{2}\right)\left(\kappa A\rho^{\kappa-3}\right)^{1/2}\right]\left[\frac{S}{\rho} - \epsilon_1\epsilon_4\epsilon\left(\kappa A\rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}\right]^{-2}.\end{aligned} \tag{6.338}$$

En substituant (6.338) et la première équation de (6.329) dans (6.331), on obtient la relation implicite (6.297) pour ρ.

La deuxième équation de (6.329) nous donne une expression pour $e^{-\phi}$, d'où on déduit

$$\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi,r^1)}d\xi = \epsilon_1\epsilon_3\,|\vec{g}|^{-1}\left[\frac{S^2}{2\rho^2} + \kappa AF(\rho)\right] + T(r^1), \tag{6.339}$$

où $T(r^1)$ est une fonction d'intégration et

$$F(\rho) = \begin{cases}\dfrac{\rho^{\kappa-1}}{\kappa-1} & ,(\kappa\neq 1)\\ \ln\rho & ,(\kappa = 1)\end{cases}.$$

dériver (6.339) par rapport à r^1 puis utiliser la relation (6.336) nous permet de trouver

$$\begin{aligned}
&\int_0^{r^0} e^{-\phi(\xi,r^1)} \frac{\partial \phi(\xi, r^1)}{\partial r^1} d\xi = -\epsilon_1 \epsilon_3 \left|\vec{g}\right|^{-1} \frac{S\dot{S}(r^1)}{\rho^2} \\
&= \epsilon_1 \epsilon_3 \left|\vec{g}\right|^{-1} \left[\dot{S}(r^1) - \dot{f}(r^1)\rho\right] \frac{\frac{S^2}{\rho^3} - \kappa A \rho^{\kappa-2}}{\frac{S}{\rho} - \epsilon_1 \epsilon_4 \epsilon \left(\kappa A \rho^{\kappa-1}\right)^{1/2}} - \dot{T}(r^1).
\end{aligned} \tag{6.340}$$

Les invariants de Riemann (6.299) sont obtenus via les équations (6.28), (6.339) et (6.340) ainsi que le remplacement de la fonction arbitraire ϕ par $\phi - T$.

La solution $(\rho, p, \vec{v})$ a la forme (6.296) et la densité ρ doit satisfaire les conditions (6.297) et (6.298). L'indépendance linéaire entre γ_0 et γ_1 est assurée si $\partial\rho/\partial r^0 \neq 0$ et soit $\dot{S}(r^1) \neq 0$ ou $\dot{f}(r^1) \neq 0$. La condition $\lambda^0 \wedge \lambda^1$ est quant à elle respectée pourvu que $\dot{f}(r^1) \neq 0$. $\square$

Les écoulements décrits par les solutions (6.285), (6.291), (6.294) et (6.296) sont compressibles et ont tous une entropie constante. La solution (6.296) est un écoulement potentiel alors que tous les autres écoulements exhibent une vorticité.

Solution explicite

Afin de rendre la solution (6.294) explicite, faisons les hypothèses suivantes. Soit le vecteur de gravitation $\vec{g} = (0, 0, g)$ et le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega} = (1, 0, 0)$. Si on choisit les constantes $\rho_0 = 1$, $A = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, $V_2 = 1$ et $\kappa = 2$ ainsi que les branches $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$, on peut alors exprimer l'invariant de Riemann r^1 de manière explicite en choisissant les fonctions arbitraires comme étant $\phi_0(r^0) = 0$, $\rho(r^1) = (r^1)^2$ et $\phi(r^1) = 0$.

Sous ces hypothèses, on trouve les solutions explicites de rang 2

$$\boxed{\begin{aligned}
&\rho(t,x) = \frac{(\sqrt{2}t - \sqrt{2}x)^2}{36t^2}, \qquad p(t,x) = \frac{(\sqrt{2}t - \sqrt{2}x)^4}{36t^4},\\
&\vec{v}(t,x) = \sin\left(t - \frac{(\sqrt{2}t - \sqrt{2}x)^3}{(108\sqrt{2}t^2)}\right)\vec{g} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}t - \sqrt{2}x}{t}\right)\vec{\Omega}\\
&\qquad + \left[1 - \cos\left(t - \frac{(\sqrt{2}t - \sqrt{2}x)^3}{108\sqrt{2}t^2}(\vec{g} \times \vec{\Omega})\right)\right]
\end{aligned}} \tag{6.341}$$

où les invariants de Riemann sont donnés par

$$r^0(t,x) = t - \frac{(\sqrt{2}t - \sqrt{2}x)^3}{108\sqrt{2}t^2}, \qquad r^1(t,x) = \frac{\sqrt{2}t - \sqrt{2}x}{6t}. \tag{6.342}$$

Les solutions (6.341) représentent un écoulement compressible pour lequel la première et la troisième composante du champ de vitesse présentent une forme périodique. De plus, certaines solutions présentent un comportement asymptotique lorsque $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t,x) = \frac{1}{18}, \quad \lim_{t\to\infty} p(t,x) = \frac{1}{324}, \quad \lim_{t\to\infty} \vec{v}(t,x) \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{3}.$$

Les invariants de Riemann $r^0(t,x)$ et $r^1(t,x)$ présentent une singularité lorsque le dénominateur des équations (6.342) est nul, c'est-à-dire au temps $t = 0$. Il s'agit de la seule singularité pour ce cas et elle est observable dans les Figures 6.14, 6.15, 6.16, 6.17 et 6.18.

Les Figures 6.14 et 6.15 représentent respectivement la densité $\rho(t,x)$ et la pression $p(t,x)$.

Les Figures 6.16, 6.17 et 6.18 représentent respectivement le champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ dans le plan engendré par le vecteur de gravitation $\vec{g}$, le vecteur de vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ et $(\vec{g} \times \vec{\Omega})$.

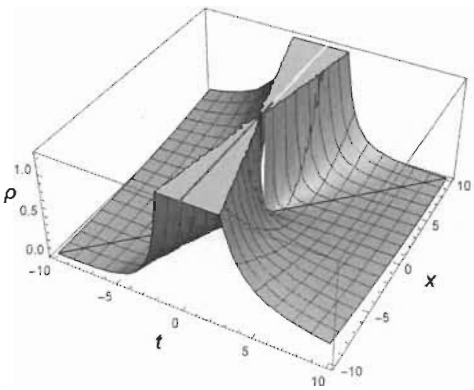

FIGURE 6.14 – Représentation graphique de la densité $\rho(t,x)$

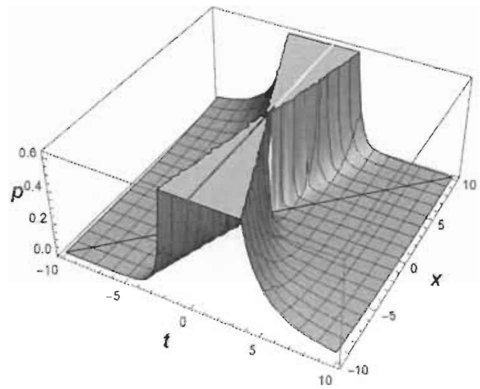

FIGURE 6.15 – Représentation graphique de la pression $p(t,x)$

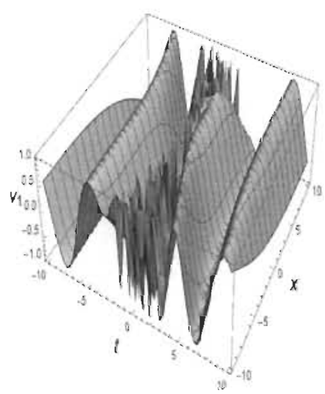

FIGURE 6.16 – Représentation graphique du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ sur le plan engendré par le vecteur $\vec{g}$

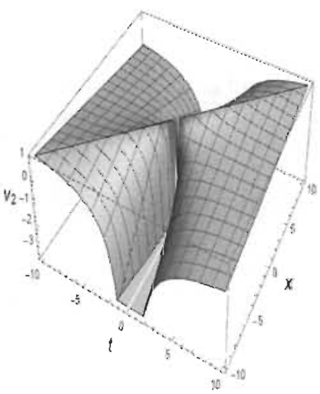

FIGURE 6.17 – Représentation graphique composante du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ sur le plan engendré par le vecteur $\vec{\Omega}$

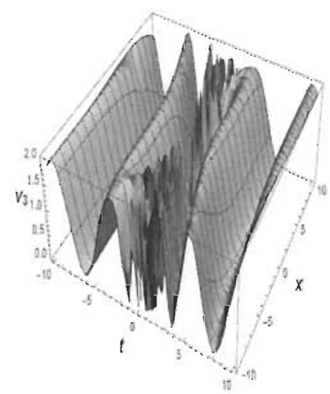

FIGURE 6.18 – Représentation graphique du champ de vitesse $\vec{v}(t,x)$ sur le plan engendré par le vecteur $(\vec{g} \times \vec{\Omega})$

Chapitre 7

Conclusion

La dynamique des fluides trouve des applications notamment dans l'analyse des vagues sur un étang, l'instabilité de l'écoulement d'un fluide dans un tuyau, l'interaction entre deux anneaux de fumée ou encore l'écoulement de lave volcanique [16]. En génie, on peut trouver des applications en transport de fluides (acheminement d'eau potable à des domiciles), en génération d'énergie (énergie éolienne), en contrôle environnemental (système d'air climatisé) et en transport (aviation) [17]. Plus spécifiquement, les résultats obtenus dans ce mémoire sont d'intérêt particulier dans le domaine de la dynamique des fluides géophysiques, notamment en météorologie où le mouvement des fluides considéré est le mouvement des gaz dans l'atmosphère.

7.1 Résumé des résultats

Les résultats du Chapitre 4, les états simples, sont résumés à la Table A. Cette table indique les conditions sous lesquelles les états simples distincts ont lieu. Plus spécifiquement, on obtient pour l'état entropique simple E^0 une solution décrivant l'écoulement d'une fluide incompressible pouvant, sous une certaine condition, être isentropique. Pour l'état acoustique simple A^0_ϵ, on trouve deux solutions représentant chacune l'écoulement d'un fluide incompressible avec vorticité et une entropie constante. En ce qui concerne l'état hydrodynamique H^0, on trouve trois solutions. La première décrit l'écoulement avec vorticité d'un fluide incompressible avec entropie constante. La deuxième solution représente l'écoulement d'un fluide incompressible à entropie constante. La dernière représente l'écoulement d'un fluide à entropie et densité constantes avec une vorticité non-constante.

7.2 Perspectives de recherche

Les méthodes employées dans ce mémoire et les résultats présentés sont fondamentaux à de futures recherches dans ce sujet. Les éléments intégrals simples calculés dans le Chapitre 3 et les solutions obtenues dans le Chapitre 6 sont les éléments de base pour les études suivantes.

Les solutions données ici pourraient dans le cadre de futures recherches trouver dans application pour les modes inertiels de rotation et les ondes de Rossby.

Il serait aussi possible possible de mener une démarche similaire à celle de ce mémoire pour obtenir des solutions au système d'équation de la dynamique des fluides incluant cette fois la force centrifuge, ou excluant la force gravitationnelle par exemple.

Finalement, il serait par exemple possible de s'en servir pour calculer des solutions de rang 3, soit la superposition de deux ondes simples sur un état simple.

Le problème de Cauchy pour le cas de la superposition d'une onde simple sur un état simple a été discuté dans le Chapitre 2 pour un système général (2.1). Ces résultats peuvent être appliqués pour résoudre le problème de Cauchy associé au système d'équations de la dynamique des fluides (3.1).

La superposition non-linéaire de plusieurs ondes sur un état simple du système non-homogène (3.1) peut aussi être étudiée. Dans ce cas, on fait l'hypothèse que l'application tangentielle $du(x)$ est la somme d'un élément non-homogène et de plusieurs éléments homogènes :

$$\begin{aligned}
&du(x) = \sum_{r=1}^{k} \xi^r \gamma_d \otimes \lambda^d + \xi^0 \gamma_0 \otimes \lambda^0, \quad k \leq 2\\
&\sum_{\mu,j} a_j^{s\mu} \gamma_d^j \lambda_\mu^d = 0, \qquad \sum_{\mu,j} a_j^{s\mu} \gamma_0^j \lambda_\mu^0 = b^s,\\
&\xi^d(x) \neq 0, \qquad \xi^0 = 1,
\end{aligned}$$

où $1 \leq s \leq m$ et $1 \leq d \leq k$. Les solutions de cette forme existent et peuvent être écrites en termes des invariants de Riemann pourvu que les commutateurs de tous les champs vectoriels γ_α et γ_β soient des combinaisons linéaires de ces champs, autrement dit : $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \in \mathrm{Span}\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\}$, où $\alpha, \beta \in \{0, 1, ..., k\}$. Dans ce cas, les vecteurs $\gamma_0, ...\gamma_k$ peuvent être normalisés de manière à obtenir $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = 0$, $\alpha, \beta \in 0, 1, ..., k$. Par conséquent, les vecteurs γ_0, γ_1, ..., γ_k forment un système holonome et la surface qui leur est tangente peut être paramétrisée par

$$u = f(r), \qquad r = (r^0, r^1, ..., r^k),$$

de sorte que

$$\frac{\partial f}{\partial r^\sigma}(r) = \gamma_\sigma(r), \qquad \sigma \in (0, 1, ..., k).$$

Comme les vecteurs $\gamma_0, ...\gamma_k$ sont présumés linéairement indépendants et qu'on a la condition

$$du(x) = \sum_{\sigma=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial r^\sigma} dr^\sigma, \qquad dr^\sigma = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{\partial r^\sigma}{\partial x^\mu} dx^\mu,$$

on obtient le système sous forme Pfaff

$$dr^\sigma(x) = \xi^\sigma \lambda^\sigma(r), \qquad \xi^\sigma \neq 0, \sigma \in \{0, 1, ..., k\},$$

dont une solution existe si les conditions suivantes sont satisfaites [4]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda^\sigma}{\partial r^\sigma}(r) = \alpha_\sigma \lambda^\sigma(r), &\qquad &\frac{\partial \lambda^d}{\partial r^\sigma}(r) = \beta^d_\sigma \lambda^d(r) + \zeta^d_\sigma \lambda^\sigma(r), \\ &\lambda^{\sigma_1} \wedge \lambda^{\sigma_2} \wedge \lambda^{\sigma_3} \neq 0, &\qquad &\text{pour} \;\; \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3, \end{aligned}$$

où α_σ, β^d_σ et ζ^d_σ sont des fonctions données de r. Les cas distincts $\alpha_d \neq 0$ et $\alpha_d = 0$ $(1 \leq d \leq k)$ sont étudiés de manière similaire à celle employée dans le Chapitre 2 pour $k = 1$. Les éléments intégrals simples du Chapitre 3 peuvent être employés pour déterminer les solutions des équations de la dynamique des fluides (3.1). Ces solutions impliquent la superposition de plusieurs ondes simples sur un état simple.

Bibliographie

[1] A.M. GRUNDLAND : Riemann invariants. *In* C. ROGERS et T. Bryant MOODIE, éditeurs : *Wave Phenomena : Modern Theory and Applications*, volume 97 de *North-Holland Mathematics Studies*, pages 123–152. North-Holland, 1984.

[2] A. M. GRUNDLAND : Riemann invariants for nonhomogeneous of quasilinear partial differential equations. condition of involution. *Bull. Acad. Pol. Sc. SÃ©r Tech. 4*, 1974.

[3] A.M. GRUNDLAND : Algebraic properties of non-homogeneous equations of magnetohydrodynamics in the presence of gravitational and coliolis forces. Exemple of solutions- simple states. *Arch. Mech. Stos.*, (27(1)), 1975.

[4] A. M. GRUNDLAND et R. ZELAZNY : Simple waves in quasilinear hyperbolic systems. I, II. Riemann invariants for the problem of simple wave interactions. *Journal of Mathematical Physics*, 24(9):2315–2328, 1983.

[5] A. M. GRUNDLAND et R. ZELAZNY : Simple waves in quasilinear hyperbolic systems. I and II. Theory of simple waves and simple states. Examples of applications. *Journal of Mathematical Physics*, 24(9):2305–2314, 1983.

[6] Wolfram Research, INC. : Mathematica, Version 12.2. Champaign, IL, 2020.

[7] R. COURANT et K.O. FRIEDRICHS : *Supersonic Flow and Shock Waves*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012.

[8] J. DIEUDONNE : *Foundations of Modern Analysis*. Numéro vol. 1 de Pure and applied mathematics. Read Books, 2006.

[9] M. Rieutord : *Une introduction Ã la dynamique des fluides.* LMD Physique. De Boeck SupÃ©rieur, 2014.

[10] L.D. Landau, E.M. Lifshitï¸ sï¸¡ et S. Medvedev : *Physique théorique : Mécanique des fluides.* Physique théorique. Éditions MIR, 2012.

[11] A. Jeffrey : *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves.* Research notes in mathematics. Pitman, 1976.

[12] B.L. Rozhdestvenskii et N.N. Janenko : *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics.* Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1983.

[13] F. John : Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 27(3):377–405, 1974.

[14] W. Slebodzinski : *Formes extÃ©rieures et leur applications.* Monografie matematyczne. Panstwowe Wydawn. Naukowe, 1954.

[15] A.M. Grundland : *Nonlinear Superposition of Simple Waves in Nonhomogeneous Systems*, pages 587–587. Springer New York, Boston, MA, 1981.

[16] D.J. Acheson et F.D.J. Acheson : *Elementary Fluid Dynamics.* Comparative Pathobiology - Studies in the Postmodern Theory of Education. Clarendon Press, 1990.

[17] P.M. Gerhart et R.J. Gross : *Fundamentals of Fluid Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Company, 1985.

[18] S. Chandrasekhar : *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.* Dover Books on Physics. Dover Publications, 2013.

Annexe A

Tables récapitulatives

Nous introduisons la notation suivante : une solution existante est notée + et une solution inexistante est notée -. Les ondes simples entropiques, acoustiques et hydrodynamiques sont respectivement notées par E, A_ϵ et H. Les états simples entropiques, acoustiques et hydrodynamiques sont quant à eux respectivement notés par E^0, A_ϵ^0 et H^0.

$\boldsymbol{E^0}$	$\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\neq 0$		+
	$\vec{g}\cdot\vec{\Omega}= 0$		+
$\boldsymbol{A_\epsilon^0}$	$\vec{\lambda}\times\vec{\Omega}\neq 0$	$\vec{\lambda}\cdot\vec{\Omega}\neq 0$	-
		$\vec{\lambda}\cdot\vec{\Omega}= 0$	+
	$\vec{\lambda}\times\vec{\Omega}= 0$	$\vec{g}\cdot\vec{\Omega}\neq 0$	-
		$\vec{g}\cdot\vec{\Omega}= 0$	+
$\boldsymbol{H^0}$	$\vec{\lambda}\times\vec{\Omega}\neq 0$	$\vec{\lambda}\cdot\vec{\Omega}= 0$	+
	$\vec{\lambda}\times\vec{\Omega}= 0$	$\vec{g}\cdot\vec{\Omega}= 0$	+
		$\vec{g}\times\vec{\Omega}= 0$	+

TABLE A.1 – États simples existants (solutions de rang 1).

	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{A_\epsilon}$	$\boldsymbol{H}$
$\boldsymbol{E^0}$	+	+	-
$\boldsymbol{A_\epsilon^0}$	+	-	-
$\boldsymbol{H^0}$	+	+	-

TABLE A.2 – Superpositions existantes (solutions de rang 2).

<table>
<tr><td rowspan="5">$\boldsymbol{E^0 E}$</td><td rowspan="2">$\alpha_1 = 0$</td><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\alpha_1 \neq 0$</td><td rowspan="2">$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$</td><td>$\vec{g}\times\vec{\Omega} \neq 0$</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\vec{g}\times\vec{\Omega} = 0$</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
</table>

TABLE A.3 – Superposition d'une onde entropique simple E sur un état entropique simple E^0

<table>
<tr><td rowspan="4">$\boldsymbol{E^0 A_\epsilon}$</td><td rowspan="3">$\alpha_1 = 0$</td><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$</td><td>$\kappa \neq 1$</td><td>-</td></tr>
<tr><td>$\kappa = 1$</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\alpha_1 \neq 0$</td><td colspan="3">-</td></tr>
</table>

TABLE A.4 – Superposition d'une onde acoustique simple A_ϵ sur un état entropique simple E^0

<table>
<tr><td rowspan="9">$\boldsymbol{A_\epsilon^0 E}$</td><td rowspan="4">$\alpha_1 = 0$</td><td rowspan="2">$\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} \neq 0$</td><td>$\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} \neq 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>$\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} = 0$</td><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\alpha_1 \neq 0$</td><td rowspan="3">$\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} \neq 0$</td><td>$\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} \neq 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} = 0$</td><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$</td><td>-</td></tr>
<tr><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$</td><td>+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} = 0$</td><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} \neq 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
<tr><td>$\vec{g}\cdot\vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">+</td></tr>
</table>

TABLE A.5 – Superposition d'une onde entropique simple E sur un état acoustique simple A_ϵ^0

<table>
<tr><td rowspan="7">$\boldsymbol{H^0E}$</td><td rowspan="5">$\alpha_1 = 0$</td><td rowspan="3">$\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} \neq 0$
$\vec{\lambda}^0 \cdot \vec{\Omega} = 0$</td><td rowspan="2">$\dot{p} = 0$</td><td>$\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$</td><td>-</td></tr>
<tr><td>$\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\dot{p} \neq 0$</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} = 0$</td><td>$\vec{g} \cdot \vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td>$\vec{g} \times \vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\alpha_1 \neq 0$</td><td rowspan="2">$\vec{\lambda}^0 \times \vec{\Omega} = 0$</td><td>$\vec{g} \times \vec{\Omega} \neq 0$
$\vec{g} \cdot \vec{\Omega} \neq 0$</td><td colspan="2">+</td></tr>
<tr><td>$\vec{g} \times \vec{\Omega} = 0$</td><td colspan="2">-</td></tr>
</table>

TABLE A.6 – Superposition d'une onde entropique simple E sur un état hydrodynamique simple H^0