UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
ALEX BILODEAU

FONCTIONS PSEUDO-ANALYTIQUES, TRANSMUTATEURS ET MÉCANIQUE QUANTIQUE SUPERSYMÉTRIQUE

NOVEMBRE 2014

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L’auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l’Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n’entraîne pas une renonciation de la part de l’auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d’auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d’une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Avant-propos

Au cours des dernières années, j'ai eu l'occasion de collaborer avec mon directeur de maîtrise, M. Sébastien Tremblay, dans le cadre de ses recherches. La motivation fondamentale du mémoire que je présente ici est d'étaler les résultats que nous avons obtenus au cours de cette période.

Le processus ayant mené à la confection de ce mémoire a réellement débuté lors de mes deux derniers étés de baccalauréat, alors que j'ai eu le plaisir de décrocher deux bourses du *Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada* (CRSNG). Grâce à ces stages, j'ai pu me familiariser avec les fonctions pseudo-analytiques, sujet d'expertise de M. Tremblay, et surtout éplucher la littérature pertinente du domaine. C'est lors de ma maîtrise que j'ai commencé à travailler plus sérieusement avec mon directeur sur les fonctions pseudo-analytiques. Lors de ces recherches, nous avons été en mesure d'appliquer certains résultats provenant d'articles antérieurs et de les remodeler, leur trouvant une portée nouvelle. Le fruit de notre travail fut ensuite couché dans l'article [1], article qui fut par la suite publié en octobre 2013 dans le *Journal of Physics A*.

Avant de commencer, je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, M. Sébastien Tremblay, pour tout son support, pour sa confiance à mon endroit et pour sa passion contagieuse envers les mathématiques. Je souhaite également souligner l'apport du *Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada* et du département de mathématiques et d'informatique de l'UQTR pour leur soutien financier, qui fut amplement apprécié au fil de mes études universitaires. Je veux finalement remercier mes parents, mes collègues et amis, ainsi que ma copine, qui m'ont offert des fondations solides et, chaque jour, un environnement propice pour réussir.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Qu'arrive-t-il lorsque l'on décide de modifier la décomposition habituelle en parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe, remplaçant le « 1 » et le « i » par deux fonctions complexes prescrites « F » et « G » ? Une question toute simple, une réponse pronfondément intéressante...

C'est dans les années 1950 que les mathématiciens Lipman Bers et Ilya Vekua, géographiquement éloignés et avec leur approche propre, ont chacun tenté une réponse à cette question. Ainsi, la théorie des fonctions pseudo-analytiques voyait le jour. Reconnue aujourd'hui comme l'une des plus intéressantes extensions de l'analyse complexe, cette branche s'est avérée des plus efficaces afin d'offrir des systèmes infinis de solutions aux équations de type elliptique. De récents travaux, qui pavaient la voie à une utilisation concrète des fonctions pseudo-analytiques dans l'étude d'équations physiques utiles, ont engendré la renaissance de la branche et une foison d'articles.

Comme expliqué en avant-propos, dans ce document, l'objectif central sera de présenter l'article scientifique bâti au cours de ma maîtrise. Dans ledit papier, on analyse le lien profond découvert entre une classe particulière de fonctions pseudo-analytiques et un couple de systèmes importants du modèle supersymétrique (en physique quantique). En utilisant les nombreux outils que propose l'analyse pseudo-analytique, on démontre ensuite comment il est possible de construire un ensemble infini de solutions pour ces systèmes supersymétriques, et même d'exprimer toute solution des systèmes en termes des éléments de cet ensemble.

Ce mémoire comporte trois sections principales. Dans la section I, on met la table avec la présentation de certaines notions préliminaires incontournables pour bien comprendre le contenu de l'article. La section II contient l'article scientifique, point focal du mémoire, dans sa langue anglaise d'origine. Un résumé en français l'accompagne, expliquant grossièrement les sujets qui y sont abordés et les résultats qu'il contient. Enfin, la dernière section propose une discussion générale sur l'article.

Chapitre 2

Notions préliminaires

Afin de favoriser une bonne compréhension de l'essence de ce mémoire, quelques notions nécessitent une exploration adéquate. La motivation de ce chapitre consistera justement à étaler quatre concepts-clés. Tout d'abord, il sera pratique d'introduire la ***transformée de Darboux***, pour le cas unidimensionnel. Puis, nous définirons l'idée de ***complétude d'une suite de fonction***. Les ***séries de Taylor***, étroitement liées à la complétude, mériterons ensuite notre attention. Finalement, puisque le coeur même du présent travail porte sur les ***fonctions pseudo-analytiques***, les bases de cette théorie seront exposées. Nous décortiquerons particulièrement en profondeur les ***puissances formelles***, objets primordiaux de cette théorie.

2.1 Transformée de Darboux en une dimension

Il est à noter que la présente section a été construite à partir de l'ouvrage [2]. Considérons l'équation différentielle de second degré

$$-\psi''(x) + u(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{2.1}$$

Ici, la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est l'inconnue, la fonction complexe u est fixée, et E consiste en un paramètre réel de l'équation. Dans le domaine de la mécanique quantique, cette équation est désignée sous le nom d'***équation de Schrödinger unidimensionnelle***.

Soit ϕ, une solution particulière de l'équation (2.1), associée à une valeur E_0 du paramètre E. Autrement dit, $-\phi'' + u\phi = E_0\phi$. Alors, pour toute solution ψ de l'équation (2.1), la transformation

$$\psi \qquad \mapsto \qquad \widetilde{\psi} := \psi' - \frac{\phi'}{\phi}\,\psi$$

est appelée ***transformation de Darboux*** (selon ϕ) de ψ, ainsi nommée en l'honneur de son créateur, le mathématicien Jean Gaston Darboux (1842-1917). Le théorème qui suit permet de saisir l'intérêt que présente cette transformation.

Proposition 2.1.1 *Soit ϕ, une solution particulière de l'équation de Schrödinger (2.1) associée à une valeur (fixée) E_0. Soit ψ, une solution quelconque de (2.1) associée à une valeur quelconque E_1. Alors la transformation de Darboux $\widetilde{\psi}$ de ψ satisfait la relation*

$$-\widetilde{\psi}'' + \widetilde{u}\widetilde{\psi} \;=\; E_1\widetilde{\psi},$$

où $\widetilde{u}(x) = u(x) - 2\left(\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)'$.

Preuve On sait par définition que $\widetilde{\psi} = \psi\,' - \dfrac{\phi\,'}{\phi}\,\psi$. En utilisant les propriétés de base de la dérivée, puis en effectuant quelques simplifications élémentaires, on trouve aisément que

$$-\widetilde{\psi}\,'' \;=\; -\psi\,''' + \frac{\phi\,'''}{\phi}\psi - 3\,\frac{\phi\,'\phi\,''}{\phi^2}\psi + 2\,\frac{\phi\,''}{\phi}\psi\,' - 2\,\frac{(\phi\,')^2}{\phi^2}\psi' + \frac{\phi\,'}{\phi}\psi\,'' \,.$$

En utilisant la définition donnée pour $\widetilde{u}$, puis en appliquant de nouveau les simplifications élémentaires qui se présentent, on découvre ainsi que

$$-\widetilde{\psi}\,'' + \widetilde{u}\widetilde{\psi} \;=\; -\psi\,''' + \frac{\phi\,'''}{\phi}\psi - \frac{\phi\,'\phi\,''}{\phi^2}\psi + \frac{\phi\,'}{\phi}\psi\,'' + u\psi\,' - \frac{\phi\,'}{\phi}u\psi\,'' \,.$$

Puisque ψ est par hypothèse solution de l'équation de Schrödinger (2.1) avec $E = E_1$, on peut remplacer toutes les occurences du terme ψ'' par l'expression $(u - E_1)\psi$ dans l'équation précédente. De cette manière, après manipulations simples, on obtient l'équation

$$-\widetilde{\psi}\,'' + \widetilde{u}\widetilde{\psi} \;=\; \psi\Big(- u\,' + \frac{\phi\,'''}{\phi} - \frac{\phi\,'\phi\,''}{\phi^2} - E_1\frac{\phi\,'}{\phi}\Big) \;+\; \psi\,'E_1 \,.$$

Finalement, il ne reste plus qu'à substituer les occurences du terme $\phi\,''$ par l'expression $(u - E_0)\phi$, pour conclure après simplifications que

$$-\widetilde{\psi}\,'' + \widetilde{u}\widetilde{\psi} \;=\; \psi\Big(- E_1\frac{\phi\,'}{\phi}\Big) + \psi\,'E_1 \;=\; E_1\Big(\psi\,' - \frac{\phi\,'}{\phi}\psi\Big) \;=\; E_1\widetilde{\psi} \,.$$

■

La précédente proposition assure que la transformation de Darboux d'une fonction ψ satisfait une nouvelle équation de Schrödinger, analogue à celle satisfaite par ψ. La fonction u est modifiée, mais la valeur donnée au scalaire E reste intouchée.

Remarque 2.1.2 *Dans les sections subséquentes, la fonction particulière ϕ utilisée* *pour définir la transformation de Darboux sera toujours de type* $\mathrm{e}^{\chi(x)}$ *et sera associée à la valeur* 0 *de* E. *La fonction réelle* $\chi(x)$ *sera bien sûr rigoureusement définie en temps opportun. Dans cette situation, la transformation de Darboux unidimensionnelle (associée à* e^{χ}*) d'une fonction* ψ *donnée correspondrait à*

$$\tilde{\psi} \;=\; \psi' - \left(\frac{(\mathrm{e}^{\chi})'}{\mathrm{e}^{\chi}}\psi\right) \;=\; \psi' - \frac{\mathrm{e}^{\chi}\chi'}{\mathrm{e}^{\chi}}\psi \;=\; \psi' - \chi'\psi$$

Il faut toutefois mentionner que la transformation qui sera utilisée correspondra à une transformation de Darboux étendue, en deux dimensions. Dans ce cas, l'équation de Schrödinger sera un système, l'inconnue sera une fonction allant de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}^2$ et la transformation de Darboux consistera en une matrice de format 2×2.

2.2 Complétude

Le concept de complétude d'une suite de fonctions est omniprésent dans ce mémoire. Puisqu'il sera amplement utilisé tout au long du document, il convient donc de proprement l'introduire, et surtout de l'assortir de certains exemples notables. Les définitions et résultats présentés dans cette section proviennent largement de l'ouvrage [3].

Définition 2.2.1 *Soit* V, *un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{R}$ *ou sur le corps* $\mathbb{C}$, *muni d'une norme* $\|\cdot\|$. *La suite* $W = (w_n)_{n=0}^{\infty}$ *de vecteurs de* V *est dite* ***complète*** *dans* V *si tout élément de l'espace peut être approché de manière arbitrairement précise, selon la norme* $\|\cdot\|$, *par les éléments de* W. *Autrement dit, pour que* W *soit complète, on doit avoir que pour un vecteur* $v \in V$ *arbitraire,*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \qquad \exists a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} : \qquad \left\| v - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} a_n w_n \right\| < \varepsilon,$$

où $\mathbb{K}$ désigne le corps approprié ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Remarque 2.2.2 *Lorsque l'espace vectoriel concerné et la norme utilisée ne présentent aucune ambiguïté, on dira seulement que W est complète.*

Remarque 2.2.3 *Une confusion est à éviter ici. La complétude d'une suite de vecteurs, que l'on vient de présenter, et la complétude d'un espace, qui concerne la convergence des suites de Cauchy dans l'espace, sont deux notions entièrement distinctes. Dans le présent document, toute référence au terme « complétude » se rapportera à la complétude d'une suite.*

Un critère alternatif pour établir la complétude est présenté dans [3]. On y démontre que la suite $W = (w_n)_{n=0}^{\infty}$ est complète dans l'espace vectoriel normé V si et seulement si pour chaque forme linéaire L sur V, on a que

$$L(w_n) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad L = 0 \text{ sur } V.$$

Un autre critère particulièrement utile pour établir la complétude est fourni par le ***théorème de Lauricella***. Ce résultat, qui met en lumière le caractère «transitif» de la propriété de complétude, est particulièrement efficace, comme il sera souligné plus tard.

Théorème 2.2.4 (Lauricella) *Soit V, un espace vectoriel normé et soit $(v_n)_{n=0}^{\infty}$, une suite complète dans V. Alors, pour toute autre suite $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ de V,*

$$(w_n) \text{ est complète dans } V \qquad \text{ssi} \qquad (w_n) \text{ est complète dans } (v_n)$$ [1].

Preuve ***(i)*** Si (w_n) est complet dans V, alors tout élément de V, en particulier les v_n, peuvent être arbitrairement approchés par une combinaison linéaire finie des premiers termes de (w_i).

(ii) Soit $x \in V$ et $\varepsilon > 0$. Comme (v_n) est complet dans V, alors

$$\exists a_0, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{K} : \qquad \left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Dans ce qui suivra, il est supposé que tous les coefficients a_n sont non nuls. Si jamais un (ou plusieurs) des coefficients était de norme $|a_n|$ nulle, nous n'aurions qu'à tout simplement ignorer ce coefficient, sans dommage pour la validité de la preuve.

Puisque (w_n) est complet dans (v_n), on a en particulier que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists b_{n,0}, b_{n,1}, \ldots, b_{n,N_n} \in \mathbb{K} : \qquad \left\| v_n - \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)|a_n|} \, .$$

Aidés de l'inégalité du triangle, nous trouvons donc que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \left(a_n \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right) \right\| &= \left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n + \sum_{n=0}^{N} a_n v_n - \sum_{n=0}^{N} \left(a_n \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right) \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n \right\| + \sum_{n=0}^{N} \left\| a_n v_n - a_n \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right\| \\ &= \left\| x - \sum_{n=0}^{N} a_n v_n \right\| + \sum_{n=0}^{N} |a_n| \left\| v_n - \sum_{j=0}^{N_n} b_{n,j} w_j \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (N+1) \frac{\varepsilon}{2(N+1)} \qquad = \varepsilon \, . \end{aligned}$$

1. Il y a ici abus de langage, puisque la suite (v_n) ne forme clairement pas toujours un espace vectoriel. Toutefois, ce qui est entendu par complétude ici est facilement visible : il s'agit toujours de la possibilité de trouver une approximation arbitrairement précise de tout v_n grâce à la suite (w_n).

Nous trouvons la combinaison linéaire finie des éléments de (w_n) recherchée. ■

Présentons quelques exemples de systèmes complets.

Exemple 1 (Weierstrass) *Soit une variable réelle x. La suite $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ est complète dans l'espace vectoriel $C[a,b]$, assorti de la norme supremum*

$$\|f\|_{\infty} = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| \ .$$

*Il s'agit du **théorème d'approximation de Weierstrass**. Une preuve populaire et plutôt élégante de ce résultat bien connu, concoctée par S. N. Bernstein, est présentée dans l'annexe A1.*

Exemple 2 *Soit la variable réelle x. La suite $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ est complète dans l'espace vectoriel $L[a,b]$ (assorti de la norme inhérente à l'espace, soit $\|\cdot\|_1$).*

Preuve Tout d'abord, soulevons qu'un résultat classique de la théorie de la mesure assure la densité des fonctions continues dans l'espace $L[a,b]$ (voir, par exemple, le volume [4] [2]). Autrement dit,

$$\forall F \in L[a,b] \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists G \in C[a,b] : \qquad \|F - G\|_1 < \varepsilon \ . \tag{2.2}$$

Soit $f \in L[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. La densité (2.2) nous assure que

$$\exists g \in C[a,b] : \qquad \int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Dans ce volume, on prouve plutôt la densité de l'ensemble $C_c(\mathbb{R})$, mais toute fonction de $C_c(\mathbb{R})$ est continue. De plus, mentionnons que la preuve effectuée dans le volume concerne $L(\mathbb{R})$, mais qu'une démarche identique assure le même résultat pour $L[a,b]$.

Or, puisque $g \in C[a,b]$, nous savons par l'exemple 1 qu'il existe un polynôme fini p tel que

$$\max_{a \le x \le b} |g(x) - p(x)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\Rightarrow \qquad |g(x) - p(x)| \ < \ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b |g(x) - p(x)| dx \ < \ \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx \ = \ \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

En utilisant l'inégalité du triangle, on trouve que

$$\int_a^b |f(x) - p(x)| dx \le \int_a^b \Big(|f(x) - g(x)| + |g(x) - p(x)| \Big) dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Par conséquent,

$$\forall f \in L[a,b] \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad (\exists p : \text{polynôme fini}) : \qquad \|f - p\|_1 < \varepsilon \ .$$

■

Terminons avec un exemple concernant les fonctions complexes, le ***théorème d'approximation de Runge***.

Exemple 3 (Runge) *Soit C, une courbe de Jordan. Soit* $\operatorname{Int} C$*, l'ensemble constitué des points sur et à l'intérieur de la courbe C. Considérons $H(C)$, l'ensemble des fonctions $f : \operatorname{Int} C \to \mathbb{C}$ holomorphes sur* $\operatorname{Int} C$*, et soit une variable complexe z. Alors la suite $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ des puissances naturelles de z est complète dans l'espace vectoriel $H(C)$, assorti de la norme supremum*

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \ \in \ IntC} |f(z)| \ .$$

Ce théorème nécessite au moins un résultat préliminaire non trivial. Sa démonstration, légèrement robuste, se retrouve donc en annexe A2.

2.3 Séries de Taylor

L'idée de ***série de Taylor***, c'est-à-dire la représentation de fonctions (infiniment différentiables) comme combinaisons linéaires des puissances de la variable de référence, constitue une pièce fondamentale de l'analyse fonctionnelle, réelle ou complexe. Bien qu'il s'agisse d'une notion plutôt élémentaire, il est incontournable de lui consacrer malgré tout une courte section, en raison du lien capital qu'elle partage avec l'objet de ce mémoire. Ici, nous nous contenterons de présenter simplement et brièvement la série de Taylor en plus de discuter un peu de sa relation à la notion de complétude, sujet de la section précédente.

Débutons par les séries de Taylor réelles. Soit $f(x) : \mathbb{R} \to (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, une fonction infiniment différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors on appelle ***série de Taylor de f autour de*** x_0 la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{2.3}$$

où $f^{(n)}$ désigne la n^{e} dérivée de f. On dit que la série ci-dessus converge vers f en un certain point $x_1 \in \mathbb{R}$ si

$$f(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n,$$

où l'égalité ci-dessus représente la convergence des sommes partielles, c'est-à-dire

$$\lim_{N \to \infty} \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n \; - \; f(x_1) \right| = 0 \; .$$

Il est immédiat d'après la définition que la série converge vers f en au moins un point, soit x_0. On appelle ***domaine de convergence vers f de la série de Taylor*** (2.3) le plus grand intervalle autour de x_0 sur lequel la série de Taylor (2.3) converge vers f.

La série de Taylor réelle pose certaines difficultés. Tout d'abord, même dans le cas où f est infiniment dérivable, rien ne nous assure que la série (2.3) converge ailleurs qu'en x_0. Pis encore, même si ladite série converge dans un intervalle donné (de longueur non nulle) autour de x_0, il se peut que la convergence ne se fasse pas vers f partout sur cet intervalle. L'exemple habituellement utilisé pour illustrer ce danger est celui de la fonction

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

qui est infiniment dérivable en $x_0 = 0$. La série de Taylor de g autour de $x_0 = 0$ converge vers la fonction nulle 0 partout sur $\mathbb{R}$, et donc la série converge vers g seulement en x_0. En somme, il est plutôt compliqué d'identifier l'intervalle de convergence vers la fonction de référence d'une série de Taylor réelle.

De manière relativement surprenante, le passage au cas complexe permet une présence beaucoup plus concrète et forte des séries de Taylor. L'étude de leur convergence y est d'ailleurs infiniment plus aisée, comme en témoigne le théorème suivant.

Théorème 2.3.1 (Taylor) *Soit f, une fonction complexe holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $R > 0$, le plus grand rayon tel que f est holomorphe sur la boule ouverte $B(z_0, R)$, centrée en z_0 et de rayon R. Alors, pour tout z dans $B(z_0, R)$, la relation*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

est vérifiée, où l'égalité ci-dessus est envisagée de la même manière que pour les séries de Taylor réelles[3]*. De plus, sur la boule fermée $\overline{B}(z_0, r)$, où $0 \leq r < R$, la convergence* *de la série de Taylor vers f est **uniforme**.*

On dit que la fonction f est ***analytique*** en z_0 si elle peut être représentée par une série de Taylor dans un voisinage autour de z_0. À la lumière du théorème précédent, on comprendra pourquoi les termes « holomorphe » et « analytique » sont utilisés sans distinction pour caractériser une fonction complexe. Voici quelques-unes des séries de Taylor courantes ainsi que leur domaine de convergence vers leur fonction de référence.

Fonction $f(z)$	**Série de Taylor associée**	**Domaine de convergence de la série vers f**
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$\mathbb{C}$
$\sin(z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{C}$
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (***série géométrique***)	$z \in \mathbb{C}: \ \lvert z \rvert < 1$
$\mathrm{Log}(z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}$	$z \in \mathbb{C}: \ \lvert z-1 \rvert < 1$

Le théorème de Taylor nous assure que si une fonction f est holomorphe sur une boule fermée $\overline{B}(z_0, r)$ donnée, alors la série de Taylor de f centrée en z_0 converge uniformément vers $f(z)$ sur cette boule fermée, dans le sens où

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \qquad \max_{z \in \overline{B}(z_0,r)} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \right| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Dans un premier temps, ceci signifie que la suite $\left\{(z-z_0)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ est complète sur $H(\overline{B})$, l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur (et restreintes à) l'espace $\overline{B}(z_0, r)$,

3. On se souviendra que l'holomorphicité d'une fonction donnée en un point donné implique l'existence de dérivées d'ordre arbitraire de cette fonction en ce point. Ainsi, f est infiniment dérivable partout sur la boule ouverte $B(z_0, R)$.

assorti de la norme $\|f\|_\infty = \max_{z \in \overline{B}(z_0,r)} |f(z)|$. Ce résultat n'a rien pour étonner, compte tenu du résultat similaire présenté à l'exemple 3. Mais il y a plus.

Par définition, la complétude de la suite $\left\{(z-z_0)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ signifie que pour un $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver une combinaison linéaire des premiers termes de la suite qui approxime f avec une erreur maximale de ε. Nouveau ε, nouvelle combinaison ... Or, après examen de la relation (2.4), on note que dans le cas présent, la combinaison linéaire qui approxime f ne dépend pas de ε, ou plutôt la dépendance est moindre. En effet, pour une fonction $f \in H(\overline{B})$ fixée, nous gardons toujours la même combinaison linéaire ; nous ne faisons que lui ajouter ou lui enlever des termes selon la valeur du ε choisi. Autrement dit, pour une fonction f donnée, chaque élément de la suite $(z-z_0)^n$ est attaché à un coefficient fixe $\left(\text{il s'agit, comme on l'a vu, de } \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)$. En ce sens, on pourrait dire que la suite $\left\{(z-z_0)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ satisfait une « complétude forte » sur $H(\overline{B})$.

La complétude d'une suite n'implique pas nécessairement qu'une condition de « complétude forte » est satisfaite. En d'autres mots, si une suite $\{u_n\}$ est complète dans un espace vectoriel normé V, alors il n'est pas, en règle générale, possible d'exprimer tous les éléments de V comme une série infinie en termes des u_n.

2.4 Fonctions pseudo-analytiques : une introduction

La théorie des fonctions pseudo-analytiques fut développée principalement au milieu du 20e siècle. Son existence est principalement due à deux personnages, qui en ont assuré les fondations de manière indépendante. Il s'agit de Lipman Bers (1914-1993), mathématicien américain d'origine lettone, et d'Ilia Vekua (1907-1977), qui a oeuvré en mathématiques dans l'ancienne union soviétique. L'approche favorisée dans ce mémoire est directement inspirée de celle de Bers.

Paire génératrice

Notation 1 *Avant tout, procédons à l'introduction de certaines notations de base, qui demeureront en vigueur pour l'entièreté du document. Ces notations sont en total accord avec celles employées dans [5]. Comme variables complexes, nous privilégierons l'utilisation de* $z = x + iy$ *et de* $\zeta = \xi + i\eta$ *(où* x, y, ζ *et* η *sont des variables réelles). Pour désigner le complexe conjugué d'un nombre [d'une variable], on coiffe ledit nombre [ladite variable] d'un trait. On retrouve ainsi* $\overline{z} = x - iy$ *et* $\overline{\zeta} = \xi - i\eta$*. Finalement, selon les conventions d'usage, les opérateurs de dérivation selon* z *et selon* $\overline{z}$ *sont définis par les relations qui suivent :*

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

L'analyse fonctionnelle complexe « classique » se fonde principalement sur la décomposition en parties réelle et imaginaire. Autrement dit, toute fonction complexe w est envisagée selon sa représentation unique de la forme

$$w(z) = 1 \cdot u(z) + i \cdot v(z),$$

où les fonctions à valeurs réelles $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ désignent respectivement la partie réelle, notée $\mathrm{Re}\{w\}$, et la partie imaginaire, notée $\mathrm{Im}\{w\}$, de w. La théorie classique privilégie donc, de manière tout à fait naturelle, l'expression des fonctions selon la base $(1, i)$ du plan complexe.

L'idée mise de l'avant par Bers consiste tout simplement à remplacer cette base triviale par une autre, un couple de fonctions complexes (F, G), de manière à ce que toute fonction puisse être exprimée comme combinaison linéaire de ces deux fonctions. Afin de s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une telle représentation, on doit imposer que

$$\mathrm{Im}\{\overline{F}G\}(z) \neq 0 \tag{2.5}$$

partout sur le domaine de référence choisi.

Théorème 2.4.1 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, un domaine du plan. Si la paire (F, G) satisfait la condition (2.5) sur Ω, alors pour toute fonction complexe w, il existe une et une seule paire de fonctions $\phi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$w(z) = \phi(z)F(z) + \psi(z)G(z), \qquad \forall z \in \Omega. \tag{2.6}$$

Preuve Soit w une fonction complexe définie partout sur Ω. Soient $z_0 \in \Omega$ et $m, n \in \mathbb{R}$. Considérons les décompositions en parties réelle et imaginaire de F, G et w : $F = F_1 + iF_2$, $G = G_1 + iG_2$, $w = u + iv$. Il est très facile de vérifier que la condition (2.5) équivaut à la condition suivante sur Ω :

$$F_1(z)G_2(z) - F_2(z)G_1(z) \neq 0. \tag{2.7}$$

Puisque (F, G) vérifie (2.5) sur Ω, la relation (2.7) est satisfaite en particulier en z_0. De plus, l'équation (2.6) peut être manipulée ainsi :

$$w(z_0) = mF(z_0) + nG(z_0) \iff \begin{cases} u(z_0) & = mF_1(z_0) + nG_1(z_0) \\ v(z_0) & = mF_2(z_0) + nG_2(z_0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} F_1(z_0) & G_1(z_0) \\ F_2(z_0) & G_2(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ v(z_0) \end{pmatrix} . \quad (2.8)$$

Comme

$$\det \begin{pmatrix} F_1(z_0) & G_1(z_0) \\ F_2(z_0) & G_2(z_0) \end{pmatrix} = F_1(z_0)G_2(z_0) - F_2(z_0)G_1(z_0) \neq 0,$$

la matrice est inversible et donc le système ci-dessus possède une seule et unique solution. Autrement dit,

$$\forall z_0 \in \Omega \qquad \exists!\ (m(z_0), n(z_0)) \in \mathbb{R}^2 : \qquad w(z_0) = m(z_0)F(z_0) + n(z_0)G(z_0).$$

Nous n'avons qu'à prendre $\phi(z_0) = m(z_0)$ et $\psi = n(z_0)$ pour chaque point z_0 du domaine Ω pour conclure. ■

Il est à noter que, en inversant la matrice de l'équation (2.8) dans la preuve précédente, on trouve explicitement que

$$\phi \equiv \frac{w\overline{G} - \overline{w}G}{F\overline{G} - \overline{F}G} \qquad \text{et} \qquad \psi \equiv -\left(\frac{w\overline{F} - \overline{w}F}{F\overline{G} - \overline{F}G}\right) \qquad \text{dans } \Omega. \quad (2.9)$$

Dorénavent, nous désignerons par (F, G)-***décomposition*** l'unique décomposition de type (2.6) de w.

Définition 2.4.2 *On dit qu'une fonction complexe f est **Hölder-continue** sur le domaine Ω si*

$$\exists K \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in (0, 1] : \qquad \forall z_1, z_2 \in \Omega \qquad |f(z_1) - f(z_2)| \leq K|z_1 - z_2|^\alpha . \quad (2.10)$$

On voit aisément que la Hölder-continuité est plus restrictive que la simple continuité, et donc que toute fonction Hölder-continue est continue.

Définition 2.4.3 *Un couple de fonctions (F, G) qui satisfait la condition (2.5) partout sur un domaine Ω, et qui est tel que $F_z, F_{\bar{z}}, G_z, G_{\bar{z}}$ existent et sont Hölder-continues sur Ω est appelé* ***paire génératrice*** *sur Ω.*

Dérivée et intégrale généralisées

La théorie des fonctions pseudo-analytiques repose largement sur le principe de différentiation généralisée. Contrairement à la dérivée classique, cette dérivée n'est pas immuable : elle dépend de la paire génératrice choisie et tire directement son essence de la (F, G)-représentation (2.6).

Définition 2.4.4 *Soit (F, G), une paire génératrice sur le domaine Ω et soit w, une fonction complexe admettant la (F, G)-décomposition $w = \phi F + \psi G$ sur Ω. Alors, on dit que w est* ***(F, G)-dérivable en*** *$z_0 \in \Omega$ si la limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0} \tag{2.11}$$

est définie. Cette limite, si elle existe, sera désignée sous le nom de ***(F, G)-dérivée de w en*** *z_0 et sera notée $\mathring{w}(z_0)$, ou encore $\dfrac{d_{(F,G)}}{dz} w(z_0)$.*

Une fonction (F, G)-dérivable sur l'ensemble du domaine est dite ***(F, G)-pseudo-analytique*** dans Ω.

Remarque 2.4.5 *La (F, G)-décomposition de la fonction $F(z)$ est*

$$F(z) = 1 \cdot F(z) + 0 \cdot G(z),$$

d'où, dans ce cas, $\phi(z) = 1$ *et* $\psi(z) = 0$. *Par conséquent, pour tout* $z_0 \in \Omega$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z)}{z - z_0} = 0.$$

Un raisonnement analogue peut être appliqué à $G(z)$. *Ainsi,* F *et* G *sont* (F, G)*-pseudo-analytique sur* Ω, *et* $\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{G} = 0$.

Définition 2.4.6 *Par* ***coefficients caractéristiques de la paire génératrice*** (F, G), *on désigne les fonctions suivantes :*

$$a_{(F,G)} = -\frac{\overline{F}G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad b_{(F,G)} = \frac{FG_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}G}{F\overline{G} - \overline{F}G}$$

$$A_{(F,G)} = -\frac{\overline{F}G_z - F_z\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad B_{(F,G)} = \frac{FG_z - F_zG}{F\overline{G} - \overline{F}G}.$$

Grâce à l'introduction des coefficients caractéristiques, nous sommes en mesure d'offrir un critère alternatif vraiment pratique concernant la pseudo-analycité d'une classe importante de fonctions, les fonctions de $C^1(\Omega)$.

Théorème 2.4.7 *Soit* w, *une fonction complexe et* (F, G), *une paire génératrice sur le domaine* Ω. *Supposons que les dérivées partielles* w_z *et* $w_{\bar{z}}$ *existent et sont continues dans un voisinage de* $z_0 \in \Omega$. *Alors,* $\overset{\circ}{w}(z_0)$ *existe si et seulement si*

$$w_{\bar{z}}(z_0) = a_{(F,G)}(z_0)w(z_0) + b_{(F,G)}\overline{w}(z_0). \tag{2.12}$$

De plus, si $\overset{\circ}{w}(z_0)$ *existe,*

$$\overset{\circ}{w}(z_0) = w_z(z_0) - A_{(F,G)}(z_0)w(z_0) - B_{(F,G)}\overline{w}(z_0) = \phi_z(z_0)F(z_0) + \psi_z(z_0)G(z_0), \tag{2.13}$$

où ϕ, ψ *sont les coefficients de la* (F, G)*-décomposition de* w.

Preuve Soit $z_0 \in \Omega$. Définissons la fonction complexe suivante :

$$W(z) := w(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z).$$

Puisque les fonctions F et G forment une paire génératrice, $F_z, G_z, F_{\overline{z}}$ et $G_{\overline{z}}$ sont Hölder-continues, donc continues, partout sur Ω. Par conséquent,

$$\begin{aligned} & W_z, W_{\overline{z}} \text{ existent et sont continues dans un certain voisinage de } z_0 \\ \Longleftrightarrow \quad & w_z, w_{\overline{z}} \text{ existent et sont continues dans un certain voisinage de } z_0. \end{aligned}$$

Par les hypothèses du théorème, il est établi que W est dérivable par rapport à z et à $\overline{z}$ en z_0, et que ces dérivées partielles sont continues dans un voisinage de z_0. Également, puisque $W(z_0) = 0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{W(z) - W(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{w(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0}.$$

Ainsi, $W'(z_0)$ existe ssi $\overset{\circ}{w}(z_0)$ existe, et si tel est le cas, $W'(z_0) = \overset{\circ}{w}(z_0)$. Or, il est bien connu[4] que si les dérivées partielles W_z et $W_{\overline{z}}$ existent et sont continues dans un certain voisinage de z_0, alors une condition nécessaire et suffisante à l'existence de $W'(z_0)$ réside en la validité de la relation $W_{\overline{z}}(z_0) = 0$. Par transitivité de l'implication double, nous trouvons donc que

$$\overset{\circ}{w}(z_0) \text{ existe ssi } W_{\overline{z}}(z_0) = 0. \tag{2.14}$$

En utilisant (2.9), on peut représenter $W(z)$ sous la forme qui suit :

$$\begin{aligned} W(z) = w(z) - w(z_0)\frac{-F(z)\overline{G}(z_0) + \overline{F}(z_0)G(z)}{F(z_0)\overline{G}(z_0) - \overline{F}(z_0)G(z_0)} \\ + \overline{w}(z_0)\frac{-F(z)G(z_0) + F(z_0)G(z)}{F(z_0)\overline{G}(z_0) - \overline{F}(z_0)G(z_0)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

4. Pour la preuve de cette affirmation, voir l'annexe B.

Il vient donc, directement, que

$$
\begin{aligned}
W_{\overline{z}}(z_0) &= w_{\overline{z}}(z_0) - w(z_0)\frac{-F_{\overline{z}}(z_0)\overline{G}(z_0) + \overline{F}(z_0)G_{\overline{z}}(z_0)}{F(z_0)\overline{G}(z_0) - \overline{F}(z_0)G(z_0)} \\
&\quad + \overline{w}(z_0)\frac{-F_{\overline{z}}(z_0)G(z_0) + F(z_0)G_{\overline{z}}(z_0)}{F(z_0)\overline{G}(z_0) - \overline{F}(z_0)G(z_0)} \\
&= w_{\overline{z}}(z_0) + w(z_0)a_{(F,G)}(z_0) + \overline{w}(z_0)b_{(F,G)}(z_0). \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Par (2.14) et (2.16), nous prouvons la première partie du théorème. Pour démontrer la seconde assertion, nous procédons d'abord à la dérivation de l'équation (2.15) par rapport à z plutôt que $\overline{z}$, puis utilisons le fait que $W'(z_0) = W_z(z_0) = \overset{\circ}{w}(z_0)$ (car $\overset{\circ}{w}(z_0)$ existe), afin de découvrir que

$$\overset{\circ}{w}(z_0) = w_z(z_0) - A_{(F,G)}(z_0)w(z_0) - B_{(F,G)}\overline{w}(z_0).$$

Finalement, en exploitant la représentation

$$W(z) = (\phi(z) - \phi(z_0))F(z) + (\psi(z) - \psi(z_0))G(z),$$

il apparaît que

$$
\begin{aligned}
W_z(z_0) &= \phi_z(z_0)F(z_0) + (\phi(z_0) - \phi(z_0))F_z(z_0) + \psi_z(z_0)G(z_0) + (\psi(z_0) - \psi(z_0))G_z(z_0) \\
&= \phi_z(z_0)F(z_0) + \psi_z(z_0)G(z_0).
\end{aligned}
$$

■

L'équation (2.16) est désignée sous le nom d'***équation de Vekua*** associée à la paire (F, G). Elle représente (comme on le verra plus tard) une généralisation du système d'équations de Cauchy-Riemann.

Remarque 2.4.8 *En relaxant les hypothèses d'existence et de continuité des dérivées partielles de w dans le théorème précédent, nous sommes tout de même capable de déduire des conditions nécessaires à la pseudo-analycité de w en z_0. En effet, pour une fonction complexe w* ***totalement arbitraire****, la proposition suivante tient :*

$$\overset{\circ}{w}(z_0) \text{ existe} \quad \Rightarrow \quad w_z(z_0), w_{\bar{z}}(z_0) \text{ existent et } w_{\bar{z}}(z_0) = a_{(F,G)}(z_0)w(z_0) + b_{(F,G)}\overline{w}(z_0).$$

Ce résultat, simple à déduire, est développé dans le volume [6].

Remarque 2.4.9 *À partir de maintenant, lorsqu'il sera dit qu'une fonction est (F, G)-pseudo-analytique, il sera sous-entendu qu'elle l'est sur un domaine Ω fixé mais non explicite. De plus, si la paire génératrice à laquelle nous nous référons ne fait aucun doute, nous dirons simplement que w est pseudo-analytique.*

Présentons également un autre théorème plutôt utile. Ce résultat permet d'ajouter une corde à notre arc, puisqu'il offre une condition alternative pour établir la pseudo-analycité. Sa preuve, très similaire à celle du théorème 2.4.7, sera ici épargnée, mais elle se retrouve dans [6].

Théorème 2.4.10 *Soit la fonction w, dont la (F, G)-décomposition est $w = \phi F + \psi G$. Alors, w est pseudo-analytique si et seulement si ϕ et ψ possèdent les dérivées partielles $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ continues, et $\phi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G = 0$.*

Définition 2.4.11 *Soient (F, G) et (F_1, G_1), deux paires génératrices sur un domaine Ω. La paire (F_1, G_1) est appelée* ***successeur de*** *(F, G) si, partout sur Ω,*

$$a_{(F_1,G_1)} = a_{(F,G)} \quad \text{et} \quad b_{(F_1,G_1)} = -B_{(F,G)} \ .$$

Dans ce cas, on pourra aussi dire que (F, G) est un ***prédécesseur de*** *(F_1, G_1).*

L'intérêt qui sera porté à l'idée de successeur s'explique en grande partie par le prochain théorème.

Théorème 2.4.12 *Si w est une fonction (F,G)-pseudo-analytique et (F_1,G_1) est successeur de (F,G), alors $\overset{\circ}{w}$ est (F_1,G_1)-pseudo-analytique.*

Preuve Soit w, une fonction (F,G)-pseudo-analytique dont la décomposition est $w = \phi F + \psi G$. Alors, par les théorèmes 2.4.10 et 2.4.7,

$$\overset{\circ}{w} = \phi_z F + \psi_z G \tag{2.17}$$

et

$$\phi_{\bar{z}} F + \psi_{\bar{z}} G = 0. \tag{2.18}$$

Or, puisque ϕ et ψ sont réelles, on a $\overline{\phi_{\bar{z}}} = \phi_z$ et $\overline{\psi_{\bar{z}}} = \psi_z$. Ainsi, de (2.18) découle

$$\phi_z \overline{F} + \psi_z \overline{G} = 0\ . \tag{2.19}$$

Les expressions (2.17) et (2.19) permettent une caractérisation de ϕ_z et ψ_z :

$$\phi_z = \frac{\overline{G}\overset{\circ}{w}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad \psi_z = -\frac{\overline{F}\overset{\circ}{w}}{F\overline{G} - \overline{F}G}\ . \tag{2.20}$$

Comme ϕ et ψ sont réelles, et comme $F\overline{G} - \overline{F}G$ est purement imaginaire, on trouve

$$\phi_{\bar{z}} = -\frac{G\overline{\overset{\circ}{w}}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad \psi_{\bar{z}} = \frac{F\overline{\overset{\circ}{w}}}{F\overline{G} - \overline{F}G}\ . \tag{2.21}$$

En dérivant (2.18) par rapport à z, il vient que

$$\phi_{z\bar{z}} F + \psi_{z\bar{z}} G + \phi_{\bar{z}} F_z + \psi_{\bar{z}} G_z = 0\ . \tag{2.22}$$

Finalement, en dérivant (2.17) par rapport à $\overline{z}$ et en utilisant les expressions (2.20), (2.21) et (2.22), on trouve

$$\begin{aligned}
(\overset{\circ}{w})_{\overline{z}} &= \phi_{z\overline{z}}F + \psi_{z\overline{z}}G + \phi_z F_{\overline{z}} + \psi_z G_{\overline{z}} \\
&= \phi_z F_{\overline{z}} + \psi_z G_{\overline{z}} - \phi_{\overline{z}} F_z - \psi_{\overline{z}} G_z \\
&= \frac{F_{\overline{z}}\overline{G}}{F\overline{G}-\overline{F}G}\overset{\circ}{w} - \frac{\overline{F}G_{\overline{z}}}{F\overline{G}-\overline{F}G}\overset{\circ}{w} - \frac{FG_z}{F\overline{G}-\overline{F}G}\overline{\overset{\circ}{w}} + \frac{F_zG}{F\overline{G}-\overline{F}G}\overline{\overset{\circ}{w}} \\
&= a_{(F,G)}\overset{\circ}{w} - B_{(F,G)}\overline{\overset{\circ}{w}} \\
&= a_{(F_1,G_1)}\overset{\circ}{w} + b_{(F_1,G_1)}\overline{\overset{\circ}{w}}. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Adonnons-nous maintenant à une analyse de la fonction $\overset{\circ}{w}$, afin de pouvoir établir sa (F_1, G_1)-pseudo-analycité. Par la remarque 2.4.8, puisque $\overset{\circ}{w}$ existe, alors w_z et $w_{\overline{z}}$ existent et sont continues. Or, $\mathrm{Im}\{\overline{F}G\} \neq 0$, d'où $F\overline{G} - \overline{F}G$ n'est jamais nul. Cette observation, jumelée au fait que $F_z, G_z, F_{\overline{z}}, G_{\overline{z}}$ sont continues, permet de déduire que les quatre coefficients caractéristiques de la paire (F, G) ont également des dérivées continues par rapport à z et à $\overline{z}$.

On réalise donc que w, $A_{(F,G)}$ et $B_{(F,G)}$ ont toutes des dérivées partielles continues, ce qui signifie par la représentation (2.13) que $\overset{\circ}{w}$ possède elle aussi des dérivées partielles continues. Il est donc à présent possible d'utiliser le théorème 2.4.7 pour déterminer que

$$\overset{\circ}{w} \text{ est } (F_1, G_1)\text{-pseudo-analytique} \iff (\overset{\circ}{w})_{\overline{z}} = a_{(F_1,G_1)}\overset{\circ}{w} + b_{(F_1,G_1)}\overline{\overset{\circ}{w}}.$$

Par (2.23), la (F_1, G_1)-pseudo-analyticité de $\overset{\circ}{w}$ est assurée. ■

Définition 2.4.13 *Une suite de paires génératrices* $\{(F_m, G_m)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ *telle que*

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad (F_k, G_k) \text{ est un successeur de } (F_{k-1}, G_{k-1})$$

est appelée ***suite génératrice****. Si* $(F_0, G_0) = (F, G)$*, on dira que* (F, G) *est* ***enchâssée*** *dans la suite* $\{(F_m, G_m)\}$.

Il est désormais possible de définir sans embûches les (F, G)-dérivées d'ordre supérieur pour une fonction (F, G)-pseudo-analytique w. Suffit pour cela de trouver une suite génératrice $\{(F_m, G_m)\}$ dans laquelle (F, G) est enchâssée[5]. Les (F, G)-dérivées de w sont définies récursivement selon la formule

$$w^{[0]} := w, \qquad w^{[n]} := \frac{d_{(F_n, G_n)}}{dz} w^{[n-1]} .$$

Comme conséquence du théorème 2.4.12, si la fonction w est (F, G)-pseudo-analytique, elle possède toutes les (F, G)-dérivées d'ordre supérieur, et ce peu importe la suite génératrice à laquelle on se réfère. Autrement dit, pour un ordre m arbitrairement grand, $w^{[m]}$ existe.

Il est à propos, maintenant que la dérivée pseudo-analytique est correctement introduite, de s'attarder sur l'antidérivée.

Définition 2.4.14 *La* ***paire adjointe*** *de* (F, G) *désigne le couple de fonctions*

$$F^* = -\frac{2\overline{F}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad G^* = \frac{2\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}.$$

Définition 2.4.15 *Soit* Γ*, une courbe de longueur finie allant de* z_0 *à* z_1*, où* z_0 *et* z_1 *désignent des points du plan complexe. Alors la* (F, G)***-intégrale*** *de la fonction* w

5. Selon un théorème du volume [6], il est sûr qu'une telle suite existe toujours. Mais encore faut-il la découvrir...

sur la courbe Γ *est définie comme suit :*

$$\int_\Gamma w \; d_{(F,G)}z = F(z_1) \cdot \mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma G^* w \; dz\right\} + G(z_1) \cdot \mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma F^* w \; dz\right\} \; .$$

Soit (F, G)*, une paire génératrice sur le domaine* Ω*. Une fonction* w *continue sur* Ω *est* (F, G)***-intégrable*** *si, pour toute boucle fermée* Δ *contenue dans un sous-domaine* *simplement connexe* *de* Ω*,*

$$\oint_\Delta w \; d_{(F,G)}z = 0 \; .$$

Par le théorème qui suit, on pourra voir que la (F, G)-dérivée et la (F, G)-intégrale sont bien des opérateurs inverses.

Lemme 2.4.16 *Si, pour une fonction* ϕ *réelle, l'équation* $\phi_z = \Phi$ *est vérifiée, alors*

$$\phi(z_1) = 2 \cdot \mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma \Phi \; dz\right\} + \phi(z_0),$$

où Γ *est une courbe de longueur finie arbitraire allant de* z_0 *à* z_1*.*

Preuve Soit $\Phi_1 + i\Phi_2$, la décomposition en parties réelle et imaginaire de Φ. Alors, par définition de la dérivée partielle ∂_z, on trouve que $\phi_x = 2\Phi_1$ et que $\phi_y = -2\Phi_2$. Ainsi, il vient que

$$\begin{aligned}
2\int_\Gamma (\Phi_1 \; dx - \Phi_2 \; dy) &= \int_\Gamma (\phi_x \; dx + \phi_y \; dy) \\
&= \int_\Gamma d\phi && \text{//par définition de la dérivée totale de } \phi \\
&= \phi(z_1) - \phi(z_0). && \text{//par le théorème de Stokes}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut déduire que

$$\phi(z_1) = 2\int_\Gamma (\Phi_1 \; dx - \Phi_2 \; dy) + \phi(z_0).$$

Or, comme Φ_1 et Φ_2 sont réelles, la dernière équation peut être reformulée ainsi :

$$\begin{aligned}\phi(z_1) &= 2\mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma (\Phi_1 + i\Phi_2)(dx + idy)\right\} + \phi(z_0) \\ &= 2\mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma \Phi \; dz\right\} + \phi(z_0).\end{aligned}$$

■

Théorème 2.4.17 *La (F, G)-dérivée $\overset{\circ}{w}$ d'une fonction (F, G)-pseudo-analytique w est (F, G)-intégrable. De plus, si w est de (F, G)-représentation $\phi F + \psi G$, l'intégrale est explicitement donnée par l'expression*

$$\int_{z_0}^{z} \overset{\circ}{w} \; d_{(F,G)}z = w(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z). \tag{2.24}$$

Preuve [**tirée de** [6]] Dans la preuve du théorème 2.4.12, il avait été découvert que ϕ_z et ψ_z peuvent être exprimées selon la représentation suivante :

$$\phi_z = \frac{\overline{G}\overset{\circ}{w}}{F\overline{G} - \overline{F}G} = \frac{1}{2}G^*\overset{\circ}{w}, \qquad \psi_z = -\frac{\overline{F}\overset{\circ}{w}}{F\overline{G} - \overline{F}G} = \frac{1}{2}F^*\overset{\circ}{w}.$$

Soit Γ, une courbe de longueur finie allant de z_0 à z, deux points arbitraires de Ω. Par le lemme 2.4.16, il apparaît donc que

$$\phi(z) = \mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma G^*\overset{\circ}{w} \; dz\right\} + \phi(z_0), \qquad \psi(z) = \mathrm{Re}\left\{\int_\Gamma F^*\overset{\circ}{w} \; dz\right\} + \psi(z_0).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} w(z) = &\ \phi(z)F(z) + \psi(z)G(z) \\ = &\left(\operatorname{Re}\left\{\int_\Gamma G^* \overset{\circ}{w}\ dz\right\} + \phi(z_0)\right) F(z) \ + \ \left(\operatorname{Re}\left\{\int_\Gamma F^* \overset{\circ}{w}\ dz\right\} + \psi(z_0)\right) G(z) \\ \Rightarrow \quad w(z) = &\int_\Gamma \overset{\circ}{w}\ d_{(F,G)}z \ + \ \phi(z_0)F(z) \ + \ \psi(z_0)G(z). \end{aligned}$$

En soustrayant le terme $\phi(z_0)F(z) \ + \ \psi(z_0)G(z)$ de chaque côté de la dernière égalité, on obtient la conclusion recherchée. ■

Le dernier théorème confirme que nous possédons bien là l'antidérivée de la (F, G)-dérivée définie précédemment. Effectivement, en théorie analytique classique, l'intégration d'une fonction dérivée w' permet de retrouver la fonction w, à une constante c complexe près. La quantité c est une combinaison linéaire des éléments de la base $(1, i)$:

$$\int_\Gamma w'\ dz = w + \operatorname{Re}\{c\} \cdot \mathbf{1} + \operatorname{Im}\{c\} \cdot \mathbf{i}.$$

Le cas des fonctions pseudo-analytiques est similaire. En (F, G)-intégrant notre (F, G)-dérivée $\overset{\circ}{w}$, nous retrouvons notre fonction w, à une « constante pseudo-analytique » près. Tout comme pour la théorie classique, cette constante n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire des deux éléments de notre base de référence :

$$\int_{z_0}^{z} \overset{\circ}{w}\ d_{(F,G)}z = w(z) - \phi(z_0)\mathbf{F}(\mathbf{z}) - \psi(z_0)\mathbf{G}(\mathbf{z}).$$

Remarque 2.4.18 *Il ne fait aucun doute que la théorie des fonctions pseudo-analytiques est une généralisation directe de la théorie des fonctions analytiques habituelles. En effet, en considérant comme paire génératrice le couple $(1, i)$, on retrouve très exactement la théorie classique. Il est facile de vérifier que :*

- *la* $(1, i)$*-représentation coïncide avec la représentation en parties réelle et imaginaire ;*

- *l'équation de Vekua* (2.16) *associée à la paire* $(1, i)$ *correspond exactement aux équations de Cauchy-Riemann ;*

- *la* $(1, i)$*-dérivée [la* $(1, i)$*-intégrale] correspond à la dérivée complexe habituelle [l'intégrale complexe habituelle] par rapport à* z*.*

Principe de similarité

La théorie pseudo-analytique et l'analyse complexe classique peuvent être reliées grâce à un théorème important, le principe de similarité, qui tisse une belle toile et permet de faire fructifier nos connaissances des fonctions analytiques.

Théorème 2.4.19 (Principe de similarité) *Soit* w*, une fonction pseudo-analytique sur le domaine* Ω*. Alors, il existe une fonction* ϕ*, analytique sur* Ω*, et une fonction* s *Hölder-continue sur* $\overline{\Omega}$ *telles que*

$$w = \phi \mathrm{e}^s.$$

Réciproquement, soit ϕ*, une fonction analytique sur* Ω*. Alors, il existe une fonction* s *Hölder-continue sur* $\overline{\Omega}$*, avec* $s(z_0) = 0$ *pour un point* z_0 *fixe au choix dans* Ω*, telle que la fonction*

$$w = \phi \mathrm{e}^s$$

est pseudo-analytique sur Ω*. Dans les deux cas, la fonction* s *est bornée sur* Ω *par une constante dépendant uniquement du domaine* Ω *et de la paire* (F, G)*.*

La démonstration de ce théorème est présentée dans [6]. Le principe de similarité permet sans effort d'obtenir des versions analogues de résultats classiques valides pour les fonctions pseudo-analytiques, avec des démonstrations qui consistent essentiellement à ramener le tout à l'analyse classique. Relevons ici trois exemples de tels théorèmes.

Théorème 2.4.20 (Liouville) *Une fonction pseudo-analytique bornée sur le plan ne s'annule nulle part (y compris en ∞), à moins d'être la fonction nulle.*

Preuve Par le principe de similarité, on sait que $w = \phi e^s$, où ϕ est analytique dans le plan. Comme w et e^s sont bornées sur le plan, alors ϕ l'est également. Par le théorème de Liouville de l'analyse classique, on conclut que ϕ est constante sur le plan. Or, $w(z_0) = 0$. Comme s est bornée, $e^{s(z_0)} \neq 0$, d'où $\phi(z_0) = 0$. La constante est donc 0, et $\phi \equiv 0$. ■

Théorème 2.4.21 (Module maximum) *Soit w, une fonction pseudo-analytique dans Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Il existe une constante M, dépendant uniquement de Ω et de la paire (F, G), telle que*

$$\forall z \in \Omega \qquad |w(z)| \leq M \cdot \max_{t \in \partial\Omega} |w(t)|$$

Preuve Par le principe de similarité, on sait que $f = e^s w$, avec f analytique dans Ω. Comme w est continue sur $\overline{\Omega}$ et s est continue (étant Hölder-continue) sur $\overline{\Omega}$, alors f est également continue sur $\overline{\Omega}$.

En appliquant le principe du module maximum sur la fonction analytique f, on a que

$$\forall z \in \Omega \qquad |e^{s(z)}| \cdot |w(z)| \leq \max_{t \in \partial\Omega} \left(|e^{s(t)}| \cdot |w(t)| \right) .$$

On sait, par le principe de similarité, que $s(t)$ est bornée dans $\overline{\Omega}$ par une constante K dépendant uniquement de Ω et de (F, G). On a donc que

$$
\begin{aligned}
& \forall z \in \Omega \qquad |\mathrm{e}^{s(z)}| \cdot |w(z)| \;\leq\; \mathrm{e}^{K} \max_{t \in \partial\Omega} |w(t)| \\
\Rightarrow \quad & \forall z \in \Omega \qquad |w(z)| \;\leq\; \mathrm{e}^{-|s(z)|} \mathrm{e}^{K} \max_{t \in \partial\Omega} |w(t)| \;\leq\; \mathrm{e}^{|s(z)|} \mathrm{e}^{K} \max_{t \in \partial\Omega} |w(t)| \\
\Rightarrow \quad & \forall z \in \Omega \qquad |w(z)| \;\leq\; \mathrm{e}^{2K} \max_{t \in \partial\Omega} |w(t)|.
\end{aligned}
$$

En posant $M = \mathrm{e}^{2K}$, on conclut. ■

Théorème 2.4.22 *Une fonction rationnelle w, pseudo-analytique sur le plan, possède exactement autant de zéros que de pôles.*

Preuve On sait que $\phi = w\mathrm{e}^{s}$, où ϕ est analytique sur le plan. Comme s est bornée, e^{s} ne possède ni de zéro ni de pôle. Par conséquent, ϕ et w comportent le même nombre de zéros et le même nombre de pôles. Comme ϕ est analytique, l'analogue du présent théorème pour les fonctions analytiques nous offre la conclusion recherchée. ■

2.5 Puissances formelles

L'intérêt actuel porté à la théorie des fonctions pseudo-analytiques réside en sa capacité à fournir un système complet (localement) de solutions pour certains types d'équations physiques intéressantes. Cette réalité est rendue possible grâce aux ***puissances formelles***, entités que l'on va maintenant exposer. Commençons par certaines définitions concernant les ***singularités*** dans le contexte de pseudo-analycité.

Singularités et fonctions rationnelles

Définition 2.5.1 (Singularités sur le plan fini) *Soit w, une fonction pseudo-analytique (univaluée) sur le voisinage troué $0 < |z - z_0| < r$.*

1. *Si w est continue en z_0, alors w est pseudo-analytique sur $|z - z_0| < r$.*
2. *Si $w(z) \cdot (z - z_0)^n \sim a$ lorsque $z \to z_0$, alors on dit que w possède un* ***pôle d'ordre*** n ***en*** z_0
3. *Si aucun des deux premiers cas n'est vérifié, on dit plutôt que w possède une* ***singularité essentielle*** *en z_0.* [6]

Définition 2.5.2 (Singularités au point infini) *Soit w, une fonction pseudo-analytique (univaluée) sur le domaine $r < |z| < \infty$, où $r \in \mathbb{R}$.*

1. *Supposons qu'un des deux cas suivants est vérifié :*
   (a) $w(z) \equiv \lambda F(z) + \mu G(z)$, *avec* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   (b) $w(z) = \lambda F(z) + \mu G(z) + \dfrac{a}{z^n} + O\left(\dfrac{1}{|z|^n}\right)$ *lorsque* $z \to \infty$, *avec* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{C}^*$.

   Alors, on dit que w est ***régulière au point*** ∞ *et qu'elle y prend la valeur $\lambda F(\infty) + \mu G(\infty)$ avec une multiplicité n.*
2. *Si* $\dfrac{w(z)}{z^n} \sim a$ *lorsque $z \to \infty$, on dit que w possède un* ***pôle d'ordre*** n ***au point*** ∞.
3. *Si aucun des deux premiers cas n'est vérifié, on dit que w possède une* ***singularité essentielle au point*** ∞. [6]

Une fonction w pseudo-analytique sur tout le plan complexe sera dite ***rationnelle*** si elle ne possède comme seules singularités sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que des pôles. Autrement

6. Ces définitions sont basées sur des résultats obtenus dans le volume [5]

dit, w est rationnelle si elle ne contient aucune singularité essentielle, sur $\mathbb{C}$ comme au point ∞. La somme des multiplicités respectives de chacun des pôles de w (incluant le point ∞) est appelée l'***ordre de*** w.

Suite complètement normale

Introduisons maintenant un type de suite génératrice qui se révélera particulièrement crucial pour la suite des choses (l'exposition donnée dans cette sous-section suit celle de Bers dans [7]).

Définition 2.5.3 *Soit une paire génératrice (F, G) sur le plan complexe. La paire est dite* ***complète*** *si les fonctions F et G sont Hölder-continues sur le plan, si les limites $F(\infty)$ et $G(\infty)$ existent, si $\mathrm{Im}\{\overline{F(\infty)}G(\infty)\} \neq 0$ et si les fonctions $F(1/z)$ et $G(1/z)$ sont également Hölder-continues sur le plan. Si, en plus, on a $F(\infty) = G(\infty) = 1$, la paire (F, G) est dite* ***complètement normale****.*

Remarque 2.5.4 *Dans la définition précédente, les fonctions $F(1/z)$ et $G(1/z)$ sont définies en $z = 0$, en raison de l'existence des limites $F(\infty)$ et $G(\infty)$.*

Définition 2.5.5 *Une suite génératrice sur le plan constituée exclusivement de pairesss complètement normales est appelée* ***suite complètement normale****.*

Il a été démontré par Bers (voir [7]) que toute paire génératrice complètement normale est enchâssée dans **une et une seule** suite complètement normale.

Puissances formelles globales

Définition 2.5.6 *Soit (F, G) une paire génératrice sur le plan. On appelle* ***puissances formelles globales*** *associées à (F, G), et l'on note $Z^{(n)}(a, z_0; z)$ où $a \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, les fonctions qui sont définies de la manière suivante.*

Tout d'abord, $Z^{(n)}(0, z_0; z) \equiv 0$ sur $\mathbb{C}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, pour $a \neq 0$ et $n = 0$, on définit

$$Z^{(0)}(a, z_0; z) \equiv \lambda F(z) + \mu G(z),$$

où λ et μ sont les uniques nombres réels tels que $\lambda F(z_0) + \mu G(z_0) = a$. Finalement, pour $n \neq 0$, on définit $Z^{(n)}(a, z_0; z)$ comme la seule fonction pseudo-analytique rationnelle qui satisfait la relation

$$\lim_{z \to z_0} \frac{Z^{(n)}(a, z_0; z)}{a(z - z_0)^n} = 1$$

et qui ne possède aucun zéro ailleurs qu'en z_0 et aucun pôle ailleurs qu'au point ∞[7]*. Le terme a est appelé le* ***coefficient*** *de la puissance formelle $Z^{(n)}(a, z_0; z)$, le terme z_0 est son* ***centre*** *et n est son* ***exposant****.*

L'existence et l'unicité de chaque puissance formelle sont examinées (et démontrées) dans [5]. Étalons quelques propriétés remarquables des puissances formelles. Pour la démonstration, on a besoin d'un lemme qui se retrouve dans [5].

Lemme 2.5.7 *Si une fonction pseudo-analytique w est telle que $w \sim a(z - z_0)^n$ lorsque $z \to z_0$, alors $\overset{\circ}{w} \sim na(z - z_0)^{n-1}$ lorsque $z \to z_0$. De plus, si $w = O\left(|z|^n\right)$ lorsque $z \to \infty$, alors $\overset{\circ}{w} = O\left(|z|^{n-1}\right)$ lorsque $z \to \infty$.*

7. Bien que le cas $n = 0$ soit différencié des autres valeurs de n ici, on pourrait en fait définir $Z^{(0)}(a, z_0; z)$ de la même manière que les autres puissances et on obtiendrait toujours $\lambda F(z) + \mu G(z)$.

Théorème 2.5.8 (Propriétés des puissances globales)

Soit $\{(F_m, G_m)\}$, *une suite génératrice complètement normale sur* Ω. *Pour chaque* $m \in \mathbb{Z}$, *soit* $\{Z_m^{(n)}(a, z_0; z)\}_{n=0}^{\infty}$ *la suite de puissances formelles associée à la paire* (F_m, G_m). *On a, pour tout* $m \in \mathbb{Z}$, *que*

(i) $Z_m^{(n)}(a, z_0; z) \;\sim\; a(z - z_0)^n$ *lorsque* $z \to z_0$ *;*

(ii) *si* a_0, $a_1 \in \mathbb{R}$, *alors*

$$Z_m^{(n)}(a_0 + ia_1, z_0; z) \;=\; a_0\, Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + a_1\, Z_m^{(n)}(i, z_0; z);$$

(iii) $$\frac{d_{(F_m,G_m)}}{dz} Z_m^{(n)}(a, z_0; z) \;=\; n\, Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z) \qquad (\textit{où } \; n \neq 0).$$

Preuve (i) C'est immédiat, par définition de la puissance globale.

(ii) Tout d'abord, on sait par définition que $Z_m^{(n)}(1, z_0; z)$ et $Z_m^{(n)}(i, z_0; z)$ sont (F_m, G_m)-pseudo-analytiques, donc la combinaison linéaire $a_0\, Z_m^{(n)}(1, z_0; z) \;+\; a_1\, Z_m^{(n)}(i, z_0; z)$ l'est également. Posons $a = a_0 + ia_1$. On a ainsi que

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \to z_0} \frac{a_0\, Z_m^{(n)}(1, z_0; z) \;+\; a_1\, Z_m^{(n)}(i, z_0; z)}{(z - z_0)^n} \\
&= \frac{a_0}{a} \lim_{z \to z_0} \frac{Z_m^{(n)}(1, z_0; z)}{(z - z_0)^n} \;+\; \frac{a_1}{a} \lim_{z \to z_0} \frac{Z_m^{(n)}(i, z_0; z)}{(z - z_0)^n} \\
&= \frac{a_0}{a} \cdot 1 + \frac{a_1}{a} \cdot i \quad = \quad \frac{a_0 + ia_1}{a} \quad = \quad 1\,.
\end{aligned}$$

Finalement, puisque les fonctions $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ et $Z^{(n)}(i, z_0; z)$ n'ont aucun zéro ailleurs qu'en z_0 et aucun pôle ailleurs qu'en ∞, il en va de même pour la combinaison $a_1\, Z_m^{(n)}(1, z_0; z) \;+\; a_2\, Z_m^{(n)}(i, z_0; z)$. On conclut donc que cette dernière satisfait tous les critères déterminant de manière unique la puissance $Z_m^{(n)}(a_0 + ia_1, z_0; z)$.

(iii) Posons $w(z) = \dfrac{d_{(F_m,G_m)}}{dz} Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$. Tout d'abord, on sait par propriété de la (F_m, G_m)-dérivée que w est (F_{m+1}, G_{m+1})-pseudo-analytique. Par le lemme 2.5.7, on peut affirmer que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w(z)}{na(z - z_0)^{n-1}} \;=\; 1\,, \tag{2.25}$$

ce qui fait que w a un zéro d'ordre $n-1$ en z_0. De plus, par la deuxième partie du lemme 2.5.7 et par la définition de $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$, w possède un pôle dont l'ordre maximal est de $n - 1$. Il est facile de voir que puisque $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ n'a aucun pôle sur le plan fini, w n'aura lui non plus aucun pôle sur le plan fini [8]. Comme une fonction pseudo-analytique sur le plan possède exactement autant de pôles que de zéros (théorème 2.4.22), on établit non seulement que w possède exactement $n - 1$ pôles, tous en ∞, mais surtout que w possède exactement $n - 1$ zéros, tous en z_0. Encore une fois, on conclut que la fonction w satisfait tous les critères qui caractérisent de manière exclusive la puissance $Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z)$. ■

Remarque 2.5.9 *L'hypothèse de complète normalité sur les paires génératrices est nécessaire simplement pour la dernière propriété. Les deux premières propriétés sont donc vérifiées pour n'importe quelle suite génératrice sur Ω.*

L'énoncé (iii) du dernier théorème pave la voie à une nouvelle caractérisation récursive de nos puissances formelles.

Corollaire 2.5.10 *Soit $\{(F_m, G_m)\}$, une suite génératrice complètement normale sur Ω. Les puissances formelles définies plus tôt peuvent être générées grâce à la formule de récursion qui suit. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{cases} Z_m^{(0)}(a, z_0; z) = \lambda F(z) + \mu G(z), & \text{où } \lambda, \mu \text{ sont définies en } 2.5.6; \\ Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = n \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z) d_{(F_m, G_m)}, & \text{pour } n > 0. \end{cases}$$

Preuve Soit $n > 0$. En (F_m, G_m)-intégrant entre z_0 et z de chaque côté de l'égalité (iii) du théorème 2.5.8, puis en utilisant le théorème 2.4.17, on trouve

$$Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = n \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z) d_{(F_m, G_m)} + \phi(z_0) F(z) + \psi(z_0) G(z), \quad (2.26)$$

8. Par sa définition, on remarque aisément que la dérivée généralisée, tout comme la dérivée classique, n'introduit aucun pôle en un point fini où il n'y en avait pas avant dérivation.

où ϕ, ψ correspondent aux parties de la (F_m, G_m)-décomposition de $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$.

Par définition d'une paire complètement normale, les fonctions F_m et G_m sont bornées sur le plan complexe (puisque F, G sont définies partout sur $\mathbb{C}$ et puisque $F(\infty) = 1$, $G(\infty) = i$), Par conséquent, la fonction

$$W(z) \;=\; \phi(z_0)\, F_m(z) + \psi(z_0)\, G_m(z)$$

est une fonction (F_m, G_m)-pseudo-analytique bornée qui possède un zéro en $z = z_0$ $\big($car $W(z_0)$ doit être égale à la puissance nulle $Z_m^{(n)}(a, z_0; z_0)$ par définition de la (F_m, G_m)-décomposition$\big)$.

Ceci signifie, par le théorème 2.4.20, que $W(z) \equiv 0$ sur $\mathbb{C}$. L'équation (2.26) se transforme donc de manière à nous offrir la solution recherchée. ■

Voici un schéma illustrant la récursivité présentée.

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
Z^{(3)} & & Z_1^{(3)} & & Z_2^{(3)} & & Z_3^{(3)} \ldots \\
& \searrow \dfrac{d_{(F,G)}}{dz} & & \searrow \dfrac{d_{(F_1,G_1)}}{dz} & & \searrow \dfrac{d_{(F_2,G_2)}}{dz} & \ldots \\
Z^{(2)} & & Z_1^{(2)} & & Z_2^{(2)} & & Z_3^{(2)} \ldots \\
& \searrow \dfrac{d_{(F,G)}}{dz} & & \searrow \dfrac{d_{(F_1,G_1)}}{dz} & & \searrow \dfrac{d_{(F_2,G_2)}}{dz} & \ldots \\
Z^{(1)} & & Z_1^{(1)} & & Z_2^{(1)} & & Z_3^{(1)} \ldots \\
& \searrow \dfrac{d_{(F,G)}}{dz} & & \searrow \dfrac{d_{(F_1,G_1)}}{dz} & & \searrow \dfrac{d_{(F_2,G_2)}}{dz} & \ldots \\
Z^{(0)} & & Z_1^{(0)} & & Z_2^{(0)} & & Z_3^{(0)} \ldots
\end{array}$$

Remarque 2.5.11 *Le corollaire 2.5.10 fournit une procédure explicite pour générer les puissances formelles associées à une paire génératrice complètement normale $(F, G) = (F_0, G_0)$. L'accès à cette procédure est toutefois conditionnel à la possession de la suite génératrice complètement normale dans laquelle (F, G) serait enchâssée. Cette restriction est beaucoup plus encombrante qu'il n'y paraît. En effet, il n'existe à l'heure actuelle aucune technique générale permettant à coup sûr de bâtir une suite génératrice au milieu de laquelle une paire génératrice quelconque (F, G) serait enchâssée. La demande supplémentaire de complète normalité ne fait qu'exacerber le problème. Ceci fait de la construction de suites génératrices un des principaux enjeux de la théorie des fonctions pseudo-analytiques.*

Au-delà d'une simple définition, les puissances formelles constituent la généralisation directe des puissances classiques. En d'autres mots, les puissances $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ sont aux fonctions (F_m, G_m)-pseudo-analytiques ce que les puissances $a(z - z_0)^n$ sont aux fonctions analytiques (le lien entre les deux pouvait déjà être deviné grâce à (i)).

Dans l'analyse complexe classique, les puissances $a(z - z_0)^n$ jouent un rôle fondamental pour la caractérisation des fonctions analytiques. On peut penser, par exemple, aux séries de Taylor ou au théorème d'approximation de Runge. Il est donc légitime de se demander si les puissances formelles pourraient jouer un rôle analogue pour les fonctions pseudo-analytiques. Il s'avère que plusieurs résultats de cette nature existent. Le reste de cette section sera consacré à présenter les plus intéressants d'entre eux.

Séries de Taylor généralisées

Pour pouvoir définir une généralisation des séries de Taylor pour les fonctions pseudo-analytiques, on a besoin des deux théorèmes suivants, prouvés dans [5].

Théorème 2.5.12 *La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions pseudo-analytiques est pseudo-analytique.*

Théorème 2.5.13 *Si la suite de fonctions pseudo-analytiques $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ converge normalement vers une fonction w sur un domaine D, alors la suite $(\overset{\circ}{w}_n)_{n=0}^{\infty}$ converge normalement vers $\overset{\circ}{w}$ sur D.*

Supposons, d'abord, que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z_0^{(n)}(a_n, z_0; z) \tag{2.27}$$

converge normalement vers une fonction w (pseudo-analytique, par le théorème 2.5.12) sur un domaine D qui contient z_0. Posons $w_N = \sum_{n=0}^{N} Z_0^{(n)}(a_n, z_0; z)$. On sait que w_N converge normalement vers w. Par le théorème 2.5.8, on a donc

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{w}_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{d_{(F_0,G_0)}}{dz} Z_0^{(n)}(a_n, z_0; z) \\ &= \sum_{n=1}^{N} n\, Z_1^{(n-1)}(a_n, z_0; z) \ . \end{aligned}$$

Par le théorème 2.5.13, on obtient ainsi la convergence **normale** suivante sur D :

$$\overset{\circ}{w} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, Z_1^{(n-1)}(a_n, z_0; z) \ .$$

En reprenant itérativement ce raisonnement, on trouve la relation générale suivante pour $k \in \mathbb{N}$

$$w^{[k]} \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, Z_k^{(n-k)}(a_n, z_0; z) \ ,$$

où la convergence en question est normale sur D. En prenant la valeur particulière $z = z_0$, on découvre

$$\begin{aligned} w^{[k]}(z_0) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} Z_k^{(n-k)}(a_n, z_0; z_0) \\ &= \frac{k!}{0!} Z_k^0(a_n, z_0; z_0) \text{ [9]} \\ &= k!\Big(\lambda F_k(z_0) + \mu G_k(z_0)\Big) \\ &= k! a_k \ , \end{aligned}$$

ce qui nous donne la relation

$$a_k = \frac{w^{[k]}(z_0)}{k!} \ . \tag{2.28}$$

Définition 2.5.14 *On appelle* ***série de Taylor généralisée de*** w ***autour de*** z_0 *la série* (2.27)*, avec les coefficients* a_n *définis par* (2.28).

Quelques résultats de complétude

Cette sous-section présente certains résultats de complétude pour les puissances formelles. Les preuves, épargnées ici, peuvent cependant être trouvées dans [5] ou dans [6].

Remarquons, comme première relation élémentaire, que la série de Taylor d'une

9. La puissance $Z_k^{(n-k)}(a_n, z_0; z_0)$ est une intégrale de z_0 à z_0 (donc nulle) à moins que l'exposant $n-k$ soit 0.

fonction représente toujours cette fonction lorsque l'on tend vers z_0, c'est-à-dire que

$$w(z) - \sum_{n=0}^{N} Z_0^{(n)}\left(\frac{w^{[n]}}{n!}, z_0; z\right) = O(|z-z_0|^{n+1}) \qquad \text{lorsque } z \to z_0 \,. \tag{2.29}$$

Théorème 2.5.15 *Soit w, une fonction pseudo-analytique définie pour $|z-z_0| < R$. Alors, la série $\sum_{n=0}^{\infty} Z_0^{(n)}\left(\frac{w^{[n]}}{n!}, z_0; z\right)$ converge normalement pour $|z-z_0| < \Theta R$, où Θ est une constante positive qui dépend uniquement de la suite génératrice.*

Le prochain résultat présenté est un analogue du théorème de Runge de l'analyse classique.

Théorème 2.5.16 (Runge pseudo-analytique) *Soit un domaine simplement connexe Ω. Alors, pour toute fonction pseudo-analytique w sur Ω, il existe une suite de polynômes formels (combinaisons linéaires de puissances formelles) qui converge normalement vers f sur Ω.*

Remarque 2.5.17 *En utilisant la propriété* (ii) *du théorème 2.5.8, on est en mesure de développer davantage le théorème précédent jusqu'à en conclure que $\left\{Z_0^{(n)}(1, z_0; z) \;\; ; \;\; Z_0^{(n)}(i, z_0; z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ est complet pour l'espace des fonction pseudo-analytiques sur Ω.*

Puissances formelles locales

Supposons maintenant que l'on possède une suite génératrice quelconque sur un domaine quelconque (possiblement borné) Ω. Alors la relation (2.26) peut toujours être utilisée !

Définition 2.5.18 *Soit $\{(F_m, G_m)\}_{m=-\infty}^{\infty}$, une suite génératrice quelconque sur le domaine Ω. On appelle* **puissances formelles locales** *associées à (F, G), toujours notées $Z^{(n)}(a, z_0; z)$, les fonctions définies selon la formule récursive suivante. Pour $n = 0$, on a*

$$Z^{(0)}(a, z_0; z) \equiv \lambda F(z) + \mu G(z),$$

où λ et μ sont les uniques nombres réels tels que $\lambda F(z_0) + \mu G(z_0) = a$. Pour $n \neq 0$, on a

$$Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = n \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z) d_{(F_m, G_m)}, \tag{2.30}$$

Étalons quelques propriétés remarquables des puissances formelles locales.

Théorème 2.5.19 (Propriétés des puissances locales)
Soit $\{(F_m, G_m)\}$, une suite génératrice sur Ω. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a que

(i) $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ *est une fonction (F_m, G_m)-pseudo-analytique ;*

(ii) $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R} \;\; Z_m^{(n)}(a_0 + ia_1, z_0; z) = a_0 \, Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + a_1 \, Z_m^{(n)}(i, z_0; z);$

(iii) $\dfrac{d_{(F_m,G_m)}}{dz} Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = n \, Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z).$

(iv) $Z_m^{(n)}(a, z_0; z) \sim a(z - z_0)^n$ *lorsque $z \to z_0$.*

Les puissances locales, non soumises aux mêmes exigences restrictives que les puissances globales, présentent un intérêt moindre. Cette réalité est bien visible par les résultats de complétude, qui se font plus rares [10]. Que peut-on obtenir à partir des puissances locales ? Notons d'abord que la relation asymptotique (2.29) reste valide pour les puissances locales. On est aussi en mesure de grappiller le théorème suivant, tiré de [7], qui fait appel aux suites génératrices périodiques.

10. À la section 4 du mémoire, on discute d'un lien possible entre les deux types de puissances, permettant d'adapter certains résultats seulement à partir de puissances locales.

Définition 2.5.20 *Une suite génératrice* $\{(F_m, G_m)\}$ *est dite* ***périodique*** *s'il existe un entier positif* r *tel que pour tout* $m \in \mathbb{Z}$, *la paire* (F_{m+r}, G_{m+r}) *possède les mêmes coefficients caractéristiques que la paire* (F_m, G_m)

Théorème 2.5.21 *Soit une fonction* w *pseudo-analytique dans un domaine* Ω. *Si les puissances formelles locales utilisées ont été construites à partir d'une suite génératrice périodique, alors la série de Taylor généralisée engendrée converge dans un certain voisinage de son centre.*

Chapitre 3

Article intégral

Title of the Article : On two-dimensional supersymmetric quantum mechanics, pseudoanalytic functions and transmutation operators Alex Bilodeau & Sébastien Tremblay

Department of Mathematics and Computer Science,
University of Quebec, Trois-Rivières, Québec, G9A 5H7, Canada

Abstract : Pseudoanalytic function theory is considered to study a two-dimensional supersymmetric quantum mechanics system. Hamiltonian components of the superhamiltonian are factorized in terms of one Vekua and one Bers derivative operators. We show that imaginary and real solutions of a Vekua equation and its Bers derivative are ground state solutions for the superhamiltonian. The two-dimensional Darboux and pseudo-Darboux transformations correspond to Bers derivatives in the complex plane. Results on the completeness of the ground states are obtained. Finally, superpotential is studied in the separable case in terms of transmutation operators. We show how Hamiltonian components of the superhamiltonian are related to the Laplacian operator using these transmutation operators.

Keywords : supersymetric quantum mechanics, pseudoanalytic functions, generalized analytic functions, transmutation operators, Schrödinger operators, Darboux transformations, complete system of solutions

PACS numbers : 02.30.-f, 02.30.Tb, 30G20, 35J10

3.1 Introduction

Supersymmetric quantum mechanics (SUSY QM) [8, 9] provides an interesting framework to investigate the problem of spectral equivalence of Hamiltonians, which, historically, has been constructed as a factorization method in quantum mechanics [10] and as Darboux transformations in mathematical physics [11, 2, 12]. The SUSY QM systems with an arbitrary ($d > 1$) dimensionality of space were constructed and investigated in and, in the last ten years, more attention has been given in the literature to the study of multidimensional – especially two-dimensional – problems in SUSY QM [13, 14, 15]. Such multidimensional models contain matrix potentials [16] which are not particularly exotic in quantum mechanics. For instance, the two-dimensional generalization of SUSY QM considered in this paper was successfully used by Ioffe *et al.* to describe the spectrum of the Pauli operator describing spin 1/2 fermion in the external electrostatic and magnetic field [17, 18, 19].

On the other hand, theory of pseudoanalytic functions [5, 20, 21, 22, 23] is one of the classical branches of complex analysis extending the concepts and ideas from analytic function theory onto a much more general situation and involving linear elliptic equations and systems with variables coefficients. Its development in forties-fifties of the last century was fast and deep and historically represented an important impulse to the progress in the general theory of elliptic systems. Nevertheless the important obstacles for a further development of pseudoanalytic function theory were its limited practical applications together with the fact that many important results remained in the level of existence without a possibility to make them really applicable for solving problems of mathematical physics. Recent progress in pseudoanalytic function theory reported in [6] shows its deep relation to the stationary Schrödinger equation and more general linear second order elliptic equations and includes new results which allow one to make the basic objects of the theory and their applications fully explicit. Among other results it is worth mentioning the possibility to obtain complete systems of solutions to second order elliptic equations with variable coefficients and their use for solving related boundary and eigenvalue problems.

3.2 Pseudoanalytic function theory

This section is based on some results presented in [5, 20, 6]. Let Ω be a domain in $\mathbb{R}^2$. Throughout the whole paper we suppose that Ω is a simply connected domain and use the usual notations $z = x+\mathrm{i}y$, $\overline{z} = x-\mathrm{i}y$, $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ and $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Definition 3.2.1 *A pair of complex functions F and G possessing in Ω partial derivatives with respect to the real variables x and y is said to be a generating pair if it satisfies the inequality*

$$\operatorname{Im}(\overline{F}G) \neq 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{3.1}$$

The inequality (3.1) means that F and G are independent in the sense that any complex-valued function W defined in Ω can be uniquely expressed in the form

$$W = \phi F + \psi G, \quad \forall z \in \Omega,$$

where ϕ and ψ are two real-valued functions of the variables x and y. In other words, the pair (F, G) generalizes the pair $(1, \mathrm{i})$ corresponding to the usual complex analytic function theory. Sometimes it is convenient to associate with the function W the function $\omega = \phi + \mathrm{i}\psi$. The correspondence between W and ω is one-to-one.

Definition 3.2.2 *Let (F, G) be a generating pair in Ω and the function $W = \phi F + \psi G$ be defined in a neighborhood of $z_0 \in \Omega$. We say that the function W possesses the (F, G)-derivative $\overset{\circ}{W}$ at z_0 if the (finite) limit*

$$\overset{\circ}{W}(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}W}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{W(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0}$$

exists, where $\phi(z_0)$ and $\psi(z_0)$ are the unique real constants such that $W(z_0) = \phi(z_0)F(z_0) + \psi(z_0)G(z_0)$.

Theorem 3.2.3 *[5] Let (F, G) be a generating pair in some open domain Ω and $W \in C^1(\Omega)$. The (F, G)-derivative $\overset{\circ}{W}$ exists and has the form*

$$\overset{\circ}{W} = (\partial_z \phi)F + (\partial_z \psi)G = \partial_z W - AW - B\overline{W} \tag{3.2}$$

if and only if

$$\partial_{\bar{z}} W = aW + b\overline{W}, \tag{3.3}$$

where a, b, A and B are called the characteristic coefficients associated with the pair (F, G) in Ω, defined by the formulas

$$a = a_{(F,G)} = -\frac{\overline{F}\partial_{\bar{z}}G - \overline{G}\partial_{\bar{z}}F}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad b = b_{(F,G)} = \frac{F\partial_{\bar{z}}G - G\partial_{\bar{z}}F}{F\overline{G} - \overline{F}G}$$

$$A = A_{(F,G)} = -\frac{\overline{F}\partial_z G - \overline{G}\partial_z F}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad B = B_{(F,G)} = \frac{F\partial_z G - G\partial_z F}{F\overline{G} - \overline{F}G}.$$

Notice that $F\overline{G} - \overline{F}G = -2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\overline{F}G) \neq 0$ from (3.1).

Equation (3.3), generalizing the Cauchy-Riemann system, is called the **Vekua equation**. A function such that $\overset{\circ}{W}$ exists everywhere on Ω is called (F,G)-**pseudoanalytic function**.

Remark 3.2.4 *We notice that the Vekua equation (3.3) can be rewritten in the form* $\phi_{\bar{z}}F + \psi_{\bar{z}}G = 0$. *Also, the functions* F *and* G *are* (F,G)*-pseudoanalytic functions where* $\overset{\circ}{F} \equiv 0 \equiv \overset{\circ}{G}$.

Definition 3.2.5 *Let* (F,G) *and* (F_1,G_1) *- be two generating pairs in* Ω. (F_1,G_1) *is called successor of* (F,G) *and* (F,G) *is called predecessor of* (F_1,G_1) *if*

$$a_{(F_1,G_1)} = a_{(F,G)} \qquad \text{and} \qquad b_{(F_1,G_1)} = -B_{(F,G)}. \tag{3.4}$$

This definition arises naturally in relation to the notion of the (F,G)-derivative due to the following fact.

Theorem 3.2.6 *Let* W *be an* (F,G)*-pseudoanalytic function and let* (F_1,G_1) *be a successor of* (F,G). *Then* $\overset{\circ}{W}$ *is an* (F_1,G_1)*-pseudoanalytic function, i.e.*

$$\partial_{\bar{z}}\overset{\circ}{W} = a_{(F_1,G_1)}\overset{\circ}{W} + b_{(F_1,G_1)}\overline{\overset{\circ}{W}} = a_{(F,G)}\overset{\circ}{W} - B_{(F,G)}\overline{\overset{\circ}{W}}.$$

This process of construction of new Vekua equations associated with the previous ones via relations (3.4) can be continued and we arrive at the following definition.

Definition 3.2.7 *A sequence of generating pairs* $\{(F_m,G_m)\}$, *for* $m \in \mathbb{Z}$, *is called a generating sequence if* (F_{m+1},G_{m+1}) *is a successor of* (F_m,G_m). *If* $(F_0,G_0) = (F,G)$, *we say that* (F,G) *is embedded in* $\{(F_m,G_m)\}$.

We say that two generating pairs, (F, G) and $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$ are called equivalent if $\widetilde{F} = a_{11}F + a_{12}G$ and $\widetilde{G} = a_{21}F + a_{22}G$, the a_{jk} being real constants. A generating sequence $\{(F_m, G_m)\}$ is said to have period $\mu > 0$ if $(F_{m+\mu}, G_{m+\mu})$ is equivalent to (F_m, G_m), that is their characteristic coefficients coincide.

Let W be an (F, G)-pseudoanalytic function. Using a generating sequence in which (F, G) is embedded we can define the higher derivatives of W by the recursion formula

$$W^{[0]} = W; \qquad W^{[m+1]} = \frac{\mathrm{d}_{(F_m,G_m)} W^{[m]}}{\mathrm{d}z}, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Let (F, G) be a generating pair in Ω. Its adjoint generating pair $(F, G)^* = (F^*, G^*)$ is defined by the following formulas

$$F^* = -\frac{2\overline{F}}{F\overline{G} - \overline{F}G}, \qquad G^* = \frac{2\overline{G}}{F\overline{G} - \overline{F}G}.$$

The (F, G)-integral is then given by

$$\int_\Gamma W \mathrm{d}_{(F,G)} z = F(z_1) \operatorname{Re} \int_\Gamma G^* W \mathrm{d}z + G(z_1) \operatorname{Re} \int_\Gamma F^* W \mathrm{d}z, \tag{3.5}$$

where Γ is a rectifiable curve leading from z_0 to z_1.

If $W = \phi F + \psi G$ is an (F, G)-pseudoanalytic function where ϕ and ψ are real valued functions then

$$\int_{z_0}^{z} \overset{\circ}{W} \mathrm{d}_{(F,G)} z = W(z) - \phi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z).$$

This integral is path-independent and represents the (F, G)-antiderivative of $\overset{\circ}{W}$.

Definition 3.2.7 of generating sequence is the main ingredient for obtaining the explicit form of formal powers for a certain Vekua equation. Briefly speaking, formal powers are solutions of a Vekua equation (3.3) generalizing the usual analytic powers

$\left\{(z-z_0)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ in the sense that locally when $z \to z_0$ they behave asymptotically like the usual powers and under some additional conditions on the coefficients $a_{(F,G)}$ and $b_{(F,G)}$ they form a complete system in the space of all solutions of the Vekua equation in the same sense as the analytic powers $\left\{(z-z_0)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ form a complete system in the space of analytic functions.

Definition 3.2.8 *The formal power $Z_m^{(0)}(a, z_0; z)$ with center at $z_0 \in \Omega$, coefficient a and exponent 0 is defined as the linear combination of the generators F_m, G_m with real constant coefficients λ, μ chosen so that $\lambda F_m(z_0) + \mu G_m(z_0) = a$. The formal powers with exponents $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ are defined by the recursion formula*

$$Z_m^{(n+1)}(a, z_0; z) = (n+1) \int_{z_0}^{z} Z_{m+1}^{(n)}(a, z_0; \zeta) \mathrm{d}_{(F_m, G_m)}\zeta. \tag{3.6}$$

The following properties can be derived from this last definition.

1. $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$ is an (F_m, G_m)-pseudoanalytic function of z.
2. If a_1 and a_2 are two real constants, then $Z_m^{(n)}(a_1 + \mathrm{i}a_2, z_0; z) = a_1 Z_m^{(n)}(1, z_0; z) + a_2 Z_m^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$.
3. The formal powers satisfy the differential relations

$$\frac{\mathrm{d}_{(F_m, G_m)} Z_m^{(n)}(a, z_0; z)}{\mathrm{d}z} = n Z_{m+1}^{(n-1)}(a, z_0; z).$$

4. The asymptotic formulas

$$\lim_{z \to z_0} Z_m^{(n)}(a, z_0; z) = a(z-z_0)^n,$$

hold.

It follows from (3.6) that once the generating sequence $\{(F_m, G_m)\}$ is known, the formal powers $Z_m^{(n)}(a, z_0; z)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, can be obtained by successive integrations. The scheme of the (F_m, G_m)-derivatives is the following :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
Z^{(2)} & & Z_1^{(2)} & & Z_2^{(2)} & & Z_3^{(2)} & \cdots \\
 & \searrow \frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z} & & \searrow \frac{\mathrm{d}_{(F_1,G_1)}}{\mathrm{d}z} & & \searrow \frac{\mathrm{d}_{(F_2,G_2)}}{\mathrm{d}z} & & \\
Z^{(1)} & & Z_1^{(1)} & & Z_2^{(1)} & & Z_3^{(1)} & \cdots \\
 & \searrow \frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z} & & \searrow \frac{\mathrm{d}_{(F_1,G_1)}}{\mathrm{d}z} & & \searrow \frac{\mathrm{d}_{(F_2,G_2)}}{\mathrm{d}z} & & \\
Z^{(0)} & & Z_1^{(0)} & & Z_2^{(0)} & & Z_3^{(0)} & \cdots
\end{array}
$$

Definition 3.2.9 *Let $W(z)$ be a given (F,G)-pseudoanalytic function defined for small values of $|z - z_0|$. The series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z)$$

with the coefficients given by

$$a_n = \frac{W^{[n]}(z_0)}{n!}$$

is called the Taylor series of $W(z)$ at z_0, formed with formal powers.

Definition 3.2.10 *A generating pair (F,G) is a called complete if these functions are defined and satisfy the Hölder condition for all finite values of z, the limits $F(\infty)$ and $G(\infty)$ exist, $\mathrm{Im}\left(\overline{\mathrm{F}(\infty)}\mathrm{G}(\infty)\right) > 0$ and the functions $F(1/z)$, $G(1/z)$ also satisfy the Hölder condition. A complete generating pair is called normalized if $F(\infty) = 1$ and $G(\infty) = \mathrm{i}$.*

For now on we assume that (F,G) is a complete normalized generating pair. Then the following completeness results were obtained. (Following [5], we shall say that a sequence of functions f_n converges normally in a domain Ω if it converges uniformly on every bounded closed subdomain of Ω.)

Theorem 3.2.11 (Expansion theorem [7]) *Let W be an (F, G)-pseudoanalytic function defined for $|z - z_0| < R$. Then it admits a unique expansion of the form $W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n, z_0; z)$ which converges normally for $|z - z_0| < \theta R$, where θ is a positive constant depending on the generating sequence.*

Theorem 3.2.12 (Runge's approximation [7]) *A pseudoanalytic function defined in a simply connected domain can be approached by a normally convergent sequence of formal polynomials (linear combinations of formal powers with positive exponents).*

3.3 Two-dimensional SUSY QM

In [9] Witten proposed the conventional one-dimensional SUSY QM characterized by the simplest realization of the supersymmetric algebra

$$\{\hat{Q}^+, \hat{Q}^-\} = \hat{H}, \quad [\hat{H}, \hat{Q}^\pm] = 0, \quad \{\hat{Q}^+, \hat{Q}^+\} = \{\hat{Q}^-, \hat{Q}^-\} = 0, \tag{3.7}$$

where $\{A, B\} = AB + BA$ and $[A, B] = AB - BA$. The operator $\widehat{H}$ is the superhamiltonian represented by the diagonal matrix $\mathrm{diag}(H^{(0)}, H^{(1)})$, with $H^{(0)} = q^+q^- = -\partial^2 + V^{(0)}$, $H^{(1)} = q^-q^+ = -\partial^2 + V^{(1)}$, $q^\pm = \mp\partial + \partial\chi$ and $\partial \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. The supercharge operators $\hat{Q}^\pm$ are off diagonal matrices with elements $q^\pm$. The function χ called the superpotential is a smooth function defined via the zero-energy wave function $\psi_0 \equiv \exp(-\chi)$ of the Schrödinger equation $H^{(0)}$, i.e. $H^{(0)}\psi_0 = 0$ (possibly after an appropriate choice of the origin for the energy scale). The (anti)commutation relations of SUSY algebra (3.7) mean, respectively, factorization of Hamiltonians, intertwining of $H^{(i)}$ with $q^{\pm}$ and nilpotent structure of supercharges.

Let us now consider the two-dimensional case where for convenience we use the notations $(x, y) \equiv (x_1, x_2)$, $\partial/\partial x \equiv \partial_1$ and $\partial/\partial y \equiv \partial_2$. The direct generalization of SUSY QM [24, 25, 2] satisfies the conventional Witten's SUSY algebra (3.7). The 4×4 superhamiltonian is realized by the block diagonal matrix

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & H^{(1)}_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & H^{(2)} \end{pmatrix},$$

with the supercharges operators

$$\hat{Q}^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1^- & 0 & 0 & 0 \\ q_2^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^+ & p_2^+ & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{Q}^{-} = (\hat{Q}^{+})^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & q_1^+ & q_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_1^- \\ 0 & 0 & 0 & p_2^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where

$$q_i^{\pm} = \mp\partial_i + \partial_i \chi, \qquad p_i^{\pm} = \sum_{k=1}^{2} \epsilon_{ik} q_k^{\mp}, \qquad i, j \in \{1, 2\}. \tag{3.8}$$

Here $\chi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ is a real-valued function of the variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ and ϵ_{ik} is the fundamental antisymmetrical tensor. In particular, we observe that $(\hat{Q}^{\pm})^2 = 0$ from (3.7) imply that

$$\sum_{k=1}^{2} p_k^+ q_k^- = 0 \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=1}^{2} q_k^+ p_k^- = 0. \tag{3.9}$$

Moreover, a direct calculation from (3.8) shows that

$$[q_i^-, q_j^+] = 2\partial_i\partial_j\chi.$$

From the first equality $\{\hat{Q}^+, \hat{Q}^-\} = \hat{H}$ in (3.7) the two scalar Schrödinger operators $H^{(0)}$, $H^{(2)}$ and the 2×2 matrix Schrödinger operator $H^{(1)}_{ij}$ are expressed in terms of the components of supercharges :

$$
\begin{aligned}
H^{(0)} &= \sum_{k=1}^{2} q_k^+ q_k^- = -\triangle + U^{(0)} = -\triangle + \sum_{k=1}^{2} (\partial_k \chi)^2 - \partial_k^2 \chi, \\
H^{(2)} &= \sum_{k=1}^{2} p_k^+ p_k^- = -\triangle + U^{(2)} = -\triangle + \sum_{k=1}^{2} (\partial_k \chi)^2 + \partial_k^2 \chi, \\
H_{ij}^{(1)} &= q_i^- q_j^+ + p_i^- p_j^+ = \delta_{i,j} H^{(0)} + 2\partial_i \partial_j \chi,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

where $\delta_{i,j}$ is the Kronecker delta, $\triangle \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2$ and the zero-energy wave functions of the scalar Hamiltonians $H^{(0)}$, $H^{(2)}$ are written as $\psi_0^{(0)} = \mathrm{e}^{-\chi}$ and $\psi_0^{(2)} = \mathrm{e}^{\chi}$, respectively.

The quasi-factorization in (3.10) ensures that the commutation relations in (3.7) holds, and leads to the following intertwining relations for the components of the superhamiltonian $\widehat{H}$:

$$
\begin{aligned}
H^{(0)} q_i^+ &= \sum_{k=1}^{2} q_k^+ H_{ki}^{(1)}, \qquad q_i^- H^{(0)} = \sum_{k=1}^{2} H_{ik}^{(1)} q_k^-, \\
H^{(2)} p_i^+ &= \sum_{k=1}^{2} p_k^+ H_{ki}^{(1)}, \qquad p_i^- H^{(2)} = \sum_{k=1}^{2} H_{ik}^{(1)} p_k^-.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

These intertwining relations (3.11) imply that components of the vector wave functions of the matrix Hamiltonian $H_{ij}^{(1)}$ are connected (up to a constant) with the wave functions of the scalar Hamiltonians $H^{(0)}$ and $H^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
\psi_i^{(1)}(\mathbf{x};E) &= q_i^- \psi^{(0)}(\mathbf{x};E), \qquad \psi_i^{(1)}(\mathbf{x};E) = p_i^- \psi^{(2)}(\mathbf{x};E), \\
\psi^{(0)}(\mathbf{x};E) &= \sum_{k=1}^{2} q_k^+ \psi_k^{(1)}(\mathbf{x};E), \qquad \psi^{(2)}(\mathbf{x};E) = \sum_{k=1}^{2} p_k^+ \psi_k^{(1)}(\mathbf{x};E).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

We remark that $H^{(0)}$ and $H^{(2)}$ are not intertwined with each other and are not (in general) isospectral, nevertheless relations (3.12) lead to the connections between the spectrum of the matrix Hamiltonian $H^{(1)}$ and the spectra of the two scalar ones $H^{(0)}, H^{(2)}$

$$
H\Psi = E\Psi, \quad H = \mathrm{diag}(H^{(0)}, H^{(2)}), \quad \Psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(2)})^{\top} \tag{3.13}
$$

and

$$H^{(1)}\Phi = E\Phi, \quad \Phi = (\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)})^{\top}. \tag{3.14}$$

Here 'equivalence' means coincidence of spectra up to zero modes of the operators $q_i^{\pm}, p_i^{\pm}$. Using relations (3.12) the two-dimensional Darboux transformations [2, 12] D and $D^{\dagger}$ are defined by

$$\Phi = D\Psi, \qquad D = \begin{pmatrix} q_1^- & p_1^- \\ q_2^- & p_2^- \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

and

$$\Psi = D^{\dagger}\Phi, \qquad D^{\dagger} = \begin{pmatrix} q_1^+ & q_2^+ \\ p_1^+ & p_2^+ \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

where

$$D^{\dagger}D = H, \qquad DD^{\dagger} = H^{(1)}. \tag{3.17}$$

Moreover, pseudo-Darboux transformations D_1 and $D_1^{\dagger}$ can be defined as

$$D_1 = \begin{pmatrix} p_2^- & p_1^- \\ q_2^- & q_1^- \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad D_1^{\dagger} = \begin{pmatrix} p_2^+ & q_2^+ \\ p_1^+ & q_1^+ \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

where $D_1 D_1^{\dagger} = H$, $D_1^{\dagger} D_1 = \widetilde{H}^{(1)}$ and $\widetilde{H}^{(1)} := \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & -H_{12}^{(1)} \\ -H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$.

3.4 Pseudoanalytic functions and SUSY QM

Let us define first the following complex operators :

$$\begin{aligned} V &= \partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}}\chi\, C, \quad \overline{V} = \partial_z - \partial_z\chi\, C, \\ V_1 &= \partial_{\bar{z}} + \partial_z\chi\, C, \quad \overline{V}_1 = \partial_z + \partial_{\bar{z}}\chi\, C, \end{aligned} \tag{3.19}$$

together with the operators projecting the real and imaginary parts

$$P^+ = \frac{1}{2}(I + C), \qquad P^- = \frac{1}{2\mathrm{i}}(I - C),$$

where C represents the complex conjugate operator. Operators (3.19) are related by the complex conjugate operator C as

$$CV = \overline{V}C \qquad \text{and} \qquad CV_1 = \overline{V}_1 C. \tag{3.20}$$

Defining now the operator $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ by $Pw = (P^-, P^+)^\top w$, we obtain the following result.

Theorem 3.4.1 *The following operator equalities hold :*

$$DP = 2P\overline{V}, \qquad D^\dagger P = -2PV_1, \qquad D_1 P = 2P\overline{V}_1, \qquad D_1^\dagger P = -2PV, \tag{3.21}$$

for any differentiable complex-valued function in Ω. Moreover, the following factorization are obtained

$$\begin{aligned} HP &= -4PV_1\overline{V} \qquad H^{(1)}P = -4P\overline{V}V_1, \quad \widetilde{H}^{(1)}P = -4PV\overline{V}_1, \\ &= -4P\overline{V}_1 V, \end{aligned} \tag{3.22}$$

for any twice differentiable complex-valued function in Ω.

Proof Let $w = w_1 + \mathrm{i}w_2$ be differentiable in Ω, then

$$\begin{aligned} DPw &= \begin{pmatrix} q_1^- & q_2^+ \\ q_2^- & -q_1^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_1 + \partial_1\chi)w_2 + (-\partial_2 + \partial_2\chi)w_1 \\ (\partial_2 + \partial_2\chi)w_2 - (-\partial_1 + \partial_1\chi)w_1 \end{pmatrix} \\ &= P\Big[(\partial_1 - \mathrm{i}\partial_2)(w_1 + \mathrm{i}w_2) - (\partial_1 - \mathrm{i}\partial_2)\chi \cdot (w_1 - \mathrm{i}w_2)\Big] \\ &= 2P\overline{V}w. \end{aligned}$$

Other equalities in (3.21) are shown in a similar way and operator equalities (3.22) are the results of (3.17) and (3.21). ■

Remark 3.4.2 *We note in particular that for any* real-valued *function in* $C^2(\Omega)$ *we obtain the factorizations*

$$H^{(0)} = 4\mathrm{i}V_1\overline{V}\mathrm{i} = 4\mathrm{i}\overline{V}_1V\mathrm{i}, \qquad H^{(2)} = -4V_1\overline{V} = -4\overline{V}_1V,$$

$$H^{(1)}_{11} + \mathrm{i}H^{(1)}_{12} = 4\mathrm{i}V\overline{V}_1\mathrm{i}, \qquad H^{(1)}_{22} + \mathrm{i}H^{(1)}_{21} = -4\overline{V}V_1,$$

$$\widetilde{H}^{(1)}_{11} + \mathrm{i}\widetilde{H}^{(1)}_{12} = 4\mathrm{i}\overline{V}V_1\mathrm{i}, \qquad \widetilde{H}^{(1)}_{22} + \mathrm{i}\widetilde{H}^{(1)}_{21} = -4V\overline{V}_1.$$

Remark 3.4.3 *Operators* H *and* $H^{(1)}$ *can also be written in terms of complex operators* $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ *as*

$$H = -\triangle + 4\begin{pmatrix} |\partial_z\chi|^2 - \partial_{\bar{z}}\partial_z\chi & \\ & |\partial_z\chi|^2 + \partial_{\bar{z}}\partial_z\chi \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

and

$$H^{(1)} = -\triangle + 4\begin{pmatrix} |\partial_z\chi|^2 + \operatorname{Re}\partial_z^2\chi & -\operatorname{Im}\partial_z^2\chi \\ -\operatorname{Im}\partial_z^2\chi & |\partial_z\chi|^2 - \operatorname{Re}\partial_z^2\chi \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Remark 3.4.4 *From equation (3.23) we see that potentials* $U^{(0,2)}$ *defined in (3.10) can be written in the form*

$$\partial_{\bar{z}}R + |R|^2 = \frac{1}{4}U^{(0,2)},$$

where $R \equiv -\partial_z\chi$ *for the potential* $U^{(0)}$ *and* $R \equiv \partial_z\chi$ *for the potential* $U^{(2)}$. *This equation corresponds to the complex Riccati equation (see [6] for more details on this equation).*

Let us now consider the Vekua equation $VW = 0$, i.e.

$$\partial_{\bar{z}} W = \partial_{\bar{z}}\chi \, \overline{W} \quad \text{in } \Omega. \tag{3.25}$$

We call this equation the **main Vekua equation**. A generating pair for equation (3.25) is given by

$$(F, G) = (\mathrm{e}^{\chi}, \ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\chi}), \tag{3.26}$$

such that $a_{(F,G)} = A_{(F,G)} = 0$, $b_{(F,G)} = \partial_{\bar{z}}\chi$ and $B_{(F,G)} = \partial_z\chi$. In this case, we note that from (3.2) the (F, G)-derivative is given by

$$\overset{\circ}{W} = \frac{\mathrm{d}_{(F,G)} W}{\mathrm{d}z} = (\partial_z - \partial_z\chi \, C)W = \overline{V} W = (CVC)W,$$

where second and last equalities come, respectively, from (3.2) and (3.20). Also from (3.3) and (3.4) we observe that for any given successor (F_1, G_1) of the pair (F, G) the (F_1, G_1)-pseudoanalytic functions satisfy Vekua equation

$$V_1 w = 0,$$

where, in particular from theorem 3.2.6, we have $V_1 \overset{\circ}{W} = 0$ when W satisfies the main Vekua equation (3.25).

Theorem 3.4.5 *Let $W \in C^3(\Omega)$ be a solution of the main Vekua equation (3.25). Then $\Psi = PW$ and $\Phi = P\overset{\circ}{W}$ are real-valued wave function solutions in the kernel of H and $H^{(1)}$, respectively.*

Proof Since W satisfies the main Vekua equation $VW = 0$ we know that $\overset{\circ}{W}$ exists and is given by $\overset{\circ}{W} = \overline{V}W$. Moreover, we have that $V_1\overset{\circ}{W} = 0$ such that

$$0 = V_1 \overline{V} W \quad \Rightarrow \quad 0 = PV_1\overline{V}W = -\frac{1}{4} HPW,$$

where the last equality comes from (3.22). Also, using again (3.22) we easily find that

$$H^{(1)}P\mathring{W} = -4P\overline{V}V_1\mathring{W} = 0.$$

■

This theorem can be summarized in the following commutative diagram :

$$\begin{array}{ccc} W \in \ker V & \xrightarrow{P} & \Psi = (\operatorname{Im} W,\ \operatorname{Re} W)^\top \in \ker H \\ \overline{V} = \dfrac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z} \downarrow & & \downarrow D \\ \mathring{W} \in \ker V_1 & \xrightarrow{P} & \Phi = (\operatorname{Im} \mathring{W},\ \operatorname{Re} \mathring{W})^\top \in \ker H^{(1)}. \end{array} \tag{3.27}$$

Note that the operator $\partial_{\overline{z}}$ applied to a real-valued function ϕ can be regarded as a kind of gradient, and if we know that $\partial_{\overline{z}}\phi = \Phi$ in a whole complex plane or in a convex domain, where $\Phi = \Phi_1 + \mathrm{i}\Phi_2$ is a given complex valued function such that its real part Φ_1 and imaginary part Φ_2 satisfy the equation

$$\partial_2\Phi_1 - \partial_1\Phi_2 = 0, \tag{3.28}$$

then we can reconstruct ϕ up to an arbitrary real constant c in the following way

$$\phi(x,y) = 2\left(\int_a^x \Phi_1(\xi, b)\mathrm{d}\xi + \int_b^y \Phi_2(a,\eta)\mathrm{d}\eta\right) + c \tag{3.29}$$

where (a, b) is an arbitrary fixed point in the domain of interest. Note that this formula can be easily extended to any simply connected domain by considering the integral along an arbitrary rectifiable curve Γ leading from (a,b) to (x,y)

$$\phi(x,y) = 2\left(\int_\Gamma \Phi_1 \mathrm{d}x + \Phi_2 \mathrm{d}y\right) + c.$$

By $\overline{A}$ we denote this integral operator :

$$\overline{A}[\Phi](x,y) = 2\left(\int_\Gamma \Phi_1 \mathrm{d}x + \Phi_2 \mathrm{d}y\right).$$

Thus if Φ satisfies (3.28), there exists a family of real valued functions ϕ such that $\partial_{\overline{z}}\phi = \Phi$, given by the formula $\phi = \overline{A}[\Phi]$.

In a similar way we introduce the integral operator

$$A[\Phi](x,y) = 2\left(\int_\Gamma \Phi_1 \mathrm{d}x - \Phi_2 \mathrm{d}y\right),$$

corresponding to the operator ∂_z and applied to complex functions whose real and imaginary parts satisfy the condition

$$\partial_2\Phi_1 + \partial_1\Phi_2 = 0.$$

Theorem 3.4.6 *[26] Let $W_1 \in \ker H^{(2)}$ in a simply connected domain Ω. Then the real valued function $W_2 \in \ker H^{(0)}$ such that $W = W_1 + \mathrm{i}W_2$ is a solution of (3.25), is constructed according to the formula*

$$W_2 = \mathrm{e}^{-\chi}\overline{A}[\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\chi}\partial_{\overline{z}}(\mathrm{e}^{-\chi}W_1)]. \tag{3.30}$$

Given a function $W_2 \in \ker H^{(0)}$, the corresponding function $W_1 \in \ker H^{(2)}$ such that $W = W_1 + \mathrm{i}W_2$ is a solution of (3.25), is constructed as follows

$$W_1 = -\mathrm{e}^{\chi}\overline{A}[\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\chi}\partial_{\overline{z}}(\mathrm{e}^{\chi}W_2)]. \tag{3.31}$$

Remark 3.4.7 *Note that when $\chi \equiv 0$ equations (3.30) and (3.31) are the well-known formulas in complex analysis for constructing conjugate harmonic functions.*

The following statements are direct corollaries of theorems 3.4.5, 3.4.6 and of the convergence theorems 3.2.11 and 3.2.12 from Bers [5, 7]. We suppose that Ω is a bounded simply connected domain where the generating pair (3.26) is complete and normalized.

Theorem 3.4.8 *Any real-valued continuously differentiable wave function $\Psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(2)})^\top \in \ker H$ defined for $|z - z_0| < R$ admits a unique expansion of the form*

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^{(0)} \\ \psi^{(2)} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} Z^{(n)}(a_n^{(0)}, z_0; z) \\ \operatorname{Re} Z^{(n)}(a_n^{(2)}, z_0; z) \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

$$\begin{pmatrix} a_0^{(0)} \\ a_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{(0)}(z_0) \\ W^{(2)}(z_0) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} a_n^{(0)} \\ a_n^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}_{(F_{n-1}, G_{n-1})}}{\mathrm{d}z} \begin{pmatrix} W^{(0)}(z_0) \\ W^{(2)}(z_0) \end{pmatrix},$$

where $W^{(0)} = f^{(0)} + \mathrm{i}\psi^{(0)}$, $f^{(0)} = -\mathrm{e}^{\chi}\overline{A}[\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2\chi}\partial_{\bar{z}}(\mathrm{e}^{\chi}\psi^{(0)})]$ and $W^{(2)} = \psi^{(2)} + \mathrm{i}f^{(2)}$, $f^{(2)} = \mathrm{e}^{-\chi}\overline{A}[\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\chi}\partial_{\bar{z}}(\mathrm{e}^{-\chi}\psi^{(2)})]$.

Expansion (3.32) converges normally for $|z - z_0| < R$.

Proof Let us first consider the component $\psi^{(0)}$ of Ψ. From a continuously differentiable function $\psi^{(0)}$ in the kernel of $H^{(0)}$ we construct a continuously differentiable solution $W^{(0)} = f^{(0)} + \mathrm{i}\psi^{(0)}$ of the Vekua equation (3.25), where $f^{(0)}$ is given according to equation (3.31) of theorem 3.4.6. Then from the expansion theorem 3.2.11 we obtain $W^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(a_n^{(0)}, z_0; z)$ and first component of the vector in equation (3.32) follows directly. Note that in theorem 3.2.11 we have $\theta = 1$ for the complete and normalized generating pair (3.26) of the considered domain Ω (see [7] for details).

The second component $\psi^{(2)}$ of Ψ is calculated in a similar way. ■

Theorem 3.4.9 *In a bounded simply connected domain Ω such that $\chi \in C^1(\overline{\Omega})$ the sets of functions*

$$\left\{ \operatorname{Im} Z^{(n)}(1, z_0; z),\ \operatorname{Im} Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z) \right\}\Big|_{n=0}^{\infty} \tag{3.33}$$

and

$$\left\{ \operatorname{Re} Z^{(n)}(1, z_0; z),\ \operatorname{Re} Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z) \right\}\Big|_{n=0}^{\infty} \tag{3.34}$$

represent complete systems of solutions for the continuously differentiable functions of the kernels of $H^{(0)}$ and $H^{(1)}$, respectively.

Remark 3.4.10 *This theorem means that any continuously differentiable element in the kernel of $H^{(0)}$ ($H^{(1)}$) can be represented by a normally convergent sequence of formal polynomials formed by imaginary (real) parts of the functions $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ and $Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$ in any bounded simply connected domain Ω.*

Proof Due to property 2 of formal powers we have that for any coefficient $a \in \mathbb{C}$ the formal power $Z^{(n)}(a, z_0; z)$ can be expressed through $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ and $Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$. Then due to theorem 3.2.12 any continuously differentiable solution W of (3.25) can be approached by a normally convergent sequence of linear combinations of $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ and $Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$. Indeed, from theorem 3.4.6 every continuously differentiable function in the kernel of $H^{(0)}$ ($H^{(1)}$) is the imaginary (real) part of some continuously differentiable solution of (3.25), we can therefore conclude that every continuously differentiable function in the kernel of $H^{(0)}$ ($H^{(1)}$) can be approached by a normally convergent sequence of linear combinations of imaginary (real) parts of $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ and $Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$. ■

3.5 Separation of variables and transmutation operators

In pseudoanalytic function theory an important problem is to find the generating sequence (3.2.7) such that a generating pair (F, G) of a given Vekua equation is embedded and then use this gererating sequence to explicitly construct formal powers (3.2.8) of the Vekua equation. For Vekua equations in the form of the main Vekua equation (3.25) some results have been achieved by Bers [5] and, more recently, by Kravchenko [6]. In what follows we present some of these results.

Let us first introduce orthogonal coordinate systems in a plane defined (see [27]) from Cartesian coordinates x, y by means of the relation

$$u + \mathrm{i}v = \Phi,$$

where $\Phi = \Phi(x + \mathrm{i}y)$ is an arbitrary complex analytic function, $u = u(x, y)$ and $v = v(x, y)$. Quite often a transition to more general coordinates is used

$$\xi = \xi(u) \quad \text{and} \quad \eta = \eta(v).$$

Example 1 *Polar coordinates can be defined as*

$$u + \mathrm{i}v = \ln(x + \mathrm{i}y), \quad u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \arctan\frac{y}{x}.$$

More frequenly polar coordinates are introduced as

$$r = \mathrm{e}^u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = v = \arctan\frac{y}{x}.$$

We can also define parabolic coordinates as

$$u + \mathrm{i}v = \sqrt{2(x + \mathrm{i}y)}, \quad u = \sqrt{r + x}, \quad v = \sqrt{r - x}.$$

Usually the following new coordinates are introduced :

$$\xi = u^2, \quad \eta = v^2.$$

Other orthogonal coordinate systems (elliptic, bipolar) can be introduced in a similar way (see [6, 27]).

Theorem 3.5.1 *[6, 28] Let $F = \mathrm{e}^{\chi}$ and $G = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\chi}$ where $\chi = \chi_1(u) + \chi_2(v)$, χ_1, χ_2 are arbitrary differentiable real-valued functions, $\Phi = u + \mathrm{i}v$ is an analytic function of the variable $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ in Ω such that $\partial_z\Phi$ is bounded and has no zeros in Ω. Then the generating pair $(F,\ G)$ is embedded in $\{(F_m,\ G_m)\}$, a generating sequence in Ω given by*

$$(F_m,\ G_m) = \begin{cases} \Big((\partial_z\Phi)^m \mathrm{e}^{\chi_1+\chi_2},\ (\partial_z\Phi)^m \mathrm{i}\mathrm{e}^{-(\chi_1+\chi_2)}\Big), & m \text{ even}, \\ \Big((\partial_z\Phi)^m \mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2},\ (\partial_z\Phi)^m \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2}\Big), & m \text{ odd}, \end{cases}$$

for all $m \in \mathbb{Z}$.

This theorem opens the way for explicit construction of formal powers corresponding to the main Vekua equation (3.25) when χ is separable in terms of orthogonal coordinates $u(x, y)$ and $v(x, y)$ in the plane.

For the Cartesian coordinates Bers obtained elegant explicit formulas for the formal powers [5]. In this case the separable form of $\chi = \chi_1(x) + \chi_2(y)$ allows us to write down a generating pair $(F, G) = (\mathrm{e}^{\chi_1+\chi_2}, \mathrm{i}\mathrm{e}^{-(\chi_1+\chi_2)})$ as well as the generating sequence of period two (except when $\chi_1(x) \equiv 0$, then the period is one) embedding this generating pair

$$\begin{aligned} &(F, G) = \left(\mathrm{e}^{\chi_1+\chi_2},\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-(\chi_1+\chi_2)}\right), && (F_1, G_1) = \left(\mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2},\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2}\right), \\ &(F_2, G_2) = (F, G), && (F_3, G_3) = (F_1, G_1), \dots \end{aligned} \tag{3.35}$$

For simplicity we assume that $\chi_1(0) = \chi_2(0) = 0$. In this case the formal powers are constructed in an elegant manner as follows. We define the auxiliary functions

$$X^{(0)}(x) \equiv \widetilde{X}^{(0)}(x) \equiv Y^{(0)}(y) \equiv \widetilde{Y}^{(0)}(y) \equiv 1, \tag{3.36}$$

with

$$X^{(n)}(x) = n\int_{x_0}^{x} X^{(n-1)}(s) \exp\left[(-1)^n 2\chi_1(s)\right] \mathrm{d}s, \tag{3.37}$$

$$\widetilde{X}^{(n)}(x) = n\int_{x_0}^{x} \widetilde{X}^{(n-1)}(s) \exp\left[(-1)^{n+1} 2\chi_1(s)\right] \mathrm{d}s, \tag{3.38}$$

$$Y^{(n)}(y) = n\int_{y_0}^{y} Y^{(n-1)}(s) \exp\left[(-1)^n 2\chi_2(s)\right] \mathrm{d}s, \tag{3.39}$$

$$\widetilde{Y}^{(n)}(y) = n\int_{y_0}^{y} \widetilde{Y}^{(n-1)}(s) \exp\left[(-1)^{n+1} 2\chi_2(s)\right] \mathrm{d}s, \tag{3.40}$$

where $z_0 = (x_0, y_0)$ is an arbitrary fixed point in Ω. Then for $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ we have

$$Z^{(n)}(a, z_0; z) = \mathrm{e}^{\chi_1+\chi_2} \operatorname{Re} {}_*Z^{(n)}(a, z_0; z) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-(\chi_1+\chi_2)} \operatorname{Im} {}_*Z^{(n)}(a, z_0; z), \tag{3.41}$$

where

$${}_*Z^{(n)}(a, z_0; z) = \begin{cases} a_1 \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{(n-k)} \mathrm{i}^k \widetilde{Y}^{(k)} + \mathrm{i}a_2 \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \widetilde{X}^{(n-k)} \mathrm{i}^k Y^{(k)}, & \text{odd } n \\ a_1 \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \widetilde{X}^{(n-k)} \mathrm{i}^k \widetilde{Y}^{(k)} + \mathrm{i}a_2 \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{(n-k)} \mathrm{i}^k Y^{(k)}, & \text{even } n. \end{cases}$$

We introduce the infinite systems of functions

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} e^{\chi_1(x)} X^{(k)}(x), & k \text{ odd} \\ \\ e^{\chi_1(x)} \widetilde{X}^{(k)}(x), & k \text{ even} \end{cases}, \quad \widetilde{\varphi}_k(x) = \begin{cases} e^{-\chi_1(x)} \widetilde{X}^{(k)}(x), & k \text{ odd} \\ \\ e^{-\chi_1(x)} X^{(k)}(x), & k \text{ even} \end{cases} \tag{3.42}$$

and

$$\psi_k(y) = \begin{cases} e^{\chi_2(y)} Y^{(k)}(y), & k \text{ odd} \\ \\ e^{\chi_2(y)} \widetilde{Y}^{(k)}(y), & k \text{ even} \end{cases}, \quad \widetilde{\psi}_k(y) = \begin{cases} e^{-\chi_2(y)} \widetilde{Y}^{(k)}(y), & k \text{ odd} \\ \\ e^{-\chi_2(y)} Y^{(k)}(y), & k \text{ even,} \end{cases} \tag{3.43}$$

where $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Example 2 *Consider the case when the superpotential is identically zero, i.e.* $\chi \equiv 0$. *Then it is easy to see that we have* $\varphi_k(x) = \widetilde{\varphi}_k(x) = (x - x_0)^k$ *and* $\psi_k(y) = \widetilde{\psi}_k(y) = (y - y_0)^k$ *for* $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Using property 2, following definition 3.2.8, every formal power $Z^{(n)}(a, z_0; z)$ can be expressed in terms of a linear combination of the formal powers $Z^{(n)}(1, z_0; z)$ and $Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$ which can be explicitly written in terms of the infinite systems of functions (3.42) and (3.43) as

$$Z^{(0)}(1, z_0; z) = F = \varphi_0\psi_0 = e^{\chi_1+\chi_2}, \qquad Z^{(0)}(\mathrm{i}, z_0; z) = G = \mathrm{i}\widetilde{\varphi}_0\widetilde{\psi}_0 = \mathrm{i}e^{-(\chi_1+\chi_2)},$$

and, for $n > 0$,

$$Z^{(n)}(1, z_0; z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k \binom{n}{2k} \varphi_{n-2k}\psi_{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \widetilde{\varphi}_{n-2k-1}\widetilde{\psi}_{2k+1}, & n \text{ odd} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n}{2k} \varphi_{n-2k}\psi_{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \widetilde{\varphi}_{n-2k-1}\widetilde{\psi}_{2k+1}, & n \text{ even} \end{cases} \tag{3.44}$$

$$Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{k+1}\binom{n}{2k+1}\varphi_{n-2k-1}\psi_{2k+1} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{k}\binom{n}{2k}\widetilde{\varphi}_{n-2k}\widetilde{\psi}_{2k}, & n \text{ odd} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} (-1)^{k+1}\binom{n}{2k+1}\varphi_{n-2k-1}\psi_{2k+1} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^{k}\binom{n}{2k}\widetilde{\varphi}_{n-2k}\widetilde{\psi}_{2k}, & n \text{ even.} \end{cases} \tag{3.45}$$

The (F, G)-derivative of formal powers $Z^{(n)}(a, z_0; z)$ can be obtained using theorem 3.2.3, i.e. $\overset{\circ}{Z}{}^{(n)}(a, z_0; z) = \partial_z Z^{(n)}(a, z_0; z) - (\partial_z\chi)\overline{Z^{(n)}}(a, z_0; z)$. However, it is more efficient to remark that

$$\overset{\circ}{Z}{}^{(n)}(a, z_0; z) = \frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z} Z^{(n)}(a, z_0; z) = nZ_1^{(n-1)}(a, z_0; z)$$

is an (F_1, G_1)-pseudoanalytic functions satisfying the Vekua equation (3.25) for $\chi = -\chi_1 + \chi_2$ from the generating pairs (3.35). Then formal powers $Z_1^{(n)}(a, z_0; z)$ can be constructed by considering transformations

$$\pm\chi_1 \longrightarrow \mp\chi_1 \qquad \text{and} \qquad \pm\,\chi_2 \longrightarrow \pm\chi_2 \quad (\chi_2 \text{ invariant})$$

in the formal powers $Z^{(n)}(a, z_0; z)$. These transformations imply that

$$\varphi_k \longrightarrow \widetilde{\varphi}_k, \quad \widetilde{\varphi}_k \longrightarrow \varphi_k, \quad \psi_k \longrightarrow \psi_k, \quad \widetilde{\psi}_k \longrightarrow \widetilde{\psi}_k \quad (\psi_k,\ \widetilde{\psi}_k \text{ invariants})$$

such that

$$Z_1^{(0)}(1, z_0; z) = F_1 = \widetilde{\varphi}_0\psi_0 = \mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2}, \quad Z_1^{(0)}(\mathrm{i}, z_0; z) = G_1 = \mathrm{i}\varphi_0\widetilde{\psi}_0 = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2},$$

and for $n > 0$ we have

$$Z_1^{(n)}(1, z_0; z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k \binom{n}{2k} \widetilde{\varphi}_{n-2k}\psi_{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \varphi_{n-2k-1}\widetilde{\psi}_{2k+1}, & n \text{ odd} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n}{2k} \widetilde{\varphi}_{n-2k}\psi_{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \varphi_{n-2k-1}\widetilde{\psi}_{2k+1}, & n \text{ even} \end{cases} \tag{3.46}$$

$$Z_1^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{k+1} \binom{n}{2k+1} \widetilde{\varphi}_{n-2k-1}\psi_{2k+1} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k \binom{n}{2k} \varphi_{n-2k}\widetilde{\psi}_{2k}, & n \text{ odd} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} (-1)^{k+1} \binom{n}{2k+1} \widetilde{\varphi}_{n-2k-1}\psi_{2k+1} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n}{2k} \varphi_{n-2k}\widetilde{\psi}_{2k}, & n \text{ even,} \end{cases} \tag{3.47}$$

where $Z_1^{(n)}(a, z_0; z) = \dfrac{1}{n+1} \overset{\circ}{Z}{}^{(n+1)}(a, z_0; z)$.

In [29] it was shown that if the functions $\chi_j \in C^2(-a_j, a_j) \cap C^1[-a_j, a_j]$ are such that $\chi_j(0) = 0$ and χ_j is bounded on $[-a_j, a_j]$, where $j \in \{1, 2\}$, there exist the transmutation operators T_1, T_2 defined as follows

$$T_j[f(x_j)] = f(x_j) + \int_{-x_j}^{x_j} \mathbf{K}_j(x_j, t; h_j) \cdot f(t)\mathrm{d}t, \qquad j \in \{1, 2\},$$

where $h_j = \partial_j \mathrm{e}^{\chi_j}\big|_{x_j=0}$, the kernel $\mathbf{K}_j(x_j, s; h_j)$ is given by

$$\mathbf{K}_j(x_j, t; h_j) = \frac{h_j}{2} + K_j(x_j, t) + \frac{h_j}{2} \int_t^{x_j} [K_j(x_j, s) - K_j(x_j, -s)]\mathrm{d}s$$

and the function $K_j(x_j, t)$ is the unique solution of the Goursat problem [30, 31, 32]

$$\left(\partial_j^2 - q_j(x_j)\right) K_j(x_j, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_j(x_j, t), \quad q_j = \partial_j^2 \chi_j + (\partial_j \chi_j)^2,$$

$$K_j(x_j, x_j) = \frac{1}{2} \int_0^{x_j} q_j(s)\mathrm{d}s, \qquad K_j(x_j, -x_j) = 0.$$

Moreover, T_1 and T_2 satisfy the relations

$$T_1[x^k] = \varphi_k \quad \text{and} \quad T_2[y^k] = \psi_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{3.48}$$

Another pair of transmutations $\widetilde{T}_1$ and $\widetilde{T}_2$ is constructed, one of the representations of which can be given by the equalities

$$\widetilde{T}_j[f(x_j)] = \mathrm{e}^{-\chi_j(x_j)}\left(\int_0^{x_j} \mathrm{e}^{\chi_j(s)} T_j[\partial_j f(s)]\mathrm{d}s + f(0)\right), \qquad j \in \{1,2\}.$$

These operators satisfy the equalities

$$\widetilde{T}_1[x^k] = \widetilde{\varphi}_k \quad \text{and} \quad \widetilde{T}_2[y^k] = \widetilde{\psi}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{3.49}$$

The operators $\widetilde{T}_1$ and $\widetilde{T}_2$ admit the representations as Volterra integral operators

$$\widetilde{T}_j[f(x_j)] = f(x_j) + \int_{-x_j}^{x_j} \widetilde{\mathbf{K}}_j(x_j, t; -h_j) \cdot f(t)\mathrm{d}t,$$

where the kernel $\widetilde{\mathbf{K}}_j(x_j, t; -h_j)$ has the form

$$\widetilde{\mathbf{K}}_j(x_j, t; -h_j) = -\mathrm{e}^{-\chi_j(x_j)}\left(\int_{-t}^{x_j} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{K}_j(s, t; h_j) \cdot \mathrm{e}^{\chi_j(s)}\mathrm{d}s + \frac{h_j}{2}\mathrm{e}^{\chi_j(-t)}\right).$$

Corollary 3.5.2 *[31] The following four operator equalities hold on $C^1[-a_j, a_j]$-functions of the respective variable*

$$\partial_j \mathrm{e}^{\chi_j} \widetilde{T}_j = \mathrm{e}^{\chi_j} T_j \partial_j \quad \textit{and} \quad \partial_j \mathrm{e}^{-\chi_j} T_j = \mathrm{e}^{-\chi_j} \widetilde{T}_j \partial_j, \tag{3.50}$$

for $j \in \{1,2\}$.

The integral counterpart of this corollary can be considered. Indeed, by applying the operator equality (3.50) on the antiderivative $F_j = \int f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_j$ for $j \in \{1, 2\}$ and then integrating on x_j, we obtain

$$\mathrm{e}^{\chi_j}\widetilde{T}_j F_j = \int \mathrm{e}^{\chi_j} T_j \partial_j F_j\,\mathrm{d}x_j \quad \text{and} \quad \mathrm{e}^{-\chi_j} T_j F_j = \int \mathrm{e}^{-\chi_j}\widetilde{T}_j \partial_j F_j\,\mathrm{d}x_j,$$

i.e.

$$\mathrm{e}^{\chi_j}\widetilde{T}_j \int f\,\mathrm{d}x_j = \int \mathrm{e}^{\chi_j} T_j f\,\mathrm{d}x_j \tag{3.51}$$

and

$$\mathrm{e}^{-\chi_j} T_j \int f\,\mathrm{d}x_j = \int \mathrm{e}^{-\chi_j}\widetilde{T}_j f\,\mathrm{d}x_j, \tag{3.52}$$

for any continuous real-valued function f on $[-a_j, a_j]$ for the variable x_j.

We introduce the following operators

$$\mathbf{T}_0 = T_1 T_2 P^+ + \mathrm{i}\widetilde{T}_1\widetilde{T}_2 P^-$$

and

$$\mathbf{T}_1 = \widetilde{T}_1 T_2 P^+ + \mathrm{i} T_1 \widetilde{T}_2 P^-.$$

From now on let $\Omega \subset \overline{R} = [-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2]$ be a simply connected domain such that together with any point (x, y) belonging to Ω the rectangle with the vertices (x, y), $(-x, y)$, $(x, -y)$ and $(-x, -y)$ also belongs to Ω. In such a domain application of operators $\mathbf{T}_0$ and $\mathbf{T}_1$ is meaningful.

Theorem 3.5.3 *For any $z_0, z \in \Omega$ and $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{Z}$ the following equalities hold*

$$\mathbf{T}_0[az^n] = Z^{(n)}(a, z_0; z) \quad \textit{and} \quad \mathbf{T}_1[az^n] = Z_1^{(n)}(a, z_0; z),$$

where

$$Z^{(n)}(a, z_0; z) = a_1 Z^{(n)}(1, z_0; z) + a_2 Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$$

$$Z_1^{(n)}(a, z_0; z) = a_1 Z_1^{(n)}(1, z_0; z) + a_2 Z_1^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$$

for $Z^{(n)}(1, z_0; z)$, $Z^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$, $Z_1^{(n)}(1, z_0; z)$ *and* $Z_1^{(n)}(\mathrm{i}, z_0; z)$ *given, respectively, by equations (3.44), (3.45), (3.46) and (3.47).*

Proof Using the binomial theorem for $z = x + \mathrm{i}y$ and fixed $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ we have that for $n > 0$

$$z^n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}, & n \text{ odd} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}, & n \text{ even.} \end{cases}$$

Applying the operator $\mathbf{T}_0$ on az^n we find

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0[az^n] &= a_1\Big[T_1T_2 \operatorname{Re} z^n + \mathrm{i}\widetilde{T}_1\widetilde{T}_2 \operatorname{Im} z^n\Big] \\ &\quad + a_2\Big[-T_1T_2 \operatorname{Im} z^n + \mathrm{i}\widetilde{T}_1\widetilde{T}_2 \operatorname{Re} z^n\Big]. \end{aligned}$$

Then using properties (3.48) and (3.49), along with results (3.44) and (3.45), we obtain the desired result. The proof is similar for the operator $\mathbf{T}_1$. ■

Theorem 3.5.4 *For any complex-valued continuously differentiable function* w *defined in* Ω *the following operator equalities hold :*

$$V\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1\partial_{\overline{z}}, \quad V_1\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0\partial_{\overline{z}}, \tag{3.53}$$

$$\frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z}\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1\partial_z, \quad \frac{\mathrm{d}_{(F_1,G_1)}}{\mathrm{d}z}\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0\partial_z. \tag{3.54}$$

Proof For $w = w_1 + \mathrm{i}w_2$, where w_1, w_2 being real-valued continuously differentiable function defined in Ω, let us consider the first equality in (3.53)

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1[\partial_{\bar{z}} w] &= \frac{1}{2}\Big(\widetilde{T}_1 T_2 P^+ + \mathrm{i} T_1 \widetilde{T}_2 P^-\Big)\Big((\partial_1 w_1 - \partial_2 w_2) + \mathrm{i}(\partial_1 w_2 + \partial_2 w_1)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\widetilde{T}_1 T_2 \partial_1 w_1 - \widetilde{T}_1 T_2 \partial_2 w_2 + \mathrm{i} T_1 \widetilde{T}_2 \partial_1 w_2 + \mathrm{i} T_1 \widetilde{T}_2 \partial_2 w_1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{\chi_1} T_2 \mathrm{e}^{-\chi_1} \widetilde{T}_1 \partial_1 w_1 - \mathrm{e}^{-\chi_2} \widetilde{T}_1 \mathrm{e}^{\chi_2} T_2 \partial_2 w_2 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\chi_1} \widetilde{T}_2 \mathrm{e}^{\chi_1} T_1 \partial_1 w_2 \\
&\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_2} T_1 \mathrm{e}^{-\chi_2} \widetilde{T}_2 \partial_2 w_1\Big),
\end{aligned}$$

where, in the last equality, we use the fact that transmutations T_1, $\widetilde{T}_1$ act only on variable x (T_2, $\widetilde{T}_2$ act on variable y). Last equation is now written such that we can use corollary 3.5.2. We find

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1[\partial_{\bar{z}} w] &= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{\chi_1} T_2 \partial_1 \mathrm{e}^{-\chi_1} T_1 w_1 - \mathrm{e}^{-\chi_2} \widetilde{T}_1 \partial_2 \mathrm{e}^{\chi_2} \widetilde{T}_2 w_2 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\chi_1} \widetilde{T}_2 \partial_1 \mathrm{e}^{\chi_1} \widetilde{T}_1 w_2 \\
&\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_2} T_1 \partial_2 \mathrm{e}^{-\chi_2} T_2 w_1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{\chi_1} \partial_1 \mathrm{e}^{-\chi_1} T_1 T_2 w_1 - \mathrm{e}^{-\chi_2} \partial_2 \mathrm{e}^{\chi_2} \widetilde{T}_1 \widetilde{T}_2 w_2 + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\chi_1} \partial_1 \mathrm{e}^{\chi_1} \widetilde{T}_1 \widetilde{T}_2 w_2 \\
&\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_2} \partial_2 \mathrm{e}^{-\chi_2} T_1 T_2 w_1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big[(\partial_1 T_1 T_2 w_1 - \partial_2 \widetilde{T}_1 \widetilde{T}_2 w_2) + \mathrm{i}(\partial_1 \widetilde{T}_1 \widetilde{T}_2 w_2 + \partial_2 T_1 T_2 w_1)\Big] \\
&\quad - \frac{1}{2}(\partial_1 \chi_1 + \mathrm{i}\partial_2 \chi_2)(T_1 T_2 w_1 - \mathrm{i}\widetilde{T}_1 \widetilde{T}_2 w_2) \\
&= \partial_{\bar{z}} \mathbf{T}_0[w] - \partial_{\bar{z}} \chi \overline{\mathbf{T}_0[w]}.
\end{aligned}$$

Other equalities in (3.53), (3.54) can be shown in a similar way. ■

From equalities (3.53), we observe that operator $\mathbf{T}_0$ maps complex analytic function into $(\mathrm{e}^{\chi_1+\chi_2}, \mathrm{i}\mathrm{e}^{-(\chi_1+\chi_2)})$-pseudoanalytic function, i.e. into solutions of the Vekua equation (3.25). In the same way, operator $\mathbf{T}_1$ maps complex analytic function into $(\mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2}, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2})$-pseudoanalytic function, i.e. into solution of the Vekua equation $V_1 W = 0$.

The integral counterpart of theorem 3.5.4 is given in the following.

Theorem 3.5.5 *For any continuous complex-valued function w defined in Ω the following equalities hold :*

$$\int_\Gamma \mathbf{T}_0[w]\,\mathrm{d}_{(F_1,G_1)}\zeta = \mathbf{T}_1\Big[\int_\Gamma w\,\mathrm{d}\zeta\Big] \tag{3.55}$$

$$\int_\Gamma \mathbf{T}_1[w]\,\mathrm{d}_{(F,G)}\zeta = \mathbf{T}_0\Big[\int_\Gamma w\,\mathrm{d}\zeta\Big], \tag{3.56}$$

where Γ is a rectifiable curve in Ω.

Proof Let us consider equation (3.55) with $w = w_1 + \mathrm{i}w_2$ and $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$. We have $(F_1, G_1) = (\mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2}, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2})$ and $(F_1^*, G_1^*) = (-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2}, \mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2})$ such that from (3.5)

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{T}_0[w]\,\mathrm{d}_{(F_1,G_1)}\zeta &= \mathrm{e}^{-\chi_1(x)+\chi_2(y)}\,\mathrm{Re}\int_\Gamma \mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2}\mathbf{T}_0[w]\mathrm{d}\zeta \\ &+ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1(x)-\chi_2(y)}\,\mathrm{Im}\int_\Gamma \mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2}\mathbf{T}_0[w]\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

where Γ is a rectifiable curve leading from z_0 to $z = x + \mathrm{i}y$ in Ω. We obtain

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \mathbf{T}_0[w]\,\mathrm{d}_{(F_1,G_1)}\zeta &= \mathrm{e}^{-\chi_1(x)+\chi_2(y)}\int_\Gamma \mathrm{e}^{\chi_1-\chi_2}\big(T_1T_2w_1\mathrm{d}\xi - \widetilde{T}_1\widetilde{T}_2w_2\mathrm{d}\eta\big) \\ &+ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1(x)-\chi_2(y)}\int_\Gamma \mathrm{e}^{-\chi_1+\chi_2}\big(T_1T_2w_1\mathrm{d}\eta + \widetilde{T}_1\widetilde{T}_2w_2\mathrm{d}\xi\big).\end{aligned}$$

Now since operators T_1, T_2 commute, as well as $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2$, we find

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \mathbf{T}_0[w]\, \mathrm{d}_{(F_1,G_1)}\zeta &= \mathrm{e}^{-\chi_1(x)+\chi_2(y)} \int_\Gamma \Big(\mathrm{e}^{-\chi_2} T_2 \mathrm{e}^{\chi_1} T_1 w_1 \mathrm{d}\xi - \mathrm{e}^{\chi_1}\widetilde{T}_1 \mathrm{e}^{-\chi_2}\widetilde{T}_2 w_2 \mathrm{d}\eta\Big) \\
&\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1(x)-\chi_2(y)} \int_\Gamma \Big(\mathrm{e}^{-\chi_1} T_1 \mathrm{e}^{\chi_2} T_2 w_1 \mathrm{d}\eta + \mathrm{e}^{\chi_2}\widetilde{T}_2 \mathrm{e}^{-\chi_1}\widetilde{T}_1 w_2 \mathrm{d}\xi\Big) \\
&= \mathrm{e}^{-\chi_1(x)+\chi_2(y)} \Big(\mathrm{e}^{-\chi_2} T_2 \int_\Gamma \mathrm{e}^{\chi_1} T_1 w_1 \mathrm{d}\xi - \mathrm{e}^{\chi_1}\widetilde{T}_1 \int_\Gamma \mathrm{e}^{-\chi_2}\widetilde{T}_2 w_2 \mathrm{d}\eta\Big) \\
&\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1(x)-\chi_2(y)} \Big(\mathrm{e}^{-\chi_1} T_1 \int_\Gamma \mathrm{e}^{\chi_2} T_2 w_1 \mathrm{d}\eta + \mathrm{e}^{\chi_2}\widetilde{T}_2 \int_\Gamma \mathrm{e}^{-\chi_1}\widetilde{T}_1 w_2 \mathrm{d}\xi\Big) \\
&= \mathrm{e}^{-\chi_1(x)+\chi_2(y)} \Big(\mathrm{e}^{-\chi_2} T_2 \mathrm{e}^{\chi_1}\widetilde{T}_1 \int_\Gamma w_1 \mathrm{d}\xi - \mathrm{e}^{\chi_1}\widetilde{T}_1 \mathrm{e}^{-\chi_2} T_2 \int_\Gamma w_2 \mathrm{d}\eta\Big) \\
&\quad + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\chi_1(x)-\chi_2(y)} \Big(\mathrm{e}^{-\chi_1} T_1 \mathrm{e}^{\chi_2}\widetilde{T}_2 \int_\Gamma w_1 \mathrm{d}\eta + \mathrm{e}^{\chi_2}\widetilde{T}_2 \mathrm{e}^{-\chi_1} T_1 \int_\Gamma w_2 \mathrm{d}\xi\Big),
\end{aligned}
$$

where relations (3.51), (3.52) have been used in the last equality. Hence we obtain

$$
\int_\Gamma \mathbf{T}_0[w]\, \mathrm{d}_{(F_1,G_1)}\zeta = \widetilde{T}_1 T_2 \,\mathrm{Re} \int_\Gamma w \mathrm{d}\zeta + \mathrm{i} T_1 \widetilde{T}_2 \,\mathrm{Im} \int_\Gamma w \mathrm{d}\zeta = \mathbf{T}_1\Big[\int_\Gamma w \mathrm{d}\zeta\Big].
$$

The other relation (3.56) is shown in a similar way. ■

Theorems 3.5.4, 3.5.5 and 3.4.5 can be summarized up in the following commutative diagrams. Let w be a continuously differentiable complex-valued function in Ω and χ separable, i.e. $\chi = \chi_1(x) + \chi_2(y)$:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{T}_1[w] & \xleftarrow{\mathbf{T}_1} & w & \xrightarrow{\mathbf{T}_0} & \mathbf{T}_0[w] \\
V_1 \downarrow & & \partial_{\bar z} \downarrow & & \downarrow V \\
\mathbf{T}_0[\partial_{\bar z} w] & \xleftarrow{\mathbf{T}_0} & \partial_{\bar z} w & \xrightarrow{\mathbf{T}_1} & \mathbf{T}_1[\partial_{\bar z} w].
\end{array}
$$

Moreover, when w is analytic in Ω we obtain the following results :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
P\mathbf{T}_0[\int w\,\mathrm{d}\zeta] \in \ker H & \xleftarrow{P} & \mathbf{T}_0[\int w\,\mathrm{d}\zeta] & \xleftarrow{\mathbf{T}_0} & \int w\,\mathrm{d}\zeta & \xrightarrow{\mathbf{T}_1} & \mathbf{T}_1[\int w\,\mathrm{d}\zeta] & \xrightarrow{P} & P\mathbf{T}_1[\int w\,\mathrm{d}\zeta] \in \ker H^{(1)} \\
\downarrow \frac{1}{2}D & & (F,G)\text{-}\int \uparrow & & \int \uparrow & & \uparrow (F_1,G_1)\text{-}\int & & \downarrow \frac{1}{2}D_1 \\
P\mathbf{T}_1[w] \in \ker H^{(1)} & \xleftarrow{P} & \mathbf{T}_1[w] & \xleftarrow{\mathbf{T}_1} & w & \xrightarrow{\mathbf{T}_0} & \mathbf{T}_0[w] & \xrightarrow{P} & P\mathbf{T}_0[w] \in \ker H \\
\downarrow \frac{1}{2}D_1 & & \frac{\mathrm{d}_{(F_1,G_1)}}{\mathrm{d}z} \downarrow & & \partial_z \downarrow & & \downarrow \frac{\mathrm{d}_{(F,G)}}{\mathrm{d}z} & & \downarrow \frac{1}{2}D \\
P\mathbf{T}_0[\partial_z w] \in \ker H & \xleftarrow{P} & \mathbf{T}_0[\partial_z w] & \xleftarrow{\mathbf{T}_0} & \partial_z w & \xrightarrow{\mathbf{T}_1} & \mathbf{T}_1[\partial_z w] & \xrightarrow{P} & P\mathbf{T}_1[\partial_z w] \in \ker H^{(1)},
\end{array}
$$

where D, D_1 are the Darboux and pseudo-Darboux transformations defined by (3.15) and (3.18), respectively.

Corollary 3.5.6 *For any complex-valued function in $C^2(\Omega)$ the following operator equalities hold :*

$$HP\mathbf{T}_0 = -P\mathbf{T}_0\Delta \qquad \textit{and} \qquad H^{(1)}P\mathbf{T}_1 = -P\mathbf{T}_1\Delta.$$

Proof Using (3.22), (3.53) and (3.54) we find

$$HP\mathbf{T}_0 = -4PV_1\overline{V}\mathbf{T}_0 = -4PV_1\mathbf{T}_1\partial_z = -4P\mathbf{T}_0\partial_{\bar{z}}\partial_z = -P\mathbf{T}_0\Delta.$$

The other relation is obtained in a similar way. ■

3.6 Conclusion

Relations between Vekua and Bers derivatives operators were obtained in terms of two-dimensional Darboux and pseudo-Darboux transformations. These relations enable us to factorize hamiltonians $H^{(0)}$ and $H^{(1)}$ of the superhamiltonian $\widehat{H}$ considered in this work in terms of one Vekua operator and one Bers derivative operator. An infinite system of solutions of the ground state for the two-dimensional SUSY QM system was given in terms of the formal powers. Under certain additional assumptions, completeness results for the system of formal powers, analogous to the expansion theorem and Runge's approximation theorem from classical analysis, were established. For the specific case where the superpotential is separable, formal powers were explicitly constructed. That specific case allowed us to use transmutation operators to transform complex analytic powers to the constructed formal powers. Moreover, we have shown how transmutation operators are related to Vekua, Bers derivative, Bers integral operators and hamiltonian components of the superhamiltonian.

Our approach can also be applied to the two-dimensional SUSY QM system considered in this work with the superpotential χ being a complex function, though in this case complex numbers become insufficient, and one should consider the bicomplex pseudoanalytic function theory [33].

Acknowledgement

A.B. acknowledges two scholarships : one from NSERC, where a part of this work was done, and one from the Institut des Sciences Mathématiques (ISM). The research of S.T. is partly supported by grant from NSERC of Canada.

Chapitre 4

Discussion sur l'article

Maintenant que l'article a été proprement introduit, on discutera de quelques éléments qui y sont rattachés. La prochaine section est divisée en trois parties, organisées selon une chronologie naturelle. Tout d'abord sera présenté un bilan de la littérature pertinente, afin de bien pouvoir situer l'article par rapport aux travaux antérieurs du domaine. On retrouve ensuite un résumé en français de l'article, accompagné d'une mise en contexte du modèle supersymétrique, ce qui permet d'apprécier un peu mieux l'intérêt et la portée des résultats obtenus. Enfin, il sera nécessaire de préciser un flou, une condition implicitement acceptée dans l'article mais vitale pour s'assurer de la validité des résultats.

4.1 Situation de l'article dans la littérature

Tel que déjà mentionné, la renaissance récente de la théorie des fonctions pseudo-analytiques provient des travaux de Kravchenko et de ses collaborateurs (surtout dans [26, 6] et aussi dans [34, 35]). Ces auteurs ont réussi à approfondir et avant tout à mieux appliquer les résultats qui avaient été trouvés par Lipman Bers dans les années 1950 (réf. [5, 36, 7, 20]), revigorant l'intérêt pour l'étude de cette branche. Plusieurs papiers ultérieurs se sont ensuivis, certains d'entre eux explorant une extension des résultats offerts (réf. [37, 38, 39, 33, 40]), d'autres proposant une analyse supplémentaire des principes et des théorèmes de complétude établis applicables aux équations de Sturm-Liouville (réf. [28, 41, 42]).

Notre papier se place dans cette dernière lignée. Beaucoup des résultats obtenus dans l'article proviennent directement des travaux de Bers et des développements subséquents de Kravchenko, travaux qui forment la source de notre travail. On peut citer par exemple le théorème de Runge ([5, 7]) et le cas particulier du χ séparable (d'abord introduit par Bers dans [5] puis amplement développé par Kravchenko dans [6]).

Notre étude des transmutateurs, quant à elle, prend surtout racine dans l'article [29]. Bien que l'idée d'opérateurs de transmutation était déjà connue, ce papier a permis une définition plus concrète de ces opérateurs, offrant ainsi une liaison limpide et adaptée à l'analyse pseudo-analytique. Notons que les transmutateurs ont été subséquemment approfondis dans [31, 30].

Mentionnons en terminant que l'approche utilisée pour définir le SUSY bidimensionnel, la forme qui a réellement rendu possible notre mise en relation avec la théorie pseudo-analytique, a été introduite par Ioffe et ses collaborateurs dans [18, 19].

4.2 Résumé en français de l'article

Le motif de l'article présenté est essentiellement d'étudier et d'approfondir le lien découvert entre la théorie des fonctions pseudo-analytiques et un système important du *modèle supersymétrique* (SUSY) en physique des particules en mécanique quantique.

Mise en contexte : Modèle supersymétrique

En physique des particules, le modèle dit standard admet deux types de particules : les fermions, qui sont des particules de matière, et les bosons, qui constituent les particules d'interaction, responsables des diverses forces. L'électron, une des composantes de la matière, est un exemple de fermion, alors que le photon, particule à la base de la force électromagnétique, est un exemple de boson.

La supersymétrie (SUSY) est un modèle mathématique, qui postule que chaque boson est en association biunivoque avec un « superpartenaire », une particule de type fermion. Ainsi, par exemple, le photon serait couplé avec une particule de matière supersymétrique.

La supersymétrie est un des principaux sujets chauds de la physique des particules. La principale raison en est que l'utilisation de ce modèle dans les ***théories d'unification des forces*** permet l'abolition de plusieurs incohérences. En particulier, la supersymétrie explique des aberrations en lien avec le ***boson de Higgs***, la particule procurant leur masse aux autres particules. Ces aberrations sont, autrement, difficiles à expliquer avec les théories habituelles.

Ajoutons à cela que le modèle supersymétrique prévoit des superpartenaires de très grande densité pour certains bosons connus, ce qui qualifierait ces particules denses comme possibles composantes principales de la ***matière noire***. Puisque la matière noire est un objet particulièrement méconnu et important, il s'agit d'une motivation supplémentaire de taille en faveur de l'étude de la supersymétrie.

Présentation des équations

Le système d'équations en cause dans l'article, qui décrit l'énergie des bosons dans le SUSY, est de la forme

$$\begin{cases} H^{(0)}\Psi^{(0)} &= E\Psi^{(0)} \\ \\ H^{(2)}\Psi^{(2)} &= E\Psi^{(2)} \, . \end{cases} \tag{4.1}$$

Les éléments $H^{(0)}$ et $H^{(2)}$ sont des **opérateurs hamiltoniens** qui dépendent d'une fonction réelle χ appelée ***superpotentiel***, donnée intrinsèque du SUSY. Les fonctions **réelles** $\Psi^{(0)}$ et $\Psi^{(2)}$ sont les inconnues du système. Finalement, la valeur propre E est une nombre réel qui désigne le niveau d'énergie considéré pour le SUSY. La valeur propre $E = 0$ est celle sur laquelle est portée notre attention.

On considère également un second système « complémentaire », décrivant l'énergie des fermions, qui est de la forme

$$H^{(1)}\Phi \;=\; E\Phi \, . \tag{4.2}$$

L'élément $H^{(1)}$ est une matrice d'opérateurs de format 2×2 dont les éléments dépendent toujours du superpotentiel χ [1]. Le vecteur Φ contient les deux fonctions réelles inconnues du système et la valeur propre E désigne toujours le niveau d'énergie du système.

1. Comme la matrice $H^{(1)}$ n'est pas diagonale, on ne peut réduire le système à la forme simple des deux équations du système bosonique.

Les deux systèmes peuvent être associés grâce à une matrice d'opérateurs D dépendante de χ. Il s'agit en fait d'une **transformation de Darboux**, généralisation bidimensionnelle de la transformation présentée dans les sections préliminaires. Ce lien assure que pour chaque vecteur solution $\Psi = (\Psi^{(0)}; \Psi^{(2)})$ du système (4.1), le vecteur transformé $\Phi = D\Psi$ est solution du vecteur (4.2) sur le domaine borné et simplement connexe Ω considéré. Autrement dit, chaque solution du système bosonique peut être couplée à une solution du système fermionique [2].

Liaison avec la théorie pseudo-analytique

On utilise le couple fonctionnel $(\mathrm{e}^{\chi}\,;\,i\mathrm{e}^{-\chi})$, qui est une paire génératrice sur le domaine considéré Ω. En effet, sur Ω, la fonction réelle $\chi(z)$ est lisse donc possède des dérivées partielles et

$$\mathrm{Im}\Big(\overline{\mathrm{e}^{\chi(z)}} \cdot i\mathrm{e}^{-\chi(z)}\Big) \;=\; \mathrm{Im}\Big(\overline{\mathrm{e}^{\chi(z)}} \cdot i\mathrm{e}^{-\chi(z)}\Big) \;=\; \mathrm{Im}(i) \;=\; 1 \;\neq\; 0\,.$$

Puisque $a_{(\mathrm{e}^{\chi}\,;\,i\mathrm{e}^{-\chi})} = A_{(\mathrm{e}^{\chi}\,;\,i\mathrm{e}^{-\chi})} = 0$, $b_{(\mathrm{e}^{\chi}\,;\,i\mathrm{e}^{-\chi})} = \chi_z$ et $B_{(\mathrm{e}^{\chi}\,;\,i\mathrm{e}^{-\chi})} = \chi_{\bar{z}}$, l'équation de Vekua associée à cette paire est

$$w_{\bar{z}} \;=\; \chi_{\bar{z}}\bar{w} \tag{4.3}$$

et la $(\mathrm{e}^{\chi}\,;\,i\mathrm{e}^{-\chi})$-dérivée est

$$\mathring{w} \;=\; w_z - \chi_z\bar{w}\,. \tag{4.4}$$

La relation essentielle entre (4.3), (4.4) et les deux systèmes d'équations du SUSY est cristallisée par le théorème suivant de l'article (dont la démonstration est purement calculatoire).

---

2. Une relation permettant le chemin inverse existe aussi.

Théorème 4.2.1 (traduit) *Si une fonction $w \in C^3(\Omega)$ est solution de l'équation de Vekua (4.3), alors le vecteur $\big(\mathrm{Re}(w)\,;\,\mathrm{Im}(w)\big)^{\top}$ est solution du système bosonique (4.1) et le vecteur $\big(\mathrm{Re}(\mathring{w})\,;\,\mathrm{Im}(\mathring{w})\big)^{\top}$ est solution du système fermionique (4.2), tous deux pour la valeur propre $E = 0$.*

Une fois ce lien établi, il suffit ensuite de cueillir les résultats de complétude découlant de la théorie des fonctions pseudo-analytiques, moyennant certaines conditions de continuité et de différentiabilité sur χ. On peut d'abord établir ce résultat, appliqué du théorème 2.5.15 [3].

Théorème 4.2.2 (traduit) *Tout vecteur de fonctions continûment différentiables $\Psi = \big(\Psi^{(0)}\,;\,\Psi^{(2)}\big)$ qui est solution du système (4.1) pour $E = 0$ sur $|z - z_0| < R$ possède une expansion unique de forme*

$$\begin{pmatrix} \Psi^{(0)} \\ \Psi^{(2)} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\ Z^{(n)}(a_n^{(0)}, z_0; z) \\ \mathrm{Re}\ Z^{(n)}(a_n^{(0)}, z_0; z) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_0^{(0)} \\ a_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{(0)}(z_0) \\ W^{(2)}(z_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_n^{(0)} \\ a_n^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{n!}\frac{d_{(F_{n-1},G_{n-1})}}{dz}\begin{pmatrix} W^{(0)}(z_0) \\ W^{(2)}(z_0) \end{pmatrix},$$

où les fonctions complexes $W^{(0)}$ et $W^{(n)}$ sont construites à partir de Ψ (pour les détails, voir l'article). L'expansion donnée ***converge normalement*** *pour $|z - z_0| < R$.*

On retrouve également la manifestation suivante du théorème d'approximation de Runge.

Théorème 4.2.3 (traduit) *Dans tout domaine borné simplement connexe Ω tel que $\chi \in C^1(\overline{\Omega})$, les ensembles de fonctions*

3. Il a été démontré dans [7] que, pour le cas présent, $\Theta = 1$.

$$\{\text{Im } Z^{(n)}(1, z_0; z) \ , \ \text{Im } Z^{(n)}(i, z_0; z)\}_{n=0}^{\infty}$$

et

$$\{\text{Re } Z^{(n)}(1, z_0; z) \ , \ \text{Re } Z^{(n)}(i, z_0; z)\}_{n=0}^{\infty}$$

représentent des systèmes complets de solutions pour les fonctions continûment différentiables des noyaux respectifs de l'opérateur $H^{(0)}$ et de l'opérateur $H^{(2)}$.

La validité de ces deux théorème centraux sera traitée plus en profondeur dans la troisième sous-section de la discussion.

Cas particulier de superpotentiel

Il faut cependant garder en mémoire que la définition de puissances formelles et, par extension, l'application véritable des théorèmes de complétude sont totalement conditionnels au fait de posséder une suite génératrice (complètement normale[4]). Or, tel que mentionné plus tôt dans le mémoire, il n'existe pas de processus général pour définir une telle suite, encore moins avec la restriction supplémentaire de complète normalité.

On présente donc le cas particulier où χ est séparable, i.e.

$$\chi(z) = \chi_1(u) + \chi_2(v),$$

où $u + iv$ est analytique par rapport à z (avec quelques conditions supplémentaires de continuité et de différentiabilité). Pour ce cas, on connait une suite génératrice satisfaisant nos demandes, et la forme explicite des puissances formelles engendrées est déjà bien documentée (introduite dans [5] d'abord, puis adaptée dans [6]).

4. Voir la discussion à ce sujet.

Ainsi, le cas séparable nous offre une généreuse brochette de superpotentiels χ pour lesquels les résultats de complétude développés ont une portée beaucoup plus réelle.

Transmutateurs

La dernière partie de l'article est consacrée à l'étude des ***transmutateurs*** $\mathbf{T}_0$ et $\mathbf{T}_1$, toujours pour le cas d'un χ séparable. Ces opérateurs, récemment introduits dans [29], ont comme effet d'amener une puissance classique az^n à sa puissance formelle associée $Z^{(n)}(a, z_0; z)$. Ils offrent donc un pont (à sens unique) entre l'analyticité classique et la pseudo-analyticité.

En plus de décrire sous quelle forme se présentent les transmutateurs pour les systèmes considérés, l'article développe également quelques relations particulièrement intéressantes entre les transmutateurs et les systèmes bosonique et fermionique. On peut principalement soulever les équations suivantes, valides sur Ω pour les fonctions de $C^2(\Omega)$:

$$HP\mathbf{T}_0 = -P\mathbf{T}_0\Delta \qquad \text{et} \qquad H^{(1)}P\mathbf{T}_1 = -P\mathbf{T}_1\Delta,$$

où $H = \mathrm{diag}(H^{(0)},\ H^{(2)})$ et Δ est l'opérateur laplacien. Ces relations révèlent encore davantage la profondeur de la connexion existante entre le SUSY bidimensionnel et la théorie des fonctions pseudo-analytiques.

4.3 Note importante : Puissances locales versus puissances globales

Problématique

Après lecture de l'article, une remise en question de la validité des résultats de complétude semble inévitable, compte tenu du raisonnement suivant.

Dans l'article, il est clair que les puissances formelles construites sont **locales** : le domaine de construction Ω étant borné, des puissances globales ne seraient évidemment pas pertinentes. Or, en se référant à la théorie, on réalise que les deux théorèmes principaux de complétude (les théorèmes 4.2.2 et 4.2.3) requièrent l'utilisation de puissances formelles **globales** construites à partir d'une suite génératrice **complètement normale**.

Donc, question tout à fait légitime, sous quel principe pouvons-nous affirmer la véracité de ces deux théorèmes de l'article ? Le raisonnement le permettant est d'abord apparu dans [7]. Ici, je me baserai sur l'exposition de Kravchenko dans [6].

Exposition de la solution

Dans l'article, on considère, pour la fonction réelle χ, la paire génératrice $\left(e^{\chi}\,;\,ie^{-\chi}\right)$ sur le domaine borné et simplement connexe Ω. On demande que $\chi \in C^1(\overline{\Omega})$, et χ doit être définie sur un domaine à bordure lisse Ω' qui contient Ω. Sous ces conditions, on voit immédiatement que e^{χ} est Hölder-continue sur Ω (puisque l'ensemble $C^1(\overline{\Omega})$ est plus restrictif qu'une simple Hölder-continuité).

De plus, puisque χ est bornée sur $\overline{\Omega}$ (car continuité sur un compact) alors e^{χ} est bornée inférieurement par un certain $K > 0$ sur $\overline{\Omega}$. On a donc que pour tout z_1, $z_2 \in \overline{\Omega}$,

$$\left|ie^{-\chi(z_1)} - ie^{-\chi(z_2)}\right| = \left|\frac{e^{\chi(z_2)} - e^{\chi(z_1)}}{e^{\chi(z_1)}e^{\chi(z_2)}}\right| \leq \frac{M|z_2 - z_1|^r}{K^2} = \frac{M}{K^2}|z_2 - z_1|^r ,$$

où $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in (0;1]$, puisque e^{χ} est Hölder-continue sur Ω. On en déduit donc que $ie^{-\chi}$ est elle aussi Hölder-continue sur Ω.

L'idée est tout d'abord de modifier la définition de e^{χ} sur la zone Ω'/Ω, puis d'étendre cette fonction sur l'ensemble du plan complexe. Grâce aux conditions exigées à χ sur Ω, on est capable d'effectuer les modifications assez doucement de manière à ce que la fonction étendue satisfasse les conditions suivantes :

1. $e^{\chi(z)}$ et $e^{\chi(1/z)}$ sont chacune Hölder-continues sur tout le plan complexe ;
2. $\chi \equiv 0$ lorsque $z \to \infty$.

De cette façon, la paire génératrice étendue $\left(e^{\chi} ; ie^{-\chi}\right)$ est complètement normale, la complétude étant assurée par la condition 1 et la normalité par la condition 2. Les résultats de complétude s'appliquent donc sur l'ensemble du plan complexe pour les puissances formelles générées à partir de la paire étendue.

Puisque la paire génératrice étendue correspond, sur le domaine Ω, à notre paire génératrice de départ $\left(e^{\chi} ; ie^{-\chi}\right)$, les suites de puissances formelles globales et locales seront identiques sur Ω. Grâce à cette construction, on conclut que les résultats de complétude, déjà validées sur le plan, s'appliquent sur le domaine restreint Ω pour les puissances formelles locales.

Chapitre 5

Conclusion

En somme, dans l'article publié par M. Sébastien Tremblay et moi-même, on utilise la théorie des fonctions pseudo-analytiques pour générer les puissances formelles $\left\{Z^{(n)}(a, z_0; z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ et $\left\{\overset{\circ}{Z}^{(n)}(a, z_0; z)\right\}_{n=0}^{\infty}$. Ces deux suite offrent une infinité de solutions, respectivement, pour les systèmes décrivant l'énergie des bosons et des fermions dans le modèle dit « supersymétrique » bidimensionnel (SUSY) de la physique quantique. Ces deux ensembles constituent une généralisation des puissances classiques $\left\{(z-z_0)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$. Pour le système bosonique, on conclut également, moyennant certaines conditions, à la complétude. Ceci signifie que les puissances formelles $Z^{(n)}(a, z_0; z)$ peuvent être combinées sous forme de série de Taylor afin d'approcher arbitrairement n'importe quelle solution du système bosonique.

Une limitation importante pour pouvoir appliquer les résultats trouvés est que l'on doit posséder une suite génératrice qui enchâsse la paire génératrice de référence. Pour l'instant, de telles suites sont disponibles seulement pour certains types de SUSY, comme par exemple lorsque le superpotentiel χ est séparable. En conséquence, pour pouvoir étendre davantage les résultats à un plus grand éventail de systèmes supersymétriques, on doit nécessairement s'attarder au problème délicat de la découverte de suites génératrices pour diverses équations de Vekua. Or, ce défi s'est révélé particulièrement imposant, et les efforts en ce sens n'ont abouti, à ce jour, qu'à un succès mitigé.

Néanmoins, cette contrainte n'amoindrit pas de beaucoup l'intérêt que présentent les conclusions obtenues. La classe particulière de SUSY considérée dans l'article, ceux dont le superpotentiel est séparable, représente à elle seule un groupe important de systèmes, et les théorèmes de complétude développés sont puissants. Considérant l'engouement scientifique que suscite le modèle supersymétrique, les résultats présentent sans aucun doute un intérêt tout à fait appréciable.

Quant à elles, les relations trouvées par la voie des transmutateurs offrent une fenêtre qui laisse entrevoir un lien encore plus fort entre la supersymétrie et les fonctions pseudo-analytiques, dans laquelle ces opérateurs de transmutation auraient un rôle prépondérant. Cette avenue mériterait probablement d'être explorée. Une autre extension possible de l'article, d'ailleurs suggérée en conclusion de celui-ci, consisterait à étudier les SUSY avec superpotentiel complexe, dans quel cas on devrait se rabattre sur des fonctions pseudo-analytiques bicomplexes (réf. [33, 38]).

Bibliographie

[1] A. Bilodeau et S. Tremblay : On two-dimensional supersymmetric quantum mechanics, pseudoanalytic functions and transmutation operators. *J. Phys. A : Math. Gen*, 46(32), Octobre 2013.

[2] V. B. Matveev et M. A. Salle : *Darboux Transformations and Solitons.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[3] P. J. Davis : *Interpolation and Approximation.* Blaisdell Publishing Company, New York, 1963.

[4] J. Yeh : *Real Analysis : Theory of Measure And Integration.* World Scientific, Hackensack, 2006.

[5] L. Bers : *Theory of pseudo-analytic functions.* Institute for Mathematics and Mechanics, New York University, New York, 1953.

[6] V. V. Kravchenko : *Applied pseudo-analytic Function Theory.* Birkhauser Basel, Mexico, 2009.

[7] L. Bers : Formal powers and power series. *Commun. Pure. Appl. Math.*, 9(4): 693–711, Novembre 1956.

[8] G. Junker : *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics.* Springer, Berlin, 1996.

[9] E. Witten : Dynamical breaking of supersymmetry. *Nucl. Phys. B*, 188(3):513–554, 1981.

[10] L. Infeld et T. E. Hull : The factorization method. *Rev. Mod. Phys*, 23:21–68, 1951.

[11] G. Darboux : Sur une proposition relative aux équations linéaires. *Comptes Rendus*, 49:1456–1459, 1882.

[12] P. C. Sabatier : Darboux transformations and global information in inverse theory. *Z. Angew. Math. Mech*, 78 (Suppl. 1):S89–S92, 1998.

[13] M. V. Ioffe : A SUSY approach for investigation of two-dimensional quantum mechanical systems. *J. Phys. A : Math. Theor*, 37:10363–10374, 2004.

[14] M. V. Ioffe : Supersymmetrical separation of variables in two-dimensional quantum mechanics. *Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications*, 6:75–84, 2010.

[15] M. Ioffe, V. Mateos, J. Guilarte et P. A. Valinevich : Two-dimensional supersymmetry : from SUSY quantum mechanics to integrable classical models. *Ann. Phys*, 321:2552–2565, 2006.

[16] B. F Samsonov et A. A. Pecheritsin : Chains of Darboux transformations for the matrix Schrödinger equation. *J. Phys. A*, 37:239–250, 2003.

[17] A. Andrianov et M. V. Ioffe : Pauli fermions as components of< i> d</i>= 2 supersymmetrical quantum mechanics. *Phys. Lett. B*, 205:507–510, 1988.

[18] M. V. Ioffe, S. Kuru, J. Negro et L. M. Nieto : SUSY approach to Pauli Hamiltonians with an axial symmetry. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 39(22), Mai 2006.

[19] M. V. Ioffe et A. I. Neelov : Pauli equation and the method of supersymmetric factorization. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 36(10), Février 2003.

[20] L. Bers : An outline of the theory of pseudoanalytic functions. *Bull. Am. Math. Soc*, 62(4):291–331, 1956.

[21] G. N. Polozhy : *Generalization of the theory of analytic functions of complex variables : p-analytic and (p, q)-analytic functions and some applications.* Kiev University Publishers (en Russe), Kiev, 1965.

[22] W. Tutschke : Generalized analytic functions and their contributions to the development of mathematical analysis. *In* Le Hung Son et al, éditeur : *Finite*

or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (Collection Advances in Complex Analysis and Its Applications 2), pages 101–114. Kluwer Academic, Boston, 2003.

[23] I. N. VEKUA : *Generalized analytic functions.* Nauka (in Russian) English translation : Pergamon Press, Moscow English translation : Oxford, 1959 English translation : 1962.

[24] A. ANDRIANOV, A. BORISOV et N. V. IOFFE : The factorization method and quantum systems with equivalent energy spectra. *Phys. Lett. A*, 105:19–22, 1984.

[25] A. ANDRIANOV, N. V. BORISOV, M. V. IOFFE et Eides M. I. : Supersymmetric origin of equivalent quantum systems. *Phys. Lett. A*, 109:143–148, 1985.

[26] V. V. KRAVCHENKO : On a relation of pseudoanalytic function theory to the two-dimensional stationary Schrödinger equation and Taylor series in formal powers for its solutions. *J. Phys. A : Math. Gen*, 38(18):3947–3964, 2005.

[27] E. MADELUNG : *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers.* Springer (en Allemand), Berlin, 1957.

[28] V. V. KRAVCHENKO : Recent developments in applied pseudoanalytic function theory. *In* Tutschke W. & Yang C.C ESCASSUT, A., éditeur : *Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis*, pages 267–300. Science Press, Beijing, 2008.

[29] H. M. CAMPOS, V. V. KRAVCHENKO et S. M. TORBA : Transmutations, l-bases and complete families of solutions of the stationary Schrödinger equation in the plane. *J. Math. Anal. Appl.*, 389(2):1222–1238, Mai 2012.

[30] K. V. KHMELNYTSKAYA, V. V. KRAVCHENKO, S. M. TORBA et S. TREMBLAY : Wave polynomials, transmutations and cauchy's problem for the klein-gordon equation. *J. Math. Anal. Appl*, 399(1):191–212, Mars 2013.

[31] V. V. KRAVCHENKO et S. M. TORBA : Transmutations for Darboux transformed operators with applications. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 45(7), Janvier 2012.

[32] V. A. MARCHENKO : *Sturm-Liouville operators and applications.* Birkhäuser, Basel, 1986.

[33] H. Campos et V. Kravchenko : Fundamentals of bicomplex pseudoanalytic function theory : Cauchy integral formulas, negative formal powers and Schrödinger equations with complex coefficients. *Complex Analysis and Operator Theory*, 7(2):485–518, Avril 2013.

[34] A. Castaneda et V. V. Kravchenko : New applications of pseudoanalytic function theory to the dirac equation. *J. Phys. A : Math. Gen*, 38(42):9207–9219.

[35] V. V. Kravchenko : On the reduction of the multidimensional stationary Schrödinger equation to a first order equation and its relation to the pseudoanalytic function theory. *J. Phys. A : Math. Gen*, 38(4):851–868, 2005.

[36] S. Agmon et L. Bers : The expansion theorem for pseudo-analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3(5):757–764, Octobre 1952.

[37] V. V. Kravchenko, D. Rochon et S. Tremblay : On the Klein-Gordon equation and hyperbolic pseudoanalytic function theory. *J. Phys. A : Math. Gen*, 41(6), 2008.

[38] D. Rochon : On a relation of bicomplex pseudoanalytic function theory to the complexified stationary Schrödinger equation. *Complex Variables and Elliptic Equations : An International Journal*, 53(6):501–521, Mai 2008.

[39] V. G. Kravchenko, V. V. Kravchenko et S. Tremblay : Zakharov-Shabat system and hyperbolic pseudoanalytic function theory. *Mathematical Physics*, 33(4):448–453, 2010.

[40] H. Campos, V. Kravchenko et L. Méndez : Complete families of solutions for the Dirac equation using bicomplex function theory and transmutations. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22(3):577–594, Septembre 2012.

[41] V. V. Kravchenko : On the completeness of systems of recursive integrals. *Communication in Mathematical Analysis*, (Conf. 03):172–176, 2011.

[42] V. V. Kravchenko, S. Morelos et S. Tremblay : Complete systems of recursive integrals and Taylor series for solutions of Sturm-Liouville equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35(6):704–715, 2012.

[43] D. SARASON : *Complex Function Theory.* American Mathematical Society, Providence, 2e ed. édition, 2007.

[44] R. GÉLINAS et M. LAMBERT : *Éléments d'analyse complexe.* Presses de l'Université du Québec, Québec, 1988.

Annexe A1

Ici, on prouve le théorème d'approximation de Weierstrass. La démonstration proposée est due à Sergei Natanovich Bernstein, qui la présenta en 1912 dans le volume 13 du journal « Communications of the Kharkov Mathematical Society », sous le nom *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.*[1] Au coeur de cette preuve se retrouvent les ***polynômes de Bernstein***.

Définition 5.0.1 *Soit $f(x) : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, une fonction définie sur l'intervalle* $[0,1]$. *Le **n-ième polynôme de Bernstein de** f est défini comme*

$$B_n(f;x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \; .$$

Il est utile pour ce qui suivra de faire ressortir quelques propriétés des polynômes de Bernstein. Tout d'abord, il est clair que B_n est une application linéaire, c'est-à-dire que pour deux fonctions f et g définies sur $[0,1]$ et pour $s, t \in \mathbb{C}$, on a

$$B_n(s \cdot f + t \cdot g; x) = s \cdot B_n(f;x) + t \cdot B_n(g;x) \; . \tag{P1}$$

1. La structure générale de la preuve, telle que présentée ici, a été prise dans [3].

De plus, comme les termes $\binom{n}{k}$, x^k et $(1-x)^{n-k}$ sont tous positifs pour $x \in [0,1]$, on trouve quelques propriétés supplémentaires :

$$|B_n(f;x)| = B_n(|f|;x), \tag{P2}$$

$$f \geq 0 \text{ sur } [0,1] \quad \Rightarrow \quad B_n(f;x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1], \tag{P3}$$

$$f \geq g \text{ sur } [0,1] \quad \Rightarrow \quad B_n(f;x) \geq B_n(g;x) \quad \forall x \in [0,1]. \tag{P4}$$

Dotons-nous d'un lemme qui simplifiera grandement notre tâche.

Lemme 5.0.2 $B_n((x-x_0)^2;x) = x^2 + \frac{1}{n}(x-x^2) - 2xx_0 + x_0^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \forall x_0 \in [0,1].$

Preuve Si $n=1$, la conclusion est très simplement obtenue. Supposons que $n>1$. L'idée de la preuve est d'étudier séparément $B_n(1;x)$, $B_n(x;x)$ et $B_n(x^2;x)$, puis de conclure en utilisant la linéarité de B_n. Tout d'abord, on a immédiatement que

$$B_n(1;x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

où la dernière égalité provient du fait que la sommation présenté ci-dessus correspond au développement du binôme de Newton $(x+(1-x))^n = 1^n$. Pour $B_n(x;x)$ et

$B_n(x^2, x)$, on doit s'en remettre au travail algébrique. On trouve que

$$\begin{aligned}
B_n(x;x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\, x^k (1-x)^{n-k} && \text{//par définition de la combinaison} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} && \text{//car } n-k = n-1-(k-1) \\
&= x \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} x^m (1-x)^{n-1-m} && \text{//changement de variable } m = k-1 \\
&= x \cdot 1^{n-1} \;=\; x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n(x^2;x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m}{n}\binom{n-1}{m} x^{m+1}(1-x)^{n-(m+1)} \;+ \\
&\qquad \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n}\binom{n-1}{m} x^{m+1}(1-x)^{n-(m+1)} \\
&= \frac{n-1}{n}\, x \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m}{n-1}\binom{n-1}{m} x^m (1-x)^{(n-1)-m} \;+ \\
&\qquad \frac{1}{n}\, x \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} x^m (1-x)^{(n-1)-m} \\
&= \frac{n-1}{n}\, x\, B_{n-1}(x;x) \;+\; \frac{1}{n}\, x\, B_{n-1}(1;x) \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot x \cdot x \;+\; \frac{1}{n} \cdot x \cdot 1 \;=\; x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)\ .
\end{aligned}$$

Donc, par linéarité de B_n, nous concluons que

$$B_n((x-x_0)^2;x) \;=\; B_n(x^2;x)-2x_0B_n(x;x)+x_0^2B_n(1;x) \;=\; x^2+\frac{1}{n}(x-x^2)-2x_0x+x_0^2.$$

■

Grâce à ce résultat, nous pouvons prouver le théorème de Weierstrass.

Théorème 5.0.3 (Weierstrass) *Soit la variable réelle x. La suite $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ est complète dans l'espace vectoriel $C[a,b]$, assorti de la norme supremum* $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$.

Preuve En première partie, on veut prouver le résultat pour $C[0,1]$. Soit $f \in C[0,1]$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le compact $[0,1]$, alors f est uniformément continue sur ce compact. Par conséquent,

$$\exists\delta > 0 \qquad \forall x_1, x_2 \in [0,1] \qquad |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $M = \max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ (le max existe par le théorème des bornes). Considérons un élément quelconque mais fixé $x \in [0,1]$. Soit $y \in [0,1]$. Si $|y-x| < \delta$, alors

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.1}$$

Si $|y - x| \ge \delta$, alors

$$|f(y) - f(x)| \;\le\; |f(y)| + |f(x)| \;\le\; 2M \;<\; \underbrace{2M\left(\frac{y-x}{\delta}\right)^2}_{\ge 1} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{>0} \tag{5.2}$$

En combinant les relations (5.1) et (5.2), il vient la relation générale suivante :

$$\forall y \in [0,1] \qquad |f(y) - f(x)| < 2M\left(\frac{y-x}{\delta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5.3}$$

On souhaite utiliser un polynôme de Bernstein pour approximer f. Pour chaque $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
|B_n(f(y);y) - f(x)| = {} & B_n(|f(y) - f(x)|;y) && \text{//prop. (P1) et (P2)} \\
\leq {} & B_n\left(2M\left(\frac{y-x}{\delta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2};\ y\right) && \text{//(5.3) et prop. (P4)} \\
= {} & \frac{2M}{\delta^2} B_n((y-x)^2;y) + \frac{\varepsilon}{2} B_n(x;1) && \text{//prop. (P1)} \\
= {} & \frac{2M}{\delta^2}(y^2 + \frac{1}{n}(y-y^2) - 2yx + x^2) + \frac{\varepsilon}{2} && \text{//lemme (5.0.2).}
\end{aligned}$$

En prenant en particulier $y = x$, on trouve

$$|B_n(f(x),x) - f(x)| \ \leq \ \frac{2M}{\delta^2 n}(x - x^2) + \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Comme le x choisi était quelconque et comme l'expression $(x - x^2)$ atteint son maximum à $1/4$,

$$\forall x \in [0,1] \qquad |B_n(f(x),x) - f(x)| \ \leq \ \frac{M}{2\delta^2 n} + \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

On n'a qu'à poser $N(\varepsilon) = \dfrac{M}{\varepsilon\delta^2} + 1$ afin de trouver un polynôme approximant f à une erreur de ε. En effet,

$$\left\| B_{N(\varepsilon)}(f(x),x) - f(x) \right\|_\infty < \varepsilon\ .$$

Ainsi, (x^n) est complète sur $C[0,1]$. Pour conclure à la complétude dans le cas général de $C[a,b]$, on remarque d'abord que l'application

$$\begin{aligned}
\phi :\ [0,1] &\longrightarrow [a,b] \\
x &\longmapsto (b-a)x + a
\end{aligned}$$

est un homéomorphisme (fonction bijective continue d'inverse continue). Maintenant, soit $g \in C[a,b]$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors, $g \circ \phi$ est continue et est donc dans $C[0,1]$. D'où, par la première partie de la présente preuve, il existe un polynôme fini $p_\varepsilon(x)$ tel que $\max_{x\in[0,1]} |(g \circ \phi)(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

La fonction $p_\varepsilon \circ \phi^{-1}$, étant la composition de deux polynômes, est elle-même un polynôme. De plus, pour tout $y \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
|g(y) - (p_\varepsilon \circ \phi^{-1})(y)| &= \left|(g \circ \phi - p_\varepsilon)\Big(\phi(y)\Big)\right| \\
&\leq \max_{x\in[0,1]} |(g \circ \phi - p_\varepsilon)(x)| \qquad //\textbf{car } \phi(y) \in [0,1] \\
&< \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Comme y était quelconque, on conclut que (x^n) est complète dans $C[a,b]$ (par rapport à la norme maximum).

■

Annexe A2

Pour en arriver à pouvoir démontrer le théorème d'approximation de Runge, on doit d'abord établir un théorème préliminaire. Ce théorème est également dû à *Carl Runge.*

Théorème 5.0.4 (Runge) *Soit C, une courbe de Jordan. Nommons* $\operatorname{Int} C$ *la zone constituée de C et de la région à l'intérieur de C. Soit $f(z)$, une fonction holomorphe sur* $\operatorname{Int} C$. *Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction rationnelle $R(z)$ de type*

$$R(z) = \sum_{i=0}^{N} \frac{a_i}{b_i - z}, \qquad a_i \in \mathbb{C}, \quad b_i \in \mathbb{C} - \operatorname{Int} C \quad \forall i$$

telle que

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C\ .$$

Preuve La fonction f est holomorphe sur le fermé $\operatorname{Int} C$. Or, le domaine d'holomorphicité d'une fonction est, par définition, un **ouvert**. Par conséquent, il existe un domaine (ouvert) Ω tel que $C \subset \Omega$ et f est holomorphe sur Ω. Puisque $\operatorname{Int} C$ est compact, le ***lemme de séparation*** (voir, par exemple, le chapitre IX du volume [43]) nous assure qu'il existe un contour simple C' tel que $C \subset C' \subset \Omega$. Et donc, f est holomorphe sur $\operatorname{Int} C'$ (ou la définition de cet ensemble est la même que pour $\operatorname{Int} C$).

Par conséquent, par la ***formule d'intégration de Cauchy***, la relation

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(t)}{t - z} dt \tag{5.4}$$

tient pour tout $z \in \operatorname{Int} C$.

Comme f est holomorphe, donc continue, sur le compact C', elle y est uniformément continue. D'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall z_1, z_2 \in C' \quad |z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \ .$$

De plus, comme f est continue sur le compact C', elle y est bornée. Posons donc $M = \sup_{z \in C'} |f(z)| < \infty$. Posons également $\rho > 0$, la distance minimale entre les courbes C et C'.

Soient $t_1, t_2 \in C'$ tels que $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ et soit $z \in \operatorname{Int} C$. Avec l'aide des derniers résultats, il apparaît que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(t_1)}{t_1 - z} - \frac{f(t_2)}{t_2 - z} \right| &= \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - z} + \frac{f(t_2)(t_1 - t_2)}{(t_1 - z)(t_2 - z)} \right| && \text{//}\textbf{manipulation algébrique} \\
&\leq \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - z|} + \frac{|f(t_2)| \cdot |(t_1 - t_2)|}{|(t_1 - z)| \cdot |(t_2 - z)|} && \text{//}\textbf{inégalité du triangle} \\
&< \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{M\delta(\varepsilon)}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

En posant $\Theta(\varepsilon) = \min \left\{ \delta\left(\frac{\varepsilon\rho}{2}\right) \ ; \ \frac{\varepsilon\rho^2}{2M} \right\}$, on a que, pour tout $z \in Int\, C$,

$$|t_1 - t_2| < \Theta(\varepsilon) \qquad \Rightarrow \qquad \left| \frac{f(t_1)}{t_1 - z} - \frac{f(t_2)}{t_2 - z} \right| < \frac{\varepsilon\rho/2}{\rho} + \frac{M\left(\frac{\varepsilon\rho^2}{2M}\right)}{\rho^2} = \varepsilon \ . \tag{5.5}$$

Nous sommes prêts à aborder la dernière partie de la preuve. Soit $L' < \infty$, la longueur de C'. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons une suite finie $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = t_0)$ d'éléments ordonnés sur C', qui sont assez rapprochés les uns des autres de manière à ce que pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$|t - t_i| < \Theta\left(\frac{\varepsilon \cdot 2\pi}{L'}\right) \qquad \text{pour tout } t \text{ sur l'arc } t_i/t_{i+1} \text{ de } C' \,. \tag{5.6}$$

Alors, $\forall z \in \operatorname{Int} C$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t-z}dt \;-\; \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(t_i)}{t_i - z}(t_{i+1}-t_i)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{f(t)}{t-z}dt \;-\; \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{f(t_i)}{t_i-z}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\frac{f(t)}{t-z} \;-\; \frac{f(t_i)}{t_i-z}\right|dt \\
&< \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon\cdot 2\pi}{L'}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}dt \qquad\qquad \text{//par (5.5) et (5.6)} \\
&= \frac{\varepsilon}{L'}\cdot L' \;=\; \varepsilon \,.
\end{aligned}$$

En jumelant ce résultat avec (5.4), il vient que

$$\left|f(z) \;-\; \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(t_i)}{t_i-z}(t_{i+1}-t_i)}_{R_\varepsilon(z)}\right| < \varepsilon \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C \,.$$

La fonction $R_\varepsilon(z)$ est rationnelle et ses pôles sont en $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$. Tous ces pôles sont sur C' (à l'extérieur de $\operatorname{Int} C$), et donc $R_\varepsilon(z)$ satisfait les exigences du théorème.

■

Avec l'ajout d'un petit lemme, nous serons en mesure de démontrer le résultat principal.

Lemme 5.0.5 *Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une série de puissance du type*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) z^n, \qquad a_p(n) \in \mathbb{C} \quad \forall n,$$

qui converge uniformément vers la fonction $\dfrac{1}{(1-z)^p}$ *sur le domaine* $|z| < 1$.

Preuve Allons-y par induction sur p. *(i) Cas de base* : On sait que la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge uniformément vers la fonction $\dfrac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

(ii) Cas inductif : Supposons que pour tout $r \leq p$, il existe une série de puissance $\sum_{n=0}^{\infty} a_r(n) z^n$ qui converge uniformément vers la fonction $\dfrac{1}{(1-z)^r}$ pour $|z| < 1$. On a que, pour $|z| < 1$,

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \frac{1}{(1-z)^p} \cdot \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_r(n) z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) .$$

Comme les deux séries ci-dessus convergent pour $|z| < 1$, et qu'au moins une des deux converge absolument (la série géométrique), le produit de Cauchy converge vers $\dfrac{1}{(1-z)^{p+1}}$ pour $|z| < 1$. D'où,

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_p(k) z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_p(k)\right) z^n .$$

Par fermeture dans le corps $\mathbb{C}$, on a que $a_{p+1}(n) := \sum_{k=0}^{n} a_p(k) \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe, et donc on trouve

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p+1}(n) z^n. \tag{5.7}$$

Reste à prouver que la convergence est uniforme. Pour ce faire, on utilise le M-test de Weierstrass. On souhaite donc prouver que la série (5.7) converge absolument pour $|z| < 1$. Par construction, on remarque que $a_p(n)$ est un polynôme (fini) de n. Par conséquent, $a_{p+1}(n)$ et $a_{p+1}(n+1)$ sont deux polynômes dont le coefficient de la plus haute puissance de n est identique. D'où, pour $|z| < 1$, on a

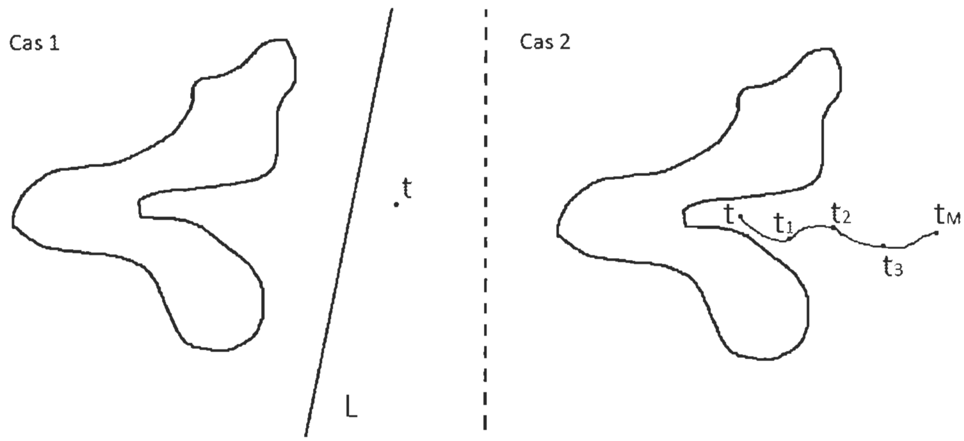
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{p+1}(n+1)| \cdot |z|^{n+1}}{|a_{p+1}(n)| \cdot |z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{p+1}(n+1)|}{|a_{p+1}(n)|} = |z| < 1 .$$

Par le critère de D'Alembert, la série (5.7) converge absolument. Par conséquent, par le M-test de Weierstrass, la convergence de (5.7) est uniforme. Le principe d'induction nous offre la conclusion recherchée. ■

Théorème 5.0.6 (Approximation de Runge) *Soit C, une courbe de Jordan. Soit* $\operatorname{Int} C$*, l'ensemble consitué des points sur et à l'intérieur de la courbe C. Considérons $H(C)$, l'ensemble des fonctions $f(z)$:* $\operatorname{Int} C \to \mathbb{C}$ *holomorphes sur* $\operatorname{Int} C$*. Alors la suite $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ des puissances naturelles de z est complète dans l'espace vectoriel $H(C)$, assorti de la norme supremum*

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \,\in\, \operatorname{Int} C} |f(z)| .$$

Preuve ***Première partie :*** Dans la première partie de la preuve, nous voudrons prouver que pour tout t fixé à l'extérieur de $\operatorname{Int} C$, la fonction $\dfrac{1}{t-z}$ peut être uniformément approximée sur $\operatorname{Int} C$ par des polynômes. Nous distinguons deux cas : soit t est assez loin de C pour qu'il soit possible de tracer une droite qui sépare t de C, soit c'est impossible. Voici une représentation graphique des deux cas.



Cas 1 : On peut trouver une droite

Dans ce cas, il est possible de trouver un cercle G (de rayon fini) qui contient C dans son intérieur et qui ne croise pas la droite L. Soit z_0, le centre de G. On vérifie facilement, de manière algébrique, que

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{t-t_0}} \cdot \frac{1}{t-z_0} = \frac{1}{t-z} \,. \tag{5.8}$$

Puisque le cercle G contient C et que t est à l'extérieur de G,

$$\frac{|z-z_0|}{|t-z_0|} < 1 \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C. \tag{5.9}$$

Ainsi, en considérant la série de puissance présentée dans le lemme 5.0.5, on sait que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1(n) \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n \xrightarrow{\text{uniformément}} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-t_0}} \qquad \text{sur } \operatorname{Int} C\,.$$

Par (5.8), on déduit donc que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1(n) \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} \xrightarrow{\text{uniformément}} \frac{1}{t-z} \qquad \text{sur } \operatorname{Int} C\,.$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \qquad \left| \frac{1}{t-z} - \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} a_1(n) \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} \right| < \varepsilon \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C \ .$$

Cas 2 : On ne peut trouver de droite

La courbe C est bornée. Il est donc possible de trouver un point t^* assez loin de C pour qu'il soit possible de le séparer de C par une droite L. Comme C est une courbe de Jordan, la zone $\mathbb{C} - \operatorname{Int} C$ est connexe. Par conséquent, considérons une courbe l de longueur finie qui ne touche pas C et qui joint les points t et t^*.

La fonction (de variable z) « distance du point z à l'ensemble compact C » est une fonction continue sur le compact l. Par le théorème des bornes, le minimum de cette fonction, appelons le d, est atteint sur l. Comme l ne touche pas C, d est strictement plus grand que 0. Soit une suite finie d'éléments ordonnés sur l

$$(t = t_0, t_1, \ldots, t_M = t^*)$$

telle que $|t_{i+1} - t_i| < d \ \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$ [2]. Soit $\varepsilon > 0$. On vérifie facilement que

$$\frac{1}{1 - \dfrac{t_1 - t}{t_1 - z}} \cdot \frac{1}{t_1 - z} = \frac{1}{t - z} \ . \tag{5.10}$$

Par définition de d, on a que $|t_1 - t| < d < |t_1 - z|$ pour tout $z \in \operatorname{Int} C$. Ainsi, par le lemme 5.0.5 et la relation (5.10), il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left| \frac{1}{t-z} - \sum_{n=0}^{N_1} a_1(n) \frac{(t_1 - t)^n}{(t_1 - z)^{n+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C \ .$$

2. Une telle suite existe puisque $d > 0$ et l est de longueur finie.

Posons $Q_1\left(\frac{1}{t_1 - z}\right) := \sum_{n=0}^{N_1} a_1(n)\ \frac{(t_1 - t)^n}{(t_1 - z)^{n+1}}$.

Par un raisonnement identique à celui employé précédemment, on sait que $|t_2 - t_1| < |t_2 - z|$ et que

$$\frac{1}{1 - \frac{t_2 - t_1}{t_2 - z}} \cdot \frac{1}{t_2 - z} = \frac{1}{t_1 - z}\,. \tag{5.11}$$

Ceci implique, par le lemme (5.0.5), que pour $n = 0, 1, \ldots N_1$, il existe un $N_2^{(n+1)} \in \mathbb{N}$ tel que si $s \geq N_2^{(n+1)}$, alors

$$\left|\frac{1}{(t_1 - z)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{s} a_{n+1}(k)\frac{(t_2 - t_1)^k}{(t_2 - z)^{k+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2M(N_1 + 1)|t_1 - t|^n \max\{|a_1(n)|; 1\}}$$

partout sur $\operatorname{Int} C$. En posant $N_2 = \max\{N_2^{(1)}, N_2^{(2)}, \ldots, N_2^{(N_1+1)}\}$, on trouve que pour tout $z \in \operatorname{Int} C$,

$$\left|Q_1\left(\frac{1}{t_1 - z}\right) - \sum_{n=0}^{N_1} a_1(n) \cdot (t_1 - t)^n \left(\sum_{k=0}^{N_2} a_{n+1}(k)\frac{(t_2 - t_1)^k}{(t_2 - z)^{k+1}}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N_1} |a_1(n)| \cdot |t_1 - t|^n \cdot \left|\frac{1}{(t_1 - z)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{N_2} a_{n+1}(k)\frac{(t_2 - t_1)^k}{(t_2 - z)^{k+1}}\right|$$

$$< (N_1 + 1)\frac{\varepsilon}{2M(N_1 + 1)} = \frac{\varepsilon}{2M}\,.$$

Posons $Q_2\left(\frac{1}{t_2 - z}\right) := \sum_{n=0}^{N_1} a_1(n) \cdot (t_1 - t)^n \left(\sum_{k=0}^{N_2} a_{n+1}(k)\frac{(t_2 - t_1)^k}{(t_2 - z)^{k+1}}\right)$, qui est un polynôme en termes de $\frac{1}{t_2 - z}$.

Grâce à une procédure tout à fait analogue à celle que nous venons d'employer, on est en mesure de trouver une suite

$$Q_1\left(\frac{1}{t_1 - z}\right), Q_2\left(\frac{1}{t_2 - z}\right), \ldots, Q_M\left(\frac{1}{t_M - z}\right)$$

de polynômes finis $\left(\text{respectivement en termes de } \frac{1}{t_1 - z}, \frac{1}{t_2 - z}, \ldots, \frac{1}{t_M - z}\right)$ telle que pour $k = 1, 2, \ldots, M-1$

$$\left|Q_k\left(\frac{1}{t_k - z}\right) - Q_{k+1}\left(\frac{1}{t_{k+1} - z}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\,.$$

De plus, on sait que lorsqu'on arrive au bout de la courbe l, le point $t_M = t^*$ peut être séparé de la courbe C par une droite. Par conséquent, en utilisant le lemme 5.0.5 et un raisonnement identique à celui du cas 1 on conclut que toute puissance naturelle de $\frac{1}{t_M - z}$ peut être approximée arbitrairement par un polynôme de z sur $\operatorname{Int} C$. Ceci signifie qu'il existe un polynôme fini $Q(z)$ tel que

$$\left|Q_M\left(\frac{1}{t_M - z}\right) - Q(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C\,.$$

On découvre, grâce à l'inégalité du triangle, que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t-z} - Q(z)\right| \leq\ & \left|\frac{1}{t-z} - Q_1\left(\frac{1}{t_1 - z}\right)\right| + \left|Q_1\left(\frac{1}{t_1 - z}\right) - Q_2\left(\frac{1}{t_2 - z}\right)\right| + \ldots + \\ & \left|Q_{M-1}\left(\frac{1}{t_{M-1} - z}\right) - Q_M\left(\frac{1}{t_M - z}\right)\right| + \left|Q_M\left(\frac{1}{t_M - z}\right) - Q(z)\right| \\ <\ & M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon\end{aligned}$$

Seconde partie : Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème. Soit $f(z)$, une fonction holomorphe dans $\operatorname{Int} C$. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 5.0.4, il existe un $T \in \mathbb{N}$, une suite de nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_T$ et une suite de points extérieurs à $\operatorname{Int} C$ $t_1, t_2, \ldots, t_T$ tels que

$$\left|f(z) - \sum_{k=1}^{T} \frac{a_k}{z - t_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C.$$

Or, par la première partie de la présente preuve, pour chaque k, il existe un polynôme fini $S_k(z)$ tel que

$$\left|\frac{a_k}{z-t_k} - S_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2T} \qquad \forall z \in \operatorname{Int} C.$$

Considérons le polynôme fini $S(z) := \sum_{k=1}^{T} S_k(z)$. Par l'inégalité du triangle, on a

$$|f(z) - S(z)| \le \left|f(z) - \sum_{k=1}^{T} \frac{a_k}{z-t_k}\right| + \sum_{k=1}^{T} \left|\frac{a_k}{z-t_k} - S_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + T\frac{\varepsilon}{2T} = \varepsilon \, .$$

Autrement dit, pour une fonction holomorphe sur $\operatorname{Int} C$ donnée et pour un $\varepsilon > 0$ donné, on trouve une combinaison linéaire finie $S(z)$ des éléments de la suite $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ telle que

$$\|f - S\|_{\infty} = \max_{z \in \operatorname{Int} C} |f(z) - S(z)| < \varepsilon \, .$$

■

Annexe B

Dans cette courte annexe, il sera montré que, dans le cas où une fonction complexe W possède des dérivées partielles $W_z, W_{\overline{z}}$ continues dans un voisinage d'un point z_0 contenu dans un domaine donné, une condition nécessaire et suffisante à sa différentiabilité en z_0 est le respect de l'équation $W_{\overline{z}}(z_0) = 0$.

Soit $W(z) = u(z) + iv(z)$, la décomposition en parties réelle et imaginaire de W. Par définition des dérivées partielles ∂_z et $\partial_{\overline{z}}$,

$$\begin{cases} W_z(z) = \dfrac{1}{2}\Big((u_x + v_y) + i(v_x - u_y)\Big) \\ W_{\overline{z}}(z) = \dfrac{1}{2}\Big((u_x - v_y) + i(v_x + u_y)\Big) \end{cases} .$$

On a donc que

$$\begin{aligned} W_z, W_{\overline{z}} \text{ continues} &\iff \mathrm{Re}(W_z), \mathrm{Im}(W_z), \mathrm{Re}(W_{\overline{z}}), \mathrm{Im}(W_{\overline{z}}) \text{ continues} \\ &\iff u_x + v_y,\ u_x - v_y,\ v_x - u_y,\ v_x + u_y \text{ continues} \\ &\iff u_x, v_y, v_x, u_y \text{ continues} . \end{aligned}$$

Or, par les théorèmes 2.8.1 et 2.8.2 du volume [44], nous concluons que, dans la mesure où W_z et $W_{\overline{z}}$ sont continues (ce qui signifie que u_x, v_y, v_x, u_y sont continues),

$$W \text{ est dérivable en } z_0 \quad \text{ssi} \quad W_{\overline{z}}(z_0) = 0.$$