Université du Québec

Université du Québec à Trois-Rivières

Sur une représentation spectrale des solutions de l'équation de Sturm-Liouville et ses puissances généralisées

Jessica Turcotte

Mémoire présenté comme exigence partielle à l'obtention
De la maîtrise en mathématiques et informatique appliquées

Trois-Rivières, Canada
Septembre, 2018

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Sébastien Tremblay, directeur de maîtrise
Département de mathématiques et informatique
UQTR

M. Dominic Rochon, membre du jury
Département de mathématiques et informatique
UQTR

M. Fadel Touré, membre du jury
Département de mathématiques et informatique
UQTR

Sur une représentation spectrale des solutions de l'équation de Sturm-Liouville et ses puissances généralisées

Jessica Turcotte

Sommaire

On introduit d'abord le système d'équations de Sturm-Liouville de la forme $u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$ ainsi que les fonctions propres associées à ce système. On définit par la suite une généralisation des puissances formelles classiques de la forme $(x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}$. Ces puissances généralisées, dénotées par $X^{(n)}(x_0, x)$ et $\widetilde{X}^{(n)}(x_0, x)$, sont définies à partir d'une fonction $f(x)$ non nulle et correspondent aux puissances classiques lorsque $f = 1$. Ainsi, à partir d'une solution particulière $f(x)$ du problème homogène de Sturm-Liouville $\lambda = 0$, une solution générale du problème de Sturm-Liouville non homogène est écrite en termes d'une représentation en séries de puissances généralisées et des puissances de la valeur spectrale λ. Les puissances généralisées sont également utilisées afin d'obtenir le développement en série de Taylor des fonctions réelles analytiques.

En considérant le principe d'alternance apparaissant dans ces puissances généralisées, des dérivées ainsi que des intégrales généralisées dépendantes de f sont introduites. Ces nouveaux concepts sont finalement utilisés afin de revisiter certains résultats classiques des mathématiques. En autres, de nouveaux résultats qui généralisent le binôme de Newton ainsi que certaines identités trigonométriques et hyperboliques sont obtenus.

In a spectral representation of Sturm-Liouville solutions and its generalized powers

Jessica Turcotte

Abstract

We first introduce the system of Sturm-Liouville equations of the form $u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$ as well as the eigenfunctions associated with this system. We then define a generalization of the formal powers of the form $(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. These generalized powers, denoted by $X^{(n)}(x_0, x)$ and $\widetilde{X}^{(n)}(x_0, x)$, are defined from a nonzero function $f(x)$ and correspond to the classical powers when $f = 1$. Thus, from a particular solution $f(x)$ of the homogeneous problem of Sturm-Liouville $\lambda = 0$, a general solution of the non-homogeneous Sturm-Liouville problem is written in terms of a series representation of generalized powers and powers of the spectral value λ. The generalized powers are also used to obtain the Taylor series development of real analytic functions.

Considering the principle of alternation appearing in these generalized powers, derivatives as well as generalized integrals dependent on f are introduced. These new concepts are finally used to revisit some classical results of mathematics. Among others, new results that generalize Newton's binomial as well as certain trigonometric and hyperbolic identities are obtained.

AVANT-PROPOS

L'aboutissement de ce projet de recherche n'aurait pas été possible sans l'appui de mon directeur de recherche, M. Sébastien Tremblay. En plus de se révéler un excellent guide tout au long de mes recherches, M. Tremblay m'a permis d'approfondir mes connaissances des mathématiques et de développer de nouvelles techniques dans ce domaine. Je tiens à le remercier pour toute cette confiance et son soutient.

En plus de mon directeur de recherche, l'appui financier de l'Institut des Sciences Mathématiques (ISM), ainsi que celui du département de mathématiques et d'informatiques de L'UQTR à travers les bourses qui m'ont été accordées m'ont permis de me concentrer sur les recherches de mon mémoire. Il m'est donc impossible de ne pas leur adresser des remerciements bien mérités.

Enfin, je tiens à remercier tous mes proches, ma famille et mes amis, d'avoir enduré mes discours auquels ils ne comprenaient rien. Ils ont été d'un grand soutient moral pour moi.

Table des matières

Sommaire i

Abstract ii

Avant-propos iii

Table des matières iv

Table des figures vi

Introduction 1

1 Problèmes de Sturm-Liouville 3
- 1.1 Introduction à l'équation de Sturm-Liouville 3
- 1.2 Un exemple commun d'équation de Sturm-Liouville 9
- 1.3 Complétude d'un système de fonctions propres 14

2 Généralisation de puissances et solutions de l'équation de Sturm-Liouville 18
- 2.1 Généralisation de puissances 18
- 2.2 Complétude de suites liées à la généralisation de puissances 23
- 2.3 Généralisation des séries de Taylor 29

3 Propriétés des dérivées, antidérivées et puissances généralisées 38
- 3.1 Dérivées généralisées 38

3.2 Antidérivées généralisées 47
3.3 Application de la dérivée et de l'anti-dérivée généralisées 56
3.4 Généralisation de fonctions analytiques par les puissances formelles . 69

Conclusion **80**

Bibliographie **82**

A Fonctions propres **85**

B Espace L_p **88**

Table des figures

2.1 $\widetilde{X}^{(1)}(x)$, $X^{(1)}(x)$ et $p(x) = x$ 22
2.2 $\widetilde{X}^{(2)}(x)$, $X^{(2)}(x)$ et $p(x) = x^2$ 22
2.3 $\widetilde{X}^{(3)}(x)$, $X^{(3)}(x)$ et $p(x) = x^3$ 22
2.4 $\widetilde{X}^{(4)}(x)$, $X^{(4)}(x)$ et $p(x) = x^4$ 22

3.1 Fonctions exponentielle et exponentielles généralisées 72
3.2 Fonctions sinus et sinus généralisées 77
3.3 Fonctions cosinus et cosinus généralisées 77
3.4 Fonctions sinus hyperbolique et sinus hyperboliques généralisées 78
3.5 Fonctions cosinus hyperbolique et cosinus hyperboliques généralisées . . . 78

Introduction

Encore de nos jours, et probablement plus que jamais, les mathématiques évoluent à pas de géant. En effet, à chaque année, des milliers de théorèmes apparaissent dans les revues spécialisées. Ces nouveaux résultats permettent aux mathématiciens d'explorer de nouvelles avenues qui étaient encore inconnues peu de temps avant. Ainsi, de nouvelles théories sont développées et les enchevêtrements avec d'autres disciplines se multiplient. Il n'est donc pas surprenant que des résultats, dits classiques, soient revisités afin d'élaborer de nouvelles alternatives mathématiques tenant compte des découvertes contemporaines.

C'est dans ce contexte que se situe ce mémoire : nous allons réinvestir la théorie des équations différentielles de Sturm-Liouville, un sujet classique des mathématiques, à travers un résultat qui est paru il y a dix ans. Ce résultat permet d'exprimer la solution générale de ces systèmes de Sturm-Liouville par une série de puissances de la valeur propre du système (voir [10]). Cette série de puissances utilise des fonctions, définies récursivement, qui généralisent les fonctions de puissances du type

$$(x - x_0)^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

apparaissant, entre autres, dans les séries de Taylor.

Il est bien connu que la très grande majorité des phénomènes ou des théories de la physique sont représentés par des équations différentielles, très souvent du deuxième ordre. Les sytèmes de Sturm-Liouville sont d'une importance fondamentale en mathématiques, mais également en physique. En effet, c'est probablement le système d'équations différentielles qui possède le plus d'applications en physique. Le résultat principal de la théorie étant l'existence d'une base hilbertienne de fonctions propres associées à des valeurs propres formant une suite strictement croissante. Ce résultat étant fondamental, entre autres, en mécanique quantique et dans tous les phénomènes ondulatoires de la physique.

Le premier chapitre de ce mémoire vise à se familiariser avec la théorie classique des systèmes de Sturm-Liouville. Nous allons présenter les résultats principaux entourant cette théorie. Les fonctions propres du système de Sturm-Liouville possèdent des propriétés pour le moins intéressantes telles que la complétude du système qu'elles forment et l'orthogonalité. Au chapitre 2, on présente le théorème qui exprime la solution générale des équations de Sturm-Liouville en termes de séries spectrales et des fonctions de puissances généralisées

$$X^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad \widetilde{X}^{(n)}(x) \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Ces fonctions indicées par un $n \in \mathbb{N}$ et définies par une fonction complexe $f(x)$ fixée, généralisent les fonctions de puissances (1). L'indice de ces fonctions généralisées se comporte en effet comme une puissance, bien qu'il ne soit pas une véritable puissance, du moins tant que $f(x)$ n'est pas une constante. L'étude des fonctions de puissances généralisées constitue l'objectif principal de ce mémoire. En effet, on sait très peu de choses sur ces fonctions malgré leur utilisation importante aux cours des dix dernières années. La définition de dérivées généralisées est également introduite dans ce chapitre et sera étudiée en détail au chapitre suivant. Le chapitre 2 est clos par la transformation permettant de passer des dérivées standards aux dérivées généralisées. Le chapitre 3 est consacré aux nouveaux résultats que nous avons obtenus sur les fonctions de puissances, la dérivée et l'intégrale généralisées. Ces résultats s'avéreront fort utiles pour la suite des choses dans cette théorie. En particulier, nous avons obtenu une formule du type binôme de Newton généralisé qui permet d'obtenir chacune des fonctions (2) à partir de celles qui la précèdent. Ce résultat est probablement le plus important de ce mémoire avec les identités trigonométriques elliptique et hyperbolique généralisées proposées comme conjecture à la fin du chapitre 3.

Chapitre 1

Problèmes de Sturm-Liouville

1.1 Introduction à l'équation de Sturm-Liouville

Avant de s'attaquer au sujet principal de ce mémoire, soit le développement d'une théorie supersymétrique, il nous faut introduire les équations qui permettent d'entrevoir la naissance des fonctions clés qui la composent. Les équations de Sturm-Liouville sont des équations différentielles de second ordre. Elles sont très appréciées par les physiciens, car elles permettent de modéliser certaines situations. Entre autres, elles sont utilisées dans les problèmes de vibration ou encore lorsqu'on fait face à des ondes stationnaires. De plus, elles se révèlent intéressantes dans des problèmes d'oscillation. Ici, on se restreint davantage aux mathématiques au coeur de cette fameuse équation.

L'équation de Sturm-Liouville est définie pour un intervalle $[a, b]$ et dans sa forme auto-adjointe, elle s'écrit :

$$(s(x)\varphi'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))\,\varphi(x) = 0,$$

où les fonctions s, ρ et q sont des fonctions connues définies dans les réelles dont l'image est dans les complexes avec $a \leq x \leq b$.

La fonction à valeur réelle φ et la constante λ sont les inconnues. On appelle les constantes λ des valeurs propres de l'équation de Sturm-Liouville, elles peuvent être complexes ou réelles selon les cas. De plus, la fonction qui l'accompagne, soit $\rho(x)$, est une fonction de poids.

La forme auto-adjointe de l'équation de Sturm-Liouville permet de la reconnaître facilement. Par contre, lorsqu'une équation de second ordre est présentée sous sa forme développée, il est moins évident de déterminer si elle est de Sturm-Liouville.

$$a(x)\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + [\lambda c(x) - d(x)]\,\varphi(x) = 0$$

On peut la réécrire sous la forme auto-adjointe en utilisant les relations suivantes.

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp\left(\int_a^x \frac{b(u)}{a(u)}du\right), \\ \rho(x) &= s(x)\frac{c(x)}{a(x)}, \\ q(x) &= s(x)\frac{d(x)}{a(x)}. \end{aligned}$$

On est face à une équation de Sturm-Liouville si ces fonctions répondent aux conditions suivantes. D'abord, pour que cette transformation soit valable, il faut que les fonctions $s(x)$, $\rho(x)$ et $q(x)$ soient continues pour $x \in [a, b]$. De plus, les fonctions $s(x)$ et $\rho(x)$ doivent être strictement positive pour $x \in]a, b[$. En effet, si $s(x) = 0$ à un moment entre les deux bornes, alors il ne s'agit tout simplement pas d'un cas de Sturm-Liouville.

Un exemple classique de l'équation de Sturm-Liouville est l'équation suivante :

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0.$$

Dans ce cas, les trois fonctions connues sont $s(x) = 1$, $\rho(x) = 1$ et $q(x) = 0$. Cette équation particulière de Sturm-Liouville reviendra fréquemment dans cette section.

Un autre exemple bien connu est l'équation de Bessel

$$\begin{aligned} (x\varphi')' + \lambda(x\varphi) = 0 \\ \Rightarrow x\varphi'' + \varphi' + \lambda x\varphi = 0 \end{aligned}$$

où $s(x) = x$, $\rho(x) = x$ et $q(x) = 0$. Cette équation vient du mathématicien allemand Friedrich Wilhelm Bessel, en 1816, qui l'utilise afin de représenter le mouvement des planètes en astronomie.

On vient d'introduire les équations dites de Sturm-Liouville, toutefois elles viennent rarement seules. On parle d'un problème de Sturm-Liouville ou d'un système de Sturm-Liouville lorsqu'on ajoute des conditions aux limites, c'est-à-dire des conditions impliquant les bornes a et b, à une équation de Sturm-Liouville.

Les solutions d'un problème de Sturm-Liouville avec des conditions aux limites sont dénotées par des couples (φ, λ) où la fonction φ n'est pas identiquement nulle pour $x \in [a, b]$. Les fonctions φ associées à une valeur propre λ sont appelées fonctions propres. La notion de fonctions propres est abordée plus en détail dans l'annexe A présenté à la fin de ce document. D'ailleurs l'ensemble des valeurs propres d'un système de Sturm-Liouville est appelé le spectre de ce système.

Il y a deux type de problèmes de Sturm-Liouville. Le problème est dit singulier si on répond à une des conditions suivantes pour les bornes a et b :

- au moins une des bornes est l'infini ;
- pour un intervalle fini, $s(a)\rho(a) = 0$ ou $s(b)\rho(b) = 0$;
- pour un intervalle fini, $q(x)$ est discontinue en une des bornes.

Au contraire, il est dit régulier s'il ne correspond pas aux conditions précédentes. Dans ce cas, on peut conclure qu'on a plutôt la propriété suivante :

$$s(a)\rho(a) \neq 0 \quad \text{et} \quad s(b)\rho(b) \neq 0.$$

Un problème singulier de Sturm-Liouville bien connu est l'équation de Schrödinger sur un espace à une dimension avec pour intervalle $I = (-\infty, \infty)$.

Avant de commencer à analyser les solutions d'un problème de Sturm-Liouville, introduisons une notion souvent utilisée dans cette théorie : l'orthogonalité. On a l'habitude de voir deux droites orthogonales, voire même d'appliquer l'orthogonalité sur deux vecteurs, mais généraliser ce concept aux fonctions apportent davantage d'opportunités lorsqu'on a un système de fonctions. La notion de distance et de projection dépendent directement de celle d'orthogonalité, ainsi sa généralisation vers des fonctions permet de développer ces autres notions sur un espace moins commun ; le système de fonctions mentionné plus tôt, par exemple.

Définition 1.1. Deux fonctions f et g sont orthogonales sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

L'orthogonalité qui intervient dans la résolution d'un problème de Sturm-Liouville fait intervenir la fonction de poids $\rho(x)$. On modifie donc la définition 1.1, afin de prendre en compte ce poids supplémentaire.

Définition 1.2. Deux fonctions propres φ_1 et φ_2 sont orthogonales sur $[a, b]$ par rapport à la fonction ρ si et seulement si

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Remarque 1. Cette dernière définition revient à dire que les fonctions $\varphi_1\sqrt{\rho}$ et $\varphi_2\sqrt{\rho}$ sont orthogonales selon la définition 1.1. ▲

Pour un cas de Sturm-Liouville, on souhaite avoir la particularité que pour deux valeurs propres distinctes les fonctions propres qui leur sont associées soient orthogonales. Ainsi, à partir d'un problème de Sturm-Liouville on obtiendrait un système de fonctions orthogonales les unes avec les autres en fonction du poids $\rho(x)$.

Théorème 1.1. Soit (φ_1, λ_1) et (φ_2, λ_2) deux solutions d'une équation de Sturm-Liouville satisfaisant les conditions aux limites :

$$s(b)\left[\varphi_1(b)\varphi_2'(b) - \varphi_1'(b)\varphi_2(b)\right] = s(a)\left[\varphi_1(a)\varphi_2'(a) - \varphi_1'(a)\varphi_2(a)\right],$$

alors $(\lambda_1 - \lambda_2)\displaystyle\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0.$

Par conséquent, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors φ_1 et φ_2 sont orthogonales par rapport à ρ.

Démonstration.
Puisque (φ_1, λ_1) est une solution de l'équation de Sturm-Liouville, alors on a bien

$$(s\varphi_1')' + (\lambda_1\rho - q)\varphi_1 = 0.$$

Multiplions cette équation par φ_2 et intégrons-la.

$$\int_a^b \varphi_2(s\varphi_1')' + \int_a^b \varphi_2(\lambda_1\rho - q)\varphi_1 = 0.$$

Utilisons la méthode d'intégration par partie sur $\displaystyle\int_a^b \varphi_2(s\varphi_1')'$.

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad & u = \varphi_2 && \text{et} \quad \mathrm{d}v = (s\varphi_1')'\mathrm{d}x \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{d}u = \varphi_2'\mathrm{d}x && \qquad\quad v = s\varphi_1' \end{aligned}$$

Ainsi l'équation devient :

$$\varphi_2 s\varphi_1'\Big|_a^b - \int_a^b \varphi_2' s\varphi_1' + \int_a^b \varphi_2(\lambda_1\rho - q)\varphi_1 = 0. \tag{1.1}$$

Faisons les mêmes étapes en inversant les rôles de φ_1 et φ_2.

$$\varphi_1 s\varphi_2'\Big|_a^b - \int_a^b \varphi_1' s\varphi_2' + \int_a^b \varphi_1(\lambda_2\rho - q)\varphi_2 = 0. \tag{1.2}$$

On soustrait les équations (1.1) et (1.2).

$$\varphi_2 s\varphi_1'\Big|_a^b - \int_a^b \varphi_2' s\varphi_1' + \int_a^b \varphi_2(\lambda_1\rho - q)\varphi_1 - \varphi_1 s\varphi_2'\Big|_a^b + \int_a^b \varphi_1' s\varphi_2' - \int_a^b \varphi_1(\lambda_2\rho - q)\varphi_2 = 0$$
$$\Rightarrow \varphi_2 s\varphi_1'\Big|_a^b - \varphi_1 s\varphi_2'\Big|_a^b + \int_a^b \lambda_1\rho\varphi_1\varphi_2 - \int_a^b \lambda_2\rho\varphi_1\varphi_2 = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi_2(b)s(b)\varphi_1'(b) - \varphi_2(a)s(a)\varphi_1'(a) - \varphi_1(b)s(b)\varphi_2'(b) + \varphi_1(a)s(a)\varphi_2'(a)&\\ + (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \rho\varphi_1\varphi_2 = 0&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow s(b)\left[\varphi_2(b)\varphi_1'(b) - \varphi_1(b)\varphi_2'(b)\right] - s(a)\left[\varphi_2(a)\varphi_1'(a) - \varphi_1(a)\varphi_2'(a)\right]&\\ + (\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \rho\varphi_1\varphi_2 = 0&\end{aligned}$$

Étant donné les conditions aux limites définies dans l'hypothèse du théorème, on obtient le résultat désiré.

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \rho\varphi_1\varphi_2 = 0.$$

□

Cette propriété d'orthogonalité est particulièrement intéressante puisqu'en résolvant un système de Sturm-Liouville, on obtient plusieurs fonctions orthogonales les unes avec les autres. Cette famille de fonctions se révèle très utile dans plusieurs domaines touchant les mathématiques et la physique. Il peut entre autres servir à la projection d'une fonction.

Avant de s'intéresser à des problèmes de Sturm-Liouville particuliers, penchons-nous d'abord sur les conditions aux limites. Deux cas de conditions aux limites sont rencontrés plus fréquemment. Les conditions aux limites sont séparables, si elles peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\cos\alpha\varphi'(a) - \sin\alpha\varphi(a) = 0$$
$$\cos\beta\varphi'(b) + \sin\beta\varphi(b) = 0,$$

où α et β sont des constantes réelles. Si on résout l'équation de Sturm-Liouville avec ces conditions, alors les deux solutions φ_1 et φ_2 sont liées ainsi :

$$\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' = 0,$$

lorqu'on les évalue aux bornes, c'est à dire en a ou en b. Cette particularité justifie le choix des conditions aux limites utilisées dans le théorème 1.1. Par conséquent, ce théorème s'applique pour des problèmes de Sturm-Liouville avec des conditions aux limites séparables. Cette contrainte générale peut prendre comme forme plus spécifique, un des trois cas suivants :

$$\begin{array}{llll} 1. & \varphi'(a) = 0 & \varphi'(b) = 0 & (\alpha = 0, \beta = 0), \\ 2. & \varphi(a) = 0 & \varphi(b) = 0 & (\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2), \\ 3. & \varphi'(a) = 0 & \varphi'(b) + \varphi(b) = 0 & (\alpha = 0, \beta = \pi/4). \end{array}$$

Bien entendu, il y a une infinité de possibilité pour les conditions aux limites séparables en faisant varier α et β, mais dans de nombreux problèmes on rencontre l'un de ces trois exemples.

Les conditions aux limites peuvent également être périodiques. Dans ce cas, elles respectent les deux conditions :

$$\varphi(a) = \varphi(b),$$
$$\varphi'(a) = \varphi'(b),$$

avec $s(a) = s(b)$. De plus, si on a deux solutions avec ces conditions aux bornes, alors $s(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')\Big|_a^b = 0$. Cette conséquence permet, elle aussi, de respecter les hypothèses du théorème 1.1. Ainsi, lorsque les conditions aux limites sont séparables ou périodiques, ce qui est le cas pour de nombreux problèmes de la physique, alors les fonctions propres de l'équation de Sturm-Liouville forment un système de fonctions orthogonales.

1.2 Un exemple commun d'équation de Sturm-Liouville

Dans un premier temps, intéressons-nous à un problème fréquent de Sturm-Liouville avec l'équation $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ qui a déjà été mentionnée dans la section précédente et des conditions aux limites séparables.

Proposition 1.1. Les solutions de $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ avec les conditions aux limites $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$ sont données par les valeurs propres et les fonctions propres associées :

$$\lambda_n = \left[\frac{n\pi}{(b-a)}\right]^2,$$

$$\varphi_n(x) = \sin\left[\frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}\right],$$

où $n = 0, 1, \ldots$.

On applique le théorème 1.1 aux solutions de cette proposition, ainsi on sait qu'elles sont orthogonales les unes avec les autres sur $x \in \,]a, b[$. Comme il a été mentionné, on peut utiliser ce système de fonctions orthogonales pour faire une projection de fonction. Ainsi, une fonction $f(x)$ définie sur le même intervalle peut être projetée sur ce système et nous donner une série de Fourier ne dépendant que du sinus.

Pour la même équation de Sturm-Liouville, on peut modifier les conditions aux limites et on en utilise des périodiques plutôt que des séparables, afin d'obtenir un nouveau résultat.

Proposition 1.2. Les solutions de l'équation $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ avec des conditions aux limites périodiques tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$ et $\varphi'(a) = \varphi'(b)$ sont :

$$\lambda_n = \left[\frac{2n\pi}{(b-a)}\right]^2$$
$$\varphi_n = A_n \cos\left(\frac{2n\pi}{(b-a)}\right) + B_n \sin\left(\frac{2n\pi}{(b-a)}\right)$$

où $n = 0, 1, \ldots$ et A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

Dans ce genre de problème de Sturm-Liouville avec des conditions aux limites périodiques, l'intervalle prend souvent la forme $]-L, L[$ où $2L = b - a$. Appliquons le théorème 1.1 sur le système de solutions (φ_n, λ_n) de la proposition 1.2, alors les fonctions propres sont orthogonales pout $x \in]-L, L[$. On peut donc projeter une certaine fonction $f(x)$ sur ce système et, dans ce cas spécifique, on obtient un résultat bien intéressant ; une série de Fourier généralisée. Ce mémoire n'abordant pas les séries de Fourier, ainsi on ne s'attarde pas sur ce fascinant résultat.

La proposition 1.2 peut être réécrite en prenant en compte l'intervalle $[-L, L]$. Ainsi, les solutions sont :

$$\lambda_n = \left[\frac{n\pi}{L}\right]^2,$$
$$\varphi_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On remarque que dans le cas de conditions aux limites périodiques, deux fonctions indépendantes, $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ et $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, interviennent pour une même valeur propre. Dans un cas aux conditions aux limites séparables, il n'y a qu'une seule fonction propre indépendante pour chaque λ. Cette constatation nous conduit à un théorème, mais d'abord, il nous faut introduire un résultat préliminaire.

Lemme 1.1. [Principe d'existence et d'unicité d'une solutions d'équation différentielle de second ordre] Soit p, q et f des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, alors pour $x_0 \in [a, b]$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

possède une solution unique qui satisfait les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0.$$

Ce lemme ressemble beaucoup à un théorème semblable pour les équations de premier ordre. La différence majeure, outre le degré de l'équation, vient du fait que parmi les conditions initiales on en ajoute une concernant la dérivée de la solution y. Il nous permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.2. Soit φ_1, φ_2 des solutions du problème de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{aligned}(s\varphi')' + (\lambda\rho - q)\varphi = 0, &\qquad a < x < b\\ \cos\alpha\varphi'(a) - \sin\alpha\varphi(a) = 0,&\\ \cos\beta\varphi'(b) + \sin\beta\varphi(b) = 0,&\end{aligned}$$

où $\qquad \varphi_1(x) \not\equiv 0, \qquad \varphi_2 \not\equiv 0, \qquad s(a)s(b) \neq 0.$

Alors il existe une constante $C \neq 0$ tel que $\varphi_1(x) = C\varphi_2(x)$.

Démonstration.

Par hypothèse, on a $s(a)s(b) \neq 0$, donc $s(a) \neq 0$. Considérons deux cas.

1. Si $\cos\alpha = 0$, alors la condition limite en $x = a$ devient $\varphi(a) = 0$. On a $\varphi_1'(a) \neq 0$ et $\varphi_2'(a) \neq 0$. Dans le cas constraire, supposons $\varphi_1'(a) = 0$ et $\varphi_1(a) = 0$, alors d'après le lemme 1.1 il existe une solution unique. Ainsi $\varphi_1(x) = 0$ ce qui est une contradiction. Avec un même raisonnement pour φ_2, on a bien $\varphi_1'(a) \neq 0$ et $\varphi_2'(a) \neq 0$.

   On peut trouver une troisième solution à partir d'une combinaison linéaire des solutions φ_1 et φ_2
$$\varphi(x) = \varphi_2'(a)\varphi_1(x) - \varphi_1'(a)\varphi_2(x), \tag{1.3}$$

où l'on fixe les constantes multipliant φ_1 et φ_2.

Comme il s'agit d'une solution de notre problème de Sturm-Liouville, alors lorsque $x = a$, on a

$$\varphi(a) = \varphi_2'(a)\varphi_1(a) - \varphi_1'(a)\varphi_2(a) = 0.$$

De plus, si on dérive l'équation (1.3) et qu'on l'évalue en $x = a$, on a

$$\varphi'(a) = \varphi_2'(a)\varphi_1'(a) - \varphi_1'(a)\varphi_2'(a) = 0.$$

Du lemme 1.1, $\varphi(x) \equiv 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_2'(a)\varphi_1(x) - \varphi_1'(a)\varphi_2(x) = 0 \\ \Rightarrow \varphi_1(x) &= \frac{\varphi_1'(a)}{\varphi_2'(a)}\varphi_2(x) \end{aligned}$$

On pose $C = \frac{\varphi_1'(a)}{\varphi_2'(a)} \neq 0$ pour obtenir la conclusion du théorème.

2. Si $\cos\alpha \neq 0$, alors en $x = a$

$$\begin{aligned} &\cos\alpha\varphi'(a) - \sin\alpha\varphi(a) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi'(a) = \tan\alpha \cdot \varphi(a). \end{aligned} \tag{1.4}$$

On affirme que $\varphi_1(a) \neq 0$ et $\varphi_2(a) \neq 0$. Dans le cas contraire, on a $\varphi_1(a) = 0$ et ça entraine $\varphi_1'(a) = 0$ de l'équation (1.4). Avec le lemme 1.1 on voit la contradiction, car $\varphi_1(x) \equiv 0$. Donc on a bien $\varphi_1(a) \neq 0$ et $\varphi_2(a) \neq 0$.

Prenons une autre solution comme étant une combinaison linéaire de φ_1 et φ_2, en fixant les constantes les multipliant.

$$\varphi(x) = \varphi_2(a)\varphi_1(x) - \varphi_1(a)\varphi_2(x). \tag{1.5}$$

En $x = a$,

$$\varphi(a) = \varphi_2(a)\varphi_1(a) - \varphi_1(a)\varphi_2(a) = 0.$$

Dérivons l'équation (1.5) et voyons en $x = a$,

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= \varphi_2(a)\varphi_1'(a) - \varphi_1(a)\varphi_2'(a) \\ &= \varphi_2(a)\tan\alpha \cdot \varphi_1(a) - \varphi_1(a)\tan\alpha \cdot \varphi_2(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Du lemme 1.1, on a $\varphi(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi_2(a)\varphi_1(x) - \varphi_1(a)\varphi_2(x) = 0\\ \Rightarrow \varphi_1(x) = \frac{\varphi_1(a)}{\varphi_2(a)}\varphi_2(x)\end{aligned}$$

en posant $C = \frac{\varphi_1(a)}{\varphi_2(a)} \neq 0$, on obtient la conclusion du théorème.

Tous les cas ont été vérifiés. □

Dans plusieurs problèmes concernant les équations de Sturm-Liouville, il s'avère souvent utile de déterminer si les valeurs propres sont toutes positives ou nulle. Voici un théorème permettant de vérifier si on a bien $\lambda \geq 0$ pour toutes les valeurs propres λ.

Théorème 1.3. Soit (φ, λ) une solution d'un problème de Sturm-Liouville satisfaisant la condition

$$\begin{aligned}s\varphi\varphi'\Big|_a^b = s(b)\varphi(b)\varphi'(b) - s(a)\varphi(a)\varphi'(a) \leq 0,\\ \text{alors} \quad \lambda\int_a^b \rho\varphi^2 \geq \int_a^b q\varphi^2 + \int_a^b s(\varphi')^2.\end{aligned}$$

De plus, si $q(x) \geq 0$ pour $a < x < b$, alors tous les termes à droite de l'inégalité sont non nuls et $\lambda \geq 0$.

Démonstration.

Multiplions l'équation de Sturm-Liouville par φ :

$$\varphi(s\varphi')' + (\lambda\rho - q)\varphi^2 = 0.$$

Intégrons cette dernière équation sur $x \in \,]a, b[$,

$$\int_a^b \varphi(s\varphi')' + \int_a^b (\lambda\rho - q)\varphi^2 = 0.$$

Utilisons l'intégration par partie sur la première intégrale.

$$\begin{array}{lll}\text{Posons} & u = \varphi & dv = (s\varphi')'dx \\ & du = \varphi' dx & v = s\varphi'\end{array},$$

$$\begin{aligned}s\varphi\varphi'\Big|_a^b - \int_a^b s(\varphi')^2 + \int_a^b (\lambda\rho - q)\varphi^2 = 0\\ \Rightarrow \quad s\varphi\varphi'\Big|_a^b + \lambda\int_a^b \rho\varphi^2 = \int_a^b s(\varphi')^2 + \int_a^b q\varphi^2.\end{aligned}$$

Étant donné l'hypothèse du théorème on sait que $s\varphi\varphi'\Big|_a^b \leq 0$, donc on a bien le résultat désiré. □

Le théorème permet de constater que la condition $s\varphi\varphi'\Big|_a^b \leq 0$ est suffisante pour conclure que toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, mais elle n'est pas nécessaire.

1.3 Complétude d'un système de fonctions propres

On sait déjà que les fonctions propres d'un problème de Sturm-Liouville sont orthogonales deux à deux grâce au théorème 1.1. Avant d'introduire une nouvelle caractéristique des problèmes de Sturm-Louville, il nous faut présenter la notion de complétude d'une suite de fonction.

Définition 1.3. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une norme $||\cdot||$. La suite $W = (w_n)_{n=0}^{\infty}$ de vecteurs de V est dite complète dans V si tout élément de l'espace peut être approché de manière arbitrairement précise, selon la norme $||\cdot||$, par les éléments de W. On entend par là que pour tout $v \in V$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, \text{ tel que } \left|\left| v - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} a_n w_n \right|\right| < \varepsilon,$$

où $\mathbb{K}$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La complétude du système de fonctions propres provenant d'un problème de Sturm-Liouville permet d'écrire toute fonction $f(x)$ lisse dans l'intervalle $[a, b]$ en une série convergente de ces fonctions propres.

Théorème 1.4. Il existe une suite infinie de solution (φ_n, λ_n) d'un problème régulier de Sturm-Liouville avec des conditions aux limites séparables

$$\begin{aligned} (s\varphi')' + (\lambda\rho - q)\varphi = 0, \qquad & a < x < b, \\ \cos\alpha\varphi'(a) - \sin\alpha\varphi(a) = 0 & \\ \text{et} \quad \cos\beta\varphi'(b) + \sin\beta\varphi(b) = 0. & \end{aligned}$$

Si $f(x)$ pour $x \in [a, b]$ est une fonction lisse satisfaisant ces conditions, alors la série suivante converge,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\varphi_n(x) = f(x), \qquad a \leq x \leq b$$

où les coefficients A_n sont des coefficients de Fourier respectant :

$$A_n \int_a^b \varphi_n^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Remarque 2. Les fonctions propres obtenues, φ_n sont non nulle et ne sont pas uniques. En effet, on peut multiplier une fonction propre par une constante non nulle et il s'agit toujours d'une fonction propre associée à la même valeur propre. Afin d'éviter cette confusion, on peut normaliser les fonctions propres en exigeant $\int_a^b \varphi_n^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 1$. Toutefois, ce n'est pas nécessaire, car même en normalisant les fonctions propres, il reste toujours la possibilité de prendre pour fontion propre $-\varphi_n$ qui est tout aussi valide. Par conséquent, cette étape n'est pas toujours nécessaire. ▲

Remarque 3. La preuve de ce théorème nécessite des notions avancées en analyse qui dépassent le cadre théorique sur lequel on souhaite mettre l'emphase dans ce mémoire. Il est toutefois possible de trouver cette démonstration dans [4]. ▲

Lorsqu'on désire résoudre un problème de Sturm-Liouville, il nous faut obtenir les valeurs propres et les fonctions propres. Pour celà, il est nécessaire de faire quelques transformations.

1. D'abord, éliminons le coefficient associé à la dérivée première de la fonction recherchée. Pour ce faire, nous allons introduire une nouvelle fonction, ainsi

que ses dérivées :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \varphi(x)\sqrt{s(x)}\\ \psi' &= \varphi'\sqrt{s} + \varphi\left(\frac{s'}{2\sqrt{s}}\right)\\ \psi'' &= \varphi''\sqrt{s} + \varphi'\frac{s'}{\sqrt{s}} + \varphi(\sqrt{s})''.\end{aligned}$$

Ainsi, par ces transformation, on modifie l'équation de Stum-Liouville, afin de faciliter sa résolution

$$s\psi'' + \left(\lambda\rho - q - \sqrt{s}(\sqrt{s})''\right)\psi = 0. \tag{1.6}$$

Si le ratio ρ/s est constant, alors cette transformation est la seule nécessaire afin de réussir à obtenir les valeurs propres et les fonctions propres qui sont les solutions du problème. Heureusement, ce rapport est constant dans plusieurs problèmes. Par contre, si ce n'est pas le cas, il faut apporter d'autres transformations qui toucheront aussi les variables indépendantes.

2. Si la première substitution ne suffit pas, il faut faire une substitution de Liouville, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\frac{\rho}{s}\right)^{-1/4} v(z)\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= \left(\frac{\rho}{s}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Avec cette transformation, on change la variable indépendante x pour z. En appliquant ces changements à (1.6), on obtient comme nouvelle équation :

$$v'' + (\lambda - \tilde{q}(z))v = 0, \qquad \tilde{a} < z < \tilde{b}$$

où $\tilde{a} = z(a)$ et $\tilde{b} = z(b)$. De plus, la fonction $\tilde{q}$ est une nouvelle fonction de z qui peut être calculée à partir de q et des modifications apportées.

3. Ensuite, on doit prendre les coordonnées polaires dans le plan de (v, v'). Il s'agit de la substitution de Prüfer :

$$\begin{aligned}v(z) &= R(z)\sin\theta(z),\\ v'(z) &= R(z)\cos\theta(z).\end{aligned}$$

L'équation de Sturm-Liouville à laquelle on applique toutes les transformations présentées devient :

$$\theta' = \cos^2\theta + (\lambda - \tilde{q}(z))\sin^2\theta,$$
$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{2}(1 + \lambda - \tilde{q}(z))\sin 2\theta.$$

Lorsqu'on résout ces nouvelles équations, on obtient des valeurs de θ et de R. Faire les transformations inverses permet de trouver les solutions (φ, λ) du problème de Sturm-Liouville initial.

Ces deux dernières substitutions ne sont pas utiles pour la suite du mémoire, c'est pourquoi on ne s'y attarde pas.

CHAPITRE 2

Généralisation de puissances et solutions de l'équation de Sturm-Liouville

2.1 Généralisation de puissances

Dans cette section, on introduira une définition permettant de généraliser les puissances du type $(x-x_0)^k$ qui composent, entre autres, les séries de Taylor réelles. Ces puissances formelles seront à la base de toute la théorie développée dans ce mémoire. On s'intéresse à une généralisation des puissances formelles. Cette généralisation apparaît pour la première fois en 2008, soit dans l'article [12]. Afin de les introduire, on considère une fonction $f \in C^2(a,b) \cap C^1\,[a,b]$ à valeur complexe pour laquelle $f(x) \neq 0$ sur l'intervalle $[a,b]$.

La définition qui va suivre est basée sur le fait que les puissances $(x-x_0)^n$ peuvent être définies récursivement comme

$$(x-x_0)^n = n \int_{x_0}^{x} (s-x_0)^{n-1}\, \mathrm{d}s.$$

En fixant la fonction f, on obtient la définition suivante :

Définition 2.1. Les puissances généralisées sont définies comme :

$$\widetilde{X}^{(0)}(x) \equiv X^{(0)}(x) \equiv 1,$$
$$\widetilde{X}^{(n)}(x) = n \int_{x_0}^{x} \widetilde{X}^{(n-1)}(s) \left(f^2(s)\right)^{(-1)^{n-1}} \mathrm{d}s, \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$X^{(n)}(x) = n \int_{x_0}^{x} X^{(n-1)}(s) \left(f^2(s)\right)^{(-1)^{n}} \mathrm{d}s, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

où $x_0 \in [a, b]$.

Il existe une certaine symétrie entre les deux fonctions $\widetilde{X}^{(n)}$ et $X^{(n)}$. En effet, si on substitue la fonction f (resp. f^{-1}) par la fonction f^{-1} (resp. f), alors les puissances de $X^{(n)}$ (resp. $\widetilde{X}^{(n)}$) sont remplacées par celles de $\widetilde{X}^{(n)}$ (resp. $X^{(n)}$). De plus, on constate aussi que la fonction f^2 possède un exposant négatif ou positif suivant la parité de n, c'est-à-dire s'il est pair ou impair.

À partir des fonctions établies dans la définition 2.1, nous allons en écrire de nouvelles qui nous sembleront plus naturelles à utiliser dans la suite de ce mémoire.

Définition 2.2. Soit $\psi^{(k)}$ et $\varphi^{(k)}$, des puissances définies par :

$$\psi^{(k)}(x) = \begin{cases} X^{(k)}(x), & k \text{ impair} \\ \widetilde{X}^{(k)}(x), & k \text{ pair} \end{cases},$$

$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \widetilde{X}^{(k)}(x), & k \text{ impair} \\ X^{(k)}(x), & k \text{ pair} \end{cases},$$

pour $k = 0, 1, \ldots$.

De nouveau, on constate la symétrie qui existe entre les fonctions φ et ψ lorsque l'on substitue f par f^{-1}, et inversement.

Voyons quelques exemples des fonctions de puissances $X^{(n)}$ et $\widetilde{X}^{(n)}$.

Exemple 1. Si $f = a$, une constante réelle, alors

$$\widetilde{X}^{(n)}(x) = n \cdot \left(a^2\right)^{(-1)^{n-1}} \int_{x_0}^{x} \widetilde{X}^{(n-1)}(s)\mathrm{d}s,$$
$$X^{(n)}(x) = n \cdot \left(a^2\right)^{(-1)^{n}} \int_{x_0}^{x} X^{(n-1)}(s)\mathrm{d}s.$$

Voyons pour $n = 1$

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^{(1)}(x) &= a^2 \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s \\ &= a^2(x - x_0), \\ X^{(1)} &= a^{-2} \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s \\ &= \frac{x - x_0}{a^2}.\end{aligned}$$

Voyons pour $n = 2$

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^{(2)}(x) &= \frac{2}{a^2} \int_{x_0}^{x} a^2(s - x_0)\mathrm{d}s \\ &= \left[s^2 - 2x_0 s\right]_{x_0}^{x} \\ &= (x - x_0)^2, \\ X^{(2)}(x) &= 2a^2 \int_{x_0}^{x} \frac{s - x_0}{a^2}\mathrm{d}s \\ &= \left[s^2 - 2x_0 s\right]_{x_0}^{x} \\ &= (x - x_0)^2.\end{aligned}$$

▲

Dans cet exemple, on voit justement apparaître les puissances que les fonctions $\widetilde{X}^{(n)}$ et $X^{(n)}$ généralisent à une constante près. Évidemment, le cas $f = 1$ nous donne les puissances standards $(x - x_0)^n$.

Voyons un autre exemple un peu plus complexe afin de comprendre le fonctionnement de ces fonctions particulières.

Exemple 2. Posons $f = e^{\frac{1}{2}x}$ et $x_0 = 0$. Alors les fonctions généralisant les puissances deviennent :

$$\widetilde{X}^{(n)}(x) = n \int_{x_0}^{x} \widetilde{X}^{(n-1)}(s) \left(e^s\right)^{(-1)^{n-1}} \mathrm{d}s,$$
$$X^{(n)}(x) = n \int_{x_0}^{x} X^{(n-1)}(s) \left(e^s\right)^{(-1)^{n}} \mathrm{d}s.$$

Lorsque $n = 1$ on trouve

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^{(1)}(x) &= \int_{x_0}^{x} e^{s}\mathrm{d}s = e^{x} - e^{x_0} \\
&= e^{x} - 1, \\
X^{(1)}(x) &= \int_{x_0}^{x} e^{-s}\mathrm{d}s = e^{-x_0} - e^{-x} \\
&= 1 - e^{-x}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 2$ on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^{(2)}(x) &= 2\int_{x_0}^{x} (e^{s} - e^{x_0})e^{-s}\mathrm{d}s \\
&= 2(x - x_0) + 2e^{x_0 - x} - 2 \\
&= 2x + 2e^{-x} - 2, \\
X^{(2)}(x) &= 2\int_{x_0}^{x} (e^{-x_0} - e^{-s})e^{s}\mathrm{d}s \\
&= 2e^{x - x_0} + 2(x_0 - x) - 2 \\
&= -2x + 2e^{x} - 2.
\end{aligned}$$

On continue ainsi pour obtenir quelques valeurs supplémentaires.

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^{(3)}(x) &= 6\left(e^{x}(x-2) + x + 2\right), \\
X^{(3)}(x) &= 6\left(e^{-x}(x+2) + x - 2\right), \\
\widetilde{X}^{(4)}(x) &= 12\left(x^2 - 4x - 2e^{-x}(x+3) + 6\right), \\
X^{(4)}(x) &= 12\left(x^2 + 4x + 2e^{x}(x-3) + 6\right).
\end{aligned}$$

▲

Nous pouvons trouver encore davantage de résultats pour chacune des généralisations de puissances. Cependant, on remarque que pour obtenir des expressions analytiques d'ordre n, il faut d'abord obtenir l'expression d'ordre $n - 1$ puisque ces puissances formelles sont récursives. Comme cette méthode peut être ardue à mettre en oeuvre, on développera une alternative pour faciliter ces calculs lorsque n est grand plus loin dans ce mémoire.

Comparons les couples de puissances généralisées obtenues à partir de la fonction $f = e^{\frac{1}{2}x}$ avec la puissance formelle classique qui lui serait asociée. Dans les graphiques présentés aux figures 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 la courbes continue en vert représente la fonction de puissance selon le graphique, ainsi cette fonction prend les valeurs $p(x) = x^k$ pour $k = 1, 2, 3, 4$, puisqu'on a toujours la condition initiale $x_0 = 0$. En rouge ligné, on a les fonctions trouvées dans l'exemple précédent pour les $\widetilde{X}^{(k)}$, k prenant les valeurs de 1 à 4. Enfin, les courbes bleues pointillées proviennet des fonctions $X^{(k)}$ où $k = 1, 2, 3, 4$ selon le graphique

En plus d'avoir un comparatif avec les puissances standards, on remarque aussi la symétrie qui existe entre les deux généralisations.

FIGURE 2.1 – $\widetilde{X}^{(1)}(x)$, $X^{(1)}(x)$ et $p(x) = x$

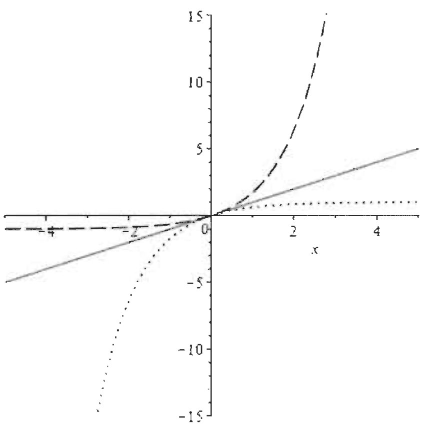


FIGURE 2.2 – $\widetilde{X}^{(2)}(x)$, $X^{(2)}(x)$ et $p(x) = x^2$

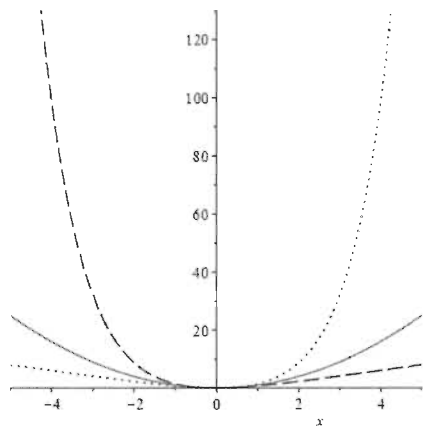


FIGURE 2.3 – $\widetilde{X}^{(3)}(x)$, $X^{(3)}(x)$ et $p(x) = x^3$

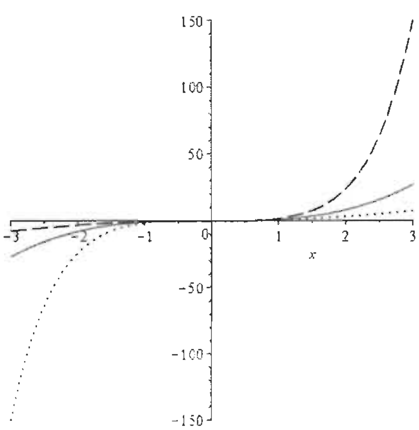
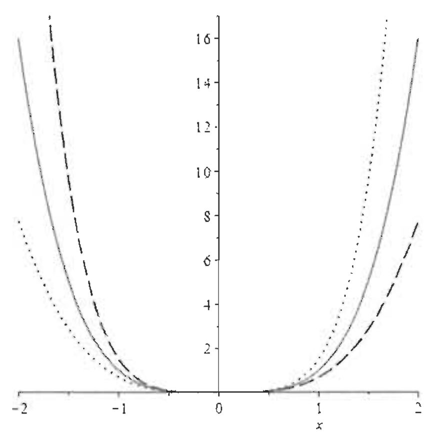


FIGURE 2.4 – $\widetilde{X}^{(4)}(x)$, $X^{(4)}(x)$ et $p(x) = x^4$



Considérons un dernier exemple qui peut être vu comme une perturbation des puissances standards.

Exemple 3. Posons $f = \sqrt{x+1}$ et $x_0 = 0$. Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^{(1)}(x) &= \int_0^x (s+1)\mathrm{d}s \\ &= \frac{x^2}{2} + x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^{(2)}(x) &= \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1), \\ \widetilde{X}^{(3)}(x) &= \frac{3x}{8}\left(x^3 + 4x^2 + 6x + 4\right) - \frac{3}{2}(x+1)^2\ln(x+1), \\ \widetilde{X}^{(4)}(x) &= \frac{3}{8}\left(x\left(x^3 + 4x^2 + 10x + 12\right) - 4\left(\left(2x^2 + 4x + 3\right)\ln(x+1)\right)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^{(1)}(x) &= \ln(x+1), \\ X^{(2)}(x) &= (x+1)^2\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} - x, \\ X^{(3)}(x) &= \frac{3}{2}\left(\left((x+1)^2+1\right)\ln(x+1) - x(x+2)\right), \\ X^{(4)}(x) &= \frac{3}{8}\left(4(x+1)^2\left((x+1)^2+2\right)\ln(x+1) - 5x^4 - 20x^3 - 26x^2 - 12x\right).\end{aligned}$$

▲

2.2 Complétude de suites liées à la généralisation de puissances

Considérons maintenant des suites de fonctions faisant intervenir les puissances formelles présentées à la définition 2.1.

$$\begin{aligned}&\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \quad &&\text{et} \quad \{g_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ &f_n = f\widetilde{X}^{(2(n-1))} \quad &&\text{et} \quad g_n = fX^{(2n-1)}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous montrerons que ces suites de fonctions sont complètes dans l'espace $L_2(a,b)$. On parle ici de la complétude de suites de fonctions, dont la définition générale a été présentée dans le chapitre précédent avec la définition 1.3.

L'espace vectoriel L_2, dans lequel nous prouverons la complétude, est un espace bien particuler qu'on définit plus en détails dans l'annexe B.

Les suites $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ne sont pas construites de façon aléatoire, en fait elles sont liées aux solutions de l'équation de Sturm-Liouville. Le théorème qui suit permet de faire ce lien si précieux et est présenté dans [15]. Il apporte aussi la solution générale à une équation de Sturm-Liouville de grande importance en utilisant la généralisation des puissances formelles.

Théorème 2.1. Soit q une fonction complexe continue dépendant d'une variable réelle $x \in [a,b]$ et λ une valeur propre complexe arbitraire. Supposons qu'il existe une solution f à l'équation homogène

$$f'' + qf = 0$$

sur (a,b) tel que $f \in C^2(a,b)$. Ce f ainsi que ${}^1/_f$ sont restreints à l'intervalle $[a,b]$. Alors la solution générale associée à la valeur propre λ de l'équation de Sturm-Liouville $u'' + qu = \lambda u$ sur (a,b) a la forme suivante :

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes et

$$u_1 = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2k)!} \widetilde{X}^{(2k)} \qquad \text{et} \qquad u_2 = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(2k+1)!} X^{(2k+1)}. \tag{2.2}$$

Ces séries convergent uniformément sur $[a,b]$.

Remarque 4. Si on restreint ces solutions aux conditions initiales, c'est-à-dire qu'on pose $x = x_0$, alors les valeurs de $X^{(2k+1)}$ et $\widetilde{X}^{(2k)}$ s'annulent pour $k = 1, 2, \dots$ et $X^{(1)}$, par contre, $\widetilde{X}^{(0)}$ nous donne 1. En effet, tous les cas nuls impliquent une intégrale allant de x_0 à x_0 ce qui donne nécessairement zéro.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &= f(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k)!}\widetilde{X}^{(2k)} \\ &= f(x_0)\left(\frac{\lambda^0}{0!}\cdot 1\right) \\ &= f(x_0) \\ u_2(x_0) &= f(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k+1)!}X^{(2k+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De plus, si on dérive chacune de ces solutions et qu'on impose encore la condition $x = x_0$, on obtient aussi des résultats intéressants. D'abord, calculons ces dérivées.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f'(x)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k)!}\widetilde{X}^{(2k)}\right) + f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k-1)!}\widetilde{X}^{(2k-1)}\left(f^2(x)\right)^{(-1)^{2k-1}}, \\ u_2(x) &= f'(x)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k+1)!}X^{(2k+1)}\right) + f(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(2k)!}X^{(2k)}\left(f^2(x)\right)^{(-1)^{2k+1}}. \end{aligned}$$

On remarque qu'en posant $x = x_0$ on obtient :

$$u_1'(x_0) = f'(x_0) \qquad \text{et} \qquad u_2'(x_0) = \frac{1}{f(x_0)}.$$

▲

Remarque 5. Le théorème 2.1 donne deux solutions à une équation bien particulière de Sturm-Liouville. En effet, on ne parle plus du cas général du premier chapitre, on concentre nos efforts vers un cas particulier qui est loin d'être anodin. L'équation $u''+qu = \lambda u$ correspond à l'équation de Schrödinger unidimensionnelle indépendante du temps :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x),$$

où E représente la valeur propre, c'est-à-dire l'énergie du système. Cette équation est cruciale en mécanique quantique.

▲

Avant de s'intéresser à une généralisation des séries de Taylor, il faut montrer la complétude des suites $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ces suites doivent être complètes pour tous les x_0 prenant place sur l'intervalle $[a, b]$. Toutefois, avant de commencer à démontrer cette complétude, nous avons besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme 2.1 (Théorème de Lauricella). Soit V, un espace vectoriel normé et soit $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite complète dans V. Alors pour tout autre suite $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ de V, on a

$$(w_n)_{n=0}^{\infty} \text{ est complète dans } V \quad \Leftrightarrow \quad (w_n)_{n=0}^{\infty} \text{ est complète dans } (v_n)_{n=0}^{\infty}\ ^{a}.$$

a. La suite des (v_n) n'est pas un espace vectoriel à proprement parler, mais la notion de complétude de suites s'applique tout de même ici pour cet ensemble.

Démonstration.

i) Soit (w_n) une suite complète dans V, alors tout élément de V, en particulier les v_n, peuvent être approchés par une combinaison linéaire finie des premiers (w_i).

   Par conséquent, (w_n) est complète pour la suite des v_n.

ii) Soit $x \in V$ et $\varepsilon > 0$, comme (v_n) est une suite complète dans V, alors de la définition de complétude, $\exists a_0, a_1, \dots a_N \in \mathbb{K}$ tel que

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Supposons que $|a_n| \neq 0 \quad \forall n = 0, 1, \cdots, N$ (si un $|a_n| = 0$ pour un certain n, alors on l'ignorerait simplement).

   Puisque la suite (w_n) est complète dans (v_n), alors on a en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists b_{n,0}, b_{n,1}, \dots, b_{n,N_n} \in \mathbb{K}, \text{ pour } N_n \in \mathbb{N},$$
$$\left\| v_n - \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)|a_n|}.$$

   Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \left(a_n \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right) \right\| &= \left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n + \sum_{n=0}^{N} a_n v_n - \sum_{n=0}^{N} \left(a_n \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right) \right\| \\
&\leq \left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n \right\| + \sum_{n=0}^{N} \left\| a_n v_n - a_n \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right\| \\
&= \left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n \right\| + \sum_{n=0}^{N} |a_n| \left\| v_n - \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + (N+1)|a_n| \frac{\varepsilon}{2(N+1)|a_n|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent, selon la définition de complétude, (w_n) est une suite complète dans V.

□

Étant donné ce résultat préliminaire, nous pouvons prouver le théorème qui nous importe, soit celui de la complétude des suites $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Théorème 2.2. Soit (a, b) un intervalle fini et une fonction $f \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$ à valeur complexe tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors les deux suites $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui ont été définies plus tôt sont complètes dans $L_2(a, b)$ lorsque $x_0 = a$.

Démonstration.

Selon les hypothèses initiales, on voit un lien évident avec le théorème 2.1. Par conséquent, f est une solution de l'équation $f'' + qf = 0$ ce qui implique que $q := \frac{-f''}{f}$ est une fonction continue à valeur complexe sur l'intervalle $[a, b]$. Considérons l'équation de Sturm-Liouville suivante

$$u'' + qu = \lambda u \tag{2.3}$$

avec des conditions limites séparables

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Soit λ_n pour $n = 1, 2, \ldots$, les valeurs propres qui satisfont à l'équation (2.3) et aux condions limites séparables, alors les fonctions propres associées à ces valeurs propres coïncident avec la solution u_2 présentée en (2.2) où on pose $\lambda = \lambda_n$. Ainsi, les fonctions propres peuvent toutes être écrites à partir du système de fonctions g_n. Cette relation permettra de voir une convergence uniforme avec le développement en série du système de fonctions g_n.

Si la multiplicité d'un λ_n est supérieure à 1, alors on obtient ce qu'on appelle les fonctions propres généralisées grâce à la différentiation des fonctions propres correspondantes au paramètre spectral λ_n.

Puisque toutes les fonctions propres correspondent à la fonction u_2 dans (2.2), on conclut que les fonctions en question sont toutes des séries qui font intervenir les différents termes de la suite des fonctions (g_n). C'est aussi le cas pour les dérivées des fonctions propres, elles sont toutes une série des g_n. Par conséquent, on a que toutes les fonctions propres et les fonctions propres généralisées peuvent être représentées par des séries uniformément convergente en terme de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$.

L'ensemble des solutions, c'est-à-dire les fonctions propres et les fonctions propres généralisées, d'un problème de Sturm-Liouville est complet sur l'espace correspondant, ici $L_2(a,b)$.

Donc $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ est complet dans le système formé par les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de ce problème. Du théorème de Lauricella, on peut conclure que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ est complet dans $L_2(a,b)$ lorsque $x_0 = a$.

De façon semblable, il est possible de démontrer la complétude de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en modifiant les conditions limites pour

$$f'(a)u(a) - f(a)u'(a) = u(b) = 0.$$

Dans ce cas, on a une correspondance avec la solution u_1 de (2.2) et les fonctions propres qui sont des solutions de l'équation de Sturm-Liouville. De plus, les fonctions propres généralisées sont obtenues de la même manière, c'est-à-dire en dérivant les fonctions propres associé à un λ_n dont la multiplicité est plus grande que 1. On a aussi que le système des fonctions propres et des fonctions propres généralisées peut entièrement être représenté par les $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Enfin, on applique une fois de plus le théorème de Lauricella pour conclure à la complétude du système $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans $L_2(a,b)$ lorsque $x_0 = a$. □

Par contre, la complétude n'a été montrée que pour un x_0 associé à une des bornes. Si ce n'est pas le cas, alors chacune des suites n'est pas complète à moins de les combiner, c'est-à-dire qu'on va montrer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ forme un système complet dans $L_2(a,b)$.

Théorème 2.3. Soit (a,b) un intervalle fini et $f \in C^2(a,b) \cap C^1[a,b]$ une fonction à valeur complexe tels que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors le système $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ défini précédemment avec x_0 un point arbitraire de $[a,b]$ est complet dans $L_2(a,b)$.

Démonstration.
Tout comme la preuve précédente, on considère $q := \frac{-f''}{f}$ dans l'équation (2.3) avec

les mêmes conditions aux bords, c'est-à-dire

$$u(a) = u(b) = 0$$

En se référant au théorème 2.1, on peut écrire toutes les fonctions propres et les fonctions propres généralisées de ce problème selon des séries uniformément convergentes en termes des fonctions de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$. D'après la complétude du système formé par les fonctions propres et les fonctions propres généralisées et du théorème de Lauricella, alors $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ est complet dans $L_2(a, b)$. □

Enfin, comme les fonctions f et $1/f$ ont un lien particulier dans la généralisation de puissances présentée dans la définition 2.1, alors il est possible de faire les mêmes constatations sur la complétude des suites de fonctions

$$\left\{\frac{1}{f}X^{(2(n-1))}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{et} \qquad \left\{\frac{1}{f}\widetilde{X}^{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

sur $L_2(a, b)$.

2.3 Généralisation des séries de Taylor

Dans cette section, nous nous intéressons aux séries de Taylor réelles. Par conséquent, nous allons considérer une fonction f réelle dans cette section.

D'ailleurs, dans un développement en série de Taylor, on voit apparaître une suite de puissances $(x - x_0)^n$, ainsi que les dérivées successives en x_0. On a déjà généralisé les puissances formelles avec $\widetilde{X}^{(n)}$ et $X^{(n)}$. Par conséquent, il est naturel de généraliser une dérivée en lien avec les fonctions de puissances avant d'envisager la généralisation des séries de Taylor. Donc, posons la dérivée généralisée de la façon suivante :

Définition 2.3. Soit $h \in C^k(a,b)$. Appelons dérivée généralisée l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} &D^{(0)}(h) = h, \\ &D^{(k)}(h) = \left(f^2(x)\right)^{(-1)^{k-1}} \left(D^{(k-1)}(h)\right)', \quad k = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

où le prime représente la dérivée standard.

On obseve, entre autres, qu'en posant $f = 1$ on obtient la dérivée habituelle.

Cette section, comme son nom l'indique, établit une généralisation des séries de Taylor réelle qu'on connaît bien. De façon intuitive, on se sert d'un polynôme généralisé faisant intervenir les puissances formelles. Ainsi, considérons le polynôme généralisé prennant comme terme principal le $\psi^{(k)}(x)$ venant de la définition 2.2.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \psi^{(k)}(x). \tag{2.4}$$

Sachant que $\psi^{(k)}(x)$ et $\varphi^{(k)}(x)$ sont composés de $\widetilde{X}^{(k)}(x)$ et $X^{(k)}(x)$ qui sont des généralisations des puissances $(x - x_0)^n$, alors le polynôme (2.4) qui vient d'être présenté ressemble à celui des séries de Taylor. Par conséquent, on comprend très bien pourquoi les α_k s'écrivent avec une dérivée et une factorielle :

$$\alpha_k = \frac{D^{(k)}(h)(x_0)}{k!}.$$

On remarque que la dérivée standard qui apparaît dans le développement en série de Taylor d'une fonction h est, ici, remplacée par la dérivée généralisée qui vient d'être élaborée. Puisque le polynôme n'est pas infini, on s'intéresse au théorème de Taylor avec la forme (ou le reste) de Lagrange. La généralisation de ce théorème se fait de façon naturelle.

Théorème 2.4 (Généralisation du théorème de Taylor). Soit deux fonctions f et g telles que $\{f, h\} \subset C^{n+1}[x_0, b]$ et $f(x) \neq 0$, alors $\forall x \in [x_0, b]$ il existe $c \in (x_0, x)$ tel que

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^{(k)}(h)(x_0)}{k!} \psi^{(k)}(x) + \frac{D^{(n+1)}(h)(c)}{(n+1)!} \psi^{(n+1)}(x).$$

Démonstration.

On désire vérifier que le reste est bien celui affirmé dans le théorème. Posons ce reste comme étant $R(x) = \frac{D^{(n+1)}(h)(c)}{(n+1)!} \psi^{(n+1)}(x)$.

Pour obtenir ce reste, on doit comparer les polynômes $h(x)$ et $P_n(x)$, ce dernier est défini en (2.4).

Posons $R_n = h - P_n$ (afin de simplifier la notation, on pose temporairement $R = R_n$ et $\psi = \psi^{(n+1)}$).

Grâce à la définition de ψ qui généralise les puissances, on sait qu'en x_0,

$$D^{(k)}(R)(x_0) = D^{(k)}(\psi)(x_0) = 0 \tag{2.5}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$. En effet,

$$\psi(x_0) = \psi^{(n+1)}(x_0) \quad \text{et} \quad \psi^{(n+1)}(x_0) = \begin{cases} X^{(n+1)}(x_0), & n+1 \text{ impair} \\ \widetilde{X}^{(n+1)}(x_0), & n+1 \text{ pair} \end{cases}$$

Dans les deux cas, $n + 1 > 0$ et on a une intégrale classique de x_0 à x_0 qui intervient, donc égale à zéro. La dérivée même généralisée d'une fonction nulle est elle-même nulle.

De plus, en considérant le théorème de la moyenne de Cauchy, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{\psi(x)} &= \frac{R(x) - R(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)}, && \text{de (2.5).} \\ &= \frac{R'(x_1)}{\psi'(x_1)}, && \text{du théorème de la moyenne, avec } x_0 < x_1 < x \leq b. \\ &= \frac{f^2(x_1)R'(x_1)}{f^2(x_1)\psi'(x_1)}, && \text{multiplication d'un terme égale à 1.} \\ &= \frac{D^{(1)}(R)(x_1)}{D^{(1)}(\psi)(x_1)}, && \text{par définition de la dérivée généralisée.} \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes étapes, on peut augmenter le degré de la dérivée généralisée :

$$\begin{aligned}\frac{D^{(1)}(R)(x_1)}{D^{(1)}(\psi)(x_1)} &= \frac{D^{(1)}(R)(x_1) - D^{(1)}(R)(x_0)}{D^{(1)}(\psi)(x_1) - D^{(1)}(\psi)(x_0)} = \frac{\left(D^{(1)}(R)(x_2)\right)'}{\left(D^{(1)}(\psi)(x_2)\right)'} = \frac{f^{-2}\left(D^{(1)}(R)(x_2)\right)'}{f^{-2}\left(D^{(1)}(\psi)(x_2)\right)'} \\ &= \frac{D^{(2)}(R)(x_2)}{D^{(2)}(\psi)(x_2)}\end{aligned}$$

où $x_0 < x_2 < x_1$.

On peut poursuivre ce processus jusqu'à l'obtention de :

$$\frac{R(x)}{\psi(x)} = \frac{D^{(n+1)}(R)(x_{n+1})}{D^{(n+1)}(\psi)(x_{n+1})},$$

où $x_0 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < \ldots < x \leq b$.

On rappelle que le reste R_n est obtenu en soustrayant le polynôme P_n à la fonction h. Par conséquent, lorsque la dérivée généralisée dépasse le degré du polynôme, soit n, alors il ne reste que la fonction h dans l'évaluation du reste. Donc si l'on dérive, toujours avec la dérivée généralisée, à un degré $n+1$, alors on a $D^{(n+1)}(R)(x) = D^{(n+1)}(h)(x)$. On peut aussi déduire que $D^{(n+1)}(\psi^{(n+1)})(x) = (n+1)!$ [1]. Donc,

$$R(x) = \frac{D^{(n+1)}(h)(c)}{(n+1)!}\psi(x)$$

où $c = x_{n+1}$. □

Une fois de plus, on retrouve le théorème classique de Taylor avec sa forme de Lagrange lorsqu'on pose $f \equiv 1$.

De façon tout aussi naturelle, on obtient la forme généralisée des séries de Taylor pour la fonction h.

Définition 2.4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k)}(h)(x_0)}{k!}\psi^{(k)}(x),$$

est appelé séries de Taylor généralisées pour une fonction h.

1. Ce fait sera explicitement démontré dans le chapitre suivant.

Cette définition et celle des séries de Taylor classique sont toutes deux des représentations d'une fonction h autour d'un point x_0, il est donc nécessaire de les comparer. Les coefficients qui apparaissent dans cette forme généralisée sont différents de ceux qu'on voit dans la forme classique de la série de Taylor, ainsi on peut se demander s'il existe un lien entre les coefficients des deux séries. C'est le cas. En effet, on développe dans ce qui suit une relation entre les coefficients des deux séries sous forme de matrice.

Théorème 2.5. Soit f et h des fonctions telles que $\{f, h\} \subset C^n[a, b]$ et $f(x) \neq 0$ avec $x \in [a, b]$.

$$\begin{pmatrix} h(x_0) \\ h'(x_0) \\ h''(x_0) \\ h'''(x_0) \\ \vdots \\ h^{(n)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2(x_0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,1}(x_0) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{3,1}(x_0) & a_{3,2}(x_0) & \frac{1}{f^2(x_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1}(x_0) & a_{n,2}(x_0) & a_{n,3}(x_0) & \cdots & (f^2)^{-\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(0)}(h)(x_0) \\ D^{(1)}(h)(x_0) \\ D^{(2)}(h)(x_0) \\ D^{(3)}(h)(x_0) \\ \vdots \\ D^{(n)}(h)(x_0) \end{pmatrix}$$

où la fonction $a_{n,m}$ est calculée de façon récursive par :

$$a_{n,m} = a'_{n-1,m} + f^{2(-1)^m} a_{n-1,m-1}.$$

Démonstration.

Montrons ce résultat par induction.

La première ligne de la matrice est évidente, car avec un degré nul, la dérivée classique et celle généralisée ne renvoient que la fonction elle-même.

La deuxième ligne n'est pas plus difficile, car $D^{(1)}(h)(x_0) = f^2(x_0)\,(h'(x_0))$.

Afin d'obenir la troisième ligne, on dérive la seconde. En effet, la dérivée classique à la particularité de s'appliquer successivement.

$$\begin{aligned} h'' = (h')' &= \left(\frac{D^{(1)}(h)}{f^2}\right)' \\ &= \frac{1}{f^2}\left(D^{(1)}(h)\right)' + \left(\frac{1}{f^2}\right)' D^{(1)}(h). \end{aligned}$$

De la définition de la dérivée généralisée, on obtient :

$$\begin{aligned} D^{(k+1)}(h) &= (f^2)^{(-1)^k}\left(D^{(k)}(h)\right)' \\ D^{(2)}(h) &= \frac{1}{f^2}\left(D^{(1)}(h)\right)'. \end{aligned}$$

Donc, $h'' = D^{(2)}(h) + \left(\frac{1}{f^2}\right)' D^{(1)}(h)$ ce qui nous donne $a_{2,1} = \left(\frac{1}{f^2}\right)'$.

Supposons qu'on a vérifié la ligne correspondante à la dérivée k-ième $h^{(k)}$ pour k pair, alors

$$h^{(k)} = D^{(k)}(h) + a_{k,k-1}D^{(k-1)}(h) + \cdots + a_{k,1}D^{(1)}(h). \tag{2.6}$$

Il nous faut maintenant montrer la ligne correspondante à $h^{(k+1)}$. On a vu qu'il suffisait de dérivée la ligne précédente, donc on dérive (2.6) :

$$\begin{aligned} h^{(k+1)} = \left(h^{(k)}\right)' = \left(D^{(k)}(h)\right)' + a_{k,k-1}\left(D^{(k-1)}(h)\right)' + \cdots + a_{k,1}\left(D^{(1)}(h)\right)' \\ + a'_{k,k-1}D^{(k-1)}(h) + \cdots + a'_{k,1}D^{(1)}(h). \end{aligned}$$

On fait la substitution suivante $\left(D^{(j)}(h)\right)' = (f^2)^{(-1)^{j+1}}D^{(j+1)}(h)$ pour les $j = 1, \ldots, k$.

$$\begin{aligned} h^{(k+1)} &= \frac{D^{(k+1)}(h)}{f^2} + a_{k,k-1}f^2D^{(k)}(h) + \cdots + a_{k,1}f^2D^{(2)}(h) + a'_{k,k-1}D^{(k-1)}(h) \\ &\quad + \cdots + a'_{k,1}D^{(1)}(h) \\ &= \frac{D^{(k+1)}(h)}{f^2} + a_{k,k-1}f^2D^{(k)}(h) + \left(a'_{k,k-1} + \frac{a_{k,k-2}}{f^2}\right)D^{(k-1)}(h) + \cdots \\ &\quad + \left(a'_{k,2} + a_{k,1}f^2\right)D^{(2)}(h) + a'_{k+1}D^{(1)}(h). \end{aligned}$$

On obtient les équations de $a_{n,m}$ désirées. On fait sensiblement les mêmes calculs pour un k impair et on a montré la relation entre les deux dérivées. □

Notons A_n la matrice de transformation qui apparaît dans le théorème 2.5. Lorsqu'on désire obtenir les valeurs de cette matrice, il nous faut calculer ligne après ligne à cause de la définition récursive des $a_{n,m}$. Est-il possible d'obtenir une formule plus générale qui ne soit pas récursive ?

Notons $h^{[n]}$ lorsqu'on parle de la dérivée classique $n^{\text{ième}}$ de h, afin d'éviter la confusion.

Proposition 2.1 ([15]). On peut évaluer l'élément $a_{n,m}$ de la matrice A_n pour $1 \leq n \leq N$ et $2 \leq m \leq n$, alors

$$a_{n,m} = \sum_{k=m-1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{f^2}\right)^{[n-1-k]} b_{k,m-1},$$

où lorsque m est pair

$$\begin{aligned} b_{k,m} = \sum_{k_1=m-1}^{k-1} \binom{k-1}{k_1} \left(f^2\right)^{[k-1-k_1]} \sum_{k_2=m-2}^{k_1-1} \binom{k_1-1}{k_2} \left(\frac{1}{f^2}\right)^{[k_1-1-k_2]} \cdots \\ \cdot \sum_{k_{m-2}=2}^{k_{m-3}-1} \binom{k_{m-3}-1}{k_{m-2}} \left(\frac{1}{f^2}\right)^{[k_{m-3}-1-k_{m-2}]} \\ \cdot \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}-1} \binom{k_{m-2}-1}{k_{m-1}} \left(f^2\right)^{[k_{m-2}-1-k_{m-1}]} \left(\frac{1}{f^2}\right)^{[k_{m-1}-1]}, \end{aligned}$$

et lorsque m est impair

$$\begin{aligned} b_{k,m} = \sum_{k_1=m-1}^{k-1} \binom{k-1}{k_1} \left(f^2\right)^{[k-1-k_1]} \sum_{k_2=m-2}^{k_1-1} \binom{k_1-1}{k_2} \left(\frac{1}{f^2}\right)^{[k_1-1-k_2]} \cdots \\ \cdot \sum_{k_{m-2}=2}^{k_{m-3}-1} \binom{k_{m-3}-1}{k_{m-2}} \left(f^2\right)^{[k_{m-3}-1-k_{m-2}]} \\ \cdot \sum_{k_{m-1}=1}^{k_{m-2}-1} \binom{k_{m-2}-1}{k_{m-1}} \left(\frac{1}{f^2}\right)^{[k_{m-2}-1-k_{m-1}]} \left(f^2\right)^{[k_{m-1}-1]}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a $2 \leq m \leq k$.

Dans notre définition des séries de Taylor, on a utilisé $\psi^{(k)}$, mais la fonction $\varphi^{(k)}$ aurait tout aussi bien pu jouer ce rôle. En faisant des calculs symétriques à ceux présentés, on peut obtenir un nouveau développement en série de Taylor. Cette seconde généralisation a les mêmes propriétés que la première. C'est seulement grâce au concept de symétrie entourant la fonction f qu'il est possible d'obtenir deux généralisations aussi valable l'une que l'autre. On verra plus loin dans ce mémoire que la dérivée généralisée n'échappe pas à ce principe de symétrie.

Rappelons que le but de ce chapitre est d'établir des relations pour la solution spectrale de Sturm-Liouville. Cela a déjà permis de généraliser quelques concepts intéressants, le dernier en date étant le développement en série de Taylor. D'ailleurs, afin de boucler le sujet, utilisons les séries de Taylor généralisées sur les solutions u_1 et u_2 présentées en (2.2).

Théorème 2.6. Soit un intervalle fini (a, b) et $f \in C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$ une solution de $f'' + qf = 0$ à valeur complexe tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. De plus, les dérivées de f d'ordres inférieurs ou égal à n doivent exister au point $x_0 \in [a, b]$. Par conséquent, les solutions u_1 et u_2 de l'équation $u'' + qu = \lambda u$ qui sont linéairement indépendantes et respectent les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &= f(x_0), & u_1'(x_0) &= f'(x_0), \\ u_2(x_0) &= 0, & u_2'(x_0) &= \tfrac{1}{f(x_0)}, \end{aligned}$$

doivent aussi posséder des dérivées jusqu'à l'ordre n en x_0 pour que les relations suivantes s'appliquent.

$$\begin{pmatrix} {}^{u_1(x_0)}/_{f(x_0)} \\ \left({}^{u_1}/_{f}\right)'(x_0) \\ \left({}^{u_1}/_{f}\right)''(x_0) \\ \left({}^{u_1}/_{f}\right)'''(x_0) \\ \left({}^{u_1}/_{f}\right)^{(4)}(x_0) \\ \vdots \\ \left({}^{u_1}/_{f}\right)^{(n)}(x_0) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \frac{1+(-1)^n}{2}\lambda^{s\frac{n}{2}} \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} u_2(x_0)/f(x_0) \\ \left(u_2/f\right)'(x_0) \\ \left(u_2/f\right)''(x_0) \\ \left(u_2/f\right)'''(x_0) \\ \left(u_2/f\right)^{(4)}(x_0) \\ \vdots \\ \left(u_2/f\right)^{(n)}(x_0) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\lambda^{n-1/2} \end{pmatrix}.$$

où A_n est la matrice de transformation qui apparaît dans la relation entre les séries de Taylor classiques et celles généralisées, soit le théorème 2.5.

Chapitre 3

Propriétés des dérivées, antidérivées et puissances généralisées

Le chapitre précédent constitue la base à ce qui sera étudié dans ce chapitre. En effet, à partir de la généralisation de puissances $X^{(k)}$ et $\widetilde{X}^{(k)}$, nous allons élaborer une nouvelle théorie où la dérivées généralisées sera approfondie et où son opérateur dual, l'antidérivée généralisée, sera introduit. De plus, de nouveaux résultats étonnants seront obtenus pour les puissances généralisées paires.

3.1 Dérivées généralisées

Les puissances formelles définies dans le chapitre précédent ont plusieurs caractéristiques qu'il est intéressant de développer. Entre autres, on a déjà abordé celle cruciale à cette théorie ; la symétrie par rapport à la fonction f. Cette symétrie fait partie de chacun des opérateurs qu'on va définir.

Intéressons-nous d'abord à celui qui a déjà été défini dans la section 2.3. En effet, une dérivée généralisée a déjà été introduite afin de permettre la généralisation du développement en série de Taylor. Rappelons l'énoncé de cette dérivée, présentée dans la défintion 2.3.

$$\begin{aligned} &D^{(0)}h = h, \\ &D^{(k)}h = \left(f^2(x)\right)^{(-1)^{k-1}} \left(D^{(k-1)}h\right)', \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dans cette première définition de la dérivée généralisée, nous avons fait un choix concernant la fonction f. Cette dernière alterne entre un exposant positif et négatif, le choix a été d'imposer que lorsque k est pair, on a f^{-2} qui apparaît dans l'expression et lorsque k est impair, on a plutôt f^2.

De plus, lors de la généralisation des puissances du chapitre précédent, nous avons aussi défini certaines fonctions qui nous semblent plus naturelles, c'est-à-dire celles apparaissant dans la définition 2.2, soit $\psi^{(k)}$ et $\varphi^{(k)}$. En appliquant cette dérivée généralisée directement à ces fonctions, on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.1. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq n \leq m$, alors

$$D^{(n)}\psi^{(m)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}\varphi^{(m-n)}(x), & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!}\psi^{(m-n)}(x), & n \text{ pair} \end{cases},$$

$$D^{(n)}\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}\psi^{(m-n)}(x), & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!}\varphi^{(m-n)}(x), & n \text{ pair} \end{cases}.$$

Remarque 6. Ce théorème est sensiblement le même avec la dérivée et les puissances standards. En effet, on peut facilement se convaincre que c'est un phénomène similaire qui se produit :

$$\begin{aligned} ((x-x_0)^m)' &= m(x-x_0)^{m-1} \\ &= \frac{m!}{(m-1)!}(x-x_0)^{m-1}, \\ ((x-x_0)^m)'' &= m(m-1)(x-x_0)^{m-2} \\ &= \frac{m!}{(m-2)!}(x-x_0)^{m-2}. \end{aligned}$$

On peut justifier cette remarque grâce à l'induction, mais le parallèle avec la proposition présentée est déjà évident. De plus, le fait que les puissances ainsi que les dérivées sont généralisées impliquent qu'on retrouve le cas classique en posant $f \equiv 1$. ▲

Démonstration.

Démontrons le théorème 3.1 par induction. On s'intéresse seulement à la première partie, c'est-à-dire celle s'appliquant à $\psi^{(k)}$, car l'autre se démontre de façon similaire. De plus, on allège la notation en omettant parfois la variable indépendante x.

Lorsque $n = 0$, alors la dérivée généralisée renvoie la fonction elle-même sans modification :

$$\begin{aligned} D^{(0)}\psi^{(m)}(x) &= \psi^{(m)} \\ &= \begin{cases} X^{(m)}, & m \text{ impair} \\ \widetilde{X}^{(m)}, & m \text{ pair} \end{cases} \\ &= \frac{m!}{(m-0)!}\psi^{(m)}. \end{aligned}$$

Ici n est pair, donc on a bien la situation décrite dans le théorème. Par conséquent, ce cas est vérifié.

Voyons le cas $n = 1$:

$$\begin{aligned} D^{(1)}\psi^{(m)}(x) &= f^2 \cdot \left(\psi^{(m)}\right)' \\ &= \begin{cases} f^2 \cdot \left(X^{(m)}\right)' = f^2 m X^{(m-1)} f^{-2}, & m \text{ impair} \\ f^2 \cdot \left(\widetilde{X}^{(m)}\right)' = f^2 m \widetilde{X}^{(m-1)} f^{-2}, & m \text{ pair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} mX^{(m-1)} = m\varphi^{(m-1)}, & m \text{ impair} \\ m\widetilde{X}^{(m-1)} = m\varphi^{(m-1)}, & m \text{ pair} \end{cases} \\ &= m\varphi^{(m-1)}, \end{aligned}$$

puisque n est impair ici, on obtient bien le résultat désiré.

Supposons maintenant que le théorème est vérifié pour $n \in \mathbb{N}$, c'est notre hypothèse d'induction, et montrons qu'il est toujours valide pour $n + 1$.

$$\begin{aligned} D^{(n+1)}\psi^{(m)} &= \left(f^2\right)^{(-1)^n} \left(D^{(n)}\psi^{(m)}\right)' \\ &= \begin{cases} f^{-2}\left(\frac{m!}{(m-n)!}\varphi^{(m-n)}\right)', & n \text{ impair} \\ f^{2}\left(\frac{m!}{(m-n)!}\psi^{(m-n)}\right)', & n \text{ pair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} f^{-2}\left(\varphi^{(m-n)}\right)', & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!} f^{2}\left(\psi^{(m-n)}\right)', & n \text{ pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

On se retrouve avec deux cas, soit $m \in \mathbb{Z}^+$ est impair ou il est pair.

a) Si m impair, alors

$$D^{(n+1)}\psi^{(m)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} f^{-2}\left(X^{(m-n)}\right)', & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!} f^{2}\left(X^{(m-n)}\right)', & n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} f^{-2}(m-n)X^{(m-n-1)}f^2, & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!} f^{2}(m-n)X^{(m-n-1)}f^{-2}, & n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m-n-1)!} \psi^{(m-(n+1))}, & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n-1)!} \varphi^{(m-(n+1))}, & n \text{ pair.} \end{cases}$$

b) Si m pair, alors

$$D^{(n+1)}\psi^{(m)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} f^{-2}\left(\widetilde{X}^{(m-n)}\right)', & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!} f^{2}\left(\widetilde{X}^{(m-n)}\right)', & n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} f^{-2}(m-n)\widetilde{X}^{(m-n-1)}f^2, & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!} f^{2}(m-n)\widetilde{X}^{(m-n-1)}f^{-2}, & n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m-n-1)!} \psi^{(m-(n+1))}, & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n-1)!} \varphi^{(m-(n+1))}, & n \text{ pair.} \end{cases}$$

Dans tous les cas, on confirme bien les résultats du théorème. Par le principe d'induction on peut conclure que le théorème est valide pour la généralisation de puissances $\psi^{(k)}$. De plus, comme $\psi^{(k)}$ et $\varphi^{(k)}$ sont symétriques par la transformation $f \to f^{-1}$, la preuve de $\varphi^{(k)}$ se ferait de façon très semblable. □

On observe une différence majeure entre la dérivée standard et la dérivée généralisée de notre théorie. En effet, pour calculer $h^{(n)}$, soit la dérivée $n^{\text{ième}}$ de h, on peut habituellement enchaîner des dérivées simples n fois $h^{(n)} = (((h')')\cdots)'$. Toutefois, la dérivée généralisée ne possède pas cette caractéristique. En effet, $D^{(2)}h \neq D^{(1)}(D^{(1)}h)$.

Il est connu que la dérivée standard a la particularité d'être linéaire sur les fonctions réelles, il est donc logique que ce soit aussi le cas de sa généralisation. Montrons la linéarité de cette dernière sur les réels.

Proposition 3.2. La dérivée généralisée définie dans notre algèbre, $D^{(k)}h$, est linéaire, c'est-à-dire qu'on a

$$D^{(n)}(\alpha F+\beta G)(x)=\alpha D^{(n)}(F)(x)+\beta D^{(n)}(G)(x),$$

où α, β sont des constantes réelles et $F, G \in C^{(n)}(a,b)$.

Démonstration.
Utilisons le principe d'induction.

Pour $n=0$, c'est évident.

$$D^{(0)}(\alpha F+\beta G)=\alpha F+\beta G=\alpha D^{(0)}F+\beta D^{(0)}G.$$

Pour $n=1$,

$$\begin{aligned}
D^{(1)}(\alpha F+\beta G) &= f^2\left(D^{(0)}(\alpha F+\beta G)\right)' \\
&= f^2(\alpha F+\beta G)' \\
&= f^2(\alpha F'+\beta G'), \qquad \text{puisque la dérivée classique est linéaire.} \\
&= \alpha f^2F'+\beta f^2G' \\
&= \alpha\left(f^2(D^{(0)}(F))'\right)+\beta\left(f^2(D^{(0)}(G))'\right) \\
&= \alpha D^{(1)}(F)+\beta D^{(1)}(G).
\end{aligned}$$

Supposons que la linéarité est vérifiée pour $m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$D^{(m)}(\alpha F+\beta G)=\alpha D^{(m)}(F)+\beta D^{(m)}(G).$$

Voyons pour $m+1$:

$$\begin{aligned}
D^{(m+1)}(\alpha F+\beta G) &= \left(f^2\right)^{(-1)^{m+1-1}}\left(D^{(m+1-1)}(\alpha F+\beta G)\right)' \\
&= \left(f^2\right)^{(-1)^{m}}\left(D^{(m)}(\alpha F+\beta G)\right)' \\
&= \left(f^2\right)^{(-1)^{m}}\left(\alpha D^{(m)}(F)+\beta D^{(m)}(G)\right)', \qquad \text{par hypothèse d'induction} \\
&= \left(f^2\right)^{(-1)^{m}}\left(\alpha(D^{(m)}(F))'+\beta(D^{(m)}(G))'\right) \\
&= \alpha\left(f^2\right)^{(-1)^{m}}(D^{(m)}(F))'+\beta\left(f^2\right)^{(-1)^{m}}(D^{(m)}(G))' \\
&= \alpha D^{(m+1)}(F)+\beta D^{(m+1)}(G).
\end{aligned}$$

Ainsi, par induction on a bien la linéarité de la dérivée généralisée pour des $m \in \mathbb{N}$. □

Proposition 3.3 (Règle de Leibniz). Soit F, G deux fonctions à valeurs réelles, dérivables en un point $x \in [a, b]$. On a alors que leur produit est dérivable en x et

$$D^{(1)}(FG)(x) = \left(D^{(1)}(F) \cdot G\right)(x) + \left(F \cdot D^{(1)}(G)\right)(x),$$

où on entend par dérivable ; la dérivée généralisée de la définition 2.3.

Démonstration.
Utilisons la définition de la dérivée généralisée,

$$\begin{aligned}
D^{(1)}(FG) &= f^2 \left(D^{(0)}(FG)\right)' \\
&= f^2(FG)' \\
&= f^2(F'G + FG'), \qquad \text{selon la règle de Leibniz sur la dérivée classique} \\
&= f^2 \cdot F' \cdot G + f^2 \cdot F \cdot G' \\
&= f^2 \left(D^{(0)}(F)\right)' G + F f^2 \left(D^{(0)}(G)\right)' \\
&= D^{(1)}(F) \cdot G + F \cdot D^{(1)}(G).
\end{aligned}$$

□

Lors de la généralisation de la dérivée, on a fait un choix concernant la fonction f, à savoir à quel moment on a f^2 et f^{-2}. Ce choix est à l'origine de $X^{(k)}$ et de $\widetilde{X}^{(k)}$.

Ainsi, de la même façon qu'il existe une symétrie entre $X^{(k)}$ et $\widetilde{X}^{(k)}$, définissons une deuxième dérivée symétrique avec la première. Le choix initial étant arbitraire, cette nouvelle dérivée est tout aussi valide et importante que la précédente.

Définition 3.1. Soit $h \in C^k(a, b)$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}^{(0)}(h) &= h \\
\widetilde{D}^{(k)}(h) &= \left(f^2(x)\right)^{(-1)^k} \left(\widetilde{D}^{(k-1)}(h)\right)', \quad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Proposition 3.4. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq n \leq m$, alors

$$\widetilde{D}^{(n)}\varphi^{(m)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}\psi^{(m-n)}(x), & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!}\varphi^{(m-n)}(x), & n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\widetilde{D}^{(n)}\psi^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}\varphi^{(m-n)}(x), & n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m-n)!}\psi^{(m-n)}(x), & n \text{ pair.} \end{cases}$$

Remarque 7. Le théorème est identique à celui présenté pour l'opérateur $D^{(n)}$. En effet, puisque les fonctions de puissances, ψ, φ, et les dérivées sont symétriques, alors modifier la fonction f agit sur les deux et nous permet d'obtenir le même résultat dans ce cas particulier. ▲

Cette nouvelle dérivée généralisée est aussi linéaire.

Proposition 3.5. $\widetilde{D}^{(k)}(h)$ est linéaire, c'est-à-dire que

$$\widetilde{D}^{(n)}(aF + bG)(x) = a\widetilde{D}^{(n)}(F)(x) + b\widetilde{D}^{(n)}(G)(x)$$

où a, b sont des constantes réelles et $F, G \in C^{(n)}(a, b)$.

Démonstration.
La démonstration de la linéarité de $\widetilde{D}^{(k)}$ est semblable à celle déjà présentée pour $D^{(k)}$. □

De toute évidence, la règle de Leibniz est toujours valide avec cette nouvelle dérivée généralisée.

Proposition 3.6 (Règle de Leibniz). Soit F, G deux fonctions réelles, dérivables en un point $x \in [a, b]$. On a alors que leur produit est dérivable en x et

$$\widetilde{D}^{(1)}(FG)(x) = \left(\widetilde{D}^{(1)}(F) \cdot G\right)(x) + \left(F \cdot \widetilde{D}^{(1)}(G)\right)(x),$$

On a constaté qu'il est impossible d'écrire une dérivée généralisée $D^{(n)}$ comme étant l'application successive de n $D^{(1)}$. Toutefois, à l'aide de cette deuxième dérivée généralisée, une solution à cet inconfort apparaît.

Théorème 3.1. La dérivée généralisée d'ordre n $D^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ peut se réécrire comme

$$D^{(n)}(h) = \begin{cases} \underbrace{D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\cdots\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}}_{n \text{ fois}}(h), & n \text{ impair}, \\ \underbrace{\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}\cdots\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}}_{n \text{ fois}}(h), & n \text{ pair}. \end{cases}$$

Démonstration.

Utilisons l'induction.

D'abord, c'est évident pour $n = 1$. Voyons pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} D^{(2)}(h) &= f^{-2}\left(D^{(1)}(h)\right)' \\ &= \widetilde{D}^{(1)}\left(D^{(1)}(h)\right). \end{aligned}$$

Ici on prend $D^{(1)}(h)$ comme étant la fonction à laquelle on applique $\widetilde{D}^{(1)}$ et le résultat est obtenu.

Supposons que le théorème est vérifié pour un $k \in \mathbb{N}$. Voyons ce qu'il en est de $k + 1$.

$$\begin{aligned}
D^{(k+1)}(h) &= \left(f^2\right)^{(-1)^{k+1-1}} \left(D^{(k)}(h)\right)' \\
&= \begin{cases} f^{-2}\left(D^{(k)}(h)\right)', & k \text{ impair} \\ f^{2}\left(D^{(k)}(h)\right)', & k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \widetilde{D}^{(1)}\left(D^{(k)}(h)\right), & k \text{ impair} \\ D^{(1)}\left(D^{(k)}(h)\right), & k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \widetilde{D}^{(1)}\left(\underbrace{D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\cdots\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}}_{k \text{ fois}}(h)\right), & k \text{ impair} \\ D^{(1)}\left(\underbrace{\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}\cdots\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}}_{k \text{ fois}}(h)\right), & k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \underbrace{\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}\cdots\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}}_{k+1 \text{ fois}}(h), & k+1 \text{ pair} \\ \underbrace{D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\cdots\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}}_{k+1 \text{ fois}}(h), & k+1 \text{ impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Par induction on a bien montré le théorème. □

Étant donné la symétrie qui est si précieuse dans cette théorie, on va aussi établir une relation de dérivées successives pour la seconde dérivée généralisée dont la preuve se fait pratiquement comme celle qui précède.

Théorème 3.2. La dérivée généralisée d'ordre n $\widetilde{D}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ peut se réécrire comme

$$\widetilde{D}^{(n)}h = \begin{cases} \underbrace{\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}\cdots D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}}_{n \text{ fois}}(h), & n \text{ impair,} \\ \underbrace{D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}D^{(1)}\cdots D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}}_{n \text{ fois}}(h), & n \text{ pair.} \end{cases}$$

3.2 Antidérivées généralisées

Nous avons déjà développé das ce mémoire les puissances formelles et les dérivées généralisées, la suite logique est de s'intéresser à une intégrale qui permet d'inverser l'opérateur de dérivation. Ainsi, on va définir une anti-dérivée en suivant le comportement de ce nouveau système supersymétrique.

Définition 3.2. Soit A_k, pour $k \in \mathbb{N}$, l'antidérivée est définie comme

$$\begin{aligned} (A_0 h)(x) &= h(x), \\ (A_k h)(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^{k-1}} (A_{k-1} h)(s) \mathrm{d}s, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

où $x_0 \in [a, b]$.

Par contre, on a deux dérivées généralisées et les puissances aussi dépendent de deux fonctions symétriques, donc il n'y a rien de surprenant à définir une deuxième antidérivée. Cette antidérivée est symétrique à la première selon le même lien que pour les autres opérateurs déjà établis dans cette théorie, c'est-à-dire par rapport à la fonction f.

Définition 3.3. Soit $\widetilde{A}_k$, pour $k \in \mathbb{N}$, une antidérivée qui agira de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{A}_0 h\right)(x) &= h(x), \\ \left(\widetilde{A}_k h\right)(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^{k}} \left(\widetilde{A}_{k-1} h\right)(s) \mathrm{d}s, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

où $x_0 \in [a, b]$.

Comme on vient de le mentionner, on peut passer d'une antidérivée à l'autre en inversant la fonction f qui apparaît dans les deux intégrales. Par conséquent, les résultats qui suivent ne seront développés que pour la première antidérivée, mais ils s'appliqueront aussi à la seconde.

Afin de mieux comprendre ces nouvelles intégrales généralisées, tentons de les appliquer sur les puissances formelles exprimées par les fonctions $\psi^{(k)}$ et $\varphi^{(k)}$. L'intégrale standard utilisée sur les puissances habituelles est bien connue et nous permet de justifier le théorème qui suivra avant même de s'intéresser à sa démonstration.

Ainsi, l'intégrale standard nous donne le résultat suivant :

$$\int_{x_0}^{x}(s-x_0)^n \mathrm{d}s = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

On généralise ce fait pour l'antidérivée définie en 3.2.

Théorème 3.3. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, alors

$$A_n\psi^{(m)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m+n)!}\varphi^{(m+n)}(x) & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+n)!}\psi^{(m+n)}(x) & , \ n \text{ pair} \end{cases}$$

$$A_n\varphi^{(m)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m+n)!}\psi^{(m+n)}(x) & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+n)!}\varphi^{(m+n)}(x) & , \ n \text{ pair.} \end{cases}$$

Remarque 8. Notons que tout comme avec la dérivée, ce théorème est identique à celui de $\widetilde{A}_n$ (voir définition 3.3). Il est facile de s'en convaincre en remplaçant f par f^{-1} dans le théorème 3.3. ▲

Démonstration.
Nous allons le montrer par induction sur n. D'abord sur $\psi^{(m)}$, ensuite la démonstration est sensiblement similaire pour $\varphi^{(m)}$.

Le cas $n = 0$ est évidemment valide, car

$$A_0\psi^{(m)}(x) = \psi^{(m)}(x) = \frac{m!}{(m-0)!}\psi^{(m+0)}(x).$$

Voyons également le cas $n = 1$,

$$\begin{aligned}
A_1\psi^{(m)}(x) &= \int_{x_0}^{x} f^2(s)\psi^{(m)}(s)\mathrm{d}s \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^2(s)X^{(m)}(s)\mathrm{d}s & , \ m \text{ impair} \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^2(s)\widetilde{X}^{(m)}(s)\mathrm{d}s & , \ m \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{m+1}X^{(m+1)}(x) \ = \frac{m!}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(x) & , \ m \text{ impair} \\ \frac{1}{m+1}\widetilde{X}^{(m+1)}(x) \ = \frac{m!}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(x) & , \ m \text{ pair} \end{cases} \\
&= \frac{m!}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(x).
\end{aligned}$$

Supposons qu'on a vérifié le théorème pour un certain $n \geq 0$, il nous faut maintenant montrer qu'il est valide pour $n + 1$:

$$\begin{aligned}
A_{n+1}\psi^{(m)}(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^n} \left(A_n\psi^{(m)}\right)(s)\mathrm{d}s \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s)\left(A_n\psi^{(m)}\right)(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ impair} \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{2}(s)\left(A_n\psi^{(m)}\right)(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s)\frac{m!}{(m+n)!}\varphi^{(m+n)}(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ impair} \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{2}(s)\frac{m!}{(m+n)!}\psi^{(m+n)}(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ pair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

On se retrouve avec deux cas, soit $m \in \mathbb{Z}^+$ est impair ou il est pair.

a) Si m impair, alors

$$A_{n+1}\psi^{(m)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m+n)!}\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s)X^{(m+n)}(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+n)!}\int_{x_0}^{x} f^{2}(s)X^{(m+n)}(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m+n)!}\frac{1}{m+n+1}X^{(m+n+1)}(x) & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+n)!}\frac{1}{m+n+1}X^{(m+n+1)}(x) & , \ n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m+(n+1))!}\psi^{(m+(n+1))}(x) & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+(n+1))!}\varphi^{(m+(n+1))}(x) & , \ n \text{ pair.} \end{cases}$$

b) Si m pair, alors

$$A_{n+1}\psi^{(m)}(x) = \begin{cases} \frac{m!}{(m+n)!}\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s)\widetilde{X}^{(m+n)}(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+n)!}\int_{x_0}^{x} f^{2}(s)\widetilde{X}^{(m+n)}(s)\mathrm{d}s & , \ n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m+n)!}\frac{1}{m+n+1}\widetilde{X}^{(m+n+1)}(x) & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+n)!}\frac{1}{m+n+1}\widetilde{X}^{(m+n+1)}(x) & , \ n \text{ pair} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m!}{(m+(n+1))!}\psi^{(m+(n+1))}(x) & , \ n \text{ impair} \\ \frac{m!}{(m+(n+1))!}\varphi^{(m+(n+1))}(x) & , \ n \text{ pair.} \end{cases}$$

Par induction, on a montré que la première propriété, soit celle s'appliquant à $\psi^{(m)}$ est vérifiée. On pourrait faire de même et montrer que la seconde l'est aussi. □

La linéarité de l'antidérivée n'est pas difficile à démontrer, mais elle est tout de même cruciale lorsqu'on désire faire les calculs.

Théorème 3.4. Les deux antidérivées d'ordre n, A_n et $\widetilde{A}_n$, sont linéaires, c'est-à-dire qu'on a

$$(A_n(aF+bG))(x) = a(A_nF)(x) + b(A_nG)(x),$$
$$\left(\widetilde{A}_n(aF+bG)\right)(x) = a\left(\widetilde{A}_nF\right)(x) + b\left(\widetilde{A}_nG\right)(x),$$

où $n \in \mathbb{N}$, a, b sont des constantes réelles et F, G des fonctions n fois intégrables définies sur les réels.

Démonstration.

On veut montrer la linéarité de l'antidérivée A_nh. Allons-y par induction.

D'abord, c'est évident pour $n = 0$,

$$\begin{aligned}(A_0(aF+bG))(x) &= (aF+bG)(x) = aF(x) + bG(x)\\ &= a(A_0F)(x) + b(A_0G)(x).\end{aligned}$$

Ensuite, voyons pour $n = 1$,

$$\begin{aligned}(A_1(aF+bG))(x) &= \int_{x_0}^{x} f^2(s)\,(A_0(aF+bG))(s)\mathrm{d}s\\ &= \int_{x_0}^{x} f^2(s)(aF+bG)(s)\mathrm{d}s\\ &= a\int_{x_0}^{x} f^2(s)F(s)\mathrm{d}s + b\int_{x_0}^{x} f^2(s)G(s)\mathrm{d}s\\ &= a(A_1F)(x) + b(A_1G)(x).\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que la linéarité est vérifiée pour $m \in \mathbb{N}$, donc on a

$$(A_m(aF+bG))(x) = a(A_mF)(x) + b(A_mG)(x).$$

Vérifions qu'on a toujours la linéarité pour $m+1$.

$$\begin{aligned}(A_{m+1}(aF+bG))(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^m} (A_m(aF+bG))(s)\mathrm{d}s\\ &= \int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^m} (a(A_mF)(s) + b(A_mG)(s))\,\mathrm{d}s\\ &= a\int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^m} (A_mF)(s)\mathrm{d}s + b\int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^m} (A_mG)(s)\mathrm{d}s\\ &= a(A_{m+1}F)(x) + b(A_{m+1}G)(x).\end{aligned}$$

Par induction, on a la linéarité de A_n. On pourrait obtenir celle de $\widetilde{A}_n$ sensiblement de la même façon. □

Tout comme les dérivées généralisées, on peut écrire nos antidérivées comme étant l'application successive d'antidérivée du premier ordre.

Théorème 3.5. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n h(x) = \begin{cases} \underbrace{A_1 \widetilde{A}_1 A_1 \cdots \widetilde{A}_1 A_1}_{n \text{ fois}} h(x) & , \quad n \text{ impair} \\ \underbrace{\widetilde{A}_1 A_1 \widetilde{A}_1 \cdots \widetilde{A}_1 A_1}_{n \text{ fois}} h(x) & , \quad n \text{ pair.} \end{cases}$$

Démonstration.
Utilisons l'induction.

C'est évident pour $n = 1$. Voyons pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} A_2 h(x) &= \int_{x_0}^{x} f^{-2}(s) \left(A_1 h\right)(s) ds \\ &= \widetilde{A}_1 \left(A_1 h(x)\right). \end{aligned}$$

Le théorème est donc validé pour cette valeur de n.

Supposons qu'on a vérifié cette propriété pour $k \in \mathbb{N}$. Vérifions qu'elle est toujours valide pour $k + 1$, alors

$$
\begin{aligned}
A_{k+1}h(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^{k+1-1}} A_k h(s)\mathrm{d}s \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s) A_k h(s)\mathrm{d}s & , \quad k \text{ impair} \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{2}(s) A_k h(s)\mathrm{d}s & , \quad k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \widetilde{A}_1 \left(A_k h(x)\right) & , \quad k \text{ impair} \\ A_1 \left(A_k h(x)\right) & , \quad k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \widetilde{A}_1 \left(\underbrace{A_1 \widetilde{A}_1 A_1 \cdots \widetilde{A}_1 A_1}_{k \text{ fois}} h(x) \right) & , \quad k \text{ impair} \\ A_1 \left(\underbrace{\widetilde{A}_1 A_1 \widetilde{A}_1 \cdots \widetilde{A}_1 A_1}_{n \text{ fois}} h(x) \right) & , \quad k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \underbrace{\widetilde{A}_1 A_1 \widetilde{A}_1 \cdots \widetilde{A}_1 A_1}_{k+1 \text{ fois}} h(x) & , \quad k+1 \text{ pair} \\ \underbrace{A_1 \widetilde{A}_1 A_1 \cdots \widetilde{A}_1 A_1}_{k+1 \text{ fois}} h(x) & , \quad k+1 \text{ impair.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Par induction on a donc montré cette nouvelle représentation de l'antidérivée. □

La seconde antidérivée peut aussi s'écrire en alternant les anti-dérivées d'ordre 1.

Théorème 3.6.

$$
\widetilde{A}_n h(x) = \begin{cases} \underbrace{\widetilde{A}_1 A_1 \widetilde{A}_1 \cdots A_1 \widetilde{A}_1}_{n \text{ fois}} h(x) & , \quad n \text{ impair} \\ \underbrace{A_1 \widetilde{A}_1 A_1 \cdots A_1 \widetilde{A}_1}_{n \text{ fois}} h(x) & , \quad n \text{ pair.} \end{cases}
$$

Démonstration.

La démonstration est très semblable à la précédente. □

Théorème 3.7. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \widetilde{X}^{(n)} = n! A_n \widetilde{X}^{(0)}, & n \text{ impair} \\ X^{(n)} = n! \widetilde{A}_n X^{(0)}, & n \text{ pair.} \end{cases}$$

Démonstration.

Montrons l'égalité de $\widetilde{X}^{(n)}$ par induction.

D'abord, validons les cas de base.

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{(1)} &= \int_{x_0}^{x} f^2(s)\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f^2(s) A_0 \widetilde{X}^{(0)}(s)\mathrm{d}s \\ &= A_1 \widetilde{X}^{(0)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{(2)} &= 2\int_{x_0}^{x} f^{-2} \widetilde{X}^{(1)}(s)\mathrm{d}s = 2\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s) \underbrace{A_1 \widetilde{X}^{(0)}}_{\widetilde{X}^{(1)}} \mathrm{d}s \\ &= 2A_2 \widetilde{X}^{(0)}. \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait validé l'égalité pour un certain $n \geq 0$. Voyons pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{X} &= (n+1)\int_{x_0}^{x}(f^2)^{(-1)^n}\widetilde{X}^{(n)}\mathrm{d}s \\
&= (n+1)\int_{x_0}^{x}(f^2)^{(-1)^n}\left(n!A_n\widetilde{X}^{(0)}(s)\right)\mathrm{d}s \\
&= \begin{cases} (n+1)\widetilde{A}_1\left(n!A_n\widetilde{X}^{(0)}\right), & n \text{ impair} \\ (n+1)A_1\left(n!A_n\widetilde{X}^{(0)}\right), & n \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (n+1)!\widetilde{A}_1A_n\widetilde{X}^{(0)}, & n \text{ impair} \\ (n+1)!A_1A_n\widetilde{X}^{(0)}, & n \text{ pair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (n+1)!\widetilde{A}_1\underbrace{A_1\widetilde{A}_1A_1\cdots\widetilde{A}_1A_1}_{n \text{ fois}}\widetilde{X}^{(0)}, & n \text{ impair} \\ (n+1)!A_1\underbrace{\widetilde{A}_1A_1\widetilde{A}_1\cdots\widetilde{A}_1A_1}_{n \text{ fois}}\widetilde{X}^{(0)}, & n \text{ impair} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (n+1)!A_{n+1}\widetilde{X}^{(0)}, & n \text{ impair} \\ (n+1)!A_{n+1}\widetilde{X}^{(0)}, & n \text{ pair} \end{cases} \\
&= (n+1)!A_{n+1}\widetilde{X}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Par induction, on a bien l'égalité demandée. On peut faire sensiblement la même démonstration pour obtenir la seconde égalité, soit celle de $X^{(n)}$. $\square$

Notons que plutôt que de partir de $X^{(0)}$ et $\widetilde{X}^{(0)}$, on peut très bien appliquer la première dérivée et obtenir une autre représentation très semblable et tout aussi valable qui utilise $X^{(1)}$ ou $\widetilde{X}^{(1)}$ plutôt que $X^{(0)}$ ou $\widetilde{X}^{(0)}$.

$$\begin{cases} \widetilde{X}^{(n)} &= n!\widetilde{A}_{n-1}\widetilde{X}^{(1)} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots \\ X^{(n)} &= n!A_{n-1}X^{(1)} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

3.3 Application de la dérivée et de l'anti-dérivée généralisées

En analyse standard, l'intégrale est définie de telle sorte qu'elle soit l'opérateur inverse, à une constante près, de la dérivée. Les antidérivées que nous avons définies et étudiées se veulent un reflet de cette constatation. En effet, elles permettent d'inverser les opérateurs de dérivations généralisées. Néanmoins, il faut être prudent avec leur utilisation, car nous avons deux antidérivées et deux dérivées généralisées et elles ne peuvent pas être associées aléatoirement.

Exemple 4. Voyons quelques exemples possibles :

$$\begin{aligned} A_1\left(D^{(1)}(h)\right) &= A_1\left(f^2h'\right) \\ &= \int_{x_0}^{x} f^2\left(f^2h'\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_{x_0}^{x} f^4h'\mathrm{d}s \neq h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D^{(1)}\left(A_1h\right) &= D^{(1)}\int_{x_0}^{x} f^2h\mathrm{d}s \\ &= f^2\left(\int_{x_0}^{x} f^2h\mathrm{d}s\right)' \\ &= f^2\left(f^2h\right) \\ &= f^4h \neq h. \end{aligned}$$

C'est deux exemples nous montrent bien que ce n'est pas n'importe quelle association qui permet d'unir un opérateur et son inverse. Voyons-en de plus concluantes en utilisant les symétries de nos opérateurs :

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1\left(D^{(1)}(h)\right) &= \widetilde{A}_1\left(f^2h'\right) \\ &= \int_{x_0}^{x} f^{-2}\left(f^2h'\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_{x_0}^{x} h'\mathrm{d}s = h + c \qquad (c \text{ une constante}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{D}^{(1)}\left(A_1 h\right) &= \widetilde{D}^{(1)}\left(\int_{x_0}^{x} f^2 h \mathrm{d}s\right)\\ &= f^{-2}\left(\int_{x_0}^{x} f^2 h \mathrm{d}s\right)'\\ &= f^{-2}\left(f^2 h\right) = h.\end{aligned}$$

Ces formulations sont équivalentes à l'identité. Par conséquent, les opérateurs qui interviennent sont l'inverse l'un de l'autre. De plus, on peut facilement démontrer que c'est aussi le cas pour $A_1(\widetilde{D}^{(1)}h)$ et $D^{(1)}(\widetilde{A}_1 h)$.

Passons maintenant au deuxième degré. Pour simplifier les calculs, utilisons les théorèmes 3.1 et 3.5 nous permettant de représenter les opérateurs en fonction de ceux de premier ordre.

$$\begin{aligned}A_2\left(D^{(2)}(h)\right) &= \widetilde{A}_1 A_1\left(\widetilde{D}^{(1)} D^{(1)}(h)\right)\\ &= \widetilde{A}_1 A_1\left(\widetilde{D}^{(1)}(f^2 h')\right)\\ &= \widetilde{A}_1 A_1\left(f^{-2}(f^2 h')'\right)\\ &= \widetilde{A}_1 \int_{x_0}^{x} f^2 f^{-2}(f^2 h')' \mathrm{d}s\\ &= \widetilde{A}_1(f^2 h')\\ &= \int_{x_0}^{x} f^{-2} f^2 h' \mathrm{d}s = h + c \qquad (c \text{ une constante}).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{D}^{(2)}\left(\widetilde{A}_2 h\right) &= D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}\left(A_1 \widetilde{A}_1 h\right)\\ &= D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}\left(A_1 \int_{x_0}^{x} f^{-2} h \mathrm{d}s\right)\\ &= D^{(1)}\widetilde{D}^{(1)}\left(\int_{x_0}^{x} f^2 \int_{x_0}^{t} f^{-2} h \mathrm{d}s dt\right)\\ &= D^{(1)}\left(f^{-2}\left(\int_{x_0}^{x} f^2 \int_{x_0}^{t} f^{-2} h \mathrm{d}s dt\right)'\right)\\ &= D^{(1)}\left(\int_{x_0}^{x} f^{-2} h \mathrm{d}s\right)\\ &= f^2\left(\int_{x_0}^{x} f^{-2} h \mathrm{d}s\right)'\\ &= f^2 f^{-2} h = h.\end{aligned}$$

On remarque qu'avec un degré pair, il ne semble pas nécessaire d'alterner les opérateurs pour trouver la fonction identité.

Ainsi, à une constante près, on trouve :

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_1\left(D^{(1)}(h)\right) &= A_1\left(\widetilde{D}^{(1)}(h)\right) &&= D^{(1)}\left(\widetilde{A}_1 h\right) &&= \widetilde{D}^{(1)}\left(A_1 h\right) &&= h,\\
A_2\left(D^{(2)}(h)\right) &= \widetilde{A}_2\left(\widetilde{D}^{(2)}(h)\right) &&= D^{(2)}\left(A_2 h\right) &&= \widetilde{D}^{(2)}\left(\widetilde{A}_2 h\right) &&= h.
\end{aligned}$$

▲

Théorème 3.8. Pour $n \in \mathbb{N}$, les identités suivantes sont valides à une constante près :

$$\begin{cases}
\widetilde{A}_n D^{(n)} = D^{(n)}\widetilde{A}_n = A_n\widetilde{D}^{(n)} = \widetilde{D}^{(n)}A_n = \text{id.} & , \ n \text{ impair}\\
A_n D^{(n)} = D^{(n)} A_n = \widetilde{A}_n\widetilde{D}^{(n)} = \widetilde{D}^{(n)}\widetilde{A}_n = \text{id.} & , \ n \text{ pair.}
\end{cases}$$

Démonstration.
Allons-y par induction.

Lorsque $n = 0$, c'est évident. Lorsque $n = 1$, alors montrons que les quatre cas de l'énoncé sont vérifiés, c'est-à-dire qu'on a l'identité à une constante près.

- $\widetilde{A}_1 D^{(1)}(h)(x) = h(x) + c$

  Ce cas a déjà été montré dans l'exemple 4.

- Le cas $D^{(1)}\widetilde{A}_1 h(x) = h(x)$

$$\begin{aligned}
D^{(1)}\widetilde{A}_1 h(x) &= D^{(1)}\left(\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s)h(s)\mathrm{d}s\right)\\
&= f^2(x)\left(\int_{x_0}^{x} f^{-2}(s)h(s)\mathrm{d}s\right)'\\
&= f^2(x)f^{-2}(x)h(x) = h(x)
\end{aligned}$$

- Le cas $A_1\widetilde{D}^{(1)}(h)(x) = h(x)$

$$\begin{aligned}
A_1\widetilde{D}^{(1)}(h)(x) &= A_1\left(f^{-2}(x)h'(x)\right)\\
&= \int_{x_0}^{x} f^2(s)f^{-2}(s)h'(s)\mathrm{d}s\\
&= h(x) + c
\end{aligned}$$

- Le cas $\widetilde{D}^{(1)}A_1 h(x) = h(x)$

  Ce cas a déjà été montré dans l'exemple 4.

Supposons maintenant que le théorème est validé pour $k \in \mathbb{N}$. Vérifions pour $k+1$.

- Si k est impair.
  - $A_{k+1}D^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} A_{k+1}D^{(k+1)}(h)(x) &= \widetilde{A}_1 A_1 \widetilde{A}_1 \cdots \widetilde{A}_1 A_1 \widetilde{D}^{(1)} D^{(1)} \widetilde{D}^{(1)} \cdots \widetilde{D}^{(1)} D^{(1)}(h)(x) \\ &= \widetilde{A}_1 \underbrace{A_k \widetilde{D}^{(k)}}_{\text{id.}}(D^{(1)}(h))(x) \\ &= \widetilde{A}_1 D^{(1)}(h)(x) = h(x) + c. \end{aligned}$$

  - $D^{(k+1)}A_{k+1}$

$$\begin{aligned} D^{(k+1)}A_{k+1}h(x) &= \widetilde{D}^{(1)} \underbrace{D^{(k)}\widetilde{A}_k}_{\text{id.}}(A_1 h)(x) \\ &= \widetilde{D}^{(1)} A_1 h(x) = h(x). \end{aligned}$$

  - $\widetilde{D}^{(k+1)}\widetilde{A}_{k+1}$

$$\begin{aligned} \widetilde{D}^{(k+1)}\widetilde{A}_{k+1}h(x) &= D^{(1)} \underbrace{\widetilde{D}^{(k)}A_k}_{\text{id.}}(\widetilde{A}_1 h)(x) \\ &= D^{(1)} \widetilde{A}_1 h(x) = h(x). \end{aligned}$$

  - $\widetilde{A}_{k+1}\widetilde{D}^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{k+1}\widetilde{D}^{(k+1)}(h)(x) &= A_1 \underbrace{\widetilde{A}_k D^{(k)}}_{\text{id.}}(\widetilde{D}^{(1)}(h))(x) \\ &= A_1 \widetilde{D}^{(1)}(h)(x) = h(x) + c. \end{aligned}$$

- Si k est pair.
  - $\widetilde{A}_{k+1}D^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{k+1}D^{(k+1)}(h)(x) &= \widetilde{A}_1 \underbrace{\widetilde{A}_k \widetilde{D}^{(k)}}_{\text{id.}}(D^{(1)}(h))(x) \\ &= \widetilde{A}_1 D^{(1)}(h)(x) = h(x) + c. \end{aligned}$$

  - $D^{(k+1)}\widetilde{A}_{k+1}$

$$\begin{aligned} D^{(k+1)}\widetilde{A}_{k+1}h(x) &= D^{(1)} \underbrace{D^{(k)}A_k}_{\text{id.}}(\widetilde{A}_1 h)(x) \\ &= D^{(1)} \widetilde{A}_1 h(x) = h(x). \end{aligned}$$

— $A_{k+1}\widetilde{D}^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} A_{k+1}\widetilde{D}^{(k+1)}(h)(x) &= A_1 \underbrace{A_k D^{(k)}}_{\text{id.}}(\widetilde{D}^{(1)}(h))(x) \\ &= A_1\widetilde{D}^{(1)}(h)(x) = h(x) + c. \end{aligned}$$

— $\widetilde{D}^{(k+1)}A_{k+1}$

$$\begin{aligned} \widetilde{D}^{(k+1)}A_{k+1}h(x) &= \widetilde{D}^{(1)} \underbrace{\widetilde{D}^{(k)}\widetilde{A}_k}_{\text{id.}}(A_1 h)(x) \\ &= \widetilde{D}^{(1)}A_1 h(x) = h(x). \end{aligned}$$

Ainsi par induction, on a montré chacun des éléments de ce théorème. □

Afin d'illustrer le potentiel considérable de la théorie qui a été exposée jusqu'à maintenant, généralisons un théorème bien connu et utile : le théorème de Green. Celui-ci s'applique sur une surface plane permet de mettre en relation une intégrale le long d'une courbe simple fermée orientée et C^1 par morceaux avec une intégrale double sur la région délimitée par cette courbe. Ce résultat intervient, entre autres, dans l'étude des fluides et des champs de vecteurs.

Le théorème de Green standard est connu sous la forme

Théorème 3.9 (Théorème de Green). Soit C une courbe plane simple, orientée dans le sens anti-horaire et C^1 par morceaux, notons D le compact du plan délimité par C. De plus, soit $Pdx + Qdy$ une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$, où P et Q ont des dérivées partielles continues sur une région ouverte contenant D, alors

$$\oint_C (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Avant d'établir le théorème de Green généralisé dans notre théorie, il nous faut d'abord modifier la définition 3.2 qui ne prend en compte que la valeur x, soit la borne supérieure, alors qu'il nous faut intervenir sur les deux bornes dans le théorème de Green. Malgré que la borne inférieure soit sous-entendue comme étant le x_0 dans ce qui précédait, nous allons ici l'exprimer explicitement dans l'appel de l'antidérivée. De plus, puisque les fonctions utilisées dépendent de deux variables x et y, il faut aussi spécifier par rapport à laquelle on applique l'antidérivée. Pour ce faire, on mettra en second indice, la-dite variable. Cet indice sera aussi valable sur nos dérivées généralisées. Ainsi, on obtient la notation suivante de l'antidérivée :

$$A_n h(x) = A_n^x h(x_0; x) = \int_{x_0}^{x} \left(f^2(s)\right)^{(-1)^{n-1}} \left(A_{n-1}^x h\right)(s, y)\mathrm{d}s$$
$$\text{ou encore } A_n^y h(a; b) = \int_{a}^{b} \left(f^2(y)\right)^{(-1)^{n}} \left(A_{n-1}^y h\right)(x, y)\mathrm{d}y$$

On a maintenant tous les outils afin de généraliser le théorème de Green.

Théorème 3.10 (Théorème de Green généralisé). Soit P et Q des fonctions à valeurs réelles dépendantes de x et y. Soit C une courbe fermée et R la région déterminée par C, alors

$$A_1^x P(C) + A_1^y Q(C) = A_1 A_1 \left(\widetilde{D}_x^{(1)} Q - \widetilde{D}_y^{(1)} P\right)(R)$$
$$\widetilde{A}_1^x P(C) + \widetilde{A}_1^y Q(C) = \widetilde{A}_1 \widetilde{A}_1 \left(D_x^{(1)} Q - D_y^{(1)} P\right)(R)$$

Démonstration.

Faisons la démonstration de la première équation en deux parties.

1. Posons $Q(x, y)$ nulle, alors il ne reste que $P(x, y)$. On détermine deux courbes sur C en fonction de x bornant la région R, $g_1(x)$ et $g_2(x)$. En plus, on restreint les valeurs de x entre deux bornes réelles a et b. Supposons $g_1(x) \leq g_2(x), \quad \forall x \in [a, b]$ et parcourons le chemin C dans le sens anti-horaire. Ainsi, $g_1(x)$ s'applique de a à b et $g_2(x)$ de b à a.

$$
\begin{aligned}
A_1^x P(C) &= \int_C f^2(x)P(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f^2(x)P(x,g_1(x))\mathrm{d}x + \int_b^a f^2(x)P(x,g_2(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f^2(x)P(x,g_1(x))\mathrm{d}x - \int_a^b f^2(x)P(x,g_2(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f^2(x)\left(P(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x))\right)\mathrm{d}x \\
&= -A_1^x\left(P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\right)(a;b) \\
&= -A_1^x\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right)(a;b) \\
&= -A_1^x\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f^2(y)f^{-2}(y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y\right)(a;b) \\
&= -A_1^x\left(A_1^y\left(f^{-2}(y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)(g_1(x);g_2(x))\right)(a;b) \\
&= -A_1^x\left(A_1^y\left(\widetilde{D}_y^{(1)}P\right)(g_1(x);g_2(x))\right)(a;b) \\
&= -A_1A_1\left(\widetilde{D}_y^{(1)}P\right)(R).
\end{aligned}
$$

2. Posons $P(x,y)$ nulle, alors il ne reste que $Q(x,y)$. Le chemin C peut être déterminé à partir de deux courbes dépendantes de y, appelons-les $h_1(y)$ et $h_2(y)$. De plus, on les restreint entre $y = c$ et $y = d$ où $c < d$ sont des valeurs réelles. Supposons $h_1(y) \leq h_2(y), \quad \forall y \in [c,d]$ et parcourons le chemin C dans le sens anti-horaire, donc $h_1(y)$ est parcourue de d vers c, alors que $h_2(y)$ est de c à d.

$$\begin{aligned}
A_1^y Q(C) &= \int_C f^2(y) Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d f^2(y) Q(h_2(y),y)\mathrm{d}y + \int_d^c f^2(x) Q(h_1(y),y)\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d f^2(y) Q(h_2(y),y)\mathrm{d}y - \int_c^d f^2(x) Q(h_1(y),y)\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d f^2(y) \left(Q(h_2(y),y) - Q(h_1(y),y)\right)\mathrm{d}y \\
&= A_1^y \left(Q(h_2(y),y) - Q(h_1(y),y)\right)(c;d) \\
&= A_1^y \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\right)(c;d) \\
&= A_1^y \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f^2(x) f^{-2}(x) \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\right)(c;d) \\
&= A_1^y \left(A_1^x \left(f^{-2}(x)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)(h_1(y);h_2(y))\right)(c;d) \\
&= A_1^y \left(A_1^x \left(\widetilde{D}_x^{(1)} Q\right)(h_1(y);h_2(y))\right)(c;d) \\
&= A_1 A_1 \left(\widetilde{D}_x^{(1)} Q\right)(R).
\end{aligned}$$

Ainsi on a les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
A_1^x P(C) &= -A_1 A_1 \left(\widetilde{D}_y^{(1)} P\right)(R), \\
A_1^y Q(C) &= A_1 A_1 \left(\widetilde{D}_x^{(1)} Q\right)(R).
\end{aligned}$$

Tous les cas sont envisagés si l'on combine ces deux résultats et grâce à la linéarité, on obtient le résultat désiré :

$$A_1^x P(C) + A_1^y Q(C) = A_1 A_1 \left(\widetilde{D}_x^{(1)} Q - \widetilde{D}_y^{(1)} P\right)(R).$$

Par symétrie, la seconde équation présentée dans le théorème de Green généralisé, faisant intervenir $\widetilde{A}$ est tout aussi valide. □

On a déjà deux résultats des puissances formelles généralisées $X^{(k)}$ et $\widetilde{X}^{(k)}$, l'une à partir d'une intégrale et la seconde faisant intervenir l'antidérivée. Ainsi, il peut sembler superflu d'en ajouter une autre. Par contre, les deux définitions que l'on connaît déjà font intervenir des intégrales rendant plus ardus les calculs. Le prochain théorème introduit une nouvelle approche des puissances formelles qui permet d'éviter de faire des intégrales de façon récursive pour certaines puissances formelles.

Théorème 3.11.

$$\widetilde{X}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \widetilde{X}^{(n-k)} \widetilde{X}^{(k)}, & n \text{ impair}, \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \widetilde{X}^{(n-k)} X^{(k)}, & n \text{ pair}, \end{cases}$$

$$X^{(n)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} X^{(n-k)} X^{(k)}, & n \text{ impair}, \\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} X^{(n-k)} \widetilde{X}^{(k)}, & n \text{ pair}, \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Montrons la première partie, soit celle concernant $\widetilde{X}^{(n)}$, par induction.

Si $n = 1$, alors

$$\widetilde{X}^{(1)} = \widetilde{X}^{(1)} \widetilde{X}^{(0)}.$$

Si $n = 2$, alors

$$\widetilde{X}^{(2)} = 2 \int_{x_0}^{x} \widetilde{X}^{(1)} f^{-2} ds.$$

Afin d'alléger les calculs, nous allons ignorer les bornes d'intégration dans cette démonstration. Utilisons l'intégration par partie pour résoudre cette dernière intégrale.

$$\text{Posons} \qquad u = \widetilde{X}^{(1)}, \qquad \mathrm{d}v = f^{-2} ds,$$
$$\mathrm{d}u = \widetilde{X}^{(0)} f^{2} ds, \qquad v = X^{(1)}.$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{(2)} &= 2 \left(\widetilde{X}^{(1)} X^{(1)} - \int x^{(1)} \widetilde{X}^{(0)} f^{2} \mathrm{d}s \right) \\ &= 2 \widetilde{X}^{(1)} X^{(1)} - \widetilde{X}^{(0)} X^{(2)}. \end{aligned}$$

Supposons que ce théorème est vérifié pour $\widetilde{X}^{(m)}$, $m \geq 1$, voyons pour $m+1$. Par définition des puissances généralisées, on a :

$$\widetilde{X}^{(m+1)} = (m+1) \int \widetilde{X}^{(m)} (f^{2})^{(-1)^{m}} ds.$$

Utilisons l'intégration par partie.

$$\text{Posons} \quad u = \widetilde{X}^{(m)}, \qquad dv = (f^2)^{(-1)^m} ds,$$

$$du = m\widetilde{X}^{(m-1)}(f^2)^{(-1)^{m-1}} ds, \qquad v = \begin{cases} X^{(1)}, & m \text{ impair}, \\ \widetilde{X}^{(1)}, & m \text{ pair}. \end{cases}$$

On a deux cas possibles dépendant de la parité de m.

- **Si m est impair.**

$$\widetilde{X}^{(m+1)} = (m+1)\left(\widetilde{X}^{(m)}X^{(1)} - m\int \widetilde{X}^{(m-1)}X^{(1)}f^2 ds\right).$$

Il nous faut intégrer par partie l'intégrale $\int \widetilde{X}^{(m-1)}X^{(1)}f^2 ds$.

$$\text{Posons} \quad u = \widetilde{X}^{(m-1)}, \qquad dv = X^{(1)}f^2 ds,$$

$$du = (m-2)\widetilde{X}^{(m-2)}f^{-2} ds, \qquad v = \tfrac{1}{2}X^{(2)},$$

$$\Rightarrow \int \widetilde{X}^{(m-1)}X^{(1)}f^2 ds = \frac{1}{2}\widetilde{X}^{(m-1)}X^{(2)} - \frac{(m-2)}{2}\int \widetilde{X}^{(m-2)}X^{(2)}f^{-2} ds.$$

Une fois de plus, il y a une nouvelle intégrale à résoudre. On continue à appliquer la méthode d'intégration par partie successivement. Par conséquent, pour $0 < k < m$, on a l'intégrale suivante à résoudre :

$$I_k = \int \widetilde{X}^{(m-k)}X^{(k)}(f^2)^{(-1)^{k+1}} ds.$$

$$\text{Posons} \quad u = \widetilde{X}^{(m-k)}, \qquad dv = X^{(k)}(f^2)^{(-1)^{k+1}} ds,$$

$$du = (m-k)\widetilde{X}^{(m-k-1)}(f^2)^{(-1)^k} ds, \qquad v = \tfrac{1}{k+1}X^{(k+1)},$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{1}{k+1}\widetilde{X}^{(m-k)}X^{(k+1)} - \frac{m-k}{k+1}\int \widetilde{X}^{(m-k-1)}X^{(k+1)}(f^2)^{(-1)^k} ds.$$

Enfin, éventuellement, on obtient $k = m$ de sorte que

$$I_m = \int \widetilde{X}^{(0)}X^{(m)}f^2 ds = \int X^{(m)}f^2 ds = \frac{X^{(m+1)}}{m+1}\widetilde{X}^{(0)}.$$

Notons qu'on a aussi obtenu l'intégrale I_0, donc lorsque $k = 0$. Il s'agit de la première qui a été résolue :

$$I_0 = \int \widetilde{X}^{(m)} X^{(0)} f^{-2} \mathrm{d}s = \widetilde{X}^{(m)} X^{(1)} - m \int \widetilde{X}^{(m-1)} X^{(1)} f^2 \mathrm{d}s.$$

On remarque qu'en fait les intégrales s'emboîtent les unes dans les autres de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
I_0 &= \widetilde{X}^{(m)} X^{(1)} - m \cdot I_1 \\
I_1 &= \frac{1}{2} \widetilde{X}^{(m-1)} X^{(2)} - \frac{m-1}{2} I_2 \\
&\vdots \\
I_k &= \frac{1}{k+1} \widetilde{X}^{(m-k)} X^{(k+1)} - \frac{m-k}{k+1} I_{k+1} \\
&\vdots \\
I_m &= \frac{1}{m+1} X^{(m+1)} \widetilde{X}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur qu'on tente d'obtenir est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^{(m+1)} &= (m+1) \widetilde{X}^{(m)} X^{(1)} - \frac{(m+1)m}{2} \widetilde{X}^{(m-1)} X^{(2)} + \frac{(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3} \widetilde{X}^{(m-2)} X^{(3)} \\
&- \cdots + (-1)^k \frac{(m+1)m \cdots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k+1} \widetilde{X}^{(m-k)} X^{(k+1)} + \cdots - \frac{(m+1)!}{(m+1)!} X^{(m+1)} \widetilde{X}^{(0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \widetilde{X}^{(m+1)} &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k+1} \widetilde{X}^{(m-k)} X^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m+1}{k} \widetilde{X}^{(m+1-k)} X^{(k)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière somme est exactement celle recherchée, ainsi on a démontré que pour un $m+1$ pair, ce théorème est valide.

- **Si m est pair.**

$$\widetilde{X}^{(m+1)} = (m+1) \left(\widetilde{X}^{(m)} \widetilde{X}^{(1)} - m \int \widetilde{X}^{(m-1)} \widetilde{X}^{(1)} f^{-2} \mathrm{d}s \right)$$

$$= I_0.$$

Tout comme pour le cas impair, il nous faut utiliser l'intégration par partie successivement afin de résoudre chacune des intégrales. Le cas général est

$$I_k = \int \widetilde{X}^{(m-k)}\widetilde{X}^{(k)}(f^2)^{(-1)^k}\mathrm{d}s.$$

Posons $\quad u = \widetilde{X}^{(m-k)}, \qquad \mathrm{d}v = \widetilde{X}^{(k)}(f^2)^{(-1)^k}\mathrm{d}s,$

$\qquad \mathrm{d}u = (m-k)\widetilde{X}^{(m-k-1)}(f^2)^{(-1)^{k+1}}\mathrm{d}s, \qquad v = \frac{1}{k+1}\widetilde{X}^{(k+1)}.$

$$\Rightarrow I_k = \frac{1}{k+1}\widetilde{X}^{(m-k)}\widetilde{X}^{(k+1)} - \frac{m-k}{k+1}\int \widetilde{X}^{(m-k-1)}\widetilde{X}^{(k+1)}(f^2)^{(-1)^{k+1}}\mathrm{d}s.$$

Enfin, lorsque $k = m$, alors

$$I_m = \int \widetilde{X}^{(0)}\widetilde{X}^{(m)}f^{-2}\mathrm{d}s = \int \widetilde{X}^{(m)}f^{-2}ds = \frac{\widetilde{X}^{(m+1)}}{m+1}\widetilde{X}^{(0)}.$$

Une fois de plus, les intégrales s'emboîtent les unes dans les autres :

$$\begin{aligned}
I_0 &= \widetilde{X}^{(m)}\widetilde{X}^{(1)} - m \cdot I_1\\
I_1 &= \frac{1}{2}\widetilde{X}^{(m-1)}\widetilde{X}^{(2)} - \frac{m-1}{2}I_2\\
&\vdots\\
I_k &= \frac{1}{k+1}\widetilde{X}^{(m-k)}\widetilde{X}^{(k+1)} - \frac{m-k}{k+1}I_{k+1}\\
&\vdots\\
I_m &= \frac{1}{m+1}\widetilde{X}^{(m+1)}\widetilde{X}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\widetilde{X}^{(m+1)} = (m+1)\widetilde{X}^{(m)}\widetilde{X}^{(1)} - \frac{(m+1)m}{2}\widetilde{X}^{(m-1)}\widetilde{X}^{(2)} + \frac{(m+1)m(m-1)}{2\cdot 3}\widetilde{X}^{(m-2)}\widetilde{X}^{(3)}$$
$$- \quad \cdots \quad +(-1)^k\frac{(m+1)m\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots k+1}\widetilde{X}^{(m-k)}\widetilde{X}^{(k+1)} + \quad \cdots \quad - \frac{(m+1)!}{(m+1)!}\widetilde{X}^{(m+1)}\widetilde{X}^{(0)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \widetilde{X}^{(m+1)} &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m+1}{k+1}\widetilde{X}^{(m-k)}\widetilde{X}^{(k+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\binom{m+1}{k}\widetilde{X}^{(m+1-k)}\widetilde{X}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière somme est exactement celle recherchée, ainsi on a démontré que pour un $m+1$ impair, ce théorème est valide pour tout m.

De façon similaire, on peut montrer que $X^{(n)}$ peut aussi être exprimé par une sommation. □

À partir de ce résultat, on obtient un fait intéressant.

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \widetilde{X}^{(k)}\widetilde{X}^{(n-k)} = 0, & n \text{ impair}, \\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \widetilde{X}^{(k)}X^{(n-k)} = 0, & n \text{ pair}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} X^{(k)}X^{(n-k)} = 0, & n \text{ impair}, \\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} X^{(k)}\widetilde{X}^{(n-k)} = 0, & n \text{ pair}. \end{cases}$$

Dans les cas où n est impair, ce résultat est trivial, car tous les termes de la somme s'annulent les uns avec les autres. Toutefois, dans les cas pairs, ce n'est pas si évident ce qui nous amène à cette définition.

Définition 3.4.

$$\left(X - \widetilde{X}\right)^{(n)} := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} X^{(k)}\widetilde{X}^{(n-k)}$$

Cette définition n'est rien d'autre qu le binôme de Newton avec les puissances généralisées. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.1. Pour tout entier $n \geq 2$ pair, on a

$$\left(X - \widetilde{X}\right)^{(n)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\widetilde{X}^{(2n)} = \sum_{k=1}^{2} n(-1)^{k-1} \binom{2n}{k} \widetilde{X}^{(2n-k)}X^{(k)}$$

Démonstration.

Ce corollaire découle directement du théorème 3.11. □

Ce dernier résultat est certes le résultat le plus important de ce mémoire. En effet, il permet d'éviter de faire de nombreuse intégrales complexes dans le cas $\widetilde{X}^{(2n)}$. Or, ces puissances formelles sont largement utilisées pour des problèmes de Sturm-Liouville numériques [21]. Ainsi, on économiserait certainement du temps de calcul dans ces analyses numériques.

3.4 Généralisation de fonctions analytiques par les puissances formelles

Depuis le début de ce mémoire, nous avons développé des outils qui se rapportent à une généralisation de certains concepts de base de l'analyse. Il est temps d'utiliser ces outils sur des fonctions. Ainsi, commençons par généraliser les fonctions analytiques.

On s'intéresse d'abord aux fonctions $\sin^x$, $\cos^x$ et e^x, car elles apportent chacune des caractéristiques essentielles qu'on souhaite utilisées dans la théorie en construction. De toute évidence, on souhaite être en mesure d'obtenir les fonctions classiques lorsqu'on pose $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Commençons par définir la fonction exponentielle généralisée.

Définition 3.5. On appelle l'exponentielle généralisée, les deux fonctions symétriques suivantes :

$$E(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k)}(x)}{k!},$$

$$\widetilde{E}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}.$$

L'exponentielle a évidemment la particularité que si on la dérive, on obtient à nouveau l'exponentielle.

Théorème 3.12. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$D^{(n)}E(x) = \begin{cases} \widetilde{E}(x), & n \text{ impair} \\ E(x), & n \text{ pair} \end{cases}$$

$$D^{(n)}\widetilde{E}(x) = \begin{cases} E(x), & n \text{ impair} \\ \widetilde{E}(x), & n \text{ pair} \end{cases}.$$

Démonstration.

Démontrons le résultat de $D^{(n)}E(x)$ par induction.

Le cas $n = 0$ est évident, car la dérivée généralisée de cet ordre ne modifie pas la fonction.

Pour $n = 1$, on doit calculer :

$$\begin{aligned} D^{(1)}E(x) &= f^2(x)(E(x))' \\ &= f^2(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\psi^{(k)}\right)'}{k!}. \end{aligned}$$

Voyons ce qu'il en est de la dérivée d'une de nos fonctions de puissances généralisées.

$$\left(\psi^{(k)}\right)' = \begin{cases} \left(X^{(k)}\right)' &= kX^{(k-1)}f^{-2} &= \frac{k}{f^2}\varphi^{(k-1)}, & k \text{ impair} \\ \left(\widetilde{X}^{(k)}\right)' &= k\widetilde{X}^{(k-1)}f^{-2} &= \frac{k}{f^2}\varphi^{(k-1)}, & k \text{ pair} \end{cases}$$

Ainsi, si on revient à la dérivée généralisée de l'exponentielle généralisée,

$$\begin{aligned} D^{(1)}E(x) &= f^2(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{f^2}\frac{\varphi^{(k-1)}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}}{k!} \\ &= \widetilde{E}(x) \end{aligned}$$

Supposons qu'on a prouvé cette propriété pour $m \geq 0$, alors voyons ce qu'il en est de $m+1$.

$$\begin{aligned} D^{(m+1)}E(x) &= \left(f^2\right)^{(-1)^m}\left(D^{(m)}E(x)\right)' \\ &= \begin{cases} f^{-2}\left(\widetilde{E}(x)\right), & m \text{ impair} \\ f^2\left(E(x)\right)', & m \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

- Pour m impair, calculons $\left(\widetilde{E}(x)\right)'$.

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{E}(x)\right)' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\varphi^{(k)}\right)'}{k!} \\ \text{où } \left(\varphi^{(k)}\right)' &= \begin{cases} \left(\widetilde{X}^{(k)}\right)' & = k\widetilde{X}^{(k-1)}f^2 & = kf^2\psi^{(k-1)}, & k \text{ impair} \\ \left(X^{(k)}\right)' & = kX^{(k-1)}f^2 & = kf^2\psi^{(k-1)}, & k \text{ pair} \end{cases} \\ \Rightarrow \left(\widetilde{E}(x)\right)' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kf^2\psi^{(k-1)}}{k!} \\ &= f^2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ &= f^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(k)}}{k!} \\ &= f^2E(x) \end{aligned}$$

- Lorsque m est pair, on doit obtenir $(E(x))'$. Cette valeur a déjà été obtenu dans le cas $n = 1$.
$$(E(x))' = f^{-2}\widetilde{E}(x)$$

Par conséquent,

$$D^{(m+1)}E(x) = \begin{cases} f^{-2}f^2E(x), & m \text{ impair} \\ f^2f^{-2}\widetilde{E}(x), & m \text{ pair} \end{cases}$$

$$D^{(m+1)}E(x) = \begin{cases} E(x), & m+1 \text{ pair} \\ \widetilde{E}(x), & m+1 \text{ impair} \end{cases}$$

Grâce au principe d'induction et à la symétrie entre $E(x)$ et $\widetilde{E}(x)$, on a démontré ce théorème. $\square$

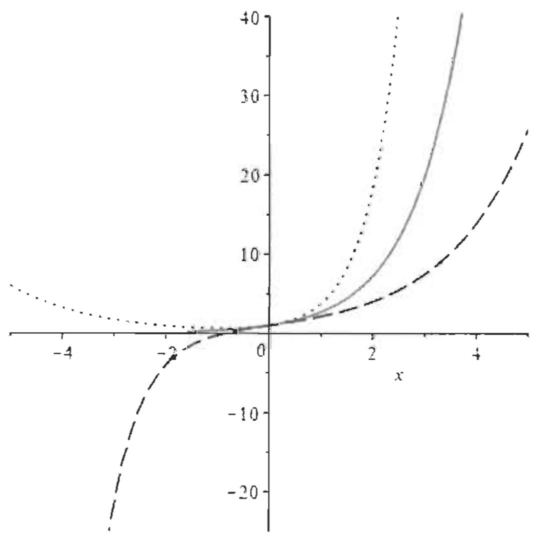
Numériquement, il est difficile d'illustrer une sommation qui va jusqu'à l'infini. On définit donc une somme restreinte à un certain nombre N :

$$E_N(x) := \sum_{k=0}^{N} \frac{\psi^{(k)}(x)}{k!}$$

$$\widetilde{E}_N(x) := \sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}.$$

Voyons le graphique de ces généralisations grâce aux sommes finies. Afin de représenter ces fonctions, il faut fixer la fonction $f^2(x)$ qui intervient dans ce calcul. Ici, on choisi $f^2(x) = \exp(x)$ et $x_0 = 0$ comme dans l'exemple 2 du chapitre 2.

FIGURE 3.1 – Fonctions exponentielle et exponentielles généralisées



En rouge avec des traits, on a la droite de $E_{20}(x)$, en bleu pointillé, on a $\widetilde{E}_{20}(x)$ et en vert, il s'agit de la droite $\exp(x)$.

Après avoir développé des fonctions exponentielles généralisées, on s'intéresse à des fonctions bien connues qui peuvent aussi s'exprimer par des séries. Ainsi, la meilleure approche pour définir les fonctions trigonométriques généralisées, sinus et cosinus, est sans conteste en utilisant une série infinie.

Définition 3.6. On appelle les fonctions sinus généralisées, les deux fonctions :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{(2k+1)}}{(2k+1)!},$$

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \widetilde{X}^{(2k+1)}}{(2k+1)!}.$$

Définition 3.7. On appelle les fonctions cosinus généralisées, les deux fonctions :

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{(2k)}}{(2k)!},$$

$$\widetilde{C}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \widetilde{X}^{(2k)}}{(2k)!}.$$

Une fois de plus, on s'intéresse à l'application des dérivées généralisées sur ces fonctions.

Théorème 3.13. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D^{(n)}S(x) = \begin{cases} S(x), & n \equiv 0 \pmod 4 \\ C(x), & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -S(x), & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -C(x), & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Démonstration.

On démontre ce résultat par induction. Commençons par les quatre cas de base.

Lorsque $n = 0$, c'est évident.

Lorsque $n = 1$,

$$\begin{aligned}
D^{(1)}S(x) &= f^2(x)S'(x) \\
S'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (X^{(2k+1)})'}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) X^{(2k)} f^{-2}}{(2k+1)!} \\
&= f^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{(2k)}}{(2k)!} \\
&= f^{-2} C(x) \\
D^{(1)}S(x) &= C(x)
\end{aligned}$$

Lorsque $n = 2$,

$$\begin{aligned}
D^{(2)}S(x) &= f^{-2} \left(D^{(1)}S(x)\right)' = f^{-2}(C(x))' \\
C'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(X^{(2k)}\right)'}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k \left(X^{(2k-1)}\right) f^2}{(2k)!} \\
&= -f^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} X^{(2k-1)}}{(2k-1)!} \\
&= -f^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{(k+1)}}{(2k+1)!} \\
&= -f^2 S(x) \\
D^{(2)}S(x) &= -S(x)
\end{aligned}$$

Lorsque $n = 3$,

$$D^{(3)}S(x) = f^2 \left(D^{(2)}S(x)\right)' = f^2(-S(x))' = -f^2 S'(x)$$

On a déjà trouvé $S'(x) = f^{-2}C(x)$, alors

$$D^{(3)}S(x) = -C(x)$$

Supposons qu'on a vérifié le théorème pour un $m \geq 0$. Dans ce cas.

$$D^{(m+1)}S(x) = (f^2)^{(-1)^m} \left(D^{(m)}S(x)\right)'$$

On considère quatre cas :

1. $m \equiv 0 \pmod 4$

$$\begin{aligned}\left(D^{(m)}S(x)\right)' &= (S(x))' \\ &= f^{-2}C(x) \\ \text{donc, } D^{(m+1)}S(x) &= f^2f^{-2}C(x) = C(x)\end{aligned}$$

   En effet, car $m+1 \equiv 1 \pmod 4$.

2. $m \equiv 1 \pmod 4$

$$\begin{aligned}\left(D^{(m)}S(x)\right)' &= C'(x) = -f^2S(x) \\ \text{donc, } D^{(m+1)}S(x) &= -f^{-2}f^2S(x) = -S(x)\end{aligned}$$

   En effet, car $m+1 \equiv 2 \pmod 4$.

3. $m \equiv 2 \pmod 4$

$$\begin{aligned}\left(D^{(m)}S(x)\right)' &= -S'(x) = -f^{-2}C(x) \\ \text{donc, } D^{(m+1)}S(x) &= -f^2f^{-2}C(x) = -C(x)\end{aligned}$$

   En effet, car $m+1 \equiv 3 \pmod 4$.

4. $m \equiv 3 \pmod 4$

$$\begin{aligned}\left(D^{(m)}S(x)\right)' &= -C'(x) = f^2S(x) \\ \text{donc, } D^{(m+1)}S(x) &= f^{-2}f^2S(x) = S(x)\end{aligned}$$

   En effet, car $m+1 \equiv 0 \pmod 4$.

Grâce à l'induction, le théorème a été démontré. $\square$

Théorème 3.14. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$D^{(n)}\widetilde{C}(x) = \begin{cases} \widetilde{C}(x), & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -\widetilde{S}(x), & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -\widetilde{C}(x), & n \equiv 2 \pmod 4 \\ \widetilde{S}(x), & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Démonstration.
La démonstration est semblable à celle du théorème précédent. □

Ces deux derniers théorèmes s'appliquent sur les fonctions $S(x)$ et $\widetilde{C}(x)$, mais on peut facilement les modifier afin d'obtenir les dérivées généralisées de $\widetilde{S}(x)$ et de $C(x)$.

De nouveau, on peut estimer les fonctions par les sommes partielles suivantes :

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k X^{(2k+1)}}{(2k+1)!}, \\ \widetilde{S}_N(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \widetilde{X}^{(2k+1)}}{(2k+1)!}, \\ C_N(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k X^{(2k)}}{(2k)!}, \\ \widetilde{C}_N(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \widetilde{X}^{(2k)}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Voyons ce que les graphiques de ces fonctions permettent de mettre en évidence. Une fois de plus, on fixe $f^2(x) = \exp(x)$ et $x_0 = 0$.

Les fonctions trigonométriques sont accompagnées d'identités trigonométriques dans l'algèbre euclidienne qui révèlent toute leur richesse. Un identité incontournable est : $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. On ne peut douter de sa validité simplement à travers le cercle trigonométrique, mais qu'en est-il de son parallèle dans la théorie développer dans ce mémoire. En modelisant plusieurs sommations, on remarque que l'identité en question prend la forme suivante :

FIGURE 3.2 – Fonctions sinus et sinus généralisées

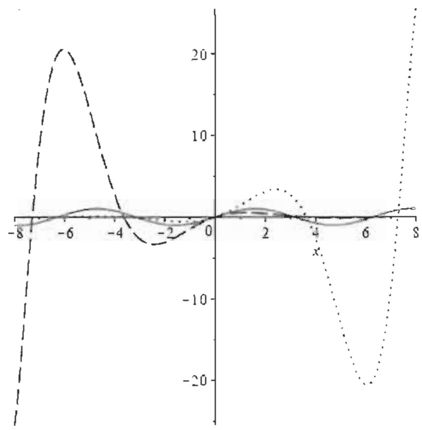
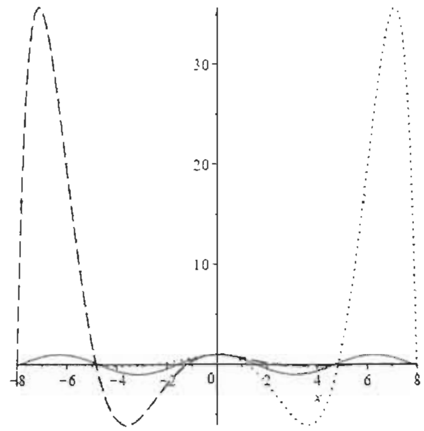


FIGURE 3.3 – Fonctions cosinus et cosinus généralisées



En rouge avec des traits, on a les fonctions de $S_{20}(x)$ *et* $\widetilde{C}_{20}(x)$.
En bleu pointillé, on a $\widetilde{S}_{20}(x)$ *et* $C_{20}(x)$.
En vert, il s'agit des fonctions $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$.

Conjecture 3.1. $C(x)\widetilde{C}(x) + S(x)\widetilde{S}(x) = 1.$

Outre numériquement, nous n'avons pas été en mesure de démontrer cette conjecture. Néanmoins, nous l'avons testé pour plusieurs fonctions f : $f = 1 + x$, $f = e^{x/2}$, $f = \sqrt{1+x}$, $f = 1/x$, ...

On vient de généraliser les fonctions exponentielle, cosinus et sinus, mais pourquoi s'arrêter là. Définir des fonctions dans cette théorie est assez simple tant qu'elles peuvent s'écrire sous forme de série. D'ailleurs, lors du chapitre précédent, nous avons introduit une série de Taylor généralisée et la matrice permettant de passer d'une série de Taylor classique à la série de Taylor généralisée.

Considérons, par exemple les fonctions cosinus et sinus hyperboliques.

Définition 3.8. On définit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques généralisées par les fonctions :

$$CH(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{(2n)}(x)}{(2n)!},$$
$$\widetilde{CH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{X}^{(2n)}(x)}{(2n)!},$$
$$SH(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!},$$
$$\widetilde{SH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{X}^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!}.$$

Comparons, une fois de plus, les fonctions généralisées avec les fonctions de base. Afin d'y parvenir, on pose $f^2(x) = x$ et $x_0 = 1$. De plus, il nous faut aussi restreindre la sommation en un nombre fini d'éléments.

FIGURE 3.4 – Fonctions sinus hyperbolique et sinus hyperboliques généralisées

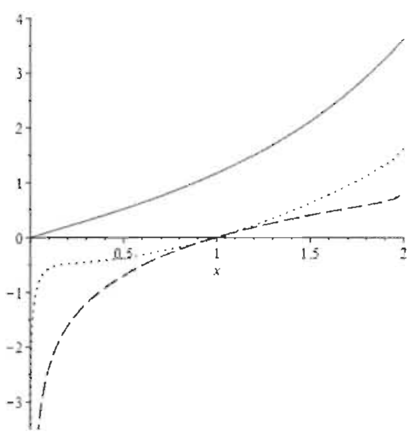
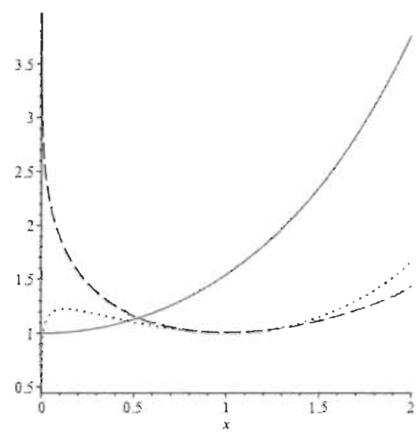


FIGURE 3.5 – Fonctions cosinus hyperbolique et cosinus hyperboliques généralisées



En rouge avec des traits, on a les fonctions de $SH_{20}(x)$ *et* $CH_{20}(x)$.
En bleu pointillé, on a $\widetilde{SH}_{20}(x)$ *et* $\widetilde{CH}_{20}(x)$.
En vert, il s'agit des fonctions $\sinh(x)$ *et* $\cosh(x)$.

Conjecture 3.2. $CH(x)\widetilde{CH}(x) - SH(x)\widetilde{SH}(x) = 1.$

De nouveau, nous avons testé cette conjecture pour plusieurs fonctions f et elle s'est toujours avérée exacte. Néanmoins, sa démonstration demeure dans les sphères toujours inconnues des mathématiques.

Conclusion

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous sommes attardés à revoir les résultats classiques généraux des systèmes de Sturm-Liouville et les conditions aux limites de ces systèmes. Nous avons, entre autres, vu que les fonctions propres composant ces systèmes sont orthogonales et forment un système complet. Dans le second chapitre nous avons présenté plusieurs résultats récents qui on été obtenus par Kravchenko et Tremblay en 2010 [15]. Le résultat principal sur lequel nous nous sommes attardés dans ce mémoire étant la solution générale des systèmes de Stum-Liouville par une séries de puissances des valeurs propres à partir de fonctions de puissances généralisées. Ces fonctions de puissances généralisées sont définies à partir d'une fonctions $f(x)$ fixée qui s'avère être la solution du système de Sturm-Liouville homogène (valeur propre nulle) lorsque l'on cherche la solution générale du système. Les dérivées généralisées sont également introduites, elles qui permettent d'obtenir des séries de Taylor généralisées. Dans tous les cas, autant les fonctions de puissances généralisées, les dérivées généralisées (et les intégrales généralisées qui sont introduites au chapitre 3), on obtient les cas standards lorsque l'on choisit $f(x) = 1$.

Au chapitre 3, on présente de nouveaux résultats tirés de [15] et du chapitre 2. On introduit l'intégrale généralisée, puis on étudie comment ces opérateurs de dérivées et d'antidérivées agissent sur les fonctions de puissances généralisées. On obtient également des résultats qui sont fort prometteurs pour la suite des choses en ce qui concerne cette théorie. D'une part, on obtient une formule qui nous permet d'obtenir certaines fonctions de puissances généralisées sans faire aucune intégrale ! En d'autres termes, on démontre que certaines puissances généralisées peuvent s'écrire par une combinaison non linéaire des puissances qui les précèdent. Ce résultat est intéressant car il permet d'améliorer l'efficacité des calculs numériques qui utilisent les fonctions de puissances généralisées. Plusieurs publications ont d'ailleurs vu le jour récemment où de nombreux calculs numériques ont été faits à l'aide des fonctions de puissances, dont [13], [21] et [16]. Cela dit, le résultat purement théorique demeure d'un grand intérêt également pour la suite des recherches qui pourront être faites. Le second résultat obtenu, que l'on considère plus important dans ce mémoire, concerne les conjectures sur les identités trigonométriques, elliptique et hyperbolique, que nous présentons à la fin du chapitre 3. Malheureusement, nous n'avons pas été en mesure de démontrer ces résultats, mais nous les avons vérifiés pour de nombreuses fonctions $f(x)$. Ces résultats ouvrent la voie à une étude systématique de toute l'analyse à une variable réelle.

Cette théorie permettra-t-elle de résoudre certains problèmes de la physique liés aux problèmes de Sturm-Liouville ? En particulier, la mécanique quantique supersymétrique unidimensionnelle pourrait être une théorie fort intéressante à étudier à l'aide des fonctions de puissances généralisées. Peut-on également envisager de revisiter plusieurs résultats classiques des mathématiques dans le cadre de cette théorie ? Les transformées de Fourier ou de Laplace pourraient être des avenues intéressantes à explorer à ce sujet.

Bibliographie

[1] F. Ayres and E. Mendelson. *Calculus.* Schaum's Outline, 2009.

[2] A. Bilodeau and S. Tremblay. On two-dimensional supersymmetric quantum mechanics, pseudoanalytic functions and transmutation operators. *Journal of Physics A : mathematical and Theorical*, 46(32), Octobre 2013.

[3] G. Birkhoff and G. Rota. On the completeness of sturm-liouville expansions. *Mathematical Association of America*, 2 :835–841, Novembre 1960.

[4] G. Birkhoff and G. Rota. *Ordinary Differential Equations.* Ginn and company, 1962.

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Édition Masson, 1983.

[6] H .M. Campos and V. V. Kravchenko. A finite-sum representation for solutions for the jacobi operator. *Journal of Differance Equations and Applications*, 17(4) :567–575, Avril 2011.

[7] H. M. Campos and V. V Kravchenko. Fundamentals of bicomplex pseudoanalytic function theory : Cauchy integral formulas, negative formal powers and schrödinger equations with complex coefficients. *eprint arXiv : 1205.4654*, Mai 2012.

[8] T. Gallouët. *Mesure, intégration, probabilités.* Ellipses, 2013.

[9] T. Hawkins. *The Lebesgue's Theory of Integration.* Madison, 1970.

[10] M. Hazewinkel. *Lebesgue space.* Encyclopedia of Mathematics, 1994.

[11] D. Joyce. Proof of Green's theorem. *Math 131 Multivariate Calculus*, 2014.

[12] V. V. Kravchenko. A representation for solutions of the sturm-liouville equation. *Complex variables and elliptic equations*, 53 : 8 :775–789, août 2008.

[13] V. V. Kravchenko. Construction of a transmutation for the one-dimensional schrödinger operator and a representation for solutions. *Applied Mathematics and Computation*, 328 :75–81, Juillet 2018.

[14] V. V. Kravchenko, P. Marco, and T. Ramirez. On bers generating functions for first order systems of mathematical physics. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 21(3) :547–559, 2011.

[15] V. V. Kravchenko, S. Morelos, and S. Tremblay. Complete systems of recursive integrals and taylor series for solutions of sturm-liouville equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, juin 2011.

[16] V. V. Kravchenko, J. A. Otero, and S. M. Torba. Analytic approximation of solutions of parabolic partial differential equations with variable coefficients. *Advances in Mathematical Physics*, 2017, Janvier 2017.

[17] V. V. Kravchenko and R. M. Porter. Spectral parameter power series for sturm-liouville problems. *Mathematical methods in the applied sciences*, Novembre 2008.

[18] V .V. Kravchenko and S. Torba. Analytic approximation of transmutation operators and related systems of functions. *Boletin de la Sociedad Matemàtica Mexicana*, 22(2) :389–429, 2016.

[19] V. V. Kravchenko and S. M. Torba. Transmutations for darboux transformed operators with applications. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(7) :075201, 2012.

[20] V. V. Kravchenko and S. M. Torba. Transmutations and spectral parameter power series in eigenvalue problems. *Operator Theory : Advances and Applications*, 228(2013) :209–238, 2013.

[21] V. V. Kravchenko and S. M. Torba. Modified spectral parameter power series representations for solutions of sturm-liouville equations and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 238 :82–105, Juillet 2014.

[22] V. V. Kravchenko and S. M. Torba. Analytic approximation of transmutation operators ans applications to highly accurate solution of spectral problems. *Journal of Computational ans Applied*, 275 :1–26, Février 2015.

[23] V. V. Kravchenko and S. M. Torba. Asymptotics with respect to the spectral paramater and neumann series of bessel functions for solutions of the one-dimensional schrödinger solution. *J. Math. Phys*, 58(2017) :122107, 2017.

[24] V. V. Kravchenko and S. Tremblay. Explicit solutions of generalized cauchy-riemann systems using the transplant operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 370(1) :242–257, 2010.

[25] V .V. Kravchenko and S. Tremblay. Spatial pseudoanalytic function arising from the factorization of linear second order elliptic operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(16) :1999–2010, Novembre 2011.

[26] V. A. Marchenko. *Sturm-Liouville operators and applications.* Birkhauser, 1986.

[27] M. A. Pinsky. *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications.* McGraw-Hill, Inc., 1991.

[28] M. Putinar. Generalized eigenfunction expansions and spectral decompositions. *Linear operators ; Banach center publications*, 38 :265–286, 1997.

[29] H. L. Royden. *Real analysis.* Macmillan Publishing Company, 1988.

[30] R. Wrede and M. R. Spiegel. *Advanced Calculus.* Schaum's outline, 2010.

Annexe A

Fonctions propres

Avant même d'établir le concept de fonctions propres, on doit obtenir quelques notions primordiales. D'abord, voyons ce qu'est un opérateur. Cette notion mathématique est souvent utilisée en physique. Elle permet de faire resortir des informations qui ne sont pas visibles au premier abord. Par exemple, la fonction d'onde contient à elle-seule toutes les informations cruciales à un système quantique. Lorsqu'on utilise des opérateurs sur cette fonction, ça nous permet de mettre en évidence de nouvelles données.

Un opérateur est un objet mathématique agissant d'un espace vectoriel à un autre. On s'intéresse aux opérateurs qui agisse sur une fonction et nous en redonne une autre. Soit D un opérateur et f une fonction :

$$D(f(x)) = g(x),$$

alors g est une fonction.

La plupart du temps, la fonction obtenue, g dans notre exemple, est différente de la fonction initiale. Voyons un exemple d'opérateur respectant nos conditions.

Exemple 5. La dérivée est un opérateur. En effet, soit f une fonction, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f'(x).$$

▲

Il arrive parfois que pour un opérateur fixé, certaine fonction reste sensiblement la même après qu'on lui ait appliqué l'opérateur en question.

$$D(f(x)) = \lambda f(x)$$

où λ est une constante. Dans un tel cas, on appelle la fonction invariante f une fonction propre et la valeur associée λ une valeur propre.

Exemple 6. Revenons à l'exemple 5. On sait que la fonction exponentielle reste inchangée à une constante multipliée près pour l'opérateur de dérivation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{kx} = k\,\mathrm{e}^{kx}\,.$$

Donc pour cet opérateur, la fonction exponentielle est une fonction propre. ▲

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux fonctions propres provenant d'un système de Sturm-Liouville. Elles viennent en couple avec une valeur propre qui leur est associée. En effet, on peut réérire une équation de Sturm-Liouville de telle sorte qu'on obtient la structure d'un opérateur appliqué sur une fonction, :

$$\frac{q}{\rho}\varphi - \frac{(s\varphi')'}{\rho} = \lambda\varphi.$$

Avec cette notation, on comprend pourquoi les solutions φ du système sont des fonctions propres.

Certaines des valeurs propres obtenues lors de la résolution d'une équation de Sturm-Liouville ont une multiplicité supérieure à 1. On entend par là que les valeurs propres de multiplicité $k > 1$ sont aussi des valeurs propres de l'équation de Sturm-Liouville dérivée $k - 1$ fois.

Ces valeurs propres particulières sont liées à des fonctions propres, formant ainsi une solution de l'équation initiale. On nomme les fonctions propres des dérivées ; des fonctions propres généralisées.

L'ensemble formé par les fonctions propres et les fonctions propres généralisées est complet sur l'espace où est défini l'équation de Sturm-Liouville.

Cette propriété de complétude permet d'exprimer toute fonction lisse comme une série de fonctions propres et de fonctions propres généralisées provenant d'un sytème de Sturm-Liouville régulier où ces fonctions sont multipliées par des constantes. C'est un développement majeur du 19e siècle qui utilise les sytèmes avec un spectre discret.

Un exemple des plus parlant de fonctions propres nous provient des séries de Fourier. Elles peuvent exprimer n'importe quelles fonctions périodiques continues comme une série convergente.

Théorème A.1 (Théorème de la convergence de Fourier). Soit $f(x)$ une fonction périodique continue et dérivable, de période 2π et soit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

Alors la série infinie

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \cdots$$

converge uniformément vers $f(x)$.

Ce théorème bien connu des mathématiques applique directement notre résultat sur la complétude des fonctions propres.

Annexe B

Espace L_p

Au chapitre 2 de ce mémoire, on mentionne un espace bien particulier, L_2. Il est entre autres abordé dans la complétude des suite de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ (voir 2.1).

Avant même d'en apprendre plus sur cet espace, il faut comprendre des concepts préalables. Un espace mesurable est formé d'un couple $(X, \mathcal{A})$ comprenant un ensemble de base X et une tribu, qu'on nomme aussi une σ-algèbre ; $\mathcal{A}$.

Définition B.1. Soit $\mathcal{A}$ une famille de sous-ensembles de l'ensemble X tels que :

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset \qquad (\Rightarrow X \in \mathcal{A}$ et $\emptyset \in \mathcal{A})$,
2. $\forall B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad B^c \in \mathcal{A} \qquad ($où $\quad B^c = X \backslash B)$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

Ainsi, le couple $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable. Si on lui ajoute une mesure, l'espace devient mesuré. Une mesure en mathématiques permet d'associer une grandeur numérique à un sous-ensemble donné de la σ-algèbre.

Définition B.2. L'application m définie sur $\mathcal{A}$ est une mesure si elle répond aux deux critères suivants :

1. $m(\emptyset) = 0$
2. m est σ-additive :

   c'est-à-dire que si $B_n \in \mathcal{A}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que ces sous-ensembles sont deux à deux disjoints, alors

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Par conséquent, $(X, \mathcal{A}, m)$ forme un espace mesuré.

Une mesure bien connue qu'il nous est important de mentionner est la mesure de Lebesgue. Cette mesure a plusieurs définitions selon l'usage qu'on désire en faire. Dans notre cas, on ne fait que l'appliquer sur une droite réelle, ainsi on ne s'intéresse qu'à une propriété qui découle de la mesure de Lebesgue. En effet, dans les problèmes de Sturm-Liouville qui nous intéressent dans le chapitre 2 de ce travail de recherche, on se situe sur un intervalle $[a, b]$ avec a et b des réels.

Dans les intervalles réels, la mesure de Lebesgue est égale à la longueur dudit intervalle.

$$\mu([a, b]) = \ell([a, b]) = b - a.$$

On introduit cette mesure de Lebesgue, car c'est souvent celle qui est appliquée dans les espaces $\mathcal{L}_p$. Ces espaces regroupent des fonctions, on parle donc d'*espace de fonctions* ou d'*espace fonctionnel.*

Définition B.3 (Les espaces $\mathcal{L}_p(E, T, \mu)$)**.** Soient (E, T, μ) un espace mesuré, on prend un p tel que $1 \leq p \leq \infty$ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable.

1. On dit que $f \in \mathcal{L}_p(E, T, \mu)$ si $\int |f|^p \mathrm{d}m < \infty$.

   On pose alors $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \mathrm{d}m\right)^{1/p}$.
2. On dit que $f \notin \mathcal{L}_p(E, T, \mu)$ si $\int |f|^p \mathrm{d}m = \infty$.

   On pose alors $\|f\|_p = \infty$.

Les espaces $\mathcal{L}_p$ peuvent être interprétés comme un espace de fonctions de puissance p-ième intégrable. Certains de ces espaces sont plus étudiés que d'autres, on retrouve parmi ceux qui sont le plus utilisés (en physique par exemple) l'espace $\mathcal{L}_2$; des fonctions de carré intégrable.

Chacun des espaces $\mathcal{L}_p$ a un espace quotient qui lui est associé et qui est aussi utilisé que l'espace lui-même. Toutefois, avant d'introduire ces espaces qu'on notera L_p il nous faut une relation d'équivalence. En l'occurence, il faut avant tout comprendre le concept de μ-presque partout. On entend par là qu'une proposition est vérifiée pour tous les $x \in E$, sauf sur un ensemble qu'on dit négligeable. Un ensemble négligeable est un ensemble de mesure nulle.

Définition B.4. La proposition $P(x)$ est dite vraie μ-presque partout s'il existe un ensemble $A \in T$ tel que :

1. $\{x \in E \quad | \quad P(x) \text{ est faux } \} \subset A$,
2. $\mu(A) = 0$.

Grâce à cette notion de *presque partout*, on peut décrire la relation d'équivalence dont on a besoin. Appelons $\sim$ cette relation. Ainsi, pour deux fonctions, f et g, on a

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E.$$

Cet énoncé revient à dire que f est en relation $\sim$ avec g si et seulement si $\|f - g\|_p = 0$.

Vérifions qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

1. Réflexivité :

$$\begin{aligned} &f(x) = f(x), \quad \forall x \in E \\ &\Rightarrow f \sim f \end{aligned}$$

2. Symétrie :

$$\begin{aligned} \text{Si } f \sim g, \text{ alors } f(x) = g(x) \quad &\mu\text{-presque tout } x \in E \\ \Rightarrow g(x) = f(x) &\text{ pour le même ensemble de } x \\ \Rightarrow g \sim f& \end{aligned}$$

3. Transitivité :

$$
\begin{aligned}
&\text{Si } f \sim g \text{ et } g \sim h \\
&f \sim g \Rightarrow f(x) = g(x) \quad \mu\text{-presque tout } x \in E \\
&\qquad \text{Posons } A = \{x \in E \quad | \quad f(x) \neq g(x)\}, \\
&\qquad \text{alors } \mu(A) = 0. \\
&g \sim h \Rightarrow g(x) = h(x) \quad \mu\text{-presque tout } x \in E \\
&\qquad \text{Posons } B = \{x \in E \quad | \quad g(x) \neq h(x)\}, \\
&\qquad \text{alors } \mu(B) = 0. \\
&\text{De plus, } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = 0 \\
&\text{Posons } C = \{x \in E \quad | \quad f(x) \neq h(x)\}, \\
&\qquad \text{alors } \mu(C) \leq \mu(A \cup B) = 0 \\
&\qquad \Rightarrow \mu(C) = 0. \\
&\text{Donc } f(x) = h(x) \quad \mu\text{-presque tout } x \in E.
\end{aligned}
$$

Nous avons notre relation d'équivalence pour les ensembles $\mathcal{L}_p$, on peut maintenant les diviser en classes d'équivalence.

Notons $[f]$ la classe d'équivalence de f pour cette relation. Ainsi,

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}_p(E, T, \mu) \quad | \quad f(x) = g(x) \quad \mu\text{-presque partout}\}.$$

Définition B.5. Soit $p \in [1, \infty]$. On note $L_p(E, T, \mu)$ l'ensemble quotient de $\mathcal{L}_p$ par la relation d'équivalence $\sim$:

$$L_p(E, T, \mu) = \{[f] \quad | \quad f \in \mathcal{L}_p(E, T, \mu)\}.$$

Cet espace, de par sa construction, est un espace vectoriel normé. Les opérations, ainsi que la norme qui lui sont associés sont :

$$
\begin{aligned}
[f] + [g] &= [f + g], & &\forall f, g \in \mathcal{L}_p(E, T, \mu), \\
\lambda [f] &= [\lambda f], & &\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}_p(E, T, \mu), \\
\| [f] \|_p &= \|f\|_p, & &\forall f \in \mathcal{L}_p(E, T, \mu).
\end{aligned}
$$

Dans ce mémoire, ainsi que dans de nombreux écrits, on ne nomme cet espace qu'en mentionnant l'intervalle sur lequel il intervient. En effet, les fonctions f_n et g_n font parties de l'espace $L_2(a, b)$, la mesure n'est pas mentionnée, car par défaut c'est la mesure de Lebesgue qui s'applique étant donné que nous sommes sur un espace de type $\mathbb{R}^n$.

Dans la section 2.2 de ce document de recherche, on démontre que le système de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \bigcap \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ est complets dans $L_2(a, b)$, l'espace des fonctions de carré intégrable.