

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE DE
LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
LUZ JANETH LLERENA

ÉNUMÉRATION DES POLYOMINOS D'AIRE $MIN + 1$

ÉTÉ 2012

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

À mon Dieu...
À la mémoire de mon père...
À ma mère...
À mes enfants Manuel et Isabella...
À mon amour.

Résumé

En 1953, un mathématicien nommé Solomon Golomb a défini la notion de polyomino ; ce sont des objets géométriques conçus en reliant un certain nombre de carrés par leurs côtés. Vous pouvez imaginer les polyominos comme des objets solides que l'on peut saisir et déplacer dans l'espace. Il est possible de créer de très nombreuses énigmes en utilisant les polyominos.

Présentement, de nombreux scientifiques essaient de découvrir la clé de ces énigmes, un projet ambitieux. Notre équipe de combinatoire a réussi à faire de belles découvertes, et dans ce mémoire, nous vous révélerons les arcanes de l'énumération des polyominos d'aire minimale et minimale plus un.

L'objectif de notre travail consiste à énumérer les polyominos d'aire minimale plus un, sous-ensemble des polyominos, par des méthodes combinatoires connues.

Dans le premier chapitre, nous présentons les définitions et les classifications des polyominos et une brève généralisation des polyominos minimaux. Ensuite, dans le chapitre deux, nous décrirons l'algèbre des séries et des fonctions génératrices ordinaires et exponentielles, un outil qui nous servira à expliquer la modélisation des formules énumératives exactes des polyominos d'aire minimale et d'aire minimale plus un, traitée dans le chapitre suivant. Dans le chapitre trois, nous développerons une méthode combinatoire pour énumérer les polyominos d'aire $min + 1$; leur série génératrice, leur généralisation, leurs formules exactes d'énumération et quelques applications. Ce chapitre est une révision du texte *dénombrement de polyominos inscrits dans un rectangle* du directeur de ce mémoire (A. Goupil et al [10]).

Et finalement dans le chapitre quatre, nous présentons l'algorithme du programme principal qui génère des polyominos sans cycle et le code source du programme utilisé pour vérifier les formules exactes présentées dans ce mémoire.

Abstract

The goal of the present work is to enumerate polyominoes of minimal area plus one inscribed in a rectangle by combinatorial methods. In the first chapter, I present the definitions and classifications of polyominoes and a brief generalization of polyominoes of minimal area. Then, in chapter two I describe the algebra of ordinary and exponential generating functions and ,a tool that serves to explain the exact enumerative formulas for polyominoes of minimal area and minimum area plus one treated in the chapter three. In chapter three, we develop a combinatorial method for enumerating polyominoes of minimal area plus one ; their generating series, their generalization, their exact enumeration formulas and some applications. This chapter is a review of a document, written by my dissertation advisor, on the enumeration of inscribed polyominoes.

And finally, in chapter four, I present the algorithm that generates the main program and polyominoes without cycles and the source code. This program was used as a database to check the exact formulas presented in this master thesis.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le professeur Alain Goupil du département de Mathématiques et d'Informatique, qui m'a accueilli et m'a guidé avec patience depuis ma première session à l'université jusqu'à la dernière version de ce travail. Sa clarté et sa rigueur mathématique resteront pour moi des modèles. J'en suis très honorée.

Je suis également très reconnaissante envers le professeur Fathallah Nouboud directeur du département de Mathématiques et d'informatique, pour ses idées, ses remarques et commentaires sur ce manuscrit qui m'ont sans aucun doute permis de l'améliorer. Son rôle a été fondamental dans le contexte informatique de mon travail. Vous avez ma profonde gratitude.

Le professeur Alain Chalifour du Département de Mathématiques et d'informatique, pour ses idées et son appui inconditionnel et opportun, pour son soutien dans l'élaboration de l'affiche scientifique ou tout simplement pour avoir été disponible pour me conseiller et m'encourager dans les moments importants, vous avez mon admiration. J'en suis infiniment reconnaissante.

Tous les membres du département de Mathématiques et Informatique, plus particulièrement le professeur M'hamed Mesfioui, directeur du programme de cycles supérieurs en Mathématiques et Informatique Appliquées, ainsi que mesdames Chantal Lessard et Manon Goulet pour leur aide, leur disponibilité et leur sympathie.

Je tiens à remercier l'équipe de combinatoire de l'Université du Québec à Trois-Rivières pour leur appui tout au long de ce travail ainsi que les professionnels du département de Mathématiques et d'informatique, Daniel St-Yves et Guy Terrien, pour leur disponibilité et leur appui technique au fil de cette rédaction.

Je remercie également l'équipe d'étudiants, particulièrement Yan Jegou et Hayette Boumerzoug, mes amis et Tarik Bahraoui pour leur soutien inconditionnel. Vous avez toute ma gratitude.

Tous mes remerciements aux membres du jury. Vos commentaires ont été appréciés.

Finalement, je tiens à remercier Dieu, les membres de ma famille, mon époux, mes enfants Manuel et Isabella et ma mère, pour leur appui moral et inconditionnel. Je leur serai reconnaissante toute ma vie.

Table des matières

Nomenclature	i
Liste des tableaux	i
Liste des figures	ii
1. Introduction	1
1.1 Les polyominos	1
1.1.1 Définitions	3
1.2 Classification des polyominos	4
1.3 Polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$	6
1.4 Polyominos d'aire minimal inscrits dans un rectangle $b \times k$. .	18
1.4.1 Sous-famille de polyominos d'aire minimale	22
2. Définitions	27
2.1 Les suites	27
2.2 Séries formelles	27
2.3 Séries génératrices	28
2.3.1 La méthode	29
2.4 Les opérations sur les séries génératrices ordinaires	31
2.4.1 La somme et la différence	31
2.4.2 Le produit	32
2.4.3 L'identité de Vandermonde	34
2.4.4 L'inverse multiplicatif d'une série	35
2.4.5 La substitution	37
2.4.6 Décalage des coefficients	37
2.4.7 La dérivée	37
2.5 Séries génératrices exponentielles	38
2.6 Série génératrice des polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$	40

3. Polyominos d'aire minimal plus un	45
3.1 Définitions	45
3.2 Polyominos d'aire $min + 1$ avec un coin donné occupé	48
3.3 Polyominos d'aire minimale plus un contenant un carré 2×2	63
3.3.1 Série génératrice des polyominos d'aire $min + 1$	91
3.4 Serpents $min + 1$	97
3.4.1 Série génératrice des serpents	98
4. Programme informatique pour compter les polyominos d'aire $min + 1$ et les serpents de longueur $min + 1$	102
4.1 Quelques chiffres intéressants	102
4.2 Algorithme du programme	103
4.3 Compteur de polyominos d'aire minimale et minimale plus un	104
5. Conclusion et perspectives	107
5.1 Conclusion	107
5.2 Apport de ce mémoire	107
5.3 Perspectives	108
6. Annexe	111
6.1 Annexe 1	111
6.2 Annexe 2	121
6.3 Annexe 3	124

Nomenclature

b	Hauteur d'un polyomino
d	Nombre de doublons d'une ligne ou d'une colonne
k	Largeur d'un polyomino
t	Nombre de trous dans un polyomino
n	Aire d'un polyomino
$Comp(n, r)$	Ensemble des compositions de n en r parts
$comp(n, r)$	Cardinalité de $Comp(n, r)$
$f_1(b, k)$	Nombre de polyominos coins inscrits d'aire minimale
$f_{1,1}(b, k)$	Nombre de polyominos d'aire minimale avec deux coins diagonalement opposés et occupés
$f_{1,1,1}(b, k)$	Nombre de polyominos d'aire minimale avec trois coins diagonalement opposés et occupés
E	Ensemble
E_i	Sous-ensemble
$F_1(b, k)$	Ensemble des polyominos coins inscrits d'aire minimale
$F_{11}(b, k)$	Ensemble des polyominos coins inscrits avec deux cases consécutives occupées sur la même ligne
$F_{1-1}(b, k)$	Ensemble des polyominos coins inscrits avec deux cases consécutives occupées sur la même colonne
FCO	Fonction génératrice ordinaire
FGE	Fonction génératrice exponentielle
t	Longueur d'un banc (troisième chapitre)
F_{ij-lm}	Famille de polyominos
\cup	Union
\cap	Intersection
$\dot{\cup}$	Union disjointe
$card(E)$	Cardinalité de l'ensemble E
\subseteq	Être contenu dans ou être sous-ensemble d'un ensemble donné
$f_{2 \times 2y}(b, k, b+k)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 situé sur le bord vertical du rectangle
$f_{2 \times 2x}(b, k, b+k)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré

	2 × 2 situé sur le bord horizontal du rectangle
$f_{2 \times 2, x, y}(b, k, b + k)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré
	2 × 2 situé à l'intérieur du rectangle sans toucher aux bords ou
	$f_{2 \times 2c}(b, k, b + k)$
$f_{2 \times 2}(b, k, b + k)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ contenant un carré 2 × 2
$f_1^t(b, k)$	Nombre de polyominos avec la partie pleine du banc
$f_2^t(b, k)$	Nombre de polyominos avec la partie vide du banc
$f_t^1(k, b)$	Symétrique de $f_1^t(b, k)$
$f_t^2(k, b)$	Symétrique de $f_2^t(b, k)$
$E \setminus F$	Différence entre deux ensembles
$f_{min+1}(b, k)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$
$g_1(b, k, b + k)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino-banc
$g_{2,x}(b, k)$	2 × t , $t \geq 3$ dans un coin du rectangle
$g_{3x,y}(b, k)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino-banc horizontal 2 × t , $t \geq 3$ collé sur un bord du rectangle
$S_{min+1}(x, y)$	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino-banc horizontal 2 × t , $t \geq 3$ intérieur et que ne touche aucun bord du rectangle
	Série génératrice des serpents de longueur $min + 1$

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Nombre de polyominos à symétrie près et à translation près.	2
1.2	Nombre $f(b, 2, n)$ de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle $b \times 2$	17
1.3	Nombre de polyominos d'aire minimale $n = b + k - 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$	23
3.1	Nombre de polyominos coins d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$	63
3.2	Nombre $f_{2 \times 2}$ de polyominos d'aire $n = b + k$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ contenant un banc 2×2	73
3.3	Nombre $f_{2 \times 2}(n)$ de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle de périmètre $2n$ contenant un banc 2×2	73
3.4	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$	90
3.5	Nombre de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle de périmètre $2n$	91
3.6	Nombre de serpents d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$	99
6.1	Compteur de polyominos d'aire min et min+1	124
6.2	Nombre partiel de polyominos avec 2, 3, 4 et 5 feuilles	125

LISTE DES FIGURES

1.1	Tous les polyplets à trois carrés	2
1.2	Ensemble de cellules connexes et non-connexes	4
1.3	Polyomino verticalement convexe	4
1.4	Polyomino horizontalement convexe	5
1.5	Polyomino parallélogramme	5
1.6	Polyomino arbre à cinq feuilles	6
1.7	Un serpent d'aire maximale inscrit dans un rectangle 5×10	6
1.8	Un polyomino coin	6
1.9	Un polyomino inscrit dans un rectangle 4×2 avec deux doublons	7
1.10	Les trois distributions	10
1.11	Les chapeaux d'un polyomino à deux colonnes	12
1.12	Démonstration du corollaire 1.3.4	14
1.13	Polyomino d'aire minimale et non minimale	19
1.14	Exemple de compositions (n, r)	20
1.15	Placement de marches	22
1.16	Marches d'un escalier	22
1.17	Polyomino d'aire minimale avec un coin donné occupé	24
1.18	Polyomino d'aire minimale avec deux cases sous-gauche données occupées	25
3.1	Polyominos inscrits dans un rectangle 4×5	46
3.2	Polyominos banc	46
3.3	Des rangées jaunes, des escaliers bleus et des bancs rouges	47
3.4	Polyominos d'aire minimale	47
3.5	Décomposition de l'ensemble $F_1(b, k, b+k)$	48
3.6	Polyominos d'aire $min + 1$ de type $11 - 0$	51
3.7	Décomposition de l'ensemble F_{11-1}	52
3.8	Polyomino d'aire $min + 1$ avec un coin occupé par une équerre 2×1	53
3.9	Polyominos d'aire $min + 1$ avec trois coins occupés. Étape 1 de la preuve de la proposition 3.2.3	55
3.10	Polyominos d'aire $min + 1$ avec trois coins occupés. Étape 2 de la preuve de la proposition 3.2.3	56
3.11	Polyominos d'aire $min + 1$ avec un coin occupé par un carré 2×2	57
3.12	Polyominos d'aire $min + 1$ avec un bord occupé par un carré 2×2	65

3.13	Polyominos d'aire $min + 1$ avec un carré 2×2 intérieur qui ne touche à aucun bord	69
3.14	Un attachement d'équerre en correspondance avec un unique coin du banc	74
3.15	Polyominos d'aire $min + 1$	75
3.16	Les polyominos qui contiennent un banc $2 \times t$	75
3.17	Les séries génératrices le long d'une diagonale	77
3.18	Polyominos d'aire $min + 1$ avec un banc $2 \times t$ dans un coin . .	78
3.19	Les trois dispositions d'un banc horizontal sur un côté	81
3.20	Polyomino-banc horizontal symétrique	85
3.21	Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc horizontal $2 \times t$, $t \geq 3$ intérieur au rectangle sans toucher les bords	88
3.22	Construction d'un polyomino d'aire $min + 1$	93
3.23	Formes géométriques des polyominos d'aire min et $min + 1$.	93
3.24	Rangée, banc et escalier	99
3.25	Un serpent d'aire $min + 1$	100
4.1	Organigramme des séquences des opérations	105
4.2	Principe des filtres	106
5.1	Résumé des étapes d'énumération	109
5.2	Comparaison entre les nombres de polyominos	110

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les polyominos

« L'imprévisible est dans la nature même de l'entreprise scientifique. Si ce qu'on va trouver est vraiment nouveau, alors c'est par définition quelque chose d'inconnu à l'avance. »

François Jacob

Ce chapitre introduit la notion de polyomino, leur classification et la notion de polyomino d'aire minimale.

Les polyominos, nom donné par Solomon W. Golomb en 1953, sont des configurations planes composées de carrés congruents juxtaposés côté à côté. Il existe plusieurs façons de compter les polyominos. Une première façon est dite *à symétrie près*, c'est-à-dire que deux configurations sont comptées pour une seule si elles coïncident après rotation ou réflexion de l'une d'elles. Nous compterons les polyominos *à translation près*.

Définition 1.1.1. *Un ensemble de polyominos est compté à translation si à chaque fois qu'un polyomino p' obtenu d'un polyomino p par translation, alors p' et p sont considérés identiques.*

L'aire d'un polyomino est donnée par le nombre de carrés assemblés pour former une configuration. On ne connaît pas de formule générale donnant le nombre de polyominos avec une aire donnée.

Le tableau 1.1 montre une liste de polyominos comptés avec les deux contraintes de symétrie et de translation énoncées au paragraphe précédent. Dans ce

Nombre de carrés	Nom	Comptés à symétrie près	Comptés à translation près
1	monomino	1	1
2	domino	2	1
3	triomino	6	44
4	tétromino	19	584
5	pentomino	63	4180
6	hexomino	216	22576
7	heptomino	760	107052
8	octomino	2725	477464
9	ennéamino	9910	2067300
10	décamino	36446	881376010

TABLEAU 1.1 – Nombre de polyominos à symétrie près et à translation près.

tableau, pour chaque nombre de carrés unitaires de 1 à 10, on trouve l'appellation donnée et le nombre de polyominos différents, ceci en incluant les figures trouées (en d'autres mots, des régions qui ne sont pas pavées avec des carrés et qui ne touchent pas l'extérieur). Ceux comptés à symétrie près incluent les *polyplets*, des formes où les carrés peuvent se toucher, par les coins ou les côtés. Ceux comptés à translation près incluent les polyominos d'aire minimale plus un inscrits dans un rectangle $b \times k$. La figure 1.1 montre tous les polyplets à trois carrés [18].

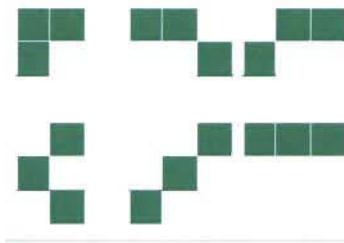


FIGURE 1.1 – Tous les polyplets à trois carrés

Les polyominos ont été étudiés par des scientifiques comme David A. Klarner, Ronald L. Rivest [16], D. Hugh Redelmeier [17] et d'autres du dernier siècle. Maintenant, nous tenterons d'énumérer certaines classes de polyominos à l'aide de méthodes combinatoires connues.

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'un polyomino :

- forme réalisée avec des carrés assemblés ;
- puzzle consistant à réaliser des figures, comme le Tangram ;
- forme résultant de l'assemblage de n carrés identiques de toutes les manières possibles par les côtés. Le plus connu des polyominos est le domino, formé de deux carrés ;
- un polyomino est un sous-ensemble connexe et fini de \mathbb{Z}^2 , dont chaque élément est constitué d'une cellule (case occupée).

1.1.1 Définitions

Une *case* est un carré unitaire $[i; i + 1] \times [j; j + 1]$ placé dans le plan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et une *cellule*, est une case occupée (voir carré rouge dans la figure 1.2). Un *polyomino* est un assemblage connexe de cellules, dans le plan *discret* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ces cellules sont connectées par un côté (voir figure 1.2). *L'aire* n d'un polyomino est le nombre de carrés qu'il contient. Un polyomino est dit *inscrit* dans un rectangle de dimension $b \times k$ lorsqu'il est inclus dans ce rectangle et qu'on ne peut rapetisser le rectangle sans perdre une partie du polyomino [11]. Deux cellules dans un polyomino sont dites *voisines* si et seulement si elles ont un côté en commun. Chacune de ces cellules est dite voisine l'une de l'autre.

Définissons d'autres paramètres qui caractérisent les polyominos :

- *l'aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le composent ;
- *le périmètre* est la longueur de son contour ;
- *une colonne* d'un polyomino est l'intersection de celui-ci avec une bande verticale infinie $[i; i + 1] \times \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \times [j; j + 1]$;
- *une ligne* d'un polyomino est l'intersection de celui-ci avec une bande horizontale infinie $[j; j + 1] \times \mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z} \times [i; i + 1])$;
- *un cycle* dans un polyomino est un chemin de carrés dont le carré de départ est aussi le carré d'arrivée ;
- *une feuille* est une cellule d'un polyomino qui n'a qu'un voisin ;
- *une cellule* est une case occupée ;
- *un trou linéaire* dans une ligne ou une colonne d'un polyomino est une ensemble connexe de cases inoccupées situé entre deux cellules de la ligne ou de la colonne.

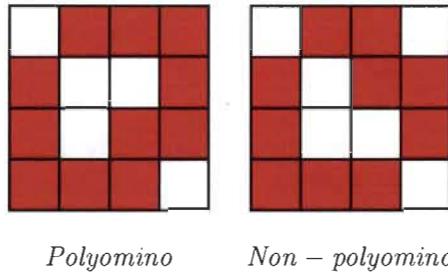


FIGURE 1.2 – Ensemble de cellules connexes et non-connexes

1.2 Classification des polyominos

Les polyominos sont parfois classifiés par rapport à la notion de direction et de convexité. Nous les classifierons en fonction des cycles qu'ils contiennent.

Un polyomino dirigé, souvent appelé animal dirigé, est un polyomino qui est obtenu à partir d'une cellule appelée *source* en ajoutant des cellules selon deux directions, par exemple le Nord et l'Est. De cette façon, le polyomino se développe dans la direction donnée, ici la direction Nord-Est.

Un polyomino est dit verticalement ou horizontalement *convexe*, si toutes ses colonnes ou toutes ses lignes sont respectivement connexes (voir les figures 1.3 et 1.4).

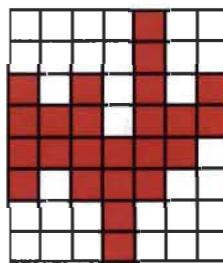


FIGURE 1.3 – Polyomino verticalement convexe

Les polyominos parallélogrammes forment un sous-ensemble de polyominos

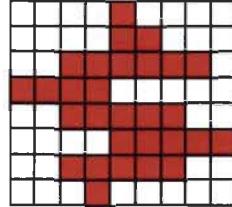


FIGURE 1.4 – Polyomino horizontalement convexe

horizontalement et verticalement convexes (voir figure 1.5). Ils sont caractérisés par le fait qu'ils touchent le coin inférieur gauche et supérieur droit de leur rectangle minimal circonscrit.

En choisissant les deux autres coins du rectangle minimal, nous obtiendrons une autre sous-classe de polyominos convexes, équivalente à celle des polyominos parallélogrammes puisque les éléments de cette sous-classe sont simplement les polyominos parallélogrammes obtenus par une rotation de 90° .

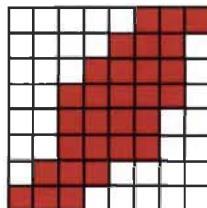


FIGURE 1.5 – Polyomino parallélogramme

Les polyominos sans cycle sont appelés des *polyominos arbres*. Ce sont des objets d'intérêt pour la production des membranes de polyester, utilisés dans la fabrication des systèmes de filtration de l'industrie papetière et pétrolière [8]. Les polyominos arbres peuvent avoir plusieurs feuilles (voir figure 1.6).

Les polyominos arbres qui n'ont que deux feuilles sont appellés *des serpents* et ils font partie de la catégorie des arbres à deux feuilles (voir figure 1.7). A. Goupil *et al.* [11] ont démontré des résultats visant leur énumération.

Finalement, nous définissons *les polyominos coins*. Ce sont des polyominos

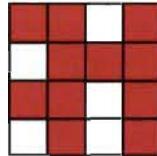
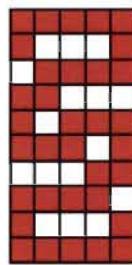


FIGURE 1.6 – Polyomino arbre à cinq feuilles

FIGURE 1.7 – Un serpent d'aire maximale inscrit dans un rectangle 5×10

d'aire minimale inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec la case supérieure gauche occupée (voir la figure 1.8).

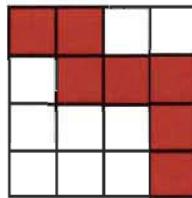


FIGURE 1.8 – Un polyomino coin

1.3 Polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$

Nous présentons brièvement l'étude d'un sous-ensemble de polyominos particuliers nécessaires à l'énumération des polyominos : les polyominos inscrits

$b \times 2$.

Définition 1.3.1. Appelons *doublon* une ligne avec les deux cases occupées d'un polyomino $b \times 2$ (voir figure 1.9).

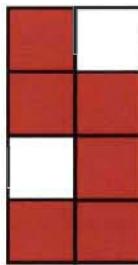


FIGURE 1.9 -- Un polyomino inscrit dans un rectangle 4×2 avec deux doublons

Un polyomino inscrit dans un rectangle $b \times 2$ possédant d doublons est d'aire $n = b + d$ pour tout $d \geq 1$.

Notre objectif est de trouver l'expression algébrique du nombre $f(b, 2, n)$ de polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$ d'aire n en tenant compte de la notion de doublons.

Définition 1.3.2. Soit $(a_1, a_2, a_3 \cdots a_l)$ une suite de nombres entiers positifs alors $(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_l) = d$ est dite une *faible composition* de d . Si l'addition de tous les $a_i \geq 0$ pour tout $i \in [l]$, alors la suite $(a_1, a_2, a_3 \cdots a_l)$ est appelé une *composition* de d .

Définition 1.3.3. Une *partition* de d est une représentation de d comme une somme d'entiers positifs où l'ordre des termes n'est pas important.

Exemple : les huit compositions de 4 sont

4, 3 + 1, 1 + 3, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1.

et les cinq partitions de 4 sont

4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1.

Théorème 1.1. *Pour tous entiers positifs d et t , le nombre de compositions de d en t parts est*

$$\binom{d+t-1}{t-1} = \binom{d+t-1}{d} \quad (1.1)$$

Démonstration. *Le problème est équivalent à compter le nombre de façons de placer d balles identiques entre t boîtes différentes. La démonstration est faite par M. Bóna à la page 90 de [13].*

La généralisation du théorème 1.1, conduit aux corollaires suivants.

Corollaire 1.3.1. *Pour tous d et t , tel que $d, t > 0$ et $d, t \in \mathbb{Z}$, le nombre de compositions strictes de d en t parts non-nulles est*

$$\binom{d-1}{t-1} \quad (1.2)$$

Corollaire 1.3.2. *Pour tout entier positif d , le nombre de toutes les compositions de d est 2^{d-1}*

Démonstration. *Une composition aura au moins 1 part et au plus d parts. Donc, le nombre total de compositions de d est*

$$\sum_{t=1}^d \binom{d-1}{t-1} = 2^{d-1} \quad (1.3)$$

Nous procéderons par récurrence sur d .

– *Pour $d = 1$, l'équation (1.3) est vraie, car l'entier 1 a une composition.*

- Assumons que pour $d = n$, l'équation (1.3) est vraie.
- Alors, prouvons pour $d = n + 1$,

$$2^{(n+1)-1} \cdot 2^1 = 2^n \cdot 2^1 = 2^{n+1}. \quad (1.4)$$

De cette façon on obtient une composition de $n+1$ avec le premier élément 1, en sachant que différentes compositions de n conduisent à différentes compositions de $n+1$. Chaque composition de $n+1$ est obtenue en exactement une de ces deux manières. Donc, il s'ensuit que $n+1$ a deux fois plus de compositions que n .

Théorème 1.2. *Le nombre de façons de choisir d cellules dans une colonne de hauteur b de telle sorte qu'il y ait t trous est*

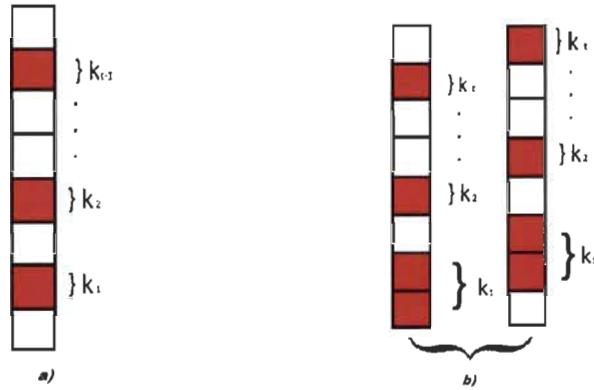
$$\binom{d+1}{t} \binom{b-(d+1)}{t-1} \quad (1.5)$$

Démonstration. Nous considérons les trois cas possibles de positionnement de d cellules dans une colonne de hauteur b avec t trous (voir figure 1.10).

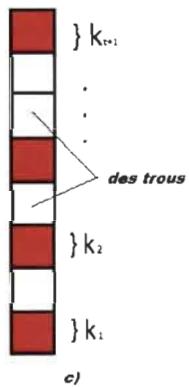
Ces trois cas donnent lieu à la formule suivante :

$$\binom{d-1}{t-2} + 2\binom{d-1}{t-1} + \binom{d-1}{t} = \binom{d+1}{t} \quad (1.6)$$

Nous faisons appel à un cas particulier de l'identité de Vandermonde pour simplifier le côté gauche de la formule 1.6. Cette identité sera montrée dans le chapitre suivant. Dans la formule 1.6, le premier coefficient binomial $\binom{d-1}{t-2}$ est le nombre de compositions de d en $t-1$ parts. Le deuxième coefficient, $2\binom{d-1}{t-1}$ est le nombre de compositions de d en t parts plus sa réflexion, et le troisième coefficient $\binom{d}{t+1}$ est le nombre de compositions de d en $t+1$ parts. En additionnant ces trois coefficients binomiaux nous obtenons le premier coefficient du théorème 1.5.



a. Compositions de d en $t - 1$ parts b. Compositions de d en t parts



c. Compositions de d en $t + 1$ parts

FIGURE 1.10 – Les trois distributions

Dans le deuxième coefficient binomial de la formule 1.5, il reste $b - d$ cellules non choisies qu'il faut répartir en t trous. Ce qui donne le nombre de compositions de $b - d$ (pour une hauteur b et d doublons) en t parts (ou trous).

Le choix des cases du théorème précédent deviendra le choix des doublons

dans le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Pour $1 \leq k \leq b$, le nombre $f(b, 2, b+k)$ de polyominos inscrit dans un rectangle $b \times 2$ et d'aire $n = b+d$ est*

$$f(b, 2, b+d) = \sum_{t=1}^{d+1} \binom{d+1}{t} \binom{b-(d+1)}{t-1} 2^t \quad (1.7)$$

Démonstration. *Le théorème 1.3 est une conséquence du théorème 1.1. Pour chaque choix de d doublons et de t trous et sachant qu'un trou est constitué d'une colonne vide et une colonne pleine, il a deux dispositions de colonne pleine pour chaque trou. Au total il y a 2^t dispositions de colonne pleine pour t trous.*

Le corollaire suivant est un cas spécial du théorème 1.3.

Corollaire 1.3.3. *Le nombre $f(b, 2)$ de polyominos de hauteur b et contenant deux colonnes est*

$$\begin{aligned} f(b, 2) &= 1 + \sum_{d=1}^{b-1} \sum_{t=1}^{d+1} \binom{d+1}{t} \binom{b-(d+1)}{t-1} 2^t \\ &= -2 + \frac{(1+\sqrt{2})^{b+1} + (1-\sqrt{2})^{b+1}}{2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Démonstration. *Tout d'abord, nous considérons le cas où le nombre de doublons d est égal à b . Nous constatons immédiatement, qu'il y a exactement un polyomino ayant cette description. Ensuite, nous faisons une sommation sur tous les polyominos avec un doublon jusqu'à $b-1$ doublons (du théorème 1.7). Autrement dit, il faut sommer sur toutes les aires $n = b+d$ où b est la hauteur et d est le nombre de doublons.*

La formule exacte $f(b, 2)$ est utilisée comme exemple d'application de la méthode des séries génératrices dans le deuxième chapitre.

Pour démontrer la proposition suivante nous devons définir la notion de chapeau.

Définition 1.3.4. Un chapeau est un ensemble connexe de cellules inclus dans un carré 2×2 inscrit ou non.

Proposition 1.3.1. Pour tout entier $b \geq 3$, le nombre $f(b, 2)$ de polyominos de hauteur b sur deux colonnes satisfait la récurrence

$$f(b, 2) = 2f(b-1, 2) + f(b-2, 2) + 4 \quad (1.9)$$

avec les conditions initiales $f(1, 2) = 1$ et $f(2, 2) = 5$.

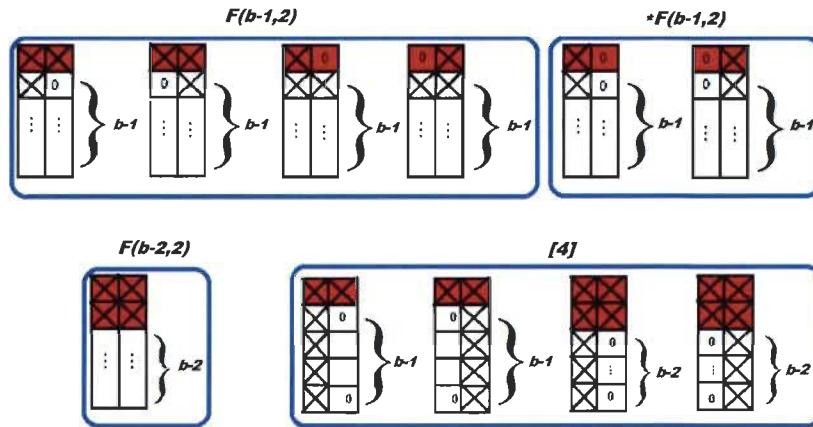


FIGURE 1.11 – Les chapeaux d'un polyomino à deux colonnes

Démonstration. La figure 1.11 illustre tous les cas possibles de chapeaux de hauteur 2 dans un polyomino $b \times 2$. Considérons le partitionnement suivant

des polyominos $b \times 2$ en fonction des chapeaux. Posons,

$$F(b, k) = F(b-1, 2) \dot{\cup} F(b-1, 2) \dot{\cup} F(b-2, 2) \dot{\cup} [4] \quad (1.10)$$

où,

- $F(b-1, 2)$ est l'ensemble des polyominos qui correspondent à placer une ou deux cases occupées dans la première ligne et une ou deux cases dans la seconde de telle façon que les deux lignes de tête soient connectées ;
- $*F(b-1, 2)$ est l'ensemble symétrique de $F(b-1, 2)$;
- $F(b-2, 2)$ est l'ensemble des polyominos dont les quatre cases du chapeau sont occupées suivi d'un polyomino de hauteur $b-2$;
- L'ensemble $[4]$ de polyominos contient quatre sous-ensembles de polyominos qui ne sont pas des polyominos inscrits dans un $(b-1) \times 2$ ou un $(b-2) \times 2$ mais qui le sont lorsqu'on ajoute un chapeau fait d'une ligne pleine ou de 2 lignes pleines.

Si nous sommes les cardinalités de ces sous-ensembles disjoints nous obtenons la formule de récurrence 1.9.

Corollaire 1.3.4. *Le nombre $f(b, 2, n)$ de polyominos $b \times 2$ d'aire n satisfait la récurrence suivante*

$$f(b, 2, n) = f(b-2, 2, n-2) + f(b-1, 2, n-1) + 2f(b-2, 2, n-3) + 4\chi(n = b+1) \quad (1.11)$$

pour $n > b \geq 3$, sous les conditions initiales $f(1, 2, 2) = 1$, $f(2, 2, 3) = 4$ et $f(b, 2, n) = 0$ et $n < b+1$ ou $n > 2b$. Ici, $\chi(n = b+1)$ est la fonction caractéristique.

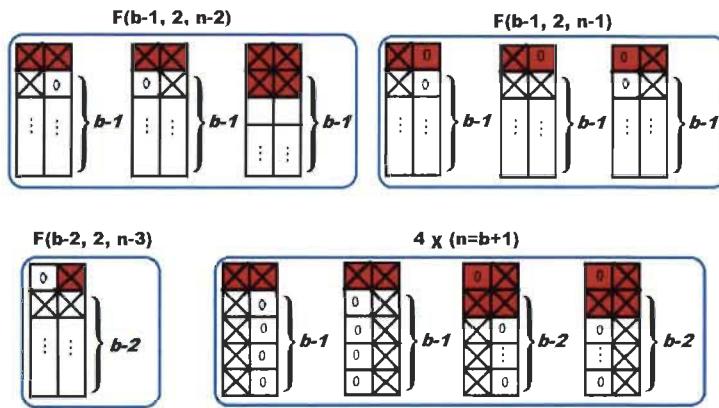


FIGURE 1.12 – Démonstration du corollaire 1.3.4

Démonstration. Nous utilisons la décomposition des polyominos $b \times 2$ illustrée à la figure 1.12 en tenant compte des configurations des chapeaux. À la figure 1.12, les premier, deuxième et troisième groupe de doublons sont notés $F(b-1, 2, n-2)$, $F(b-1, 2, n-1)$, $F(b-2, 2, n-3)$ et ils ont les aires $n-2$, $n-1$ et $n-3$ respectivement. Ces aires représentent le nombre de cellules qui ne sont pas dans les chapeaux. Les quatre polyominos représentés dans le quatrième groupe sont comptés par la fonction caractéristique et leur aire est $n = b + 1$.

Corollaire 1.3.5. La série génératrice de $f(b, 2)$ s'écrit sous la forme rationnelle suivante :

$$\sum_{b \geq 0} f(b, 2)x^b = 1 - \frac{2}{1-x} + \frac{1+x}{1-2x-x^2}$$

Démonstration. La preuve sera présentée au chapitre deux.

Corollaire 1.3.6. *La formule exacte pour $f(b, 2)$, $b \geq 1$, est la suivante :*

$$f(b, 2) = -2 + \frac{(1 + \sqrt{2})^{b+1} + (1 - \sqrt{2})^{b+1}}{2}$$

Démonstration. *Cette démonstration sera présentée au chapitre 2*

Corollaire 1.3.7. *La série génératrice de $f(b, 2, n)$ a la forme rationnelle suivante :*

$$\sum_{b \geq 0} \sum_{n \geq 0} f(b, 2, n) x^b y^b = 1 + \frac{1 + xy}{1 - xy - xy^2 - x^2 y^3} - \frac{2}{1 - xy}$$

Démonstration. *Notons*

$$F(x, y) = \sum_{b \geq 0} \sum_{n \geq 0} f(b, 2, n) x^b y^b. \quad (1.12)$$

Tout d'abord, nous observons que,

$$\begin{aligned} \sum_{b \geq 0} \sum_{n \geq 0} \chi(n = b + 1) x^b y^b &= \sum_{b \geq 0} x^b y^{b+1} = \frac{y}{1 - xy}, \\ \sum_{b \geq 2} \sum_{n \geq 4} \chi(n = b + 1) x^b y^b &= \frac{4y}{1 - xy} - 4(y + xy^2 + x^2 y^3). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ensuite, si on utilise la récurrence au corollaire 1.3.4, nous obtenons

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= xy^2 + 4x^2y^3 + \sum_{\substack{b \geq 2 \\ n \geq 4}} [f_2(b-1, n-2) + f_2(b-2, n-3) + \\
&\quad 4\chi(n=b+1)]x^b y^n \\
&= xy^2 + 4x^2y^3 + xy^2 \sum_{\substack{b \geq 1 \\ n \geq 2}} f_2(b, n)x^b y^n + xy \sum_{\substack{b \geq 1 \\ n \geq 3}} f_2(b, n)x^b y^n + x^2y^3 + \\
&\quad \sum_{\substack{b \geq 0 \\ n \geq 1}} f_2(b, n)x^b y^n + xy + \frac{4y}{1-xy} - 4(y + xy^2 + x^2y^3) \\
&= xy^2 + 4x^2y^3 + xy^2 \sum_{\substack{b \geq 0 \\ n \geq 0}} f_2(b, n)x^b y^n + xy \left(\sum_{\substack{b \geq 0 \\ n \geq 0}} f_2(b, n)x^b y^n + xy^2 \right) \\
&\quad + x^2y^3 \sum_{\substack{b \geq 0 \\ n \geq 0}} f_2(b, n)x^b y^n + \frac{4y}{1-xy} - 4(y + xy^2 + x^2y^3) \\
F(x, y)(1-xy^2-xy-x^2y^3) &= xy^2 + 4x^2y^3 - x^2y^3 + \frac{4y}{1-xy} \\
&\quad - 4(y + xy^2 + x^2y^3) \\
F(x, y) &= \frac{-3xy^2 - x^2y^3 - 4y}{1-xy-xy^2-x^2y^3} + \frac{4y}{(1-xy)(1-xy-xy^2-x^2y^3)} \\
&= \frac{2-xy^2-x^2y^3-4y}{1-xy-xy^2-x^2y^3} - \frac{2}{1-xy}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

d'où le résultat désiré.

À la Table 1.2, nous présentons quelques valeurs du nombre de polyominos pour différentes valeurs de b et n .

Proposition 1.3.2. *La suite $g(n)$ du nombre de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle $b \times 2$ satisfait la récurrence,*

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2) + g(n-3) + 4, \quad n \geq 4. \tag{1.15}$$

n/b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$g(n)$
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
4	0	1	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
5	0	0	6	12	0	0	0	0	0	0	0	0	18
6	0	0	1	18	16	0	0	0	0	0	0	0	35
7	0	0	0	8	38	20	0	0	0	0	0	0	66
8	0	0	0	1	32	66	24	0	0	0	0	0	123
9	0	0	0	0	10	88	102	28	0	0	0	0	228
10	0	0	0	0	1	50	192	146	32	0	0	0	421
11	0	0	0	0	0	12	170	360	198	36	0	0	776
12	0	0	0	0	0	1	72	450	608	258	40	0	1428
13	0	0	0	0	0	0	14	292	1002	952	326	44	2630
14	0	0	0	0	0	0	1	98	912	1970	1408	402	4791
15	0	0	0	0	0	0	0	16	462	2364	3530	1992	8364
16	0	0	0	0	0	0	0	1	128	1666	5336	5890	13021
17	0	0	0	0	0	0	0	0	18	688	4942	10836	16484
18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	162	2816	12642	15621
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	978	9424	10422
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	200	4482	4683
$f_2(b)$	1	5	15	39	97	237	575	1391	3361	8117	19576	45712	

TABLEAU 1.2 – Nombre $f(b, 2, n)$ de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle $b \times 2$.

sous les conditions initiales

$$g(1) = 0, g(2) = 1, g(3) = 4 \quad (1.16)$$

Démonstration. *La démonstration est présentée au chapitre deux.*

1.4 Polyominos d'aire minimal inscrits dans un rectangle $b \times k$

Un autre catégorie de polyominos dont la définition est essentielle pour notre travail est celle des polyominos d'aire minimale. Ces polyominos occupent un rectangle de hauteur b , de largeur k et sont d'aire minimale. Cette aire minimale, ici n , satisfait la relation :

$$n = b + k - 1 \quad (1.17)$$

Un polyomino d'aire minimale est un escalier dont les extrémités « peuvent » être des équerres (voir figure 1.13 a), b) et c). Une équerre est constituée de deux rangées de cellules formant un angle droit

Sinon, l'aire n'est plus minimale comme à la figure (1.13 d)). Dans un rectangle $b \times k$, il y a deux sortes d'escaliers. Les escaliers montants et les escaliers descendants.

Définition 1.4.1. *Un escalier est fait de marches. Les marches d'un escalier*

sont des segments horizontaux et les contre-marches des segments verticaux.

Ici, un segment est une suite de cellules alignées.

Pour construire un escalier nous devons respecter les étapes suivantes :

- Nous choisissons d'abord le nombre r de lignes sur lesquelles nous plaçons les marches. Ceci se fait par des compositions de $k + r - 1$ en r parts, $r = 2 \dots k - 1$;
- Pour chaque composition, nous choisissons les r lignes sur lesquelles nous plaçons les marches. Il y a trois cas possibles. Le cas où il y a une marche

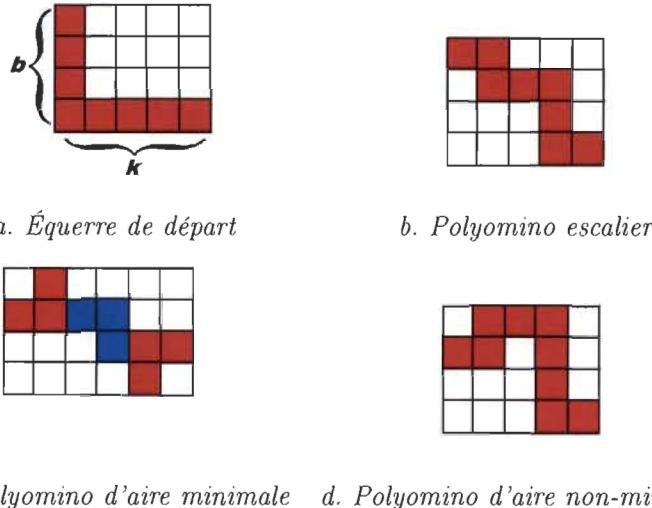


FIGURE 1.13 – Polyomino d'aire minimale et non minimale

sur la dernière ligne et la première ligne, les cas où une seule des lignes d'extrémité a une marche et le cas où aucune marche n'est sur une ligne d'extrémité. Chaque cas est considéré séparément.

Une fois que la composition de longueur r et les r marches sont choisies, l'escalier est entièrement déterminé. Nous aurons besoin des deux résultats suivants.

Proposition 1.4.1. *Appelons $Comp(n, r)$ l'ensemble des compositions de n en r parts non-nulles et $comp(n, r)$ sa cardinalité. Nous avons :*

$$comp(n, r) = \binom{n-1}{r-1} \quad (1.18)$$

$$\sum_{(n_1, \dots, n_r) \in Comp(n, r)} n_1 = \binom{n}{r} \quad (1.19)$$

$$\sum_{(n_1, \dots, n_r) \in Comp(n, r)} n_1 n_r = \binom{n+1}{r+1} \quad (1.20)$$

Démonstration. – Pour démontrer l'équation 1.18, on représente une composition de n en r parts non nulles par le choix de $r-1$ barres verticales dans les espaces séparant n étoiles disposées sur une ligne d'où on déduit qu'il y a $\binom{n-1}{r-1}$ compositions (figure 1.14).

À partir de l'exemple illustré dans la figure 1.14, en faisant les calculs pour $n = 9$ et $r = 4$ nous avons,

$$comp(9, 4) = \binom{9-1}{4-1} = \binom{8}{3}.$$

– Pour démontrer l'équation 1.19 nous utilisons l'équation 1.18, alors

$$\begin{aligned} \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in Comp(n, r)} n_1 &= \sum_{n_1=1}^{n-r-1} n_1 \sum_{n_1(n_2, \dots, n_r) \in Comp(n-n_1, r-1)} \\ &= \sum_{n_1=1}^{n-r-1} n_1 \binom{n-n_1-1}{r-1-1}, \text{ par 1.18} \\ &= \binom{n}{r} \end{aligned} \quad (1.21)$$

– Le passage à la troisième expression est connu et nous procérons de façon semblable à la démonstration de l'équation 1.19.



FIGURE 1.14 – Exemple de compositions (n, r)

Théorème 1.4. Le nombre $f(b, k, b+k-1)$ de polyominos d'aire minimale $n = b+k-1$ de hauteur b et de largeur k est donné par la formule

$$\begin{aligned}
f(b, k, b+k-1) &= \overbrace{2k}^{b \geq 2} + \overbrace{k^2(b-2)}^{b \geq 3} + 2 \sum_{r=2}^{k-1} \overbrace{\text{comp}(k-1, r) \binom{b-2}{r-2}}^{cas1: b \geq 2} + \\
&\quad (1.22) \\
&\quad \overbrace{2 \sum_{(k_1, \dots, k_r)} \in \text{Comp}(k-1, r)(k_1+1) \binom{b-2}{r-1}}^{cas2: b \geq 3} + \\
&\quad \overbrace{\sum_{(k_1, \dots, k_r)} \in \text{Comp}(k-1, r)(k_1+1)(k_r+1) \binom{b-2}{r}}^{cas3: b \geq 4} \\
&= 2k + k^2(b-2) + 2 \sum_{r=2}^{k-1} \left[\binom{k-2}{r-1} \binom{b-2}{r-2} + \right. \\
&\quad \left. 2 \left[\binom{k-1}{r} + \binom{k-2}{r-1} \right] \binom{b-2}{r-1} + \right. \\
&\quad \left. \left[\binom{k+r-2}{2r-1} + 2 \binom{k-1}{r} + \binom{k-2}{r-1} \right] \binom{b-2}{r} \right] \\
&= 2k + 2b - 3bk - 8 + 8 \binom{k+b-2}{b-1}
\end{aligned}$$

Démonstration. Dans un escalier, r désigne le nombre de marches. Il y a toujours au moins une marche ($r \geq 1$) dans un escalier. Lorsqu'il n'y a qu'une seule marche, il existe deux cas :

- Cas 1 : La marche est en haut ou en bas du rectangle $b \times k$. Ceci implique, qu'il y a $2k$ choix pour placer les segments verticaux (équation 1.18).
- Cas 2 : La marche ne touche pas au haut ni au bas du rectangle. Alors, cette marche forme un carré de k^2 choix pour les segments verticaux et $b-2$ choix pour la position de la marche horizontale. L'aire du carré sera donc, $k^2(b-2)$, ce qui correspond au nombre de possibilités (équation 1.19) ;

Finallement, nous faisons une sommation sur tous les polyominos minimaux contenant au moins deux marches (équation 1.20).



Positionnement des segments verticaux Positionnement des segments horizontaux

FIGURE 1.15 – Placement de marches

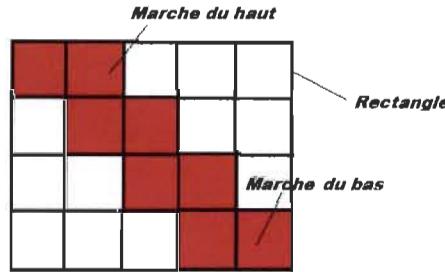


FIGURE 1.16 – Marches d'un escalier

1.4.1 Sous-famille de polyominos d'aire minimale

Nous revenons à la définition des polyominos coins.

Proposition 1.4.2. *Pour tout $b \geq 1$ et $k \geq 1$, le nombre $f_{1,min}(b, k)$ de polyominos d'aire minimale inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec la case su-*

b/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	4	8	12	16	20	24	28	32	36
3	1	8	25	50	83	124	173	230	295	368
4	1	12	50	120	230	388	602	880	1230	1660
5	1	16	83	230	497	932	1591	2538	3845	5592
6	1	20	124	388	932	1924	3588	6212	10156	15860
7	1	24	173	602	1591	3588	7265	13582	23859	39856
8	1	28	230	880	2538	6212	13582	27288	51290	91308
9	1	32	295	1230	3845	10156	23859	51290	102745	194240
10	1	36	368	1660	5592	15860	39856	91308	194240	388692

TABLEAU 1.3 – Nombre de polyominos d'aire minimale $n = b + k - 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$

périeure gauche occupée satisfait la récurrence et la formule exacte suivantes :

$$f_1(b, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \text{ ou } k = 0, \\ 1 & \text{si } b = 1 \text{ ou } k = 1, \\ 1 + f_1(b - 1, k) + f_1(b, k - 1) & \text{autrement,} \end{cases}$$

$$f_1(b, k) = 2 \binom{b+k-2}{b-1} - 1, \quad \forall b, k \geq 1. \quad (1.23)$$

Démonstration. (\Rightarrow) : Par hypothèse, les polyominos inscrits avec la case supérieure gauche occupée sont contenus dans l'ensemble de tous les polyominos d'aire minimale qui ont au moins une des deux cases adjacentes occupées.

Il est facile de constater qu'il y a seulement un polyomino coin d'aire minimale avec les deux cases adjacentes occupées. Ce polyomino est l'unique équerre inscrite dont le coin est le coin supérieur gauche du rectangle $b \times k$.

Alors, $F_1(b, k) \subseteq F_1(b - 1, k) \dot{\cup} F_1(b, k - 1) \dot{\cup} F_1(b - 1, k - 1)$.

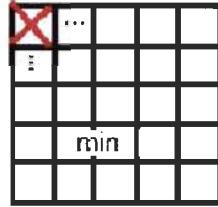


FIGURE 1.17 – Polyomino d'aire minimale avec un coin donné occupé

(\Leftarrow) : Nous savons que l'ensemble $F_1(b-1, k) \cup F_1(b, k-1) \cup F_1(b-1, k-1)$ contient obligatoirement la case supérieure gauche occupée. Donc,

$$F_1(b-1, k) \cup F_1(b, k-1) \cup F_1(b-1, k-1) \subseteq F_1(b, k).$$

l'équation 1.23 satisfait les conditions initiales et la récurrence de la proposition 1.4.2. Elle est donc vraie.

Corollaire 1.4.1. La série génératrice $F_1(x, y)$ du nombre $f_1(b, k, b+k-1)$ de polyominos d'aire minimale inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec la case supérieure gauche occupée à la forme rationnelle suivante :

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \sum_{b, k \geq 1} f_1(b, k, b+k-1) x^b y^k \\ &= \frac{2xy}{1-x-y} - \frac{xy}{(1-x)(1-y)} \\ &= \left(1 + \frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right) \frac{xy}{1-x-y} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Démonstration. Pour trouver la fonction génératrice $F_1(b, k)$, nous recurons à la méthode développée par H. Wilf [3]. Cette méthode est présentée

au chapitre suivant.

Corollaire 1.4.2. *Le nombre $f_{1-1}(b, k, b + k - 1)$ de polyominos d'aire minimale $n = b + k - 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ ayant la case supérieure gauche ainsi que la case directement dessous occupées satisfait la récurrence et la formule suivantes*

$$\begin{aligned} f_{1-1}(b, k, b + k - 1) &= f_1(b, k, b + k - 1) - f_1(b, k - 1, b + k - 2), \\ &= \left(2 \binom{b+k-2}{b-1} - 1\right) - \left(2 \binom{b+k-3}{b-1} - 1\right), \\ &= 2 \binom{b+k-3}{b-2}, \quad \forall k \geq 2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

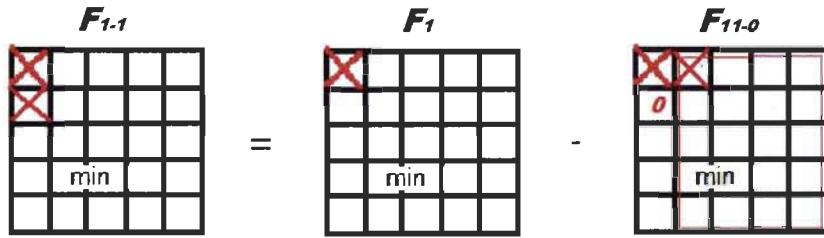


FIGURE 1.18 – Polyomino d'aire minimale avec deux cases sous-gauche données occupées

Démonstration. (\implies) : *Les polyominos de l'ensemble $F_{1-1}(b, k, b + k - 1)$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ contiennent tous les polyominos avec la case supérieure gauche et celle au-dessous occupées. Quant à la case adjacente à droite du coin, il n'est pas certain qu'elle soit occupée. Alors,*

$$F_{1-1}(b, k, b + k - 1) \subseteq F_1(b, k, b + k - 1) \setminus F_{11-0}(b, k, b + k - 1). \quad (1.26)$$

(\Leftarrow) : Inversement $F_1(b, k, b+k-1) \setminus F_{11-0}(b, k, b+k-1)$ contient les polyominos avec au moins la case supérieure gauche occupée moins les polyominos avec la case supérieure gauche, et la case adjacente à droite du coin, occupées et la case au-dessous de la case supérieure gauche, vide. Ceci implique que,

$$f_1(b, k, b+k-1) \setminus f_{11-0}(b, k, b+k-1) \subseteq f_{1-1} \quad (1.27)$$

Conséquemment, des équations (1.26) et (1.27), nous obtenons l'équation (1.25).

Chapitre 2

Définitions

Dans ce chapitre nous ferons une brève révision de l’algèbre des séries formelles, des fonctions génératrices ordinaires et exponentielles. Nous utiliserons la technique développée par *H. Wilf* [3] pour trouver les séries génératrices des polyominos d’aire $min + 1$.

2.1 Les suites

Une **suite** de nombres est un ensemble d’éléments indexés par les entiers naturels tandis qu’une *suite finie* est un ensemble d’éléments indexés par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier. Cet entier est la *longueur* de la suite. Lorsque tous les éléments d’une suite infinie appartiennent à un même ensemble E , cette suite peut être assimilée à une application de \mathbb{N} dans E . Nous notons classiquement une suite (a_n) ou encore

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \tag{2.1}$$

2.2 Séries formelles

Les séries formelles sont un outil qui permet d’utiliser les concepts analytiques des séries entières sans tenir compte de la notion de convergence. Pour cela, nous considérons une série comme un être algébrique à l’aide d’une valeur indéterminée x [2].

Il existe une manière assez générale d’étudier les suites dont la définition fera apparaître des phénomènes de récurrence. La méthode de *Wilf* [3] consiste à introduire une série formelle associée à une suite et à développer cet objet de manière combinatoire.

Ces séries sont également très utiles pour décrire de façon concise des suites et trouver des formules pour des suites définies par récurrence via ce que nous appellerons les fonctions génératrices.

2.3 Séries génératrices

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit (a_n) une suite de nombres réels et $(f_n(x))$ une suite de fonctions numériques réelles. Nous appelons *fonction génératrice* ou série génératrice de la suite (a_n) la série formelle [3] ;

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n f_n(x). \quad (2.2)$$

Les fonctions $f_n(x)$ constituent *le noyau* [7] d'une série, comme l'ensemble des éléments sur lequel la fonction génératrice est nulle.

Dans ce mémoire nous n'étudierons que les cas où le noyau est de la forme,

$$f_n(x) = x^n, \text{ appelée fonction génératrice ordinaire ou FGO} \quad (2.3)$$

et nous décrirons sommairement celles qui donnent lieu aux fonctions génératrices exponentielles ou FGE

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}. \quad (2.4)$$

Nous allons illustrer les fonctions génératrices ordinaires à l'aide d'un exemple.

Exemple

Nous avons un sac avec 5 balles jaunes, 4 rouges et 5 blanches identiques. Nous choisissons au hasard 1, 3 ou 5 jaunes, 2, 3 ou 4 rouges et 1, 4 ou 5 balles blanches, de combien de façons peut-on choisir 10 balles sans les remettre dans le sac ?

La fonction génératrice du choix des balles jaunes est :

$$A_1(z) = z + z^3 + z^5 \quad (2.5)$$

La fonction génératrice du choix des balles rouges est :

$$A_2(z) = z^2 + z^3 + z^4 \quad (2.6)$$

La fonction génératrice du choix des balles blanches est :

$$A_3(z) = z + z^4 + z^5 \quad (2.7)$$

Si nous effectuons le produit $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, le coefficient de z^{10} du produit nous fournira la réponse. Dans ce cas-ci, trouver la fonction n'est pas vraiment compliqué.

Nous utilisons les *fonctions génératrices ordinaires FGO* pour compter certains objets avec *répétition limitée*. Processus dans lequel l'ordre n'est pas important.

Lorsque l'ordre est important, nous faisons appel aux *fonctions génératrices exponentielles FGE* dont nous parlerons plus tard.

2.3.1 La méthode

Considérons une suite d'entiers dont nous ignorons le terme général, mais pour laquelle nous avons une équation de récurrence. Prenons par exemple, la relation de récurrence suivante :

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 0.$$

Les premiers termes de cette suite sont $0, 1, 3, 7, 15, 31, 46 \dots$ ce qui nous amène à proposer la formule exacte

$$a_n = 2^n - 1.$$

Comment obtenir cette formule à partir du terme général de cette suite en utilisant la relation de récurrence ?

Nous présentons l'idée fondamentale des séries formelles à l'aide des étapes suivantes appliquées à un exemple ;

- Posons la somme formelle de puissances associée à la suite (a_n) ;

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad (2.8)$$

où $A(x)$ est un élément de l'anneau $\mathbb{R}[[x]]$ des séries formelles en une variable à coefficients réels.

- Associons cette série formelle ordinaire à la récurrence ;

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (2.9)$$

- Multiplions les deux parties de cette égalité par x^n et additionnons pour tout $n \geq 1$;

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} (2a_{n-1} + 1) x^n \quad (2.10)$$

- L'expression de gauche correspond à $A(x) - a_0$, qui est égale à $A(x)$ puisque le coefficient a_0 est nul.
- Simplifions l'expression de droite ;

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} (2a_{n-1} + 1) x^n &= 2 \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n + x \sum_{n \geq 1} x^{n-1} \\ &= 2 x \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^{n-1} + \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) - 1 \\ &= 2 x A(x) + \frac{1}{1-x} - 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

On obtient l'équation suivante ;

$$A(x) = 2x A(x) + \frac{x}{1-x}.$$

- Isolons $A(x)$ dans la dernière expression ;

$$\begin{aligned} A(x) - 2x A(x) &= \frac{x}{1-x} \\ \Rightarrow A(x) &= \frac{x}{(1-2x)(1-x)}. \end{aligned}$$

- Décomposons en fractions partielles le quotient ;

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{(1-2x)(1-x)} &= x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) \\
 &= (2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + 2^5x^5 + \dots) - \\
 &\quad (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\
 &= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + (2^4-1)x^4 + \dots \\
 &= \sum_{n \geq 0} (2^n - 1)x^n
 \end{aligned}$$

- Les coefficients de la série sont ;

$$a_n = 2^n - 1, n \geq 1.$$

En résumé, étant donnée une relation de récurrence décrivant une suite (a_n) , nous avons procédé comme suit ;

1. Multiplier les deux membres de la relation de récurrence par x^n , ou par $(\frac{x^n}{n!})$ et sommer sur n .
2. Évaluer les sommes pour en tirer une équation vérifiée par la *SGO* (série génératrice ordinaire) ou *SGE* (série génératrice exponentielle).
3. Résoudre cette équation pour obtenir une formule explicite de la *FGO* ou *FGE*.
4. Développer la *FGO* ou *FGE* en série entière pour obtenir une formule exacte pour les coefficients, c'est à dire l'expression de la suite d'origine.

2.4 Les opérations sur les séries génératrices ordinaires

2.4.1 La somme et la différence

Soient deux fonctions génératrices $A(x)$ et $B(x)$ associées à deux suites de nombres a_n et b_n , respectivement [3]. La somme et la différence sont obtenues en additionnant ou en soustrayant chacun des termes de chacune des puissances de x ,

$$A(x) \pm B(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n \pm b_n)x^n$$

2.4.2 Le produit

Pour les fonctions et les séries génératrices ordinaires il existe deux produits. Le produit par un nombre réel et le produit de convolution, aussi appelé le produit de Cauchy.

1. Le produit d'une fonction (série) génératrice ordinaire par un réel λ est la fonction (série) génératrice ordinaire

$$C(x) = \lambda A(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n = \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \forall n \geq 0.$$

2. Le produit de convolution de deux fonctions ou séries génératrices est

$$C(x) = A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \forall n \geq 0,$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Illustrons cette dernière définition par un exemple.

Exemple

Dans un conseil municipal il y a 25 personnes dont 11 sont des femmes. Nous voulons former un comité de 10 personnes. De combien de manières pourrait-on constituer un tel comité ?

La réponse immédiate est $\binom{25}{10}$ comités différents. Nous avons 14 hommes et 11 femmes, posons

$$a_n = \text{nombre de façons de choisir } n \text{ femmes parmi 11} = \binom{11}{n},$$

$$b_n = \text{nombre de façons de choisir } n \text{ hommes parmi 14} = \binom{14}{n}.$$

Par le théorème du binôme, leurs fonctions génératrices associées sont :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{11}{n} x^n = (1+x)^{11},$$

et

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{14}{n} (x^n) = (1+x)^{14}.$$

Le coefficient recherché est c_{10} du produit $f(x)g(x)$;

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{11}{n} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{14}{n} x^n \right) & (2.12) \\ &= (1+x)^{11}(1+x)^{14} \\ &= (1+x)^{25}. \end{aligned}$$

Le coefficient recherché est c_{10}

$$c_{10} = \binom{25}{10}.$$

De plus,

$$\binom{25}{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k} \binom{14}{10-k}.$$

Si nous généralisons avec m femmes, t hommes et un comité de r personnes, on aura trouvé *l'identité de Vandermonde*, développée à partir de la notion de fonction génératrice ;

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}.$$

2.4.3 L'identité de Vandermonde

Un regard sur cette identité nous éclairera sur la propriété suivante [5].

Supposons qu'un comité parlementaire soit composé de membres de deux partis politiques, l'un comptant n membres, les *verts*, l'autre m membres, les *jaunes*. Combien peut-on former de comités de taille r à partir de ces deux partis ? La réponse est bien sûr

$$\binom{m+n}{r} \quad (2.13)$$

Cette valeur est aussi donnée par la somme de toutes les valeurs de k du nombre de comités composés de k *verts* et de $r - k$ *jaunes*.

Proposition 2.4.1. Soit $n, m, r \in \mathbb{N}$,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$$

Démonstration

□

Soit $\binom{n+m}{r}$ le nombre de sous-ensembles de r éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+m\}$. Soit $S \subseteq \{1, 2, \dots, n+m\}$. Alors, l'ensemble S aura un nombre k d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et le nombre $r - k$ restants sera dans $\{n+1, n+2, \dots, n+m\}$. Donc, pour former ce sous-ensemble S , on doit choisir un nombre k d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ de $\binom{n}{k}$ façons, et ensuite $r - k$ éléments de $\{n+1, n+2, \dots, n+m\}$ de $\binom{m}{r-k}$ façons. En variant k de 0 à r , on obtient la formule suivante par le principe de multiplication.

Il y a

$$\sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}$$

façons de former ces sous-ensembles de r éléments.

Définition 2.4.1. Étant donné deux séries formelles $\sum_{k \geq 0}^{\infty} a_k x^k$ et $\sum_{j \geq 0}^{\infty} b_j x^j$, on appelle produit de Cauchy la série

$$\sum_n^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right)$$

avec,

$$c_n = \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l} = \sum_{k+j=n} a_k b_j \quad (2.14)$$

2.4.4 L'inverse multiplicatif d'une série

Théorème 2.4.1. Si F est un corps [12], alors la série formelle

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

possède un inverse multiplicatif dans l'anneau des séries formelles $F[[x]]$ si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Démonstration

□

(\Rightarrow) Si $A(x)$ est inversible, il existe une série de puissances $B(x)$ dans $F[[x]]$ telle que

$$A(x)B(x) = 1$$

Autrement dit, il existe un série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ telle que

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \dots) = 1$$

En comparant les termes constants de chaque série, nous obtenons

$$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0 \text{ et } b_0 \neq 0$$

(\Leftarrow) Inversement, par hypothèse, si $a_0 \neq 0$ alors en suivant l'ordre pour déterminer les coefficients de $B(x)$, nous devons considérer les équations

obtenues du produit de la formule 2.15. Donc

$$\begin{aligned}
 a_0 b_0 &= 1 & (2.15) \\
 a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\
 a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0 \\
 &\vdots \\
 a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Étant donné que $a_0 \neq 0$ alors $b_0 = \frac{1}{a_0}$ existe. Par la suite, nous déterminons la suite b_n par récurrence comme suit ;

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \quad (2.16)$$

$$b_1 = \frac{1}{a_0}(-a_1 b_0)$$

$$b_2 = \frac{1}{a_0}(-a_1 b_1 - a_2 b_0)$$

$$b_3 = \frac{1}{a_0}(-a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_0)$$

\vdots

$$b_n = \frac{1}{a_0}(-a_1 b_n - a_2 b_{n-1} - a_3 b_{n-2} - \cdots - a_n b_0) \quad (2.17)$$

$$b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}.$$

D'où, $A(x)$ est inversible.

L'ensemble des séries formelles muni des opérations d'addition et de multiplication que l'on vient de décrire forme un *anneau* [6] pour lequel les éléments inversibles sont les séries dont le terme constant est non nul [5] et [3].

2.4.5 La substitution

Soit $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série formelle, et soit $B(x) = \sum_{n \geq 1} b_n x^n$ une série formelle avec une terme constant zéro. Définissons la substitution de $B(x)$ dans $A(x)$ comme suit :

$$A(B(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n B(x)^n = a_0 + a_1 B(x) + a_2 B(x)^2 + a_3 B(x)^3 + \dots$$

2.4.6 Décalage des coefficients

Considérons la série formelle $A(x)$ d'une suite (a_n) . Si nous multiplions $A(x)$ par x , nous obtiendrons une nouvelle fonction $C(x) = xA(x)$:

$$xA(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n. \quad (2.18)$$

Cela veut dire que le n -ième coefficient de $xA(x)$ correspond au $(n-1)$ -ième coefficient de $A(x)$ pour tout $n \geq 1$ et que la suite associée à $xA(x)$ est la suite (a_n) décalée vers la droite :

$$xA(x) \rightarrow (0, a_0, a_1, a_2, a_3 \dots).$$

Si nous multiplions $A(x)$ par x^m , avec $m \geq 1$, nous déplaçons la suite vers la droite de m positions. Nous aurons donc m zéros au début et la nouvelle série génératrice aura les coefficients a_k de $A(x)$ décalés de m positions.

2.4.7 La dérivée

La dérivée de la série formelle $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est la série formelle

$$A'(x) = \sum_n n a_n x^{n-1}$$

Donc, $A'(x)$ est associée à la suite $(1a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots)$ ce qui nous indique que nous déplaçons la suite d'une position vers la droite

$$xA'(x) \implies (0a_0, 1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots) = (na_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Pour obtenir la fonction génératrice associée à la suite n^2a_n , nous utilisons le même argument mais en considérant $xf'(x)$ dont les coefficients sont na_n , ce qui conduit à :

$$xA^2(x) \longrightarrow (n^2a_n)_{n=0}^{\infty}$$

et ainsi de suite. Chaque facteur n supplémentaire est obtenu en répétant l'opération. En résumé, si on applique l'opérateur (d/dx) sur une suite, et qu'on multiplie par x , alors pour chaque $m \geq 1$,

$$(x \frac{d}{dx})^m A(x) \longleftrightarrow (n^m a_n)_{n=1}^{\infty}.$$

La dérivée formelle d'une fonction génératrice est

$$\frac{d}{dx} A(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

2.5 Séries génératrices exponentielles

Les fonctions génératrices exponentielles sont utilisées pour compter des permutations avec répétition limitée ou des distributions d'objets différents. Autrement dit, ces suites sont utilisées lorsque l'ordre est important. Pour la méthode de *FGO* [3] nous ne pouvons pas toujours trouver la formule exacte d'une récurrence à coefficient non constant. Quelquefois, il faut recourir à une autre fonction génératrice : l'exponentielle. On appelle *Fonction génératrice exponentielle FGE* de la suite (a_n) la série de puissances

$$A(x) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Afin d'illustrer l'utilisation des *FGE* nous considérons l'exemple suivant.

Exemple Soit $a_0 = 1$ et la récurrence,

$$a_{n-1} = (n+1)(a_n - n+1), n \geq 0. \quad (2.19)$$

Si $n \geq 0$, trouvons la formule exacte pour a_n .

Nous ne pourrions pas trouver les a_n à l'aide des fonctions génératrices ordinaires.

Soit la récurrence (2.19). Posons

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

la **FGE** de la suite $a_{n \geq 0}$.

Sachant que $n! = n(n-1)!$ alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)[a_n - (n-1)], \\ \text{et} \\ \frac{a_{n+1}}{(n+1)} &= a_n - (n-1). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ensuite, multiplions les deux côtés de l'équation par $\sum_0^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ et additionnons,

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!}}_{A(x)-1} &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n!}}_{xA(x)} - \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \frac{x^{n+1}}{n!}, \\ &= \underbrace{x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}}_{xA(x)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{x^{n+1}}{n!}}_{x^2 \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}} + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= xA(x) - x^2 e^x + xe^x \\ A(x) - xA(x) &= 1 - x^2 e^x + xe^x \\ A(x)(1-x) &= 1 + xe^x(1-x) \\ A(x) &= \frac{1}{1-x} + xe^x \\ A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Alors, le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ est

$$a_n = n! + n.$$

2.6 Série génératrice des polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$

Rappelons que dans la *premier chapitre* nous avons défini les polyominos $b \times 2$. Maintenant nous allons établir leurs fonctions génératrices afin de les compter.

La fonction génératrice des polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$f(b) = 2f(b-1) + f(b-2) + 4 \quad (2.23)$$

avec les conditions initiales ;

$$f(1) = 1 \text{ et } f(2) = 5.$$

Dans un premier temps, nous allons illustrer la méthode développée par *H. Wilf* [3] à l'aide d'exemples en faisant d'abord le calcul des fonctions génératrices des polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$.

Démontrons le corollaire 1.3.5 du premier chapitre.

Considérons

$$f(x) = \sum_{b \geq 1} f(b)x^b \quad (2.24)$$

avec $f(b)$ vérifiant 2.23.

Ici $f(b)$ est le nombre total de polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= f(1)x + f(2)x^2 + f(3)x^3 + \cdots + f(b)x^b & (2.25) \\ -2xF(x) &= -2f(1)x^2 - 2f(2)x^3 - 2f(3)x^4 - \cdots - 2f(b-1)x^b \\ -x^2F(x) &= -f(1)x^3 - f(2)x^4 - f(3)x^5 - \cdots - f(b-2)x^b. \end{aligned}$$

En additionnant les expressions ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
F(x) - 2xF(x) - x^2F(x) &= f(1)x + f(2)x^2 + f(3)x^3 + \cdots + f(b)x^b \\
&\quad - 2f(1)x^2 - 2f(2)x^3 - 2f(3)x^4 - 2f(4)x^5 \cdots \\
&\quad \quad \quad f(b-1)x^b \\
&\quad - f(1)x^3 - f(2)x^4 - f(3)x^5 - \cdots \\
&\quad \quad \quad - f(b-2)x^b,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
F(x)(1 - 2x - x^2) &= f(1)x + [f(2) - 2f(1)]x^2 + [f(3) - 2f(2) - f(1)]x^3 \\
&\quad + [f(4) - 2f(3) - f(2)]x^4 + \cdots \\
&\quad + [f(b-2) - 2f(b-1) - f(b)]x^b
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Mais,

$$f(b) - 2f(b-1) - f(b-2) = 4, f(1) = 1, f(2) = 5 \tag{2.27}$$

alors en substituant dans l'équation (2.26), on obtient

$$\begin{aligned}
F(x)(1 - 2x - x^2) &= x + 3x^2 + 4[x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^b] \\
&= x + 3x^2 + 4x^3[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots] \\
&= x + 3x^2 + \frac{4x^3}{1-x},
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x + 2x^2 + x^3}{(1-x)(1-2x-x^2)} = \frac{x + 2x^2 + x^3 + 4 - 4}{(x-1)(x^2 + 2x - 1)}, \\
&= \frac{-4 - 3x - x^2}{1 - 2x - x^2} + \frac{4}{(x-1)(x^2 + 2x - 1)}.
\end{aligned}$$

La fonction génératrice a la forme rationnelle suivante, obtenue avec les méthodes bien connues sur les fractions partielles :

$$F(x) = 1 - \frac{2}{1-x} + \frac{1+x}{1-2x-x^2}. \tag{2.28}$$

Maintenant, nous allons trouver la formule exacte pour $f(b)$, $b \geq 1$, le nombre de polyominos inscrits dans un rectangle $b \times 2$. D'abord, développons la forme rationnelle de l'équation 2.28. Nous démontrons le corollaire 1.3.6 du premier chapitre. Nous procéderons par la méthode des fractions partielles. En factorisant le polynôme $1 - 2x - x^2$ et sachant que ses racines sont ;

$$r_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ et } r_2 = 1 - \sqrt{2},$$

on obtient,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{1-x} + \frac{1+x}{1-2x-x^2} &= \\ &= 1 - \frac{2}{1-x} + \frac{1+x}{(1-r_1x)(1-r_2x)} \\ &= 1 - \frac{2}{1-x} + \left(\frac{1}{(r_1-r_2)} + \frac{1}{x(r_1-r_2)} \right) \left(\frac{1}{(1-r_1x)} + \frac{1}{x(1-r_2x)} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{1-x} + \left(\frac{1}{(2\sqrt{2})} + \frac{1}{(2x\sqrt{2})} \right) \left(\frac{1}{(1-r_1x)} + \frac{1}{x(1-r_2x)} \right) \\ &= 1 - 2 \sum_{b \geq 0} x^b + \left(\frac{1}{(2\sqrt{2})} + \frac{1}{(2x\sqrt{2})} \right) \left(\sum_{b \geq 0} r_1^b x^b - \sum_{b \geq 0} r_2^b x^b \right) \end{aligned}$$

en extrayant le coefficient de x^b dans cette expression on obtient la formule exacte suivante,

$$f(b) = -2 + \frac{(1+\sqrt{2})^{b+1} + (1-\sqrt{2})^{b+1}}{2}. \quad (2.29)$$

Nous utiliserons la démonstration de la proposition 1.3.2 du premier chapitre pour illustrer le développement de la fonction génératrice $G(n)$ des polyominos d'aire n inscrits dans n'importe quel rectangle de format $b \times 2$ où la hauteur b peut varier.

La suite $g(n)$ des polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle $b \times 2$ satisfait l'équation de récurrence :

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2) + g(n-3) + 4, \quad (2.30)$$

avec les conditions initiales $g(1) = 0$, $g(2) = 1$ et $g(3) = 4$.

La suite $g(n)$ est donnée par,

$$g(n) = [1, 4, 9, 18, 35, 66, 123, 228, \dots]$$

En utilisant la méthode précédante, nous allons trouver la fonction génératrice de $g(n)$. Posons,

$$G(x) = \sum_{n \geq 1} g(n)x^n \quad (2.31)$$

alors,

$$\begin{aligned} G(x) &= g(1)x + g(2)x^2 + g(3)x^3 + \dots + g(n)x^n \\ -xG(x) &= -g(1)x^2 - g(2)x^3 - g(3)x^4 - \dots - g(n-1)x^n \\ -x^2G(x) &= -g(1)x^3 - g(2)x^4 - g(3)x^5 - \dots - g(n-2)x^n \\ -x^3G(x) &= -g(1)x^4 - g(2)x^5 - g(3)x^6 - \dots - g(n-3)x^n. \end{aligned}$$

En additionnant ces expressions ;

$$\begin{aligned} G(x) - xg(x) - x^2G(x) - x^3G(x) &= \\ g(1)x + g(2)x^2 + g(3)x^3 + \dots + g(n)x^n & \\ -g(1)x^2 - g(2)x^3 - g(3)x^4 - g(4)x^5 - \dots - g(n-1)x^n & \\ -g(1)x^3 - g(2)x^4 - g(3)x^5 - \dots - g(n-2)x^n & \\ -g(1)x^4 - g(2)x^5 - g(3)x^6 - g(4)x^7 - \dots - g(n-3)x^n, & \\ G(x)(1 - x - x^2 - x^3) &= g(1)x + [g(2) - g(1)]x^2 + [g(3) - g(2) - g(1)]x^3 \\ &\dots + [g(n-3) - g(n-2) - g(n-1) - g(n)]x^n, \\ G(x)(1 - x - x^2 - x^3) &= x^2 + 3x^3 + 4(x^4 + x^5 + \dots + x^n), \\ G(x)(1 - x - x^2 - x^3) &= x^2 + 3x^3 + 4x^4(1 + x + x^2 + x^3 + \dots), \\ G(x)(1 - x - x^2 - x^3) &= x^2 + 3x^3 + \frac{4x^4}{(1-x)}. \end{aligned}$$

La fonction génératrice a la forme rationnelle suivante :

$$G(x) = \frac{x^2 + 2x^3 + x^4}{(1-x)(1-x-x^2+x^3)}$$

Par la méthode des fractions partielles $G(x)$ devient ;

$$G(x) = 1 - \frac{2}{1-x} - \frac{x+1}{1-x-x^2+x^3}. \quad (2.32)$$

La fonction $G(x)$ est la fonction génératrice des polyominos à deux colonnes d'aire n .

Chapitre 3

Dans le *premier chapitre* nous avons présenté les polyominos d'aire minimale inscrits dans un rectangle $b \times k$. Ensuite, dans le *chapitre 2* nous avons montré quelques propositions et théorèmes sur les fonctions génératrices. Dans ce chapitre, nous aborderons un ensemble de polyominos particuliers : les polyominos inscrits d'aire $min + 1$. Cet ensemble doit satisfaire une relation spécifique. Notre objectif est d'énumérer les polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$.

Polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle

3.1 Définitions

La famille des polyominos d'aire minimale n doit satisfaire la relation

$$n = b + k - 1$$

tandis que la famille de polyominos d'aire n minimale plus un, satisfait la relation

$$n = b + k$$

où b est la hauteur et k est la largeur du rectangle circonscrit.

Voici des polyominos inscrits dans un rectangle 4×5 d'*aire minimale* et d'*aire minimale plus un* (figure 3.1) :

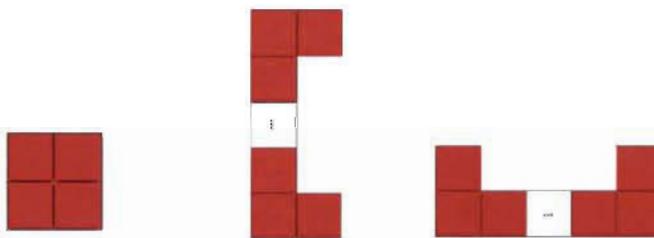
- Rangée : polyomino dont toutes les cellules sont sur une même rangée horizontale ou verticale (voir les figures jaunes 3.3) ;
- Escalier : il existe deux sortes d'escalier ; les ensembles connexes de cellules bleues sur la figure 3.3 forment des escaliers soit sud-est, soit sud-ouest.



(a) Polyomino d'aire minimale (b) Polyomino d'aire minimal plus un

FIGURE 3.1 – Polyominoes inscrits dans un rectangle 4×5

- Escalier sud-est : ensemble de cellules formant un chemin fait de pas unitaires de direction sud (\downarrow) ou est (\rightarrow) ;
- Escalier sud-ouest : ensemble de cellules formant un chemin de pas unitaires dans la direction nord (\uparrow) ou ouest (\leftarrow) ; (voir les figures bleues dans la figure 3.3) ;
- Banc : rangée horizontale ou verticale finie attachée à deux cellules carrées placées aux deux extrémités de la rangée et du même côté. Autrement dit, cet un ensemble de cellules constitué d'une rangée attachée à une cellule sur chacune de ses extrémités et situées du même côté de la rangée. Il y a trois sortes de bancs :
- Banc dégénéré : carré 2×2 de cellules. (Figure 3.2, partie a) ;
- Banc vertical : banc $t \times 2$ (Figure 3.2, partie b) où t est la longueur de la rangée ;
- Banc horizontal : banc $2 \times t$ (figure 3.2, partie c).



(a) Banc dégénéré (b) Banc vertical (c) Banc horizontal

FIGURE 3.2 – Polyominoes banc

Remarque Les polyominoes d'aire $min+1$ ne sont pas tous obtenus en ajoutant une cellule à un minimum, mais ils ont tous une cellule de plus que les polyominoes d'aire minimale (voir figure 3.4).

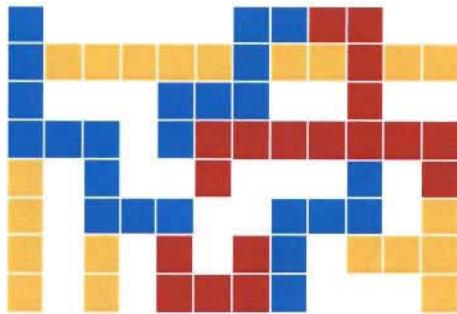


FIGURE 3.3 – Des rangées jaunes, des escaliers bleus et des bancs rouges

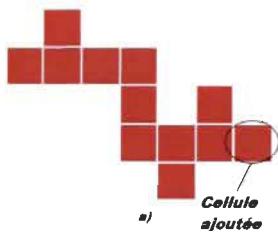
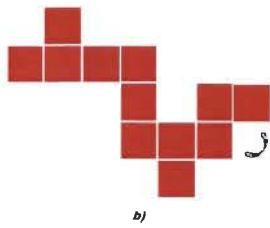
(a) Polyomino $min + 1$ obtenu en ajoutant une cellule à un polyomino minimum(b) Polyomino $min + 1$ pas obtenu en ajoutant une cellule à un minimum

FIGURE 3.4 – Polyominos d'aire minimale

Une première observation sur les polyominos d'aire minimale est qu'ils doivent avoir une forme d'escalier dont les extrémités sont probablement des équerres (Fig. 3.1). Autrement dit, s'il n'y pas de banc, c'est un polyomino d'aire

minimale, s'il y en a un, c'est un $min + 1$. Nous le démontrerons plus tard.

3.2 Polyominos d'aire $min + 1$ avec un coin donné occupé

Les polyominos d'aire $min + 1$ avec un coin donné du rectangle circonscrit occupé, aussi appelés des polyominos, coins sont utilisés pour trouver les formules exactes des polyominos d'aire minimale (voir figure 1.8 chapitre 1). Nous débuterons par l'élaboration des formules énumératives des polyominos coins d'aire minimale plus un.

Notons par $f_1(b, k, b + k)$ le nombre de polyominos d'aire $min + 1$ avec le coin supérieur gauche occupé. Ce résultat est présenté au corollaire 3.2.3 de ce chapitre.

Nous avons la décomposition $f_1(b, k, b + k)$ présentée à la figure 3.5. La

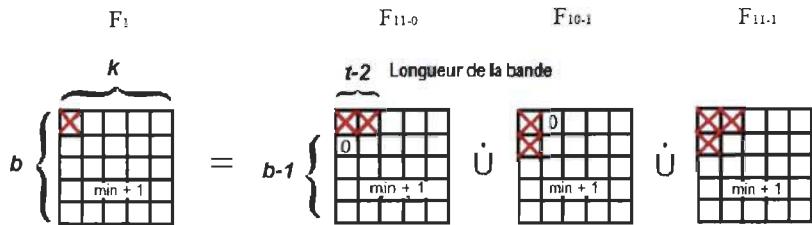


FIGURE 3.5 – Décomposition de l'ensemble $F_1(b, k, b + k)$.

noménclature utilisée est la suivante :

1. $F_1(b, k, b + k)$ est l'ensemble des polyominos inscrits dans un rectangle $b \times k$ d'aire $min + 1$ avec un coin donné occupé, disons le coin supérieur gauche.
2. $F_{11-0}(b, k, b + k)$ est l'ensemble des polyominos d'aire $min + 1$ avec le coin et la case à droite occupés et celle située dessous le coin vide.

3. $F_{10-1}(b, k, b+k)$ est l'ensemble des polyominos d'aire $min + 1$ avec le coin et la case du dessous occupés et la case à droite du coin vide.
4. $F_{11-1}(b, k, b+k)$ est l'ensemble des polyominos d'aire $min + 1$ avec la case du coin et ses deux cases adjacentes occupées.

La convention utilisée dans l'indexation des ensembles précédents s'explique comme suit : les 1 et 0 correspondent respectivement à des cases occupées et vides. Le tiret représente un passage à la ligne suivante dans le rectangle en parcourant le rectangle à partir de la gauche. L'**union disjointe** de F_{11-0} , F_{10-1} , F_{11-1} est égale à $F_1(b, k)$:

$$F_1(b, k) = F_{11-0}(b, k) \dot{\cup} F_{10-1}(b, k) \dot{\cup} F_{11-1}(b, k). \quad (3.1)$$

Cette union disjointe est symbolisée par $\dot{\cup}$. La cardinalité de l'ensemble $F_{11-0}(b, k, b+k)$ est notée $f_{b,k,b+k}$ et similairement pour les autres ensembles.

Proposition 3.2.1. *Le nombre $f_{11-0}(b, k, b+k)$ de polyominos coins d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec des cellules de la forme 11-0 dans le coin supérieur gauche satisfait la récurrence et la formule suivante :*

$$\begin{aligned} f_{11-0}(b, k, b+k) &= 2 \left[\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b}{2} - (k-2) \right] - b+ \\ &\quad f_1(b, k-1, b+k-1) \\ &= 2 \left[\binom{b+k-4}{k-1} - k^2 - 4b - 2k + 17 - 2 \binom{b+k-1}{b} \right. \\ &\quad \left. + 4(b-2) \binom{b+k-4}{k-2} \right] + 2(2k+b-7) \binom{b+k-4}{b-1} \\ &\quad + 9 \binom{b+k-3}{b-1} - 3 \binom{b+k-5}{b-2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Démonstration. *Il s'agit de constater que les polyominos coins d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec des cellules de la forme 11-0 dans le coin supérieur gauche sont comptés par les deux ensembles suivants :*

- l'ensemble A représente les deux seules façons de prolonger un banc par un polyomino minimal ; soit une équerre, soit un coin minimal, alors $A = A_1 \dot{\cup} A_2$ (A dans la figure 3.6). Autrement dit, cet ensemble a la cardinalité

de l'union des deux sous-ensembles A_1 et A_2 avec $\text{card}(A_1) = t - 1$ qui correspond aux équerres et $\text{card}(A_2) = 2 \binom{b+k-t-1}{k-1} + k - 2$ qui correspond aux coins minimaux.

- l'ensemble B correspond aux polyominos coins dans un rectangle $b \times (k - 1)$ d'aire $\min + 1$. Notamment, ce sont les polyominos avec b lignes du rectangle $b \times k$ (voir figure 3.6).

Par conséquent, on a

$$F_{11-0}(b, k, b + k) = A \dot{\cup} B.$$

Ainsi, (voir équation 3.3) :

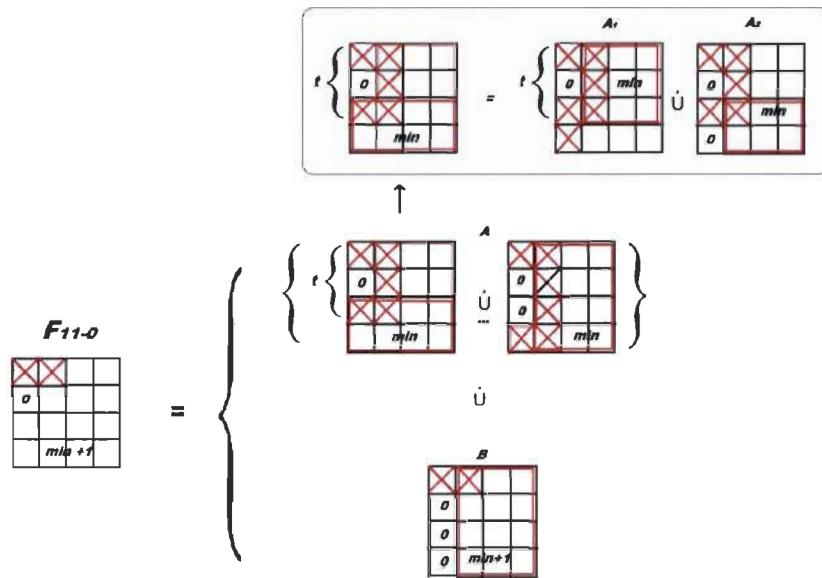
$$f_{11-0}(b, k, b + k) = 2 \overbrace{\left[\sum_{t=3}^{b-1} \binom{b+k-t-2}{k-2} + t - 1 - (k - 2) \right]}^A + b + \overbrace{f_1(b, k - 1, b + k - 1)}^B. \quad (3.3)$$

La formule de récurrence est donnée par 3.2 et elle est obtenue à l'aide de la décomposition illustrée à la figure 3.6.

L'ensemble F_{10-1} s'obtient par symétrie de l'ensemble F_{11-0} . Nous n'avons qu'à échanger les lettres b et k dans l'équation de la proposition 3.2.1 et nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1. *Le nombre $F_{10-1}(b, k, b + k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un disposition de la forme 10–1 satisfait la formule suivante :*

$$f_{10-1}(b, k, b + k) = 2 \left[\binom{b+k-4}{b-1} + \binom{k}{2} - (b-2) \right] - k + f_1(b-1, k, b+k-1) \quad (3.4)$$

FIGURE 3.6 – Polyominos d'aire $min + 1$ de type $11 - 0$

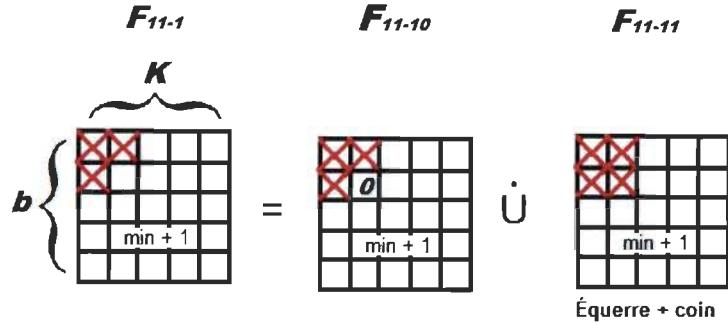
Démonstration. *Cette expression est obtenue en échangeant b et k dans l'équation 3.3 de la proposition 3.2.1.*

Notons

$$F_{11-1} = F_{11-10} \dot{\cup} F_{11-11}$$

qui traduit les deux façons de compter l'ensemble F_{11-1} en référence à la décomposition représentée à la figure 3.7.

Proposition 3.2.2. *Le nombre $f_{11-10}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 de la forme $11 - 10$ dans le coin en haut à gauche satisfait la récurrence et l'identité illustrée à*

FIGURE 3.7 – Décomposition de l'ensemble F_{11-1}

la figure 3.8. On a

$$\begin{aligned}
 f_{11-10}(b, k, b+k) &= \overbrace{\left(\sum_{i=0}^{b-3} 2 \binom{b+k-5-i}{k-2} - 1 \right)}^A + \\
 &\quad \overbrace{\left(\sum_{i=0}^{b-3} 2 \binom{b+k-5-i}{b-2} - 1 \right)}^B + \overbrace{2(b-3) + 2(k-3) + 2}^C \\
 &= 2 \left(\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b+k-4}{b-1} + b+k-6 \right) \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser la représentation de l'identité apparaissant à la figure 3.8 :

- L'ensemble A compte les polyominos coins avec un banc vertical $t \times 2$ dans le coin supérieur gauche ;
- L'ensemble B compte les polyominos coins avec un banc horizontal dans le coin supérieur gauche ;
- L'ensemble C compte les polyominos d'aire $\min + 1$ avec trois coins donnés

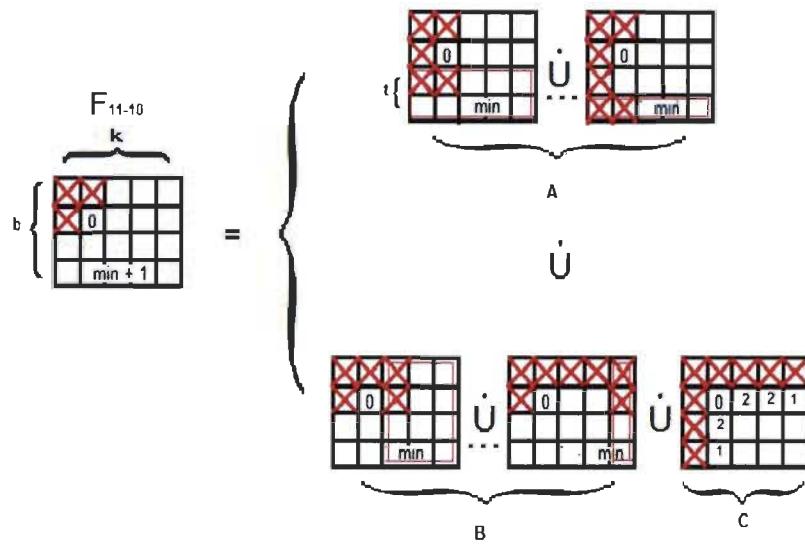


FIGURE 3.8 – Polyomino d'aire $min + 1$ avec un coin occupé par une équerre 2×1

occupés.

L'union disjointe des ensembles A , B et C nous donne la formule de récurrence pour f_{11-10} .

La proposition suivante fournit la formule pour les polyominos $min + 1$ avec trois coins occupés $f_{1,1,1}(b, k, b+k)$. Nous nous en servirons ultérieurement.

Proposition 3.2.3. *Le nombre $f_{1,1,1}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire minimale plus un inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec trois coins donnés occupés est donné par*

$$f_{1,1,1}(b, k, b+k) = 2(b+k-3) - 1 \quad (3.6)$$

Démonstration. Il faut décomposer le dénombrement en deux étapes. La première étape permet de compter les polyominos formés par des déplacements horizontaux ou diagonaux de cellules. La deuxième étape permet de compter les polyominos formés par des déplacements verticaux de cellules.

Dans la figure 3.9, l'ensemble A montre un polyomino qui a sa première ligne du haut occupée, la dernière colonne de droite occupée, et la case située au-dessous du coin supérieur gauche occupée, et les polyominos coins d'aire $min + 1$ résultants du déplacement horizontal sur la seconde ligne de la case à gauche jusqu'à l'avant-dernière position.

L'ensemble B contient les polyominos dont la première ligne est de la forme $1, 0, 0, \dots, 0, 1$ et les polyominos coins d'aire $min + 1$ résultants du déplacement diagonal vers la droite et le haut de la case située au dessous du coin supérieur gauche jusqu'à l'avant-dernière position.

De toute évidence, dans l'ensemble C , le singleton contenant un banc dégénéré est compté deux fois, donc il faudra en enlever un plus tard. En effet, nous constatons que la cardinalité de l'union des ensembles A et B est :

$$card(A \cup B) = 2(k - 1)$$

Ensuite, dans la figure 3.10, l'ensemble D , regroupe les polyominos dont la case située à gauche du coin inférieur droit se déplace verticalement, sur la deuxième colonne jusqu'à l'avant-dernière position, et E rassemble les polyominos résultants du déplacement diagonal des cases de la colonne de droite de coin inférieur droit.

Alors, nous constatons que la cardinalité de $D \cup E$ est :

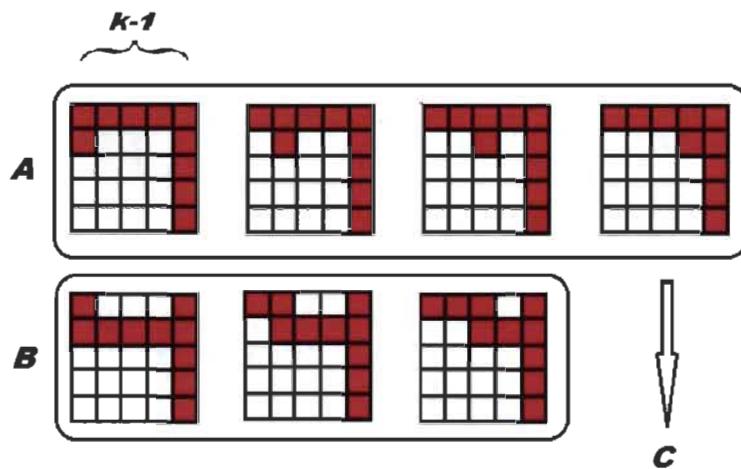


FIGURE 3.9 – Polyominos d'aire $\min + 1$ avec trois coins occupés. Étape 1 de la preuve de la proposition 3.2.3

$$\text{card}(D \cup E) = 2(b - 2)$$

Autrement dit, il y a $2(b - 2)$ polyominos coins dont la première ligne est de la forme $(1, 1, \dots, 1, 1)$ et en plus, il faut que les deux colonnes à droite contiennent au moins une cellule.

Donc, nous avons compté $2(b - 2) + 2(k - 1)$ polyominos avec trois coins donnés occupés. Puisque nous avions compté deux fois le banc dégénéré dans l'ensemble C et il faut en retirer un.

En conséquence, le nombre de polyominos d'aire $\min + 1$ occupant trois coins

donnés est,

$$f_{1,1,1}(b, k, b+k) = 2(b-2) + 2(k-1) - 1 = 2(b+k-3) - 1 \quad (3.7)$$

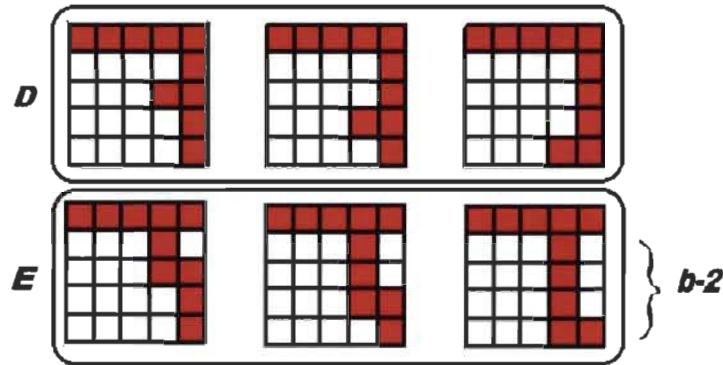


FIGURE 3.10 – Polyominos d'aire $\min + 1$ avec trois coins occupés. Étape 2 de la preuve de la proposition 3.2.3.

Nous remarquons que pour les polyominos inscrits dans un rectangle $b \times k$ occupant trois coins et tel que $b \geq 3$ et $k \geq 3$, le quatrième coin n'est jamais occupé de même que la case au-dessus de ce coin.

Proposition 3.2.4. *Le nombre $f_{11-11}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 dans le coin en haut à gauche satisfait la récurrence*

$$\begin{aligned} f_{11-11}(b, k, b+k) &= \overbrace{f_1(b-1, k-1, \underbrace{b+k-3}_{\min})}^A + \overbrace{3}^B \\ &= \left(\binom{b+k-4}{b-2} - 1 \right) + 3, b, k \geq 3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Démonstration. Il s'agit de constater que les polyominos inscrits d'aire minimale plus un avec un carré 2×2 dans le coin supérieur gauche appartiennent à l'un des deux ensembles suivants :

- l'ensemble A qui compte les polyominos d'aire minimale inscrits dans un rectangle $(b - 1) \times (k - 1)$,
- l'ensemble B qui compte les polyominos d'aire $min + 1$ contenant un carré 2×2 dans le coin supérieur gauche du rectangle, une rangée horizontale et un vertical attachés au carré 2×2 . Il existe quatre façons d'attacher les rangées au carré. Comme les polyominos coins d'aire minimale contiennent des équerres attachées au coin inférieur droit du carré 2×2 , nous devons, par le principe d'inclusion-exclusion, soustraire de l'ensemble B le cas des deux rangées attachées au coin inférieur droit du carré 2×2 .

En calculant l'union disjointe de A et B nous avons prouvé la proposition 3.2.4

Dans la figure 3.11, F_{11-11} représente l'union disjointe des ensembles A et B . Autrement dit,

$$F_{11-11}(b, k) = A \dot{\cup} B$$

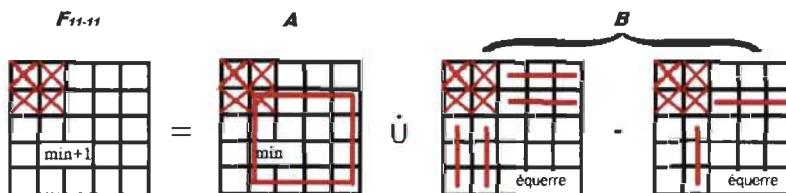


FIGURE 3.11 – Polyominos d'aire $min + 1$ avec un coin occupé par un carré 2×2

Maintenant, nous allons trouver les formules pour l'ensemble $F_{11-1}(b, k, b+k)$.

Corollaire 3.2.2. *Le nombre $f_{11-1}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrit dans un rectangle $b \times k$ avec une équerre 2×1 dans le coin en haut à gauche satisfait la formule :*

$$\begin{aligned}
 f_{11-1}(b, k, b+k) &= 2 \overbrace{\left(\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b+k-4}{b-1} + b+k-6 \right)}^{f_{11-10}(b, k, b+k)} + \\
 &\quad \overbrace{\left(2 \left(\binom{b+k-4}{b-2} + 2 \right) \right)}^{f_{11-11}(b, k, b+k)} \\
 &= 2 \left(\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b+k-4}{k-2} + \right. \\
 &\quad \left. \binom{b+k-4}{k-3} + b+k-5 \right) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Démonstration. *Dans la figure 3.7, nous avons la partition suivante :*

f_{11-1} : *nombre de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrit dans un rectangle $b \times k$ avec une équerre 2×1 ;*

f_{11-10} : *nombre de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrit dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 dans un coin où la case diagonale au coin n'est pas occupée ;*

f_{11-11} : *nombre de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrit dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 complet.*

Il faut démontrer que

$$F_{11-10} \dot{\cup} F_{11-11} \subseteq F_{11-1}, \text{ et } F_{11-1} \subseteq F_{11-10} \dot{\cup} F_{11-11} \quad (3.10)$$

(\subseteq) : Des hypothèses, nous savons que les ensembles F_{11-10} et F_{11-11} sont disjoints puisqu'ils ont été posés ainsi : $F_{11-10} \cap F_{11-11} = \emptyset$. Alors, cet ensemble contient les polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 dont un coin du carré vide. Donc, cet ensemble est contenu dans l'ensemble F_{11-1} , conséquemment $F_{11-10} \dot{\cup} F_{11-11} \subseteq F_{11-1}$.

(\supseteq) : Réciproquement, l'ensemble F_{11-1} contient les polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré dont nous ne savons pas si le coin inférieur droit est occupé. Il est évident que ces polyominos sont contenus dans $F_{11-10} \dot{\cup} F_{11-11}$.

Dans la proposition 3.2.4 et le corollaire 3.2.2 et , nous avons rassemblé les polyominos d'aire $\min + 1$ avec un coin occupé par une équerre 2×1 et les polyominos d'aire $\min + 1$ avec un coin occupé par un carré 2×2

En rassemblant tous ces résultats, nous avons la formule $f_1(b, k, b + k)$ pour le nombre de polyominos d'aire minimale plus un avec la case occupée dans le coin supérieur gauche. On a le résultat suivant :

Théorème 3.5. *Le nombre $f_1(b, k, b + k)$ de polyominos d'aire minimale plus un inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec une case dans le coin supérieur gauche occupée est donné par*

$$f_1(b, k, b+k) = \begin{cases} 1 + 4 \binom{b-1}{2} & \text{si } k = 2 \\ 1 + 4 \binom{k-1}{2} & \text{si } b = 2 \\ 2 \left[\binom{b+k-4}{b-1} + \binom{k-1}{2} - 2 \right] + k + \\ f_1(b-1, k, b+k-1) + \\ 2 \left[\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b-1}{2} - 2 \right] + b + \\ f_1(b, k-1, b+k-1) + \\ 2 \left[\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b+k-4}{k-2} + \binom{b+k-4}{k-3} \right] \\ + b + k - 5 & \text{si } b, k \geq 3 \end{cases}$$

Démonstration. Nous avons

$$f_1(b, k, b+k) = f_{11-0} + f_{10-1} + f_{11-1}. \quad (3.11)$$

Posons $F_1(b, k, b+k)$, l'union disjointe des ensembles suivants,

$$F_1(b, k, b+k) = F_{11-0} \dot{\cup} F_{10-1} \dot{\cup} F_{11-1}.$$

Soit

$$F_{11-0} \dot{\cup} F_{10-1} \dot{\cup} F_{11-1}, \quad (3.12)$$

l'ensemble de polyominos contenant une équerre dans le coin supérieur gauche.

Alors, cet ensemble est contenu obligatoirement dans le sous-ensemble des polyominos avec le coin supérieur gauche occupé. Donc, $F_{11-0} \dot{\cup} F_{10-1} \dot{\cup} F_{11-1} \subseteq F_1$.

Par définition, nous savons que l'ensemble $F_1(b, k, b+k)$ contient les polyominos inscrits avec le coin supérieur gauche occupé, donc l'ensemble F_1 est entièrement contenu dans l'union disjointe

$$F_{11-0}(b, k, b+k) \dot{\cup} F_{10-1}(b, k, b+k) \dot{\cup} F_{11-1}(b, k, b+k). \quad (3.13)$$

En utilisant l'équivalence 3.10, nous constatons que $f_1(b, k, b+k) = f_{11-0} + f_{10-1} + f_{11-1}$.

Corollaire 3.2.3. Pour tous les entiers $b \geq 2$ et $k \geq 2$, le nombre $f_1(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec une case occupée dans le coin supérieur gauche satisfait la formule suivante :

$$\begin{aligned} f_1(b, k, b+k) = & -b^2 - k^2 - 2b - 2k + 12 - 2 \binom{b+k}{b} + 4(b-2) \binom{b+k-3}{k-1} \\ & + 4(k-2) \binom{b+k-3}{b-1} + 2(b+k-3) \binom{b+k-4}{b-2} + \\ & 9 \binom{b+k-2}{b-1} - 3 \binom{b+k-4}{b-2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Démonstration. La récurrence du théorème 3.5 peut s'écrire comme suit :

$$f_1(b, k, b+k) = f_1(b-1, k, b+k-1) + f_1(b, k-1, b+k-1) + g(b, k)$$

où

$$\begin{aligned} g(b, k) = & 2 \left[\binom{b+k-4}{b-1} + \binom{k-1}{2} - 2 \right] + k + 2 \left[\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b-1}{2} - 2 \right] \\ & + b + 2 \left[\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{b+k-4}{k-2} + \binom{b+k-4}{k-3} + b + k - 5 \right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 f_1(b, k, b+k) &= \sum_{i=0}^{b-3} \sum_{j=0}^{k-3} \binom{i+j}{i} g(b-i, k-j) + \sum_{j=0}^{k-3} \binom{b-3+j}{b-3} g(2, k-j) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{b-3} \binom{-3+i+k}{k-3} g(b-i, 2) \\
 &= \sum_{i=0}^{b-3} \sum_{j=0}^{k-3} \binom{i+j}{i} \left[4 \binom{b-1+k-j-4}{b-i-1} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\binom{k-j-1}{2} + \binom{b-i-1}{2} \right) \right] \\
 &\quad + 3(b-i+k-j-6) + 4 \binom{b-1+k-j-4}{b-i-1} + \\
 &\quad 2 \binom{b-1+k-j-4}{b-i-2} \\
 &\quad + \sum_{j=0}^{k-3} \binom{b-3+j}{b-3} \left(1 + 4 \binom{k-j-1}{2} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{b-3} \binom{k-3+i}{b-3} \left(1 + 4 \binom{b-i-1}{2} \right). \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Nous passons de l'équation 3.14 à l'expression 3.15 en utilisant une variante de *l'identité de Vandermonde*.

Dans la table 3.2 sont affichés quelques résultats sur le nombre de polyominos coins d'aire $min + 1$.

Voici un résultat intéressant dont nous aurons besoin plus tard.

Corollaire 3.2.4. *Le nombre $f_{11}(b, k, b+k)$ de polyominos coins d'aire $min+1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec une rangée dans le coin supérieur*

b/k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	5	13	25	41	61	85	113	145
3	5	26	72	153	279	460	706	1027	1433
4	13	72	206	466	917	1638	2722	4276	6421
5	25	153	466	1128	2386	4588	8201	13829	22231
6	41	279	917	2386	5418	11169	21364	38464	65855
7	61	460	1638	4588	11169	24606	50161	96001	174289
8	85	706	2722	8201	21364	50161	108620	220196	422377

TABLEAU 3.1 – Nombre de polyominos coins d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$

gauche est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 f_{11}(b, k, b+k) = & 4 \binom{b+k-4}{k-1} - 2b + 7 - k^2 - 2 \binom{b+k-1}{b} + \\
 & 4(b-2) \binom{b+k-4}{k-2} + 4(k-3) \binom{b+k-4}{b-1} \\
 & + (2b+2k-11) \binom{b+k-5}{b-2} + 11 \binom{b+k-3}{b-1}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Démonstration. Posons

$$F_{11}(b, k, b+k) = F_{11-0} \dot{\cup} F_{10-1} \quad (3.17)$$

Alors, l'égalité 3.17 est obtenue en rassemblant les résultats de la proposition 3.2.1 et du corollaire 3.4.

3.3 Polyominos d'aire minimale plus un contenant un carré 2×2

Dans cette section, nous allons énumérer les polyominos d'aire $min + 1$ qui contiennent un carré 2×2 . Nous utiliserons les formules déjà prouvées pour les polyominos coins et pour les polyominos d'aire minimale. Le premier cas

a déjà été traité au début de la section précédente. Nous allons maintenant traiter les cas deux et trois suivants.

Pour énumérer ces polyominos, il faut considérer les trois cas :

Cas 1 : Le carré est dans un coin (traité dans le chapitre 1) ;

Cas 2 : Le carré a des cases sur un bord du rectangle et n'est pas dans un coin ;

Cas 3 : Le carré n'a pas de case sur un bord du rectangle.

Cas 2

Ce cas correspond aux polyominos qui ont un carré sur un bord sans être situé dans un coin. La proposition suivante établit la récurrence pour quelques polyominos d'aire $min + 1$ particuliers.

Proposition 3.3.1. *Le nombre $f_{2 \times 2y}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire minimale plus un inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 situé sur le bord vertical du rectangle donné et la case inférieure gauche située à hauteur y satisfait la récurrence suivante :*

$$f_{2 \times 2y}(b, k, b+k) = f_{11}(b-y, k, b-y+k-1) f_{11}(y, 2, y+1) + \\ f_{11}(y, k, y+k-1) f_{11}(b-y, 2, b-y+1) \quad (3.18)$$

$$= 2f_{11}(b-y, k, b-y+k-1) + 2f_{11}(y, k, y+k-1) \\ = 4 \binom{b-y+k-3}{k-2} + 4 \binom{y+k-3}{k-2}. \quad (3.19)$$

Démonstration. Pour dénombrer les polyominos $f_{2 \times 2y}(b, k, b+k)$, nous utilisons l'union disjointe de deux ensembles :

$$F_{2 \times 2y}(b, k, b+k) = A \dot{\cup} B \quad (3.20)$$

Pour obtenir ce résultat, il est indispensable de fractionner les polyominos de chaque ensemble **A** et **B** en deux autres sous-ensembles (figure 3.12).

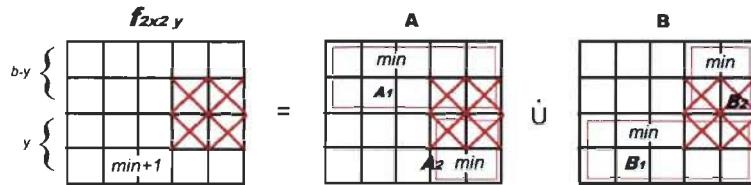


FIGURE 3.12 – Polyominos d'aire $min + 1$ avec un bord occupé par un carré 2×2

Posons A , la partition de l'ensemble $f_{2 \times 2}$ décrite sur la figure 3.12. Le carré 2×2 sur le bord est sectionné au milieu et horizontalement tout au long de l'ensemble A (voir partie A dans la figure 3.12), en deux polyominos d'aire minimale. Appelons A_1 , l'ensemble des polyominos situés au-dessus de hauteur $b - y$ et de largeur k et A_2 l'ensemble des polyominos 2×2 situés au-dessous de hauteur y et de largeur 2 (figure 3.12). De toute évidence, on obtient un produit de la cardinalité des deux sous-ensembles. À cet effet, nous utilisons le principe de multiplication. Alors,

$$\text{card}(A) = \text{card}(A_1) \cdot \text{card}(A_2) \quad (3.21)$$

de telle façon que,

$$\text{card}(A_1) = f_{11}(b - y, k, b - y + k - 1)$$

et,

$$\text{card}(A_2) = f_{11}(y, 2, y + 1).$$

Ceci implique que,

$$f_{11}(b-y, k, b-y+k-1) f_{11}(y, 2, y+1) = \text{card}(A). \quad (3.22)$$

D'autre part, soit B l'ensemble fractionné de tous les polyominos d'aire minimale avec un carré 2×2 sur le bord, sans toucher les coins. Appelons B_1 , le polyomino situé au-dessous de hauteur y et de largeur k (figure 3.12) et l'ensemble B_2 des polyominos situés au-dessous de hauteur $b-y$ et de largeur 2. De la même manière, à l'aide du principe de multiplication, nous faisons le produit entre les cardinalités des sous-ensembles, ce qui donne,

$$\text{card}(B) = \text{card}(B_1) \cdot \text{card}(B_2) \quad (3.23)$$

d'où,

$$\text{card}(B_1) = f_{11}(y, k, y+k-1)$$

et,

$$\text{card}(B_2) = f_{11}(b-y, 2, b-y+1).$$

D'où,

$$f_{11}(y, k, y+k-1) f_{11}(b-y, 2, b-y+1) = \text{card}(B) \quad (3.24)$$

En remplaçant les équations 3.22 et 3.24 dans 3.20, nous obtenons la récurrence,

$$\begin{aligned} f_{2 \times 2, y}(b, k, b+k) &= f_{11}(b-y, k, b-y+k-1) f_{11}(y, 2, y+1) + \\ &\quad f_{11}(y, k, y+k-1) f_{11}(b-y, 2, b-y+1) \\ &= 2 f_{11}(b-y, k, b-y+k-1) + 2 f_{11}(y, k, y+k-1). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Il nous reste à préciser que $F_{11}(y, 2, y+1) \subseteq F_{11}(y, k, y+k-1)$ et $F_{11}(b-y, 2, b-y+1) \subseteq F_{11}(b-y, k, b-y+k-1)$, d'où nous déduisons la formule 3.25.

Ensuite, nous faisons la somme sur toutes les positions possibles du carré 2×2 sur le bord vertical du rectangle $b \times k$. Cette approche sera illustrée au corollaire suivant.

Corollaire 3.3.1. *Le nombre $f_{2 \times 2b,y}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un 2×2 situé sur un bord vertical satisfait la récurrence suivante ;*

$$\begin{aligned} f_{2 \times 2,y}(b, k, b+k) &= 2 \sum_{y=2}^{b-2} 4f_{11}(b-y, k, b-y+k-1) + 4f_{11}(y, k, y+k-1) \\ &= 8 \sum_{y=2}^{b-2} \left[\binom{b-y+k-3}{k-2} + \binom{y+k-3}{k-2} \right] \\ &= 16 \left[\binom{b+k-4}{k-1} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Démonstration. Dans la récurrence 3.25 nous avons trouvé quatre façons différentes d'énumérer les polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ situé sur un bord vertical sans toucher au coin du même rectangle pour chacun des ensembles A et B de la figure 3.12. En échangeant x et y dans l'équation 3.26, nous trouvons les polyominos symétriques qui contiennent deux fois le nombre de polyominos $f_{2 \times 2,y}(b, k, b+k)$.

Finalement, en faisant la somme sur toutes les positions possibles des carrés 2×2 , autres que les coins, nous obtenons quatre fois le nombre de polyominos $f_{2 \times 2,y}(b, k, b+k)$. D'où, la formule exacte qui est définie pour trois cas particuliers :

$$f_{2 \times 2b}(b, k, b+k) = \begin{cases} 4(b-3) & \text{si } k = 2 \text{ et } b \geq 3 \\ 4(k-3) & \text{si } k = 2 \text{ et } b \geq 3 \\ 2 \left[\binom{b+k-4}{k-1} + \binom{k+k-4}{b-1} - 2 \right] & \text{si } b, k \geq 3. \end{cases}$$

Cas 3

Ce cas correspond aux polyominos qui contiennent un carré 2×2 qui ne touche pas aux bords.

Proposition 3.3.2. *Le nombre $f_{2 \times 2, x, y}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 situé à l'intérieur du rectangle sans toucher aux bords satisfait la récurrence suivante :*

$$\begin{aligned} f_{2 \times 2, x, y}(b, k, b+k) &= f_{11-11}(b-y+1, x+1, b+x-y+2) \\ &\quad f_{11-11}(y+1, k-x+1, k-x+y+2) + \\ &\quad f_{11-11}(b-y+1, x+1, b+x-y+2) \\ &\quad f_{11-11}(y+1, x+1, x+y+2) - 16. \end{aligned}$$

Démonstration. *Le nombre de polyominos $f_{2 \times 2, x, y}(b, k, b+k)$ avec un carré 2×2 dont la case inférieure gauche a les coordonnées cartésiennes (x, y) par rapport au coin inférieur gauche du rectangle est obtenu par une somme de produits de polyominos dont les carrés 2×2 sont dans un coin pour une diagonale du rectangle $b \times k$. Nous aurons,*

$$\text{card}(A) = \text{card}(A_1) \cdot \text{card}(A_2). \quad (3.27)$$

A est l'ensemble des polyominos qui contiennent le produit de deux sous-ensembles de polyominos d'aire minimale plus un A_1 et A_2 situés sur les coins

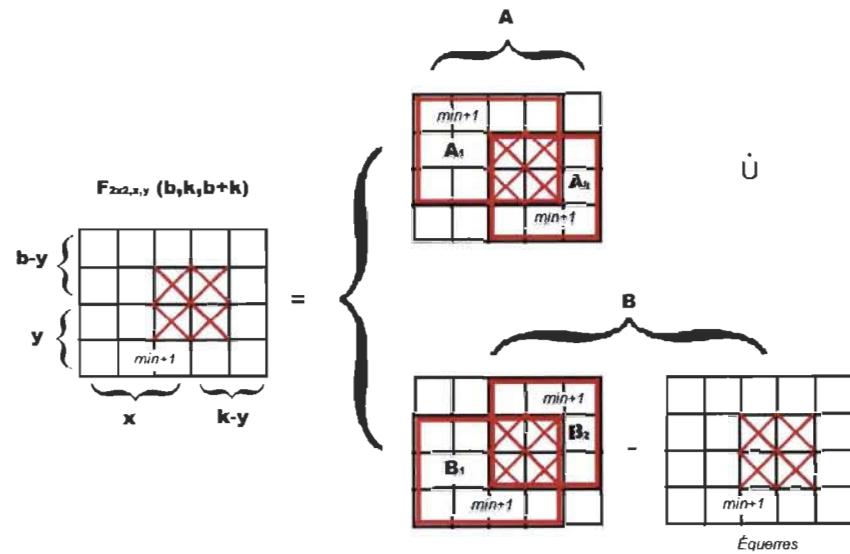


FIGURE 3.13 – Polyominos d'aire $min + 1$ avec un carré 2×2 intérieur qui ne touche à aucun bord

supérieur gauche et inférieur droit respectivement de rectangles circonscrits (voir figure 3.13).

Nous avons que,

$$\begin{aligned}
 \text{card}(A_1) &= f_{11-11,x,y}(b-y+1, x+1, b+x-y+2) \quad (3.28) \\
 &= \left(2 \binom{b-y+x-2}{b-y-1} + 2 \right).
 \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \text{card}(A_2) &= f_{11-11,x,y}(y+1, k-x+1, k-x+y+2) \\ &= \binom{2(k-x+y-2)}{y-1} + 2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

par le corollaire 3.16.

D'autre part, nous additionons le produit correspondant à l'autre diagonale du rectangle. Appelons cet ensemble B , lequel satisfait,

$$\text{card}(B) = \text{card}(B_1) \cdot \text{card}(B_2) \quad (3.30)$$

où B est l'ensemble des polyominos qui contient le produit de deux sous-ensembles des polyominos d'aire minimale plus un B_1 et B_2 situés sur les coins supérieur droit et inférieur gauche respectivement du rectangle circonscrit (voir figure 3.13). Alors, par le corollaire 3.16,

$$\text{card}(B)_1 = f_{11-11,x,y}(b-y+1, k-x+1, b+k-x-y+2) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} &= \binom{2(b+k-x-y-2)}{b-y-1} + 2 \\ & \quad (3.32) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \text{card}(B_2) &= f_{11-11,x,y}(y+1, x+1, x+y+2) \\ &= \binom{2(x+y-2)}{y-1} + 2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si nous remplaçons les équations 3.28 et 3.31 dans 3.27 et 3.30 respectivement, nous obtenons,

$$f_{2 \times 2, x, y}(b, k, b+k) = \text{card}(A \cup B) \quad (3.34)$$

Il faut soustraire les 16 équerres comptées deux fois, qui correspondent aux 2 carrés et aux 4 équerres. Autrement dit,

$$2^4 = 16 \text{ équerres.}$$

Finalement, en rassemblant le tout, nous obtenons la formule de récurrence,

$$\begin{aligned} f_{2 \times 2, x, y}(b, k, b+k) &= \left(2 \binom{b-y+x-2}{b-y-1} + 2 \right) \left(2 \binom{k-x+y-2}{y-1} + 2 \right) \\ &\quad + \left(2 \binom{b+k-x-y-2}{b-y-1} + 2 \right) \left(2 \binom{x+y-2}{y-1} + 2 \right) - 16. \quad (3.35) \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à faire la somme de toutes les positions (x, y) possibles. Ce qui nous ammène à la proposition suivante.

Proposition 3.3.3. *Le nombre de $f_{2 \times 2c}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec $b \geq 4$, $k \geq 4$ et avec un carré 2×2 situé à l'intérieur du rectangle sans toucher aux bords satisfait la formule suivante :*

$$\begin{aligned} f_{2 \times 2c}(b, k, b+k) &= \sum_{x=2}^{k-2} \sum_{y=2}^{b-2} f_{2 \times 2, x, y}(b, k, b+k) \\ &= 8 \left[\binom{b+k-4}{b-3} (b-3) \binom{b+k-4}{k-3} (k-3) \right. \\ &\quad \left. \binom{b+k-4}{b-2} + b+k-bk+1 \right]. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Démonstration. Étant donné qu'on a fait un produit d'ensembles dans l'équation 3.35, il faut utiliser le principe de multiplication pour déduire sa

récurrence. Ce produit se traduit par la double sommation dans la formule 3.36 des polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un carré 2×2 situé à l'intérieur du rectangle sans toucher les bords.

Maintenant, nous assemblons les trois cas et déduisons une formule générale.

Théorème 3.6. *Pour tous entiers positifs b, k le nombre $f_{2 \times 2}(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ et contenant un carré 2×2 satisfait la formule suivante :*

$$f_{2 \times 2}(b, k, b+k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \text{ ou } b = 1 \\ 1 & \text{si } k = 2 \text{ et } b = 2 \\ 4(b+k-4) & \text{si } b = 2 \text{ et } k > 2 \\ & \text{ou} \\ & \text{si } b > 2 \text{ et } k = 2 \\ 8 \left(\binom{b+k-4}{b-2} + 2 \binom{b+k-4}{b-1} + 2 \binom{b+k-4}{k-1} - 3 \right) & \text{si } b = 3 \text{ ou } k = 3 \\ 8 \left[\left(\binom{b+k-4}{b-2} + 1 \right) (b+k-2) - bk \right] & \text{si } b \geq 4 \text{ et } k \geq 4 \end{cases}$$

Finalement, la formule exacte pour $f_{2 \times 2}(n)$ est

$$\begin{aligned} f_{2 \times 2} &= \sum_{b=2}^{n-2} f_{2 \times 2}(b, n-b) \\ &= 8(n-4) + 16(n-3)(n-5) + \sum_{b=4}^{n-4} f_{2 \times 2}(b, n-b) \\ &= 2^{n-1}(n-2) - \frac{4n}{3}(n^2 - 6n + 11), \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

Démonstration. En rassemblant les formules trouvées dans les trois cas : la proposition 1.4.2 dans le premier chapitre, et le cas deux et trois dans les équations 3.3 et 3.36 respectivement, nous arrivons à une formule générale

des polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ contenant un carré 2×2

b/k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	4	8	12	16	20	24	28	32
3	4	24	64	120	192	280	384	504	640
4	8	64	208	456	832	1360	2064	2968	4096
5	12	120	456	1144	2352	4280	7160	11256	16864
6	16	192	832	2352	5392	10840	19872	33992	55072
7	20	280	1360	4280	10840	23896	47704	88312	154000
8	24	384	2064	7160	19872	47704	103088	205464	383872
9	28	504	2968	11256	33992	88312	205464	438776	874576
10	32	640	4096	16864	55072	154000	383872	874576	1852624

TABLEAU 3.2 – Nombre $f_{2 \times 2}$ de polyominos d'aire $n = b + k$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ contenant un banc 2×2

b/k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f_{2 \times 2(n)}$	0	1	8	40	152	480	1336	3416	8248	19152	43288

TABLEAU 3.3 – Nombre $f_{2 \times 2}(n)$ de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle de périmètre $2n$ contenant un banc 2×2 .

Le cas général

À la lumière des énumérations que nous venons de faire, différentes approches s'offrent à nous pour compter le nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$. Nous allons prendre l'approche qui utilise les *polyominos-bancs* illustrés sur la figure 3.16.

Proposition 3.3.4. *Pour former un polyomino d'aire $min + 1$ inscrit dans un rectangle $b \times k$ nous suivons la procédure suivante :*

1. *Nous choisissons un banc ;*

2. Nous choisissons une diagonale du rectangle ;
3. Nous attachons un coin minimal ou une équerre deux fois sur le banc $2 \times t$ dans les deux quadrants de la diagonale choisie.

Démonstration. En ayant déjà effectué les deux premières étapes, nous présentons la troisième étape, soit l'attachement d'une équerre à un banc.

Une équerre a deux bras et chacun des bras est attaché à une cellule du banc situé sur le périmètre du rectangle circonscrit (figure 3.14)

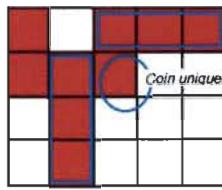


FIGURE 3.14 – Un attachement d'équerre en correspondance avec un unique coin du banc

En observant que la seule façon d'obtenir un polyomino d'aire $min + 1$ est en construisant un polyomino contenant un banc puis en continuant avec un polyomino d'aire minimale. Tout d'abord, il faut attacher ce polyomino contenant un banc aux équerres tel qu'illustre à la figure 3.14, en tenant compte les différentes positions qu'il peut y occuper (figure 3.15).

Globalement, nous obtenons le nombre $f_{min+1}(b, k)$ de la façon suivante.

Définition 3.3.1. Appelons les pattes d'un banc les deux cellules du banc de degré 1.

$$f_{min+1}(b, k) = \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} = f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2 - \theta t$$

Diagram illustrating the decomposition of a function $f_{min+1}(b, k)$ into a sum of terms involving f_1 and f_2 . The terms are represented by grids with red 'x' marks. The first term is $f_1 \cdot f_2$, the second is $f_1 \cdot f_2$, and the third is θt . The grids show various patterns of red 'x' marks, with labels f_1 and f_2 indicating the components. The labels $min+1$ and b are also present.

FIGURE 3.15 – Polyominos d'aire $\min + 1$

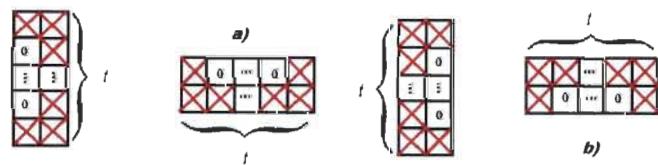


FIGURE 3.16 – Les polyominos qui contiennent un banc $2 \times t$

Proposition 3.3.5. Soient $f_1^t(b, k)$ et $f_2^t(b, k)$ le nombre de polyominos d'aire minimale plus un inscrits et situés à l'intérieur d'un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc de longueur $t < k$ dans le coin supérieur-gauche, la rangée pleine en haut et en bas du banc adjacent au côté supérieur respectivement. Notons $f_{min+1}(b, k)$ le nombre total de polyominos

d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$. Nous avons

$$f_{min+1}(b, k) = \sum_{R(t) \subseteq b \times k} 2f_{1,R}^t(b_1, k_1) f_{2,R}^t(b_2, k_2) - E \quad (3.37)$$

où la somme est prise sur tous les rectangles R de format $t \times 2$ inclus dans un rectangle $b \times k$ et E est le nombre d'équerres doublement comptées.

Démonstration. Observons la décomposition illustrée sur la figure 3.15 qui fait usage des principes fondamentaux de l'énumération. Cette identité affirme que les polyominos d'aire $min + 1$ sont tous obtenus à partir de polyominos-banc situés dans un coin d'un sous-ensemble auxquels on attache un polyomino d'aire minimale. Notons f_1 et f_2 le nombre de façons d'attacher un polyomino d'aire minimale à chaque coin d'une diagonale. Soient $f_1 \cdot f_2$ et $f_2 \cdot f_1$ les produits de deux polyominos attaché indépendamment et diagonalement pour chaque banc. Dans la somme $f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_1$, les équerres attachées au polyominos-banc sont comptées deux fois et par le principe d'inclusion-exclusion on doit les soustraire une fois.

Remarque

Les séries génératrices $f_1^t(x, y) f_2^t(x, y)$ le long d'une diagonale sont à priori différentes des séries $f_3^t(x, y) f_4^t(x, y)$ le long de l'autre diagonale. Après une brève réflexion, nous réalisons le fait que $f_1^t(x, y) = f_3^t(x, y)$ et $f_2^t(x, y) = f_4^t(x, y)$ (figure 3.17).

Il reste à compter les polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ contenant un polyomino contenant un banc dans un coin. Deux cas sont à considérer.

La proposition suivante partage l'équation 3.37 en deux cas : les polyominos avec la rangée pleine en haut ou en bas du banc adjacente au côté supérieur. Cette proposition est le préambule du premier cas traitant des bancs situés dans un coin.

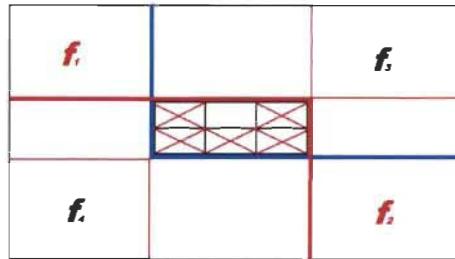


FIGURE 3.17 – Les séries génératrices le long d'une diagonale

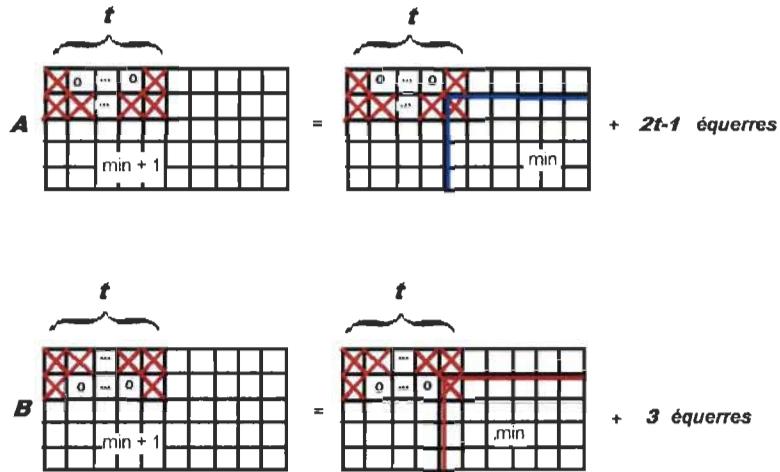
Dans la figure 3.16, la partie a représente les polyominos avec la rangée pleine en bas et la partie b représente les polyominos avec la rangée pleine en haut.

Proposition 3.3.6. *Soit $f_1^t(b, k)$ le nombre de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrit dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc de longueur $3 \leq t < k$ dans le coin supérieur-gauche, la rangée pleine en haut du banc adjacente ou côté supérieur. De même, soit $f_2^t(b, k)$ le nombre de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc dans le coin supérieur-gauche, la rangée pleine en bas du banc adjacente au côté supérieur. Alors*

$$f_1^t(b, k) = 2 \binom{b+k-t-2}{b-2} + 2, \quad 2 < t < k, \quad (3.38)$$

$$f_2^t(b, k) = 2 \binom{b+k-t-2}{b-2} + 2(t-1), \quad 2 < t < k, \quad (3.39)$$

Démonstration. Soit $\text{card}(A) = f_2^t(b, k)$ et $\text{card}(B) = f_1^t(b, k)$ les cardinalités, où A et B sont les ensembles qui contiennent un polyomino contenant un banc dans le coin supérieur gauche attaché à un polyomino d'aire minimale. De la même manière, nous comptons les polyominos contenant un banc dans le coin supérieur droit plus les équerres formées suite à l'attachement. Pour construire A et B nous procédons de la façon suivante (figure 3.18) :

FIGURE 3.18 – Polyominos d'aire $min + 1$ avec un banc $2 \times t$ dans un coin

- L'ensemble A correspond aux deux seules façons d'attacher un polyomino contenant un banc avec la rangée pleine en bas du banc adjacent du côté supérieur gauche plus les équerres. Le nombre d'équerres est le produit de la hauteur 2 et la largeur t du banc moins un de la formule 1.23 du premier chapitre. Autrement dit,

$$card(A) = 2 \binom{b+k-t-2}{b-2} + 2t-1 \quad (3.40)$$

- De la même façon, construisons B . Cet ensemble correspond aux deux seules façons d'attacher un polyominos-banc avec la rangée pleine en haut du banc adajacent du côté supérieur gauche du rectangle plus le nombre d'équerres correspondantes aux pattes plus l'équerre adjacente au côté supérieur moins l'un de la formule 1.23.

$$card(B) = 2 \binom{b+k-t-2}{b-2} + 2 \quad (3.41)$$

En conséquence, nous avons deux formules différentes pour les polyominos-banc aux coins supérieurs. Formules dont nous aurons besoin par la suite

Cas 1 : Les coins

Commençons par traiter le cas des polyominos inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc dans un des coins du rectangle. Nous devons séparer le cas des bancs $2 \times t$ avec $t = 2$ des autres valeurs $t \geq 3$ parce que le banc 2×2 contient plus de symétries et nous devons en tenir compte dans notre étude de cas.

Proposition 3.3.7. *Le nombre $g_1(b, k, b+k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc $2 \times t$, $t \geq 3$ dans un des coins du rectangle est donné par la formule*

$$\begin{aligned}
 g_1(b, k, b+k) &= \left(4 \sum_{t=3}^{k-1} f_1^t(b, k) + 4 \right) + \left(4 \sum_{t=3}^{k-1} f_2^t(b, k) + 2k \right) + \\
 &\quad \left(4 \sum_{t=3}^{b-1} f_1^t(k, b) + 4 \right) + \left(4 \sum_{t=3}^{b-1} f_2^t(k, b) + 2b \right), b, k \geq 3 \\
 &= 16 \left(\binom{b+k-4}{b-1} + \binom{b+k-4}{k-1} \right) + 2k(2k-1) \quad (3.42) \\
 &\quad + 2b(2b-1) - 72.
 \end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons défini les cardinalités de $A = f_2^t(b, k)$ et $B = f_1^t(b, k)$ à la proposition 3.3.6. Soient A et B les ensembles qui contiennent un polyomino contenant un banc dans le coin supérieur gauche attachés à un polyomino d'aire minimal (équation 3.38). Alors, A' et B' sont les ensembles symétriques obtenus en échangeant b par k dans les formules 3.38. En d'autre termes, les polyominos avec la rangée pleine en haut et en bas horizontalement sur un côté du rectangle $k \times b$. Les versions symétriques des

formules sont :

$$\begin{aligned} \text{card}(A') &= f_2^t(k, b) = \binom{k+b-t-2}{k-2} + 2(t-1), \quad t < k. \\ \text{card}(B') &= f_1^t(k, b) = \binom{k+b-t-2}{k-2} + 2, \quad t < k, \end{aligned} \quad (3.43)$$

Alors,

$$G_1(b, k, b+k) = A \cup B \cup A' \cup B'. \quad (3.44)$$

Dans cette égalité :

- L'ensemble A contient les polyominos-banc de longueur $2 < t < k$ (avec la rangée pleine en bas du banc au côté supérieur) de longueur $2 < t < k$. Il y a quatre façons de les placer dans le rectangle $b \times k$, plus les quatre polyominos-banc résultants lorsqu'on pose $t = k$.
- L'ensemble B contient les polyominos qui contiennent un banc (avec la rangée pleine en haut du banc au côté supérieur) de longueur $2 < t < k$. Il y a quatre façons de les placer dans le rectangle $b \times k$ plus $2k$ polyominos résultants de $t = 2k$.
- L'ensemble A' contient les polyominos qui contiennent un banc renversés de A de longueur $2 < t < k$. On a quatre façons de les placer dans le rectangle renversé $k \times b$ plus les quatre polyominos résultants de faire $k = t$.
- L'ensemble B' contient les polyominos qui contiennent un banc renversés de B de longueur $2 < t < k$. On a quatre façons de les placer dans le rectangle renversé $k \times b$ plus les $2b$ polyominos résultants lorsque $k = 2b$.

L'assemblage de ces sous-ensembles nous amène à la formule 3.43.

Dans la formule 3.43, apparaissant les formules de polyominos $f_{2 \times 2, x, y}$ déjà montrées dans le premier chapitre. Il faut mettre en évidence qu'il s'agit d'une union, étant donné que les polyominos qui contiennent un banc symétriques sont dans les ensembles de A , B et dans leurs renversés. En rassemblant les quatre sous-ensembles, nous obtenons la formule 3.43.

Cas 2 : Les côtés

Énumérons maintenant les polyominos inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc collé sur un bord du rectangle sans être dans un coin. Il y a essentiellement trois façons de coller un banc sur le côté d'un rectangle tel qu'illustre à la figure 3.19.

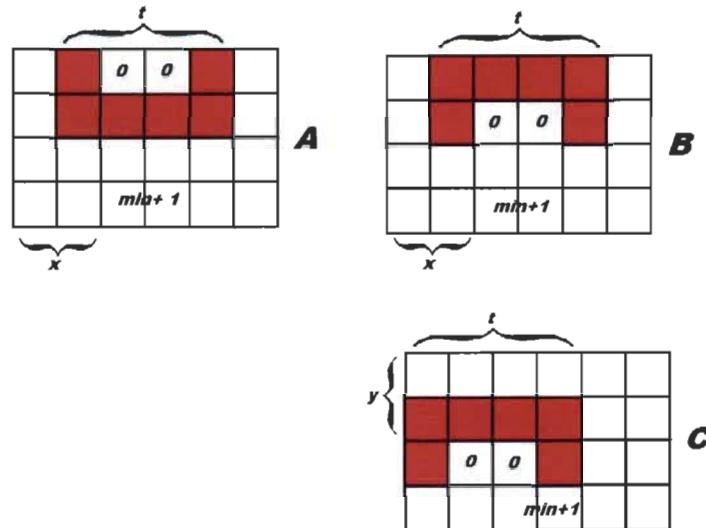


FIGURE 3.19 – Les trois dispositions d'un banc horizontal sur un côté

Proposition 3.3.8. *Le nombre $g_{2x}(b, k)$ de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc horizontal*

$2 \times t$, $t \leq k - 2$ collé sur un bord du rectangle est donné par la formule

$$\begin{aligned}
 g_{2x}(b, k) = & \overbrace{2 \left(\sum_{t=3}^{k-2} \sum_{x=2}^{k-t} 2f_1^t(b, k-x+1) + 2f_1^t(b, x+t-1) - 8 \right) +}^B \\
 & \overbrace{2 \left(\sum_{t=3}^{k-2} \sum_{x=2}^{k-t} 2f_2^t(b, k-x+1) + 2f_2^t(b, x+t-1) - 4t \right) +}^A \\
 & \overbrace{4 \left(\sum_{t=3}^{k-1} \sum_{y=2}^{b-2} tf_1^t(b-y+1, k) + 2f_2^t(y+1, k) - 4t \right) + 4k(b-3)}^C \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Démonstration. Pour prouver la proposition 3.3.8, nous reviendrons sur les formules déjà démontrées.

Rappelons la formule 3.38 pour les polyominos qui contiennent un banc. Il faudra utiliser cette formule pour construire la nouvelle récurrence.

Nous avons trois façons de coller un polyomino contenant un banc sur le bord d'un rectangle $b \times k$ sans être dans un coin.

Nous illustrons géométriquement les trois positions possibles du polyomino contenant un banc à la figure 3.19 et nous montrons sa récurrence en 3.45.

Nous procédons ainsi :

- L'image B illustre les polyominos qui contiennent un banc (ou la rangée pleine en haut adjacente au côté supérieur) comptés par rapport aux coordonnées cartésiennes (x, y) du coin gauche. Ensuite, nous faisons une double sommation sur les positions horizontales de $x = 2$ jusqu'à $x = k - t$ pour toutes les longueurs des bancs jusqu'à l'avant-dernière position (car la dernière est le coin). Par le principe d'inclusion-exclusion, nous soustrayons les équerres comptés deux fois. Il y a deux façons de placer ces

polyominos qui contiennent un banc.

- *L'image A montre les polyominos qui contiennent un banc (ou la rangée pleine en bas adjacente au côté supérieur) comptés par rapport aux coordonnées cartésiennes (x,y) du coin gauche. Ensuite, nous faisons une double sommation sur les positions horizontales de $x = 2$ jusqu'à $x = k - t$ pour toutes les longueurs des bancs. Par le principe d'inclusion-exclusion, nous soustrayons les $4t$ équerres comptées deux fois. Il y a deux façons de placer ces polyominos-banc dans le rectangle $b \times k$.*
- *L'image C montre les polyominos qui contiennent un banc (ou la rangée pleine en haut et en bas adjacentes au côté supérieur) comptés par rapport aux coordonnées cartésiennes (x,y) du coin gauche. Ensuite, nous faisons une double sommation sur les positions verticales de $y = 2$ jusqu'à $y = b - 2$ pour toutes les longueurs de bancs de $t = 3$ jusqu'à $t = k - 1$. Par le principe d'inclusion-exclusion, nous soustrayons les $4t$ équerres comptées deux fois. Il y a quatre façons de les placer dans le rectangle $b \times k$: deux dans la direction verticale et deux autres dans la direction horizontale.*
- *Finalement, nous comptons les cas où $t = k$ pour la position verticale du banc.*

Corollaire 3.3.2. *Le nombre $g_2(b, k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc horizontal ou vertical de longueur $t \geq 3$ collés sur un bord du rectangle est donné par la formule ;*

$$\begin{aligned}
g_2(b, k) &= g_{2x}(b, k) + g_{2x}(k, b) \\
&= 32 \left(\binom{b+k-4}{b} + \binom{b+k-4}{k} \right) + \\
&8 \left(\frac{5k+b-7}{b-2} \binom{b+k-4}{k-1} + \frac{5k+b-7}{b-2} k - 2 \binom{b+k-4}{b-1} \right) + \\
&\frac{4}{3}(b^3 + k^3) - 28(b^2 + k^2) - 48bk + \frac{164}{3}(b+k) \\
&+ 4(bk^2 + b^2k) + 144. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons transformer la récurrence précédente. De toute évidence, les polyominos-banc horizontaux collés sur un bord du rectangle $b \times k$ plus les polyominos-banc résultants du renversement du rectangle $b \times k$ donnent le nombre total de polyominos horizontaux inscrits sur le rectangle qui contiennent un banc. Nous illustrons sur la figure 3.20 un polyomino résultant de l'échange des paramètres b et k .

Autrement dit,

$$g_2(b, k) = g_{2x}(b, k) + g_{2x}(k, b).$$

Ceci est le nombre de polyominos horizontaux ou verticaux collés sur un bord du rectangle sans toucher les coins.

Cas 3 : Le centre

Nous dénombrerons les polyominos inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc au centre du rectangle sans toucher aux bords. Il y a deux façons de placer les bancs et elles sont illustrées à la figure 3.21.

Proposition 3.3.9. *Le nombre $g_{3,x,y}(b, k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc horizontal*

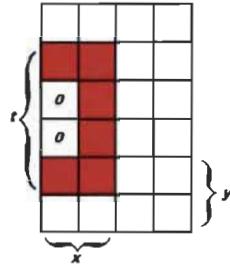


FIGURE 3.20 – Polyomino-banc horizontal symétrique

$2 \times t$, $t \geq 3$ intérieur au rectangle et qui ne touche à aucun bord du rectangle est donné par la formule

$$\begin{aligned}
 g_{3,x,y}(b, k) &= 2 \sum_{t=3}^{k-2} \sum_{y=2}^{b-2} \sum_{x=2}^{k-t} f_1^t(y+1, k-x+1) f_2^t(b-y+1, x+t-1) + \\
 &\quad f_1^t(y+1, x+t-1) f_2^t(b-y+1, k-x+1) - 8t \\
 &= 2 \sum_{t=3}^{k-2} \sum_{y=2}^{b-2} \sum_{x=2}^{k-t} \left(2 \binom{y+k-x-t}{y-1} + 2 \right) \\
 &\quad \left(2 \binom{b+x-y-2}{x-1} + 2(t-1) \right) + \\
 &2 \sum_{t=3}^{k-2} \sum_{y=2}^{b-2} \sum_{x=2}^{k-t} \left(2 \binom{y+x-2}{y-1} + 2 \right) \\
 &\quad \left(2 \binom{b+k-x-y-t}{b-y-1} + 2(t-1) \right) - 8t \\
 &= 64kb - \frac{352}{3}k - \frac{8}{3}k^3 + 40k^2 - 32(b-1) - 16k^2b + 16(k-4) \\
 &\quad \binom{b+k-4}{b-2} + \frac{16b(k^2-5k+8)}{b+k-3} \binom{b+k-3}{k-2} - 32 \binom{b+k-4}{k-4}.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Démonstration. Le nombre de polyominos, noté $g_{3,x,y}(b, k)$, avec un polyomino-banc horizontal $2 \times t$ dont le coin inférieur gauche a les coordonnées cartésiennes (x, y) est obtenu par la somme des produits du nombre de bancs

avec la rangée pleine en haut et en bas, adjacentes au côté du rectangle moins les équerres comptées deux fois. Pour construire la récurrence, nous procérons tel qu'indiqué ci-dessous.

Soit $\text{card}(B_1)$ le nombre de polyominos contenant un banc avec la rangée pleine en bas, adjacente au côté du rectangle résultant de l'intersection des deux polyominos minimaux dont la hauteur et la largeur sont $y + 1$ et $k - x + 1$ respectivement (voir figure 3.21). Notons $\text{card}(A_1)$ le nombre des polyominos contenant un banc avec la rangée pleine en haut adjacente au côté du rectangle et résultant de l'intersection des deux polyominos minimaux dont la hauteur et la largeur sont $b - y + 1$ et $x + t - 1$ respectivement. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \text{card}(B_1) &= f_1^t(y + 1, k - x + 1) \\ &= 2 \binom{y + k - x - t}{y - 1} + 2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

et,

$$\begin{aligned} \text{card}(A_1) &= f_2^t(b - y + 1, x + t - 1) \\ &= 2 \binom{b + x - y - 2}{x - 1} + 2(t - 1). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Nous avons utilisé le corollaire 3.16.

Du produit des équations 3.48 et 3.49, nous avons que,

$$\begin{aligned} \text{card}(B_1) \cdot \text{card}(A_1) &= f_1^t(y + 1, k - x + 1) f_2^t(b - y + 1, x + t - 1) \\ &= \left(2 \binom{y + k - x - t}{y - 1} + 2 \right) \\ &\quad \left(2 \binom{b + x - y - 2}{x - 1} + 2(t - 1) \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

D'autre part, soit $\text{card}(B_2)$ le nombre de polyominos contenant un banc avec la rangée pleine en bas adjacente au côté du rectangle résultant de l'intersection des deux polyominos minimaux dont la hauteur et la largeur sont $y + 1$ et $x + t - 1$ respectivement et $\text{card}(A_2)$ le nombre de polyomino contenant un banc avec la rangée pleine en haut adjacente au côté du rectangle résultant de l'intersection des deux polyominos minimaux dont la hauteur et la largeur sont $b - y + 1$ et $k - x + 1$ respectivement (voir figure 3.21). En d'autres termes,

$$\begin{aligned} \text{card}(B_2) &= f_1^t(y + 1, x + t - 1) \\ &= 2 \binom{y + x -}{y - 1} + 2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

et,

$$\begin{aligned} \text{card}(A_2) &= f_2^t(b - y + 1, k - x + 1) \\ &= 2 \binom{b + k - x - y - t}{b - y - 1} + 2(t - 1) \end{aligned} \quad (3.52)$$

par le corollaire 3.16. Donc, du produit des équations 3.51 et 3.52, nous avons que,

$$\begin{aligned} \text{card}(B_2) \cdot \text{card}(A_2) &= f_1^t(y + 1, x + t - 1) f_2^t(b - y + 1, k - x + 1) \\ &= \left(2 \binom{y + x -}{y - 1} + 2 \right) \\ &\quad \left(2 \binom{b + k - x - y - t}{b - y - 1} + 2(t - 1) \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

En additionnant les produits des expressions 3.50 et 3.53, et en soustrayant par le principe d'inclusion-exclusion les équerres doublement comptées, nous obtenons que,

$$g_{3,x,y}(k, b) = (\text{card}(B_1) \cdot \text{card}(A_1) + \text{card}(B_2) \cdot \text{card}(A_2) - 8t) \quad (3.54)$$

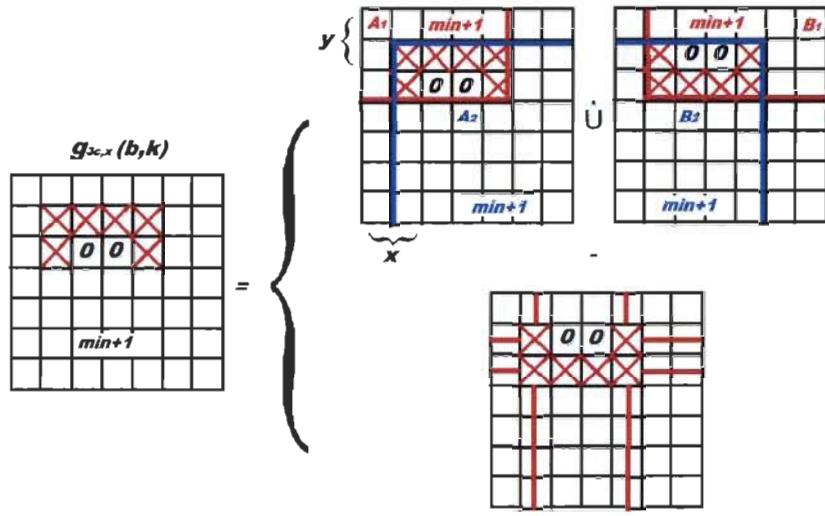


FIGURE 3.21 – Nombre de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino contenant un banc horizontal $2 \times t$, $t \geq 3$ intérieur au rectangle sans toucher les bords

En général, pour les polyominos contenant un banc situés au centre, nous devons faire un triple sommation qui compte les positions horizontales, verticales et les longueurs des bancs.

Maintenant pour compter les polyominos qui contiennent un banc vertical, nous n'avons qu'à observer que, par symétrie, le nombre $g_{3,y}(b, k)$ de ces polyominos satisfait l'équation

$$g_{3,y}(b, k) = g_{3,x}(k, b). \quad (3.55)$$

Corollaire 3.3.3. *Le nombre $g_3(b, k)$ de polyominos d'aire $\min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ avec un polyomino- contenant un banc horizontal ou*

vertical de longueur $t \geq 3$ ne touchant à aucun bord du rectangle est donné par la formule

$$\begin{aligned}
 g_3(b, k) &= g_{3,x}(k, b) + g_{3,x}(b, k) \\
 &= \frac{8}{3} \left[24 - 6(b^2k + bk^2) + 48bk - 56(b + k) + 15(b^2 + k^2) - (b^3 + k^3) \right] \\
 &\quad - 12 \left(\binom{b+k-4}{b} + \binom{b+k-4}{k} \right) + 6(b+k-6) \left(\binom{b+k-4}{b-1} + \binom{b+k-4}{k-1} \right) - 60 \binom{b+k-4}{b-2} + 18 \binom{b+k-2}{b-1} \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

Démonstration. Géométriquement, le nombre $g_3(b, k)$ de polyominos d'aire $min + 1$ est la somme des nombres $g_{3,x}(b, k)$ horizontaux et $g_{3,x}(k, b)$ verticaux. Alors, en substituant l'expression 3.55 dans l'équation 3.56, nous concluons que les polyominos $g_3(b, k)$ sont obtenus en additionnant les polyominos $g_{3,x}(k, b)$ horizontaux avec leurs symétriques verticaux. Autrement dit, en échangeant les lettres k et b dans l'équation 3.47.

Pour obtenir une formule pour le nombre de polyominos inscrits dans une rectangle $b \times k$ donné, il ne reste plus qu'à additionner les nombres g_1, g_2, g_3 et $f_{2 \times 2}$.

Proposition 3.3.10. Pour tous entiers $b \geq 3$ et $k \geq 3$, le nombre $f_{min+1}(b, k)$ de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ est donné par la formule

$$f_{min+1}(b, k) = g_1(b, k) + g_2(b, k) + g_3(b, k) + f_{2 \times 2}(b, k). \quad (3.57)$$

b/k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	6	18	38	66	102	146	198	258
3	6	44	154	376	750	1316	2114	3184	4566
4	18	154	584	1526	3276	6194	10704	17294	26516
5	38	376	1526	4180	9458	18936	34726	59556	96850
6	66	750	3276	9458	22576	47798	92820	168602	290200
7	120	1316	6194	18936	47798	107052	219922	422376	767886
8	146	2114	10704	34726	92820	219922	477464	967894	1854620
9	198	3184	17294	59556	168602	422376	967894	2067300	4166306
10	258	4566	26516	96850	290200	767886	154620	4166306	8813760

TABLEAU 3.4 – Nombre de polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$

$$f_{min+1}(b, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2 \text{ ou } b = 2 \\ 4b^2 - 16b + 18 & \text{si } k = 2 \text{ et } b > 2 \\ 8(b+k-22)\binom{b+k-4}{b-2} + \\ \frac{8(2k^2+2kb+b-13k+13)}{k-2}\binom{b+k-4}{b-1} + \\ \frac{8(2b^2+2kb+k-13b+13)}{b-2}\binom{b+k-4}{k-1} + \\ 48\binom{b+k-2}{b-1} - \frac{4}{3}(b^3 + k^3) - 12(b^2k + bk^2) \\ + 16(b^2 + k^2) + 72bk - \frac{266}{3}(b+k) + 120 & \text{si } b \geq 3 \text{ et } k \geq 3 \end{cases}$$

Démonstration. L'union des quatre ensembles de polyominos donnés par les expressions $G_1(b, k)$, $G_2(b, k)$, $G_3(b, k)$ et $F_{2 \times 2}(b, k)$, dont les formules correspondantes sont 3.43, 3.3, 3.56 et 3.6, nous conduit directement à la formule générale de la proposition 3.3.10.

La table 3.4 illustre quelques valeurs de $f_{min+1}(b, k)$.

Maintenant, nous allons calculer le nombre de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle de périmètre $2n$. Dans un tel rectangle, ces polyominos

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f_{min+1}(n)$	1	12	808	384	1468	4756	13656	35982	88740	209420

TABLEAU 3.5 – Nombre de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle de périmètre $2n$

sont toujours d'aire $min + 1$.

Proposition 3.3.11. *Pour tout entier $n \geq 4$, le nombre $f_{min+1}(n)$ de polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle de périmètre $2n$ est donné par la formule suivante :*

$$f_{min+1}(n) = \sum_{b=2}^{n-2} f_{min+1}(b, n-b) = 2^n \left(\frac{4}{5} + \frac{22}{5}n \right) - \frac{1}{3}(8n^4 - 88n^3 + 430n^2 - 902n + 636) \quad (3.58)$$

Démonstration. *De la proposition 3.3.10, nous faisons le changement de variable $n = b + k$ et ensuite nous sommes sur tous les polyominos $b = 2$, jusqu'à $b = n - 2$, qui correspond à $k = 2$. Les cas en dehors de ces valeurs ne sont pas considérés car ce ne sont pas des polyominos d'aire $min + 1$. Par exemple, si $b = n - 2$, on aurait une bande horizontale qui n'est pas un polyomino d'aire $min + 1$.*

3.3.1 Série génératrice des polyominos d'aire $min + 1$

Dans un contexte plus général, pour construire la série génératrice $F_{min+1}(x, y)$ des polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle nous allons nous servir d'une observation fondamentale pour construire un polyomino inscrit d'aire $min + 1$:

- Nous choisissons un banc et une diagonale du rectangle ;

- Nous choisissons une équerre ou un polyomino coin minimal pour un coin du banc dans la diagonale choisie ;
- Nous choisissons une équerre ou un polyomino coin minimal pour l'autre coin du banc dans la diagonale choisie.

Nous sommes donc en présence d'une structure multiplicative de la forme

$$\{ \text{équerre ou coin} \} \times \{ \text{banc} \} \times \{ \text{équerre ou coin} \}$$

qui permet d'obtenir les polyominos d'aire $min + 1$ sur une diagonale. Pour obtenir les polyominos sur l'une ou l'autre diagonale, nous utilisons l'inclusion-exclusion en prenant l'union des polyominos sur chaque diagonale et en soustrayant les polyominos appartenant aux deux diagonales. Les polyominos appartenant aux deux diagonales ont la structure multiplicative suivante,

$$\{ \text{équerre} \} \times \{ \text{banc} \} \times \{ \text{équerre} \}.$$

Ceci implique que l'ensemble de tous les polyominos inscrits d'aire $min + 1$ est obtenu multiplicativement comme suit :

$$f_{min+1}(b, k) = 2 \{ \text{équerre ou coin} \} \times \{ \text{banc} \} \times \{ \text{équerre ou coin} \} \\ - \{ \text{équerre} \} \times \{ \text{banc} \} \times \{ \text{équerre} \}.$$

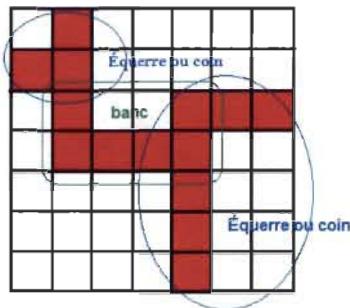
La figure 3.22 illustre cette construction.

Afin d'extraire la série génératrice $F_{min+1}(x, y)$, nous devons considérer séparément le cas des bancs dégénérés 2×2 , car ces bancs possèdent des symétries qui sont absentes dans les bancs de plus grandes tailles.

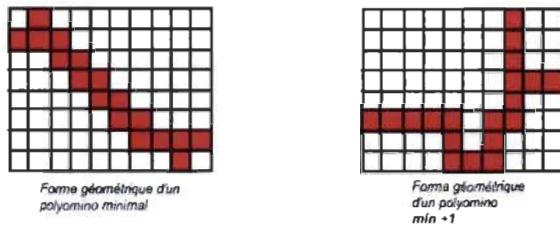
Cette description conduit à un théorème fondamental sur les polyominos d'aire $min + 1$.

Théorème 3.7. *Un polyomino est $min + 1$ si et seulement s'il possède exactement un banc.*

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons P un polyomino $min + 1$, si nous considérons P' un n sous-polyominoz de P minimal. Un tel polyomino existe tou-

FIGURE 3.22 – Construction d'un polyomino d'aire $min + 1$

jours. Supposons qu'*l'ajout d'une cellule de P à P' laisse inchangé le rectangle circonscrit*. Alors, *l'ajout de cette cellule crée nécessairement un banc*, et le nouveau polyomino $P' \cup \{c\}$ est un $min + 1$. Maintenant, *l'ajout successif des autres cellules de P augment à chaque fois le format du rectangle circonscrit*. Autrement, on aurait un polyomino d'aire $min + 2$ ou plus. Il n'y aura donc pas de nouveau banc formé.

FIGURE 3.23 – Formes géométriques des polyominos d'aire min et $min + 1$

(\Leftarrow) : Si P possède un banc alors P n'est pas minimum car la forme géométrique des polyominos minimaux ne possèdent aucun banc (figure 3.23).

Si P est $min + 2$ alors nous pouvons montrer que P possède deux bancs à

l'aide de l'argument précédent.

Proposition 3.3.12. *La série génératrice*

$$F_{min+1,2 \times 2}(x, y) = \sum_{b,k \geq 2} f_{min+1,2 \times 2}(b, k) x^b y^k \quad (3.59)$$

des polyominos inscrits d'aire $min + 1$ ne contenant que des bancs carrés 2×2 a la forme rationnelle suivante :

$$\begin{aligned} F_{min+1,2 \times 2}(x, y) &= 2x^2 y^2 \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right]^2 - \\ &\quad x^2 y^2 \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \right] \\ &= 2x^2 y^2 \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right]^2 - \\ &\quad x^2 y^2 \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Démonstration. *Pour démontrer cette formule, nous nous inspirons de la structure multiplicativa décrite à l'équation 3.3.1. Dans cette expression nous conjuguons les formules des séries génératrices de chaque élément nécessaire pour la construction de la formule générale des f_{min+1} .*

La série génératrice des équerres attachées au banc 2×2 est

$$\{\text{équerres}\} := x^2 y^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right). \quad (3.60)$$

La série génératrice des polyominos coins d'aire $min + 1$ non dégénérés et sans équerre est

$$\{\text{coins sans équerre}\} := x^2 y^2 \left(\frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right). \quad (3.61)$$

La série génératrice pour les bancs $2 \times t, t \geq 3$ est

$$\begin{aligned} \{bancs\} := & F_{min+1,2 \times t}(x, y) \\ & \left(2x^2y^t \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \right) \times \\ & \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \\ & - x^2y^t \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) \Big) \times 2. \quad (3.62) \end{aligned}$$

Maintenant, nous savons que les polyominos d'aire $min + 1$ sont formés de la somme des polyominos dégénérés 2×2 et des polyominos contenant un banc horizontal ou vertical. Ainsi,

$$F_{min+1}(x, y) = F_{(min+1,2 \times 2)}(x, y) + \sum_{t \geq 3} \left(F_{(min+1,2 \times t)}(x, y) + F_{(min+1,t \times 2)}(x, y) \right).$$

Maintenant, assemblons les équations 3.60, 3.61 et 3.62,

$$\begin{aligned}
& \sum_{t \geq 3} F_{(\min+1, 2 \times t)}(x, y) \\
&= \sum_{t \geq 3} \left(2x^2 y^t \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \times \right. \\
&\quad \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \\
&\quad - x^2 y^t \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) \Big) \times 2 \\
&= \left(2x^2 \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \times \right. \\
&\quad \sum_{t \geq 3} y^t \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \\
&\quad - x^2 \sum_{t \geq 3} y^t \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) \Big) \times 2 \\
&= \left(2x^2 \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \times \right. \\
&\quad \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \sum_{t \geq 3} y^t \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{t \geq 3} y^t \left(\frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right) \right] \\
&\quad - x^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \sum_{t \geq 3} y^t \left(1 + \frac{tx}{1-x} \right) \Big) \times 2 \\
&= \left(2x^2 \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \times \right. \\
&\quad \left[\left(1 + \frac{2y}{1-y} \right) \left[1 + \frac{x(3-2y)}{(1-x)(1-y)} \right] + \left(\frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{y^3}{1-y} \right] - x^2 \left(1 + \frac{2y}{1-y} \right)^2 \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \frac{y^3}{1-y} \left[1 + \frac{x(3-2y)}{(1-x)(1-y)} \right] \right) \times 2 \\
&= \frac{2x^2 y^3}{1-y} \left(2 \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \times \right. \\
&\quad \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{x(3-2y)}{(1-x)(1-y)} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] - \\
&\quad \left. \left(\frac{1+y}{1-y} \right)^2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{x(3-2y)}{(1-x)(1-y)} \right) \right) \tag{3.63}
\end{aligned}$$

En simplifiant les termes, on obtient donc,

$$\begin{aligned}
 F_{min+1}(x, y) = & 2x^2y^2 \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right]^2 \\
 & - x^2y^2 \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]^2 \\
 & + \frac{2x^2y^3}{1-y} \left(2 \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \times \right. \\
 & \left. \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{x(3-2y)}{(1-x)(1-y)} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \right. \\
 & \left. - \left(\frac{1+y}{1-y} \right)^2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{x(3-2y)}{(1-x)(1-y)} \right) \right) \\
 & \frac{2x^2y^3}{1-x} \left(2 \left[\left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \times \right. \\
 & \left. \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right) \left(1 + \frac{y(3-2x)}{(1-x)(1-y)} \right) + \frac{2}{1-x-y} - \frac{2}{(1-x)(1-y)} \right] \right. \\
 & \left. - \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 \left(\frac{1+y}{1-y} \right) \left(1 + \frac{y(3-2x)}{(1-x)(1-y)} \right) \right) \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Proposition 3.3.13. La série génératrice $F_{min+1}(z)$ des polyominos d'aire n inscrits dans un rectangle de périètre $2n$ a la forme rationnelle suivante

$$F_{min+1}(z) = \frac{(12z^7 - 24z^6 - 41z^5 - 23z^4 + 23z^3 + 6z^2 + 3z + 1)z^4}{(1-z)^5(1-2z)^2}. \tag{3.65}$$

Démonstration. En posant $x = y$ dans la série $F_{min+1}(x, y)$, la formule devient celle recherchée en 3.65 .

3.4 Serpents $min + 1$

Dans un contexte général, les **serpents** de longueur $b + k$ sont un sous-ensemble des polyominos d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ qui ont deux cellules de degré un, appelées, **tête** et **queue**, et toutes les autres cellules sont de degré deux. Ces polyominos sont aussi appelés **les polyominos à deux feuilles**. Un serpent est formé par des *rangées de cellules*, des *escaliers* et des *bancs*.

Définition 3.4.1. *Le degré d'une cellule C est le nombre de cellules voisines immédiates à la cellule C . Une feuille est une cellule de degré un.*

Nous allons maintenant compter les serpents de longueur $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$ d'aire. Notons $S_{min+1}(x, y)$ la série génératrice des serpents $min + 1$.

3.4.1 Série génératrice des serpents

Proposition 3.4.1. *La série génératrice $S_{min+1}(x, y)$ des serpents inscrits d'aire $min + 1$ a la forme rationnelle suivante :*

$$\begin{aligned}
 S_{min+1}(x, y) &= \sum_{b, k} s_{min+1}(b, k) x^b y^k \\
 &= 2 \left[\frac{1}{1-y} \times \frac{2x^2y^3}{1-y} \times \frac{xy}{1-x-y} \times \frac{1}{xy} \right] - \frac{1}{1-y} \times \frac{2x^2y^3}{1-y} \times \frac{1}{1-y} + \\
 &\quad 2 \left[\frac{1}{1-x} \times \frac{2x^3y^2}{1-y} \times \frac{xy}{1-x-y} \times \frac{1}{xy} \right] - \frac{1}{1-x} \times \frac{2x^3y^2}{1-y} \times \frac{1}{1-x} \\
 &= \frac{2x^2y^3}{(1-y)^2} \left[\frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-y} \right] + \\
 &\quad \frac{2x^3y^2}{(1-x)^2} \left[\frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-x} \right]. \tag{3.66}
 \end{aligned}$$

Démonstration. *En observant la figure 3.25, les serpents sont le produit de deux composants attachés aux pattes d'un banc ; nous avons une rangée de cellules d'un côté et un escalier de l'autre. Comme cet assemblage est asymétrique, nous devons multiplier par deux et soustraire les constructions qui sont sur les deux diagonales. Autrement dit, celles qui sont comptés deux fois.*

Les structures symétriques sont de la forme

b/k	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	6	12	20	30	42	56
3	2	8	20	44	84	144	228	340
4	6	20	40	84	168	312	540	880
5	12	44	84	168	336	648	1188	2068
6	20	84	168	336	672	1320	2508	4576
7	30	144	312	648	1320	2640	5148	9724
8	42	228	540	1188	2508	5148	10296	20020

TABLEAU 3.6 – Nombre de serpents d'aire $min + 1$ inscrits dans un rectangle $b \times k$

$$\{rangs des cellules\} \times \{bancs\} \times \{rangs des cellules\}$$

$$S_{min+1} = 2 \cdot \left(\begin{array}{c} \text{blue rectangles} \\ \text{red U-shaped blocks} \\ \text{green L-shaped blocks} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{blue rectangles} \\ \text{red U-shaped blocks} \\ \text{blue rectangles} \end{array} \right)$$

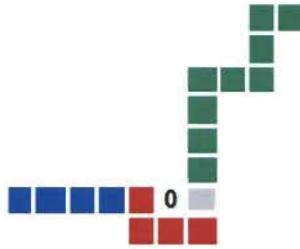
FIGURE 3.24 – Rangée, banc et escalier

Pour construire la série génératrice $S_{min+1}(x, y)$, prenons d'abord les bancs horizontaux $2 \times t$. Rappelons qu'ils ont les structures suivantes :

$$\{rangée des cellules horizontale\} = \frac{1}{1-y} \quad (3.67)$$

$$\{banc vertical\} = 2 \sum_{t \geq 3} 2x^2y^t = \frac{2x^2y^3}{1-y}$$

$$\{escalier\} = \frac{xy}{1-x-y}$$

FIGURE 3.25 – Un serpent d'aire $\min + 1$

En utilisant l'équation illustrée dans la figure 3.24 et les séries génératrices 3.67, nous obtenons ;

Serpents contenant un bancs horizontal

$$= 2 \left[\frac{1}{1-y} \times \frac{2x^2y^3}{1-y} \times \frac{xy}{1-x-y} \times \frac{1}{xy} \right] - \frac{1}{1-y} \times \frac{2x^2y^3}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \quad (3.68)$$

Serpents contenant un bancs vertical

$$= 2 \left[\frac{1}{1-x} \times \frac{2x^3y^2}{1-y} \times \frac{xy}{1-x-y} \times \frac{1}{xy} \right] - \frac{1}{1-x} \times \frac{2x^3y^2}{1-y} \times \frac{1}{1-x} \quad (3.69)$$

Il faut remarquer que le terme $\frac{1}{xy}$ correspond à l'inverse multiplicatif de l'aire du carré qui attache chaque structure : le banc au escalier et le banc au pilier.

En additionnant les expressions 3.68 et 3.69 nous arrivons à la série génératrice $S_{\min+1}(x, y)$.

Corollaire 3.4.1. La formule exacte pour les serpents de longueur $\min + 1$

avec $b, k \geq 2$ est

$$S_{\min+1}(b, k) = \begin{cases} 4 \left[\binom{b+k-3}{b} + \binom{b+k-3}{k} \right] & \text{si } b, k \geq 3 \\ 2 \left[\binom{b+k-3}{b} + \binom{b+k-3}{k} \right] & \text{si } b = 2 \text{ ou } k = 2 \end{cases}$$

Démonstration. La formule 3.4.1 se déduit de la formule 3.66 par des manipulations combinatoires standards.

Chapitre 4

Dans les pages suivantes nous présentons les algorithmes utilisés pour énumérer les polyominos d'aire $min + 1$ et les programmes construits pour effectuer les calculs. Un organigramme illustrera la séquence des opérations.

Programmes informatiques pour énumérer les polyominos d'aire $min + 1$

Nos résultats ont été vérifiés à l'aide d'un programme informatique qui nous a fourni le nombre de polyominos inscrits dans un rectangle de dimension $b \times k$. Ensuite, nous avons ajouté deux filtres pour compter les polyominos arbres d'où nous n'avons déduit les polyominos d'aire $min + 1$ pour notre étude. Pour atteindre ce résultat, une partie du programme informatique a été réalisée par l'étudiant à la maîtrise à l'UQTR *Hugo Cloutier* et une autre par *Fathallah Nouboud*, professeur du département de mathématique et informatique et co-directeur de ce projet.

Dans l'annexe 1, nous décrirons le code source du programme d'énumération des polyominos arbres et un compteur du degré des polyominos d'une à plusieurs feuilles.

Organigramme des séquences des opérations

La figure 4.1 représente les séquences des opérations du programme maître.

4.1 Quelques chiffres intéressants

La table 6.2, ajoutée à l'annexe 3 compile les polyominos arbres dont les polyominos d'aire $min + 1$ sont le sujet de ce mémoire. Ce programme permet la compilation des données testées du programme informatique présentées à

4. PROGRAMMES INFORMATIQUES POUR LES POLYOMINOS D'AIRE $min+1$

l'annexe 1. Ce programme compte le nombre de polyominos d'aire min et $min+1$ selon le nombre de feuilles et aussi selon l'aire et la taille du rectangle circonscrit.

4.2 Algorithme du programme

Les polyominos arbres sont un sous-ensemble des polyominos. En effet, les arbres sont les polyominos qui n'ont pas de cycle. Alors, nous nous sommes basés sur ce principe pour créer le programme et ensuite compter seulement les polyominos d'aire $min + 1$. À la figure 4.2 nous représentons les cases vides et occupées par des chiffres : zéro et un respectivement.

Principe des filtres utilisé

Le principe est énoncé comme suit : il existe un chemin de zéros *huit-connectés* entre un zéro A dans le rectangle et un zéro B du bord du rectangle *si et seulement si* A n'est pas inclus dans un cycle (Figure 4.2).

Démonstration. *Nous allons prouver le principe par contraposition. A n'est pas dans un cycle si et seulement s'il n'existe aucun chemin de zéros huit-connectés entre un zéro A dans le rectangle et un zéro B du bord du rectangle.*

(\Rightarrow) : *Par hypothèses, A est pris dans un cycle. Alors, nous constatons tout de suite, qu'en traçant un chemin des zéros huit-connectés à partir de ce zéro A à l'intérieur du rectangle, nous ne trouvons aucun chemin qui nous amène à un autre zéro sur le bord puisqu'ils sont tous entourés du nombre un. Autrement dit, ces zéros ne sont pas huit-connectés.*

(\Leftarrow) : *S'il n'existe aucun chemin de zéros huit-connectés entre un zéro du rectangle et un autre du bord du même rectangle, et c'est évident, que le zéro*

4. PROGRAMMES INFORMATIQUES POUR LES POLYOMINOS D'AIRE $min+1104$

n'est entouré que de uns. Alors ces zéros ne seront pas huit-connectés. Donc, il est pris dans un cycle. D'où la démonstration.

4.3 Compteur de polyominos d'aire minimale et minimale plus un

La table 6.1 présentée à l'annexe 2 compile les résultats obtenus pour les polyominos d'aire minimale et minimale plus un exclusivement.

4. PROGRAMMES INFORMATIQUES POUR LES POLYOMINOS D'AIRE $min+1105$

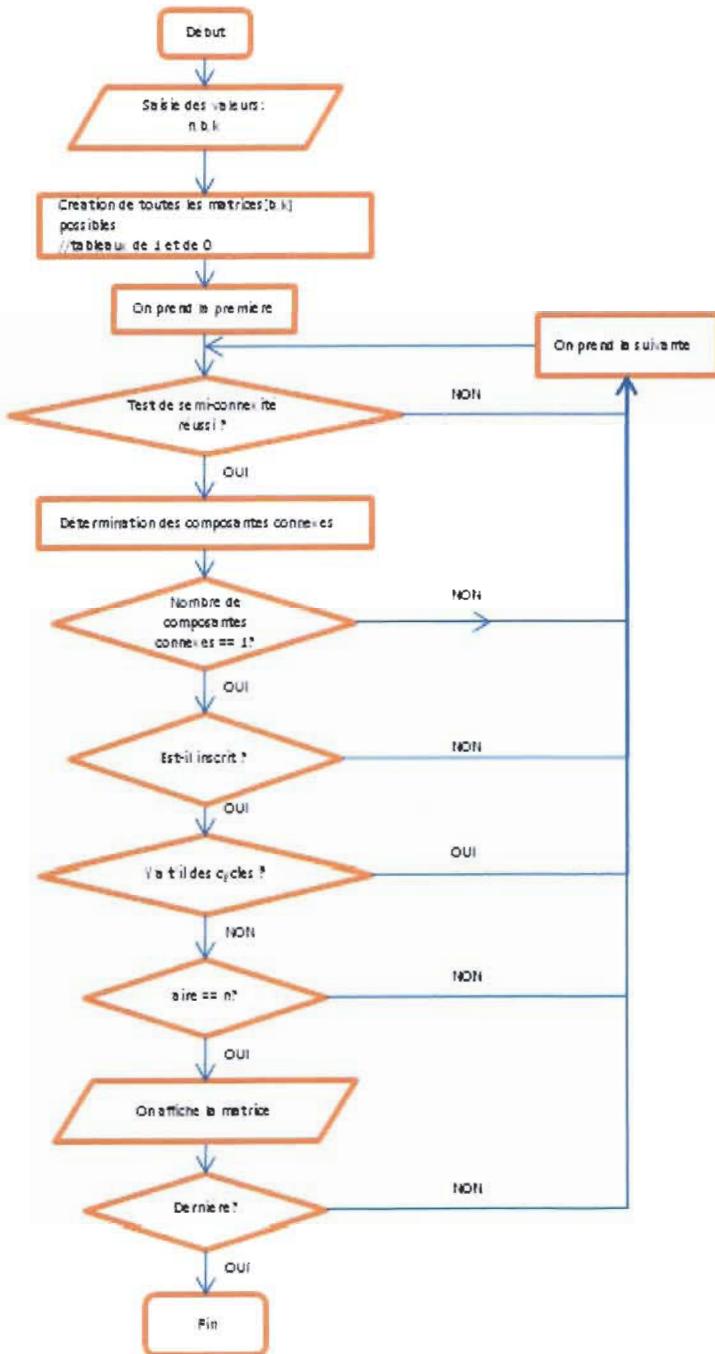


FIGURE 4.1 – Organigramme des séquences des opérations

4. PROGRAMMES INFORMATIQUES POUR LES POLYOMINOS D'AIRE $min+1106$

1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
^B 0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0		0	0	1

FIGURE 4.2 – Principe des filtres

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

La méthode d'énumération de polyominos employée a conduit à une nouvelle technique qui évoque la visualisation des récurrences à partir des séquences d'images et leur formalisation pour dénombrer les polyominos d'aire $min + 1$.

5.1 Conclusion

De toute évidence, nous avons validé nos résultats avec l'aide de programmes informatiques pour tester nos formules. Ces programmes nous ont donné des suites numériques connues, publiées et décrites sur le site web *OEIS* [9]. De fait, d'autres suites émanant de nos travaux n'apparaissent pas sur le répertoire de ce site.

Alain Goupil et ses collaborateurs ont proposé des formules d'aire minimale plus un pour les serpents et pour les arbres réticulés de trois à cinq feuilles. Illustrons quelques chiffres intéressants dans la figure 5.2. Le nombre de polyominos d'aire minimale plus un inscrits dans un rectangle $b \times k$ pour $k = 8$ et $b = 8$ est 477464. Pour le même rectangle, il existe 27288 polyominos d'aire minimale, 10296 serpents de longueur $min + 1$ et 49605487608825200 polyominos inscrits dans le rectangle 8×8 [11].

5.2 Apport de ce mémoire

Dans cette recherche, nous avons déduit des formules exactes pour les nombres de polyominos d'aire minimale et minimale plus un utilisant des méthodes d'énumération combinatoire. De la même manière, nous avons proposé et démontré combinatoirement et géométriquement de nouveaux théorèmes pour ces ensembles de polyominos.

Cette technique était constituée de plusieurs étapes.

- La première étape est basée sur l'observation et la définition de différentes classes de polyominos. Nous avons classé et séparé en sous-ensembles chaque ensemble de polyominos pour être analysé et démontré. Ils ont été définis par rapport aux caractéristiques particulières définies formellement dans le premier chapitre. Nous avons donc étudié, les polyominos d'aire minimale.
- La deuxième étape correspond à la construction d'algorithmes géométriques par récurrence de chaque sous-ensemble étudié pour les polyominos coins diagonalement opposés.
- La troisième étape correspond à la construction de récurrences et la recherche des séries génératrices pour les polyominos qui contiennent un banc à différentes positions d'un rectangle $b \times k$
- La quatrième étape correspond à la construction de la fonction génératrice des polyominos d'aire $min + 1$ et les serpents de longueur $min + 1$.

Notre approche se base sur la méthode inductive qui commence par l'énumération des polyominos d'aire minimale, passant par les polyominos coins, ensuite les polyominos qui contiennent un banc et finalement les polyominos d'aire $min + 1$. Ceci correspond au schéma de la méthode présentée à la figure 5.1.

Pour conclure, ce travail a été consacré à la recherche des formules d'énumération des polyominos d'aire $min + 1$. Voici une représentation graphique comparative des principaux résultats (figure 5.2).

5.3 Perspectives

Évidemment, le travail n'est pas terminé. Il y a encore un long chemin à parcourir. L'équipe de combinatoire travaille encore à l'énumération des polyominos 3D. Nous avons rencontré des chercheurs d'autre domaines (chimie) avec l'espérance de trouver une application spécifique. On espère qu'à l'avenir on découvrira un lien et des applications.

Les perspectives de l'équipe de combinatoire de l'Université du Québec à Trois-Rivières, visent la généralisation aux polyominos 3D et l'étude des polyominos d'aire $min + 2, min + 3, \dots$ etc, de même que celle des polyominos

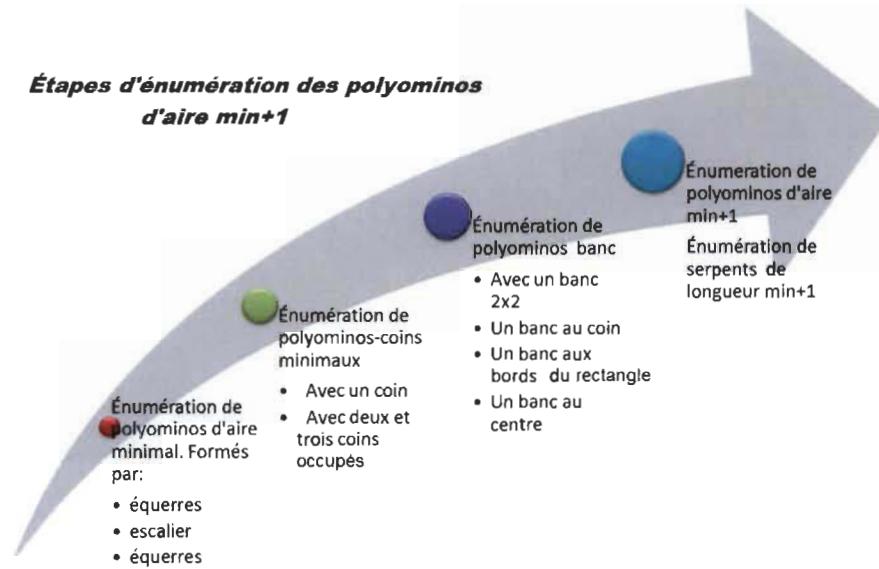


FIGURE 5.1 – Résumé des étapes d'énumération des polyominos

serpents inscrits dans un rectangle.

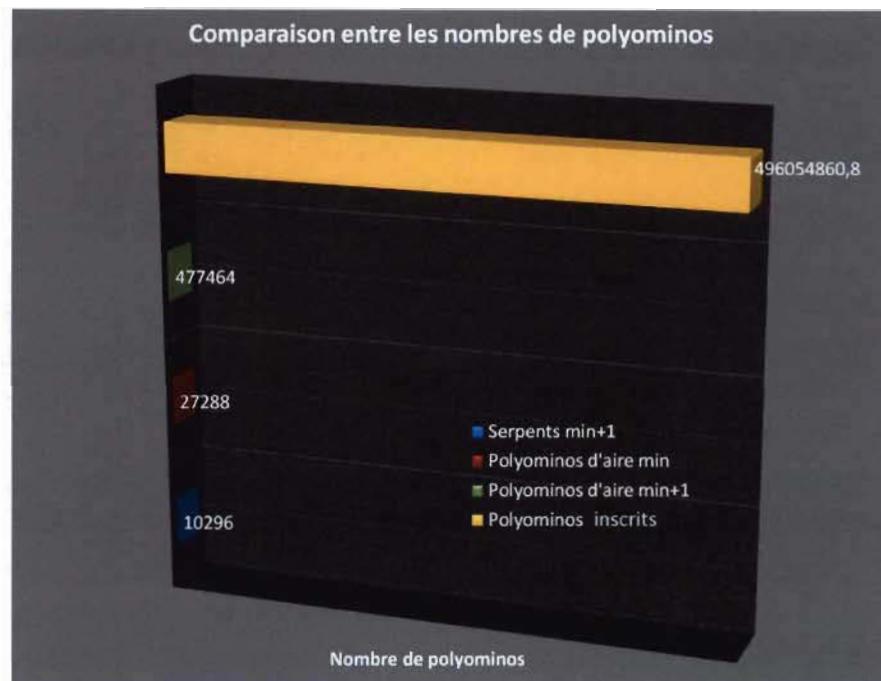


FIGURE 5.2 – Comparaison entre les nombres de polyominos

Annexes

6.1 Annexe 1

Code source des polyominos Arbre et compteur des feuilles

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.IO;
using System.Text;

class principal
{

    static void Main(string[] args)
    {

        int[] lesBases;
        int count_pia = 0;
        int col;
        int nbLignes, nbColonnes, aire;
        int temp, laire;
        int degré;
        string s;
        int deg_2 = 0;
        int deg_3 = 0;
        int deg_4 = 0;
        int deg_5 = 0;

        Console.Write("Nombre de lignes : ");
        s = Console.ReadLine();
        nbLignes = Int32.Parse(s);

        Console.Write("Nombre de colonnes : ");
        s = Console.ReadLine();
        nbColonnes = Int32.Parse(s);

        Console.Write("Aire entre {0} et {1} : ",nbLignes + nbColonnes
-1, nbLignes * nbColonnes);
        s = Console.ReadLine();
        aire = Int32.Parse(s);

        string name_pia =
"c://Users//llerenaar//Desktop//Resultats_Luz//"+ nbLignes + "x" +
nbColonnes + "_aire_" + aire + ".txt";
        StreamWriter fichier_pia = new StreamWriter(name_pia);
        fichier_pia.Write("numéro : ");

        int[,] grille = new int[nbLignes,nbColonnes];

        //création de toutes les possibilités de matrices
        double max = 0.0;
        lesBases = new int[nbColonnes];
        for(int i = 0; i < nbColonnes ; i++)
            max = max + Math.Pow(2.0,(double)i);

        for (int i = 0; i < nbColonnes; i++)
            lesBases[i]= (int)max + 1;
```

```

Compteur compte = new Compteur(lesBases, nbLignes);
for(int i=0; i<nbLignes; i++)
{
    compte.bases[i] = (int)max + 1;
    compte.decimales[i]=0;
}

while(!compte.estAuMax())
{
    compte.incrementer();
    for(int i=0; i<nbLignes; i++)
    {
        col = 0;
        temp = compte.decimales[i];

        while(col < nbColonnes)
        {
            grille[i,col++] = temp % 2;
            temp /= 2;
        }
    }
}

// Fin création de toutes les tables possibles

// Premier test avec un masque 1 1 horizontal et vertical
pour éliminer beaucoup de candidats
int k = 0;
bool connexe = true;
while(connexe && k < nbLignes - 1)
{
    connexe = false;
    for(int j=0; j < nbColonnes; j++)
        if(grille[k,j] == 1 && grille[k+1,j] == 1)
            connexe = true;
    k++;
}

if(connexe)
{
    k = 0;
    while(connexe && k < nbColonnes -1)
    {
        connexe = false;
        for(int i=0; i < nbLignes; i++)
            if(grille[i,k] == 1 && grille[i,k+1] ==
1)
                connexe = true;
        k++;
    }
}

// Marquer les cellules 1 avec leur position
if(connexe)
{
    for (int i = 0; i < nbLignes; i++)

```

```

        for(int j = 0; j < nbColonnes; j++)
        {
            if(grille[i,j] == 1)
                grille[i,j] = i * nbColonnes +
j + 1;
        }

        // Itération pour mettre toutes les cellules d'une
composante connexe au maximum de la composante
        // L'itération s'arrête quand il n'y a plus de
modification
        bool modif = true;
        while(modif)
        {
            modif = false;
            for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
            {
                for(int j = 0; j < nbColonnes; j++)
                {
                    if(grille[i,j] > 0)
                    {
                        if(i>0)
                            if(grille[i-1,j] >
grille[i,j])
                        {
                            grille[i,j] =
grille[i-1,j];
                            modif = true;
                        }
                        if(i<nbLignes-1)
                            if(grille[i+1,j] >
grille[i,j])
                        {
                            grille[i,j] =
grille[i+1,j];
                            modif = true;
                        }
                        if(j>0)
                            if(grille[i,j-1] >
grille[i,j])
                        {
                            grille[i,j] =
grille[i,j-1];
                            modif = true;
                        }
                        if(j<nbColonnes-1)
                            if(grille[i,j+1] >
grille[i,j])
                        {
                            grille[i,j] =
grille[i,j+1];
                            modif = true;
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        }

        //Compter le nombre de composantes connexes : les
        valeurs non nulles différentes dans le tableau
        int comp = 0;
        int val = 0;
        for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
        {
            for(int j = 0; j < nbColonnes; j++)
                if(grille[i,j] !=0 && grille[i,j] != val)
                {
                    val = grille[i,j];
                    comp++;
                }
        }

        //Remettre les cellules non nulles à 1
        for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
            for(int j = 0; j < nbColonnes; j++)
                if(grille[i,j] > 0)
                    grille[i,j] = 1;

        //Vérifier si le polyomino est inscrit
        bool inscrit1, inscrit2, inscrit3, inscrit4;
        if(comp == 1)
        {
            inscrit1 = false;
            for(int i = 0; i < nbLignes ; i++)
            if(grille[i,0] > 0)
                inscrit1 = true;

            inscrit2 = false;
            for(int i = 0; i < nbLignes ; i++)
            if(grille[i,nbColonnes-1] > 0)
                inscrit2 = true;

            inscrit3 = false;
            for(int j = 0; j < nbColonnes ; j++)
            if(grille[0,j] > 0)
                inscrit3 = true;

            inscrit4 = false;
            for(int j = 0; j < nbColonnes ; j++)
            if(grille[nbLignes-1,j] > 0)
                inscrit4 = true;

            if(inscrit1 && inscrit2 && inscrit3 && inscrit4)
        //il est inscrit
        {
            //Calculer l'aire : nombre de 1 dans le tableau
            laire = 0;

            for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
                for(int j = 0; j < nbColonnes; j++)
                    if(grille[i,j] > 0)
                        laire++;
        }
    }
}

```

```

    //Garder les polyominos d'une aire donnée :
aire lue au début du programme

    // filtre 1
bool cycle = false;

for (int i = 0; i < nbLignes - 1; i++)
    for (int j = 0; j < nbColonnes - 1; j++)
    {
        if (grille[i, j] != 0)
        {
            if ((grille[i + 1, j] != 0) &&
(grille[i, j + 1] != 0) && (grille[i + 1, j + 1] != 0))
                cycle = true;
        }
    }

    // filtre 2
bool changement = true;
int count_zero = 0;

// -1 à la place de 0 dans tous les bords
for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
{
    if (grille[i, 0] == 0)
        grille[i, 0] = -1;
    if (grille[i, nbColonnes - 1] == 0)
        grille[i, nbColonnes - 1] = -1;
}

for (int j = 0; j < nbColonnes; j++)//faire
j=1?
{
    if (grille[0, j] == 0)
        grille[0, j] = -1;
    if (grille[nbLignes - 1, j] == 0)
        grille[nbLignes - 1, j] = -1;
}

// mettre à -1 les 0 connectés à un bord
while (changement)
{
    changement = false;

    for (int i = 1; i < nbLignes - 1; i++)
        for (int j = 1; j < nbColonnes - 1;
j++)
            if (grille[i, j] == 0)
                if (grille[i - 1, j] == -1 || grille[i, j - 1] == -1 || grille[i + 1, j] == -1 || grille[i + 1, j + 1] == -1 || grille[i - 1, j + 1] == -1 || grille[i - 1, j - 1] == -1 || grille[i + 1, j - 1] == -1 || grille[i + 1, j + 1] == -1)
                {
                    grille[i, j] = -1;

```

```

                changement = true;
            }
        }

        // verification de cycle (si présence de 0)
        for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
            for (int j = 0; j < nbColonnes; j++)
            {
                if (grille[i, j] == 0)
                    ++count_zero;
                if (grille[i, j] == -1) // on
remet les -1 à 0
                    grille[i, j] = 0;
            }

            if (count_zero != 0)
                cycle = true;

            if ((laire == aire) && (!cycle)) // si !cycle =
(si cycle = faux)
            {

                // Compter le degré du polyomino
                degré = 0;
                int nbvoisin;
                for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
                    for (int j = 0; j < nbColonnes; j++)
                    {
                        nbvoisin = 0;
                        if (grille[i, j] == 1)
                        {
                            if ((i == 0) || (i == nbLignes
- 1) || (j == 0) || (j == nbColonnes - 1))
                            {
                                //traitement des 4 coins
                                if ((i == 0) && (j == 0))
                                {
                                    if (grille[i + 1, j] ==
1)
                                        nbvoisin += 1;
                                    if (grille[i, j + 1] ==
1)
                                        nbvoisin += 1;
                                }
                                else if ((i == 0) && (j ==
nbColonnes - 1))
                                {
                                    if (grille[i + 1, j] ==
1)
                                        nbvoisin += 1;
                                    if (grille[i, j - 1] ==
1)
                                        nbvoisin += 1;
                                }
                                else if ((i == nbLignes -
1) && (j == 0))
                                {

```



```

        else // traitement derniere
        {
            if (grille[i, j - 1] ==
                1)
                nbvoisin += 1;
            if (grille[i - 1, j] ==
                1)
                nbvoisin += 1;
            if (grille[i + 1, j] ==
                1)
                nbvoisin += 1;
        }
    }
    else
    {
        if (grille[i, j - 1] == 1)
            nbvoisin += 1;
        if (grille[i - 1, j] == 1)
            nbvoisin += 1;
        if (grille[i + 1, j] == 1)
            nbvoisin += 1;
        if (grille[i, j + 1] == 1)
            nbvoisin += 1;
    }
}
if (nbvoisin == 1) degré += 1;
}

fichier_pia.WriteLine("numéro : ");
fichier_pia.WriteLine(++count_pia);
fichier_pia.WriteLine("aire : ");
fichier_pia.WriteLine(aire);
fichier_pia.WriteLine("degré : ");
fichier_pia.WriteLine(degré);

switch (degré)
{
    case 2:
        deg_2 += 1;
        break;
    case 3:
        deg_3 += 1;
        break;
    case 4:
        deg_4 += 1;
        break;
    case 5:
        deg_5 += 1;
        break;
    default:
        break;
}

for (int i = 0; i < nbLignes; i++)
{

```

```

        for (int j = 0; j < nbColonnes; j++)
        {
            fichier_pia.WriteLine(grille[i, j]);
            fichier_pia.WriteLine(" ");
        }

        fichier_pia.WriteLine("=====");
    }
}

//réinitialisation de la grille
for(int i = 0; i < nbLignes ; i++)
    for(int j = 0; j < nbColonnes; j++)
        grille[i,j]=0;

fichier_pia.WriteLine(" ");
fichier_pia.WriteLine("NOMBRE DE DEGRÉ 2: " + deg_2);
fichier_pia.WriteLine("NOMBRE DE DEGRÉ 3: " + deg_3);
fichier_pia.WriteLine("NOMBRE DE DEGRÉ 4: " + deg_4);
fichier_pia.WriteLine("NOMBRE DE DEGRÉ 5: " + deg_5);
fichier_pia.Close();
}
}

```

6.2 Annexe 2

b	k	n	Compteur selon l'aire	Total
2	2	3	4	12
	3	4	8	
2	4	5	12	22
		6	10	
2	5	6	16	42
		7	26	
2	6	7	20	70
		8	50	
2	7	8	24	106
		9	82	
2	8	9	28	150
		10	122	
2	9	10	32	202
		11	170	
2	10	11	36	262
		12	226	
2	11	12	40	330
		13	290	
2	12	13	44	406
		14	362	
2	13	14	48	490
		15	442	
2	14	15	52	582
		16	530	
2	15	16	56	682
Suite...				

TABLEAU 6.1 Compteur de polyominos d'aire $min + 1$ – suite

b	k	Aire	Compteur selon l'aire	Total
		17	626	
3	2	4	8	10
		5	2	
3	3	5	25	45
		6	20	
3	4	6	50	140
		7	90	
3	5	7	83	339
		8	256	
3	6	8	124	682
		9	558	
3	7	9	173	1209
		10	1036	
3	8	10	230	1960
		11	1730	
3	9	11	295	2975
		12	2680	
4	2	5	12	22
		6	10	
4	3	6	8	10
		7	2	
4	4	7	120	496
		8	376	
4	5	8	230	1300
		9	1070	
		Suite...		

TABLEAU 6.1 Compteur de polyominos d'aire $min + 1$ – suite

b	k	Aire	Compteur selon l'aire	Total
4	6	9	388	2832
		10	2444	
4	7	10	602	5436
		11	4834	
5	2	6	16	42
		7	26	
5	3	7	83	339
		8	256	
5	4	8	230	1300
		9	1070	
5	5	9	497	3533
		10	3036	
5	6	10	932	8038
		11	7106	
5	7	13	74790	
6	2	7	20	70
		8	50	
6	3	8	124	682
		9	558	
6	4	9	388	2832
		10	2444	
6	5	12	30492	
6	6	13	64279	
7	2	8	24	106
		9	82	
Suite...				

TABLEAU 6.1 Compteur de polyominos d'aire $min + 1$ – suite

b	k	Aire	Compteur selon l'aire	Total
7	3	9	173	1209
		10	1036	
7	4	10	602	5436
		11	4834	
7	5	11	1138	

TABLEAU 6.1: Compteur de polyominos d'aire min et min+1

6.3 Annexe 3

Ligne	Colonne	Degré				Total
		2	3	4	5	
2	2	2	0	0	0	4
	3	9	1	0	0	10
	4	14	8	0	0	22
	5	22	18	2	0	42
	6	32	32	6	0	70
	7	44	50	12	0	106
	8	58	72	20	0	150
	9	70	98	30	0	202
	10	92	128	42	0	262
	11	112	162	56	0	330
	12	134	200	72	0	406
	13	158	242	90	0	516
3	3	5	20	24	1	28
	4	40	84	16	0	140
	5	74	190	69	6	343
	6	126	356	176	24	682
	7	200	632	353	60	1236
	8	300	924	616	120	1960
	9	430	1348	981	0	2829
4	4	80	296	120	0	496
	5	154	698	414	34	500
	6	280	1384	1020	148	3046
	7	480	2468	2088	400	5436
	8	780	4084	3796	860	9520

TABLEAU 6.2 – Nombre partiel de polyominos avec 2, 3, 4 et 5 feuilles

Bibliographie

- [1] <http://www.les-suites.fr/>, fevrier 2012
- [2] Costa Michel. *Séries Formelles*, Notes de cours, Institute de Recherche Mathématique de l'université de Rennes, France, 2002.
<http://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/B05series.pdf>
- [3] Wilf, Herbert, *Generating functionology*, Academic Press, Troisième édition, University of Pennsylvania, 1989.
<http://www.math.upenn.edu/wilf/DownldGF.html>
- [4] <http://domus.grenet.fr/grimass/MathSHS/MASS4/COURS/fgo.htm>
- [5] Biggs, Normand L., *Discrete mathematics*, Oxford University Press Inc., dec. 2002
- [6] Mercier, Dany-Jack, *Anneaux*, IUFM de Guadeloupe, France,
<http://megamaths.perso.neuf.fr/deug/cann0007.pdf>, octobre 2002,
- [7] Reischer, Corina, *Éléments d'algèbre linéaire*, Université du Québec à Trois-Rivières, Canada, 1992
- [8] James, Journal of statistical physics, 1990
- [9] <https://oeis.org/Seis.html>, *Le OEIS Foundation Inc*, janvier 2012
- [10] Goupil, Alain, *Dénombrément de polyominos inscrits dans un rectangle*, notes personnelles, Université du Québec à Trois-Rivières, 9 avril 2012.
- [11] Goupil, Alain. Cloutier, Hugo et Nouboud, Fathallah, *Enumeration of polyominoes inscribed in a rectangle*, Discrete Applied Mathematics, The Journal of Combinatorial Algorithms, Informatics and Computational Sciences , 2010.

- [12] Fraleigh, John B., *Abstract Algebra*, Septième édition, 2002.
- [13] Bóna, Miklós, *A Walk Through Combinatorics*, World Scientific Publishing, USA, deuxième édition, 2006.
- [14] MacMahon, Percy Alexander, *Combinatory Analysis*, Chelsea Publishing Company, New York, volumes I et II, 1916.
- [15] Sills, A. Andrew, *Compositions, Partitions et and Fibonacci Numbers*, Université de Georgia, Statesboro, USA.
- [16] Klarner, David A. et Rivest, Ronald L., *Asymptotic bounds for the number of convex n-ominoes*, mathématiques discrètes, 1974.
- [17] Redelmeier, D. Hugh, *Counting polyominoes : yet another attack*, Department of Computer Science, University of Toronto, Canada, 1981.
- [18] Weisstein, Eric W., http://www.recreomath.qc.ca/dict_polyplet.htm, MathWorld web, juin 2012.