UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
APPLIQUÉES

PAR
LOUKRATI HICHAM

ÉTUDE DE L'ORDRE DE DISPERSION POUR DES LOIS CONDITIONNELLES ARCHIMÉDIENNES AVEC APPLICATION EN FINANCE

MAI 2011

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

<u>Avertissement</u>

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir accordé désir et patience dans la réalisation de ce travail.

J'exprime ma gratitude à toute personne qui a d'une façon ou d'une autre prêté son concours à l'accomplissement de ce projet et à toute personne qui, spontanément ou à ma demande, m'a fait part de ses suggestions et de ses commentaires constructifs visant à rendre ce mémoire conforme aux exigences.

Je remercie en particulier, Monsieur Mhamed Mesfioui, mon directeur de recherche, pour sa précieuse collaboration, son encadrement supérieur, sa disponibilité et ses recommandations judicieuses.

Mes remerciements les plus sincères pour leurs soutiens financiers durant mon long séjour universitaire :

- Centre des études universitaires de Trois-Rivières;
- Mhamed Mesfioui, par son octroi individuel (CRSNG);
- Jean-François-Quessy, par son octroi individuel (CRSNG);
- Département de mathématiques et d'informatique de l'UQTR;
- Institut des sciences mathématiques;
- Fondation de l'UQTR.

Je voudrais témoigner toute ma reconnaissance aux professeurs du département de math-info qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires, plus particulièrement monsieur Fathallah Nouboud, directeur des programmes de cycles supérieurs et monsieur Ismaïl Biskri, directeur de département.

Enfin, je dédie ce mémoire à mon père, ma mère, ma femme et mes enfants.

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1

I. INTRODUCTION

Un des principaux objectifs des statistiques est la comparaison de variables aléatoires. Bien que très populaire, le critère probabiliste « moyenne – variance » ne suffit pas toujours à comparer deux variables aléatoires et peut même conduire à des aberrations. Cependant, il arrive souvent qu'on possède des informations plus détaillées concernant les variables aléatoires à comparer décrites par leurs fonctions de répartition. Une comparaison basée sur les distributions est plus informative que celle basée uniquement sur deux statistiques. La méthode utilisée pour comparer deux distributions est nommée « ordre stochastique ». Donnons d'abord un aperçu historique de ce terme.

L'apparition du vocable « stochastique » passe pour être de date récente. Le dictionnaire de la langue philosophique la situe vers le milieu du XXe siècle. Depuis le début des années 70, le concept de dominance stochastique, introduit en économie par Rothschild-Stieglitz, permet de comparer des distributions entières de probabilité. Plus récemment, les ordres stochastiques qui généralisent la dominance stochastique sont utilisés à un rythme accéléré dans de nombreux domaines, notamment la finance, l'assurance, le risque actuariel et l'économie. Bien que des ordres stochastiques particuliers aient déjà été étudiés par Karamata en 1932, par Lehmann en 1955, et par Littlewood et Polya en 1967, les premières études complètes des ordres stochastiques ont été données par Stoyan dans les années 1977 et 1983, et par Mosler en 1982.

En finance et en économie, une des raisons principales pour comparer des variables aléatoires représentant des risques en utilisant des ordres stochastiques est le fait que ces derniers utilisent toute l'information sur la distribution afin d'établir une comparaison adéquate entre deux risques.

Notre projet de recherche est structuré de la manière suivante : le chapitre 2 présente et examine de façon systématique les ordres stochastiques univariés les plus utilisés dans la littérature. En particulier, nous avons mis l'accent sur l'ordre usuel, l'ordre de hasard, l'ordre de rapport de vraisemblance et l'ordre de la transformée de Laplace. Lorsque l'on souhaite comparer deux distributions qui ont la même moyenne, on est généralement intéressé par la comparaison de leurs variabilités. De ce fait, les chapitres 3 et 4, traitent quelques ordres stochastiques de variabilité univariés, à savoir l'ordre convexe, l'ordre concave, l'ordre dispersif et l'ordre *excess-wealth*. Le chapitre 5 représente la contribution originale de notre travail. Dans celui-ci, nous introduisons un nouvel ordre stochastique de dispersion multivarié. Il s'agit d'une extension multivariée de l'ordre dispersif classique. Son principe se base sur la comparaison des différences de quantiles conditionnels.

Traditionnellement, les primes d'assurances ont toujours été construites sur l'hypothèse d'indépendance entre les risques et la loi des grands nombres. Cependant, la dépendance commence à jouer un rôle de plus en plus important dans le monde des risques. Malgré que l'hypothèse de l'indépendance rende le traitement technique simple et transparent, la dépendance demeure la règle et l'indépendance est l'exception. Par exemple, en assurance-vie collective, l'avènement des catastrophes offre un bon exemple où la dépendance joue un rôle important dans les primes d'assurances. Par ailleurs, des propriétés caractéristiques du nouvel ordre sont établies. Particulièrement nous fournissons des résultats permettant d'analyser l'effet de la dépendance entre variables aléatoires sur la variabilité en utilisant la notion de copules. Des illustrations concrètent sont données dans le cadre de copules archimédiennes. Des études similaires sont réalisées sur un autre nouvel ordre de variabilité multivarié, à savoir l'ordre *excess-wealth* multivarié.

CHAPITRE 2

II. ORDRES STOCHASTIQUES UNIVARIÉS

Les relations d'ordre stochastiques sont des cas particuliers de relations d'ordre partiel. Par conséquent, il est naturel de commencer par les définitions de relation d'ordre et de l'ordre partiel.

Définition 2.1

Une relation binaire "$\preceq$ "sur un ensemble arbitraire A est une relation d'ordre partiel si elle remplit les conditions suivantes :

1. Réflexivité : $a \preceq a \quad \forall\, a \in A;$
2. Antisymétrie : $si\; a \preceq b \quad et \quad b \preceq a \quad alors \quad a = b \quad \forall\, a, b \in A;$
3. Transitivité : $si\; a \preceq b \quad et \quad b \preceq c \quad alors \quad a \preceq c \quad \forall\, a, b, c \in A.$

Définition 2.2

La paire (A, $\preceq$) est un ensemble partiellement ordonné.

Maintenant, on considère A l'ensemble ou le sous-ensemble de toutes les fonctions de répartition des variables aléatoires à valeurs réelles. On appelle ordre stochastique toute relation d'ordre définie sur cet ensemble. Ainsi, un ordre stochastique quantifie le concept qu'une variable aléatoire soit supérieure à une autre et il permet donc de comparer deux distributions.

À noter qu'il peut y avoir différentes variables aléatoires de même fonction de répartition de sorte que la relation d'ordre $\preceq$ est antisymétrique pour ces dernières, mais ne l'est pas pour les variables aléatoires.
De nombreux ordres univariés existent, qui ont différentes applications. On distingue plus particulièrement l'ordre stochastique usuel, l'ordre de hasard, l'ordre de rapport de vraisemblance et l'ordre de transformation de Laplace.

2.1 Ordre stochastique usuel

L'ordre stochastique usuel est l'ordre le plus naturel pour comparer deux variables aléatoires réelles. Il consiste à comparer leurs fonctions de répartition (ou leurs fonctions de survie). Cet ordre est souvent appelé ordre stochastique usuel selon Shaked et Shanthikumar (2007) [1] et ordre stochastique fort selon Szekli (1995) [4]. Soient $F_X(t)$et $F_Y(t)$, respectivement, les fonctions de répartition des v. a. X et Y. Si $F_X(t) \leq F_Y(t)$ pour tout réel t, alors, avec une probabilité plus grande, X prend des petites valeurs que Y, ou, avec une probabilité plus faible, X prend des grandes valeurs que Y. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 2.3

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre stochastique usuel, noté $X \preceq_{st} Y$, si

$$F_X(t) \geq F_Y(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

L'inéquation (2.1) est équivalente aux inéquations suivantes :

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_Y(t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

où, $\bar{F}_X(t) = P(X > t)$ est la fonction de survie de X, ainsi on a,

$$P(X > t) \leq P(Y > t) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

et puisque chaque intervalle fermé est une intersection infinie d'intervalles ouverts, les équations suivantes sont vraies :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P(X > x - \varepsilon) = P(X \geq x), \tag{2.4}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P(X \geq x + \varepsilon) = P(X > x). \tag{2.5}$$

D'où, on démontre que $X \preceq_{st} Y$, si et seulement si,

$$P(X \geq x) \leq P(Y \geq x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes prenant des valeurs dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ et telles que $p_i = P(X = i)$ et $q_i = P(Y = i)$, alors

$$X \preceq_{st} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{j \leq i} p_j \leq \sum_{j \leq i} q_j \qquad \text{pour tout} \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

Dans la littérature économique, en théorie de décision, cet ordre est connu sous le nom de « dominance stochastique de premier ordre » et consiste à comparer des risques (S. Sriboonchitta, et al. (2010) [5]). La figure suivante illustre le fait suivant : X domine stochastiquement Y si la fonction de survie de X est supérieure à celle de Y, c'est-à-dire. que la fonction de répartition de X est toujours inférieure à celle de Y.

Exemple

i) Si $X \sim \exp(\lambda)$ et $Y \sim \exp(\mu)$ telles que $\lambda < \mu$, alors $X \geq_{st} Y$.

ii) Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ et $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ telles que $\lambda < \mu$, alors $X \leq_{st} Y$.

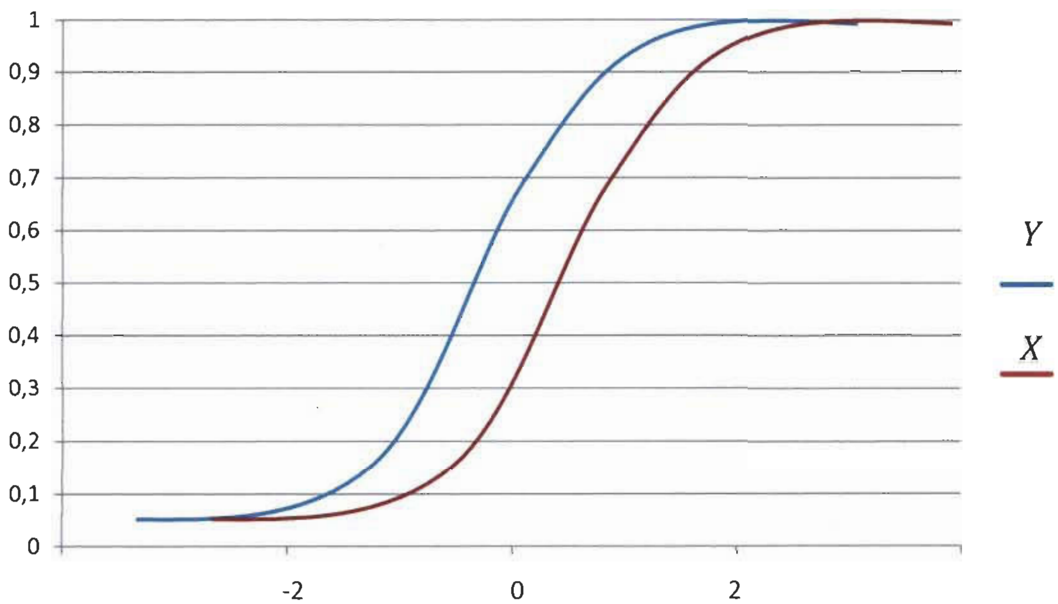

Figure 1 : dominance stochastique d'ordre 1

Théorème 2.1

Soient X et Y deux variables aléatoires. Les énoncés suivants sont équivalents :

1- $X \leq_{st} Y$;

2- Il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ sur lequel sont définies deux variables aléatoires X' et Y' de même lois que X et Y telles que :

$$P[X' \leq Y'] = 1 \quad \text{c.-à.-d.} \quad X' \leq Y' \text{ prèsque sûrement (p.s.)} \tag{2.8}$$

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$:

Notons par F^{-1} l'inverse généralisé de la fonction de répartition F défini par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \leq u\} \text{ pour } 0 < u < 1$$

Soit U une variable aléatoire uniformément distribuée sur $(0,1)$, et soient

$$X' = F_X^{-1}(U), \qquad Y' = F_Y^{-1}(U).$$

Alors X' et Y' sont des variables aléatoires de fonction de répartition F_X et F_Y respectivement, et

$$P[X' \leq Y'] = \int P[F_X^{-1}(u) \leq F_Y^{-1}(u) \mid U = u]du = 1,$$

car $\qquad F_X \geq F_Y$

$\Leftrightarrow \qquad F_X^{-1} \leq F_Y^{-1}$

$\Leftrightarrow \qquad X' \leq Y'$ prèsque sûrement.

$2 \Rightarrow 1$.

C'est évident. ■

Notons que cet ordre est également appelé ordre « *croissant* » du fait de la caractérisation suivante.

Théorème 2.2

Soient X et Y deux v. a. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1- $X \preceq_{st} Y$,

2- Pour toute fonction f croissante définie sur $\mathbb{R}$

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)], \tag{2.9}$$

pourvu que $E[f(X)] < \infty$ et $E[f(Y)] < \infty$.

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$.

D'après le théorème 2.1, on peut supposer sans perte de généralité que $X \preceq_{st} Y$ presque sûrement. Ainsi, si f est croissante, alors $f(X) \leq f(Y)$ et puisque l'espérance $E(\cdot)$ est une fonction monotone, alors $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$.

$2 \Rightarrow 1$.

On a que

$$P(X > u) = E\left[\mathbb{I}_{(u,\infty)}(X)\right], \tag{2.10}$$

où, $\mathbb{I}_{(u,\infty)}(t)$ est la fonction indicatrice croissante définie par

$$\mathbb{I}_{(u,\infty)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > u; \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Or, pour toute fonction croissante Φ, il existe une suite de fonctions Φ_m définie par

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{m,i}\, \mathbb{I}_{A_{m,i}}(x) - b_m, \qquad A = (u,\infty), \quad u \in \mathbb{R},$$

telle que $\Phi_m(x) \rightarrow \Phi(x)$, quand $m \rightarrow \infty$.

Ainsi, si $X \preceq_{st} Y$, alors $E[\Phi_m(X)] \leq E[\Phi_m(Y)]$

et par conséquent, $E[\Phi(X)] \leq E[\Phi(Y)]$. ∎

Il s'avère que l'ordre stochastique usuel a de nombreuses propriétés intéressantes. Dans ce qui suit, nous allons en introduire quelques-unes.

Propriétés de l'ordre stochastique usuel :

Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérances finies.

a) Si $X \preceq_{st} Y$ alors $E[X] \leq E[Y]$.

b) Si $X \preceq_{st} Y$ et $E[X] = E[Y]$ alors $X =_{st} Y$.

Preuve :

a) Depuis le théorème 2.2, on utilise $f(x) = x$.

b) Démontrons d'abord que

$$E[X] = \int_0^\infty [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t)dt. \tag{2.11}$$

Notons d'abord que si X est une variable aléatoire positive, alors

$$\begin{aligned}\int_0^\infty [1 - F_X(t)]dt &= \int_0^\infty P(X > t)dt \\ &= \int_0^\infty E(\mathbb{I}_{X>t})dt = E\left[\int_0^\infty (\mathbb{I}_{X>t})dt\right] \\ &= E\left[\int_0^X 1dt\right] = E[X].\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons opter pour la notation suivante :

$$X^+ = \max(X, 0) \qquad \text{et} \qquad X^- = \max(-X, 0).$$

Alors, pour X de signe quelconque, nous avons que $\quad X = X^+ - X^-$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[X^+] - E[X^-] \\
&= \int_0^{\infty} P(X^+ > t)dt - \int_0^{\infty} P(X^- > t)dt \\
&= \int_0^{\infty} P(X > t)dt - \int_0^{\infty} P(-X > t)dt \\
&= \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt - \int_0^{\infty} P(X < -t)dt.
\end{aligned}$$

Procédons au changement de la variable t en posant $u = -t$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt + \int_0^{-\infty} P(X < u)du \\
&= \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^{0} P(X < t)dt \\
&= \int_0^{\infty} [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)dt
\end{aligned}$$

de là, $$E[Y] - E[X] = \int_0^{\infty} [1 - F_Y(t) - 1 + F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^{0} [F_Y(t) - F_X(t)]dt$$

d'où, $$E[Y] - E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} [F_X(t) - F_Y(t)]dt. \tag{2.12}$$

Ainsi, si $X \preceq_{st} Y$ et $E[X] = E[Y]$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} [F_X(t) - F_Y(t)]dt = 0$.

Cela n'est possible que si $F_X(t) - F_Y(t) = 0$, d'où $F_X(t) = F_Y(t)$. ■

Remarque :

✓ La propriété (a) peut être généralisée à la comparaison des moments. Ainsi, on écrit, si $X \preceq_{st} Y$, alors $E[X^n] \leq E[Y^n]$, pour $n = 1, 3, 5, \ldots$ ou encore si $X \preceq_{st} Y$, où X et Y sont des variables aléatoires non-négatives alors $E[X^n] \leq E[Y^n]$, pour $n = 1,2,3, \ldots$

✓ La propriété (b) a des conséquences importantes pour l'inférence statistique. Si nous avons deux échantillons et voulons tester les hypothèses suivantes :

$$\mathrm{H}_0 : F = G \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : F \preceq_{st} G,$$

un test simple et cohérent peut être basé sur la différence des moyennes. Cependant, un test plus efficace peut être basé sur la fonction $\max\{(F(x) - G(x)), 0\}$ car elle s'annule sous l'hypothèse H_0, mais elle est strictement positive pour certains réels x en vertu de H_1.

Une autre importante propriété de la relation d'ordre stochastique est la suivante.

Théorème 2.3 (stabilité par mélange)

Soient X, Y et Θ des v. a. telles que $[X|\Theta = \theta] \preceq_{st} [Y|\Theta = \theta], \forall\, \theta$. Alors $X \preceq_{st} Y$.

Preuve :

La preuve de ce théorème est immédiate depuis le théorème (2.2). En effet

$$P[X \leq x|\Theta = \theta] \geq P[Y \leq x|\Theta = \theta],$$

on a

$$\begin{aligned} F(x) = P[X \leq x] &= E\big[P[X \leq x|\Theta = \theta]\big] \\ &\geq E\big[P[Y \leq x|\Theta = \theta]\big] \\ &= P[Y \leq x] = G(x). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4 (stabilité par convolution)

Soient X_i et Y_i des variables aléatoires indépendantes telles $X_i \preceq_{st} Y_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Alors pour toute fonction croissante $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\psi(X_1, \ldots, X_n) \preceq_{st} \psi(Y_1, \ldots, Y_n).$$

En particulier, quand $\psi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, l'ordre $\preceq_{st}$ est conservé.

Preuve :

Nous allons procéder par induction.
Pour $n = 1$, pour toute fonction croissante f, on a (théorème 2.2)

$$E\big[f\big(\psi(X_1)\big)\big] \leq E\big[f\big(\psi(Y_1)\big)\big].$$

Cela découle du fait que la composition de deux fonctions croissantes est croissante. Supposons que l'hypothèse est valide pour $n-1$, et considérons les fonctions croissantes $g(x)$ et $h(x)$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = E\big[f\big(\psi(X_1, \ldots, X_{n-1}, x)\big)\big] \quad \text{et} \quad h(x) = E\big[f\big(\psi(Y_1, \ldots, Y_{n-1}, x)\big)\big].$$

Selon l'hypothèse d'induction, $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et puisque f et ψ sont croissantes, alors on obtient

$$E\big[f\big(\psi(X_1, \ldots, X_n)\big)\big] = E[g(X_n)] \leq E[h(Y_n)] = E\big[f\big(\psi(Y_1, \ldots, Y_n)\big)\big],$$

d'où, $$\psi(X_1, \ldots, X_n) \preceq_{st} \psi(Y_1, \ldots, Y_n).$$ ■

Comme corollaire immédiat de ce résultat, on a

$$\max_{i=1\ldots n} X_i \preceq_{st} \max_{i=1\ldots n} Y_i.$$

Énumérons quelques propriétés de l'ordre $\preceq_{st}$ sans fournir de preuves :

P1. $X \preceq_{st} Y \quad \Rightarrow \quad f(X) \preceq_{st} f(Y)$ si f est croissante ;

P2. $X \preceq_{st} Y \quad \Rightarrow \quad f(X) \succeq_{st} f(Y)$ si f est décroissante ;

P3. Stabilité par convergence : Si $X_n \xrightarrow{dist} X,\ Y_n \xrightarrow{dist} Y$ et $X_n \preceq_{st} Y_n\ \forall\, n$, alors $X \succeq_{st} Y$.

$\xrightarrow{dist}$ dénote la convergence en loi.

On pourrait penser que l'ordre usuel est le plus précis des ordres stochastiques. En fait, en s'appuyant sur des notions de temps résiduel de vie (durée de vie), on peut construire des ordres encore plus fins. La section suivante est consacrée à un ordre plus fort que celui traité à la section actuelle. Cet ordre est nommé ordre de hasard et fait appel à la notion de durée de vie restante.

2.1 Ordre de hasard

Il existe de nombreuses situations où des concepts plus forts que l'ordre usuel stochastique sont nécessaires ou utiles. Supposons qu'une personne veut acheter une voiture, et qu'elle peut choisir entre deux types avec différentes durées de vie X et Y. Bien entendu, si $X \preceq_{st} Y$ avec le même prix alors, elle choisira le second type. Par contre, si elle veut acheter une voiture d'occasion âgée d'un an, de sorte que les durées de vie restantes sont X' et Y', où $P(X' > t) = P(X > 1 + t|X > 1)$ et de même pour Y', est-ce que le deuxième type demeure le meilleur, à savoir $X' \preceq_{st} Y'$?

Le nom de cet ordre est dû au fait que le taux de risque (aussi appelé taux de défaillance) est lié à l'existence de densités continues, ainsi il y a équivalence entre le fait de comparer deux densités continues et le fait de comparer leurs taux de risque.
Le taux de défaillance $r_x(t)$ (Failure rate ou hazard rate) (ou fonction de hasard) est un terme relatif à la fiabilité des équipements ou composants défini comme l'inverse du temps moyen jusqu'à la première défaillance[1]. Définissons donc ce terme.

Définition 2.4 (fonction de hasard)

Soit X une variable aléatoire (une durée de vie) de fonction de répartition absolument continue F_X. La fonction de hasard à l'instant t (X a survécu le temps t) est définie par

$$r_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X \leq t + \Delta t \mid X > t)}{\Delta t} = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = -\frac{d}{dt}\ln\left(\bar{F}_X(t)\right), \tag{2.13}$$

où $\bar{F}_X(t) = 1 - F_X(t)$ est la fonction de survie et $f_X(t)$ est la densité de $F_X(t)$.

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Taux_de_d%C3%A9faillance

Le terme $P(X \leq t + \Delta t \mid X > t)$ désigne la probabilité que X défaille au prochain Δt tel que X a survécu t. Notons que la fonction de survie $\bar{F}_X(t)$ donne la probabilité que la variable X dépasse une valeur donnée t. Il s'agit d'une fonction décroissante continue à droite telle que $\bar{F}_X(0) = 1$ et $\bar{F}_X(+\infty) = 0$.

Définition 2.5 (ordre de hasard)

On dit que la variable aléatoire X est plus petite que la variable aléatoire Y au sens de l'ordre de hasard, noté $X \preceq_{hr} Y$, si la fonction

$$t \to \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \quad \text{est croissante.} \tag{2.14}$$

Autrement, on dit que $X \preceq_{hr} Y$ si

$$\frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} \leq \frac{f_Y(t)}{\bar{F}_Y(t)} \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

où, f_X et f_Y sont les densités de X et de Y respectivement.

Notons qu'il est plus avantageux d'utiliser la formule (2.14) que (2.15) puisqu'elle n'exige pas l'existence de densités f_X et f_Y.

Dans le cas discret, on dit que $X \preceq_{hr} Y$ si

$$\frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} \geq \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}, \qquad n \in \{0,1,2,\dots\}, \tag{2.16}$$

où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes.

Dans ce qui suit, nous allons citer quelques définitions équivalentes à celle de (2.5).

- ✓ **Cas des variables aléatoires continues** :

$X \preceq_{hr} Y \Leftrightarrow$

a. $$\frac{f_X(u)}{\bar{F}_X(v)} \leq \frac{f_Y(u)}{\bar{F}_Y(v)} \qquad \forall \ u \leq v$$

b. $$\frac{\bar{F}_X(t+s)}{\bar{F}_X(t)} \leq \frac{\bar{F}_Y(t+s)}{\bar{F}_Y(t)} \qquad \forall\, s \geq 0, \ \forall \ t \in \mathbb{R}$$

c. $$P(X - t > s \mid X > t) \leq P(Y - t > s \mid Y > t) \qquad \forall\, s, t \in \mathbb{R}$$

d. $$\frac{1 - F_X\left(F_Y^{-1}(1-u)\right)}{u} \leq \frac{1 - F_X\left(F_Y^{-1}(1-v)\right)}{v} \quad \forall \ 0 < u \leq v < 1$$

- ✓ **Cas des variables aléatoires discrètes** :

$$X \preceq_{hr} Y \quad \Leftrightarrow \qquad P(X \geq n_1)P(Y \geq n_2) \geq P(X \geq n_2)P(Y \geq n_1) \qquad \forall \ \ n_1 \leq n_2$$

Par construction, l'ordre de hasard est plus fort que l'ordre stochastique usuel $\preceq_{st}$, d'où le résultat suivant.

Théorème 2.5

Soient X et Y sont deux variables aléatoires. L'implication suivante est vraie :

$$\text{si} \quad X \preceq_{hr} Y, \quad \text{alors} \quad X \preceq_{st} Y.$$

Preuve :

Puisque $X \preceq_{hr} Y$, alors

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} = 1,$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \bar{F}_Y(t) \geq \bar{F}_X(t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - F_Y(t) \geq 1 - F_X(t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad F_X(t) \geq F_Y(t), \qquad t \in \mathbb{R} \quad \text{ainsi} \quad X \preceq_{st} Y \quad \blacksquare$$

Maintenant, nous allons mentionner quelques propriétés associées à l'ordre de hasard sans fournir de preuves.

P1. $X \preceq_{hr} Y \;\Rightarrow\; f(X) \preceq_{hr} f(Y)$ si f est croissante;

P2. $X \preceq_{hr} Y \;\Rightarrow\; g(X) \succeq_{hr} g(Y)$ si g est décroissante;

P3. $X \preceq_{hr} Y \;\Rightarrow\; [X|X > t] \preceq_{st} [Y|Y > t]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

P4. $X_i \preceq_{hr} Y_i$, $\{i = 1,2, \dots, \mathrm{m}\} \;\Rightarrow\; \min\{X_1, X_2, \dots X_m\} \preceq_{hr} \min\{Y_1, Y_2, \dots Y_m\}$;

où, (X_i, Y_i) sont des paires indépendantes.

P5. $X_i \preceq_{hr} Y_i$, $\{i = 1,2, \dots, \mathrm{m}\} \;\Rightarrow\; X_{(k)} \preceq_{hr} Y_{(k)}$, $\{k = 1,2, \dots, \mathrm{m}\}$,

où X_i (respectivement Y_i) est une suite de variables aléatoires iid.

Il est parfois utile d'utiliser l'ordre stochastique obtenu en remplaçant la fonction de survie $\bar{F}(t)$ par la fonction de répartition $F(t)$ dans la définition (2.5). On obtient ce qu'on appelle l'ordre inverse de hasard $\preceq_{rh}$. D'où, la définition suivante.

Définition 2.6 (ordre de hasard inverse)

La variable aléatoire X est plus petite que la variable aléatoire Y au sens de l'ordre inverse de hasard, noté $X \preceq_{rh} Y$, si la fonction

$$t \to \frac{F_Y(t)}{F_X(t)} \text{ est croissante.} \tag{2.17}$$

L'ordre de hasard inverse partage de nombreuses propriétés avec l'ordre de hasard habituel. En fait, il y a une forte dualité entre ceux-ci. Par conséquent, les propriétés liées à l'ordre de hasard $\preceq_{hr}$ citées plus haut demeurent valides pour l'ordre $\preceq_{rh}$.

La caractéristique intéressante de l'ordre de hasard suivante est importante pour comparer des fonctions de survie.

$$X \preceq_{hr} Y \quad \Leftrightarrow \quad [X|X > t] \preceq_{st} [Y|Y > t] \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Cependant, il existe des situations où l'on aimerait comparer les variables aléatoires $[X|X \in A]$ et $[Y|Y \in A]$, pour tout ensemble mesurable A. cela nous amène à construire un ordre encore plus fort que $\preceq_{hr}$, à savoir l'ordre de rapport de vraisemblance traité dans la section suivante.

2.2 Ordre de rapport de vraisemblance

Définition 2.7

Si X et Y ont des lois de densités respectives f_X et f_X par rapport à une mesure commune, on écrit $X \preceq_{lr} Y$, si

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \text{pour tout} \quad s \leq t. \tag{2.18}$$

En intégrant l'expression (2.18), par rapport à $s \in A$ et $t \in B$, où A et B sont des intervalles dans $\mathbb{R}$, la formule (2.19) dans le théorème ici-bas est équivalente à (2.18).

Remarque :

✓ L'inégalité (2.18) indique que la fonction $f_X(t)/f_Y(t)$ est décroissante pour tout t, où $f_X(t)/f_Y(t)$ est bel et bien défini.

✓ Par construction, l'ordre de rapport de vraisemblance $\preceq_{lr}$ est plus fort que l'ordre de hasard $\preceq_{hr}$ et par conséquent, il est plus fort que l'ordre stochastique usuel $\preceq_{st}$.

Le théorème suivant expose quelques assertions de l'ordre $\preceq_{lr}$.

Théorème 2.6

Soient X et Y deux variables aléatoires, où $P(X \in A), P(Y \in A), P(a \leq X \leq b)$ et $P(a \leq Y \leq b)$ sont positives. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes

i- $X \preceq_{lr} Y$;

ii- Pour tout intervalles $U = [a, b]$ et $V = [c, d]$ où $a < b < c < d$,

$$P(X \in V)P(Y \in U) \leq P(X \in U)P(Y \in V); \tag{2.19}$$

iii- $[X|a \leq X \leq b] \preceq_{st} [Y|a \leq Y \leq b]$ Pour tout $a < b$; (2.20)

iv- $[X|X \in A] \preceq_{st} [Y|Y \in A]$ Pour tout événement A; (2.21)

v- $[X|X \in A] \preceq_{lr} [Y|Y \in A]$ Pour tout événement A; (2.22)

Remarque :

✓ La densité de $[X|X \in A]$ est donnée par $f_{[X|X\in A]}(t) = f_X(t)/P(X \in A)$.

✓ L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) est due à Whitt (1980), nommée ordre conditionnel uniforme.

Ci-dessous, nous allons citer quelques propriétés que nous jugeons importantes de l'ordre de rapport de vraisemblance $\preceq_{lr}$.

Propriété :

P1. $X \preceq_{lr} Y \Rightarrow f(X) \preceq_{lr} f(Y)$ si f est croissante;

P2. $X \preceq_{lr} Y \Rightarrow g(X) \succeq_{lr} g(Y)$ si g est décroissante;

P3. L'ordre $\preceq_{lr}$ est stable par convolution;

P4. L'ordre $\preceq_{lr}$ est stable en convergence.

D'après le théorème (2.2), nous avons pour toute fonction φ croissante que

$$X \preceq_{st} Y \quad \Leftrightarrow \quad E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)].$$

En particulier, lorsque $\varphi(x) = -e^{-sx}$, où $s > 0$, l'équivalence précédente donne naissance à l'ordre de la transformée de Laplace qui sera introduit dans la section suivante.

2.3 Ordre de la transformée de Laplace

Définition 2.8

Soient X et Y deux variables aléatoires positives. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre de la transformée de Laplace, noté $X \preceq_{Lt} Y$, si

$$E[\exp(-sX)] \geq E[\exp(-sY)] \quad \text{pour tout } s > 0, \tag{2.23}$$

Définition 2.9

Soient X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X absolument continue et de densité f_X. La transformée de Laplace de la densité f_X est,

$$L_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} f_X(u) du\,, \qquad \text{pour } \; s > 0. \tag{2.24}$$

La transformée de la fonction de répartition F_X est,

$$L_X^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} F_X(u) du\,, \qquad \text{pour } \; s > 0. \tag{2.25}$$

Dans ce cas, les implications suivantes sont vraies pour tout $s > 0$:

$$X \preceq_{Lt} Y \quad \text{si} \quad L_X(s) \geq L_Y(s), \tag{2.26}$$

$$X \preceq_{Lt} Y \quad \text{si} \quad L_X^*(s) \geq L_Y^*(s). \tag{2.27}$$

Notons que si F_X est continue, alors

$$L_X^*(s) = \frac{1}{s} L_X(s), \;\; s > 0. \tag{2.28}$$

Preuve :

En fait, utilisons l'intégration par partie, on posant :

$$L_X^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} F_X(u) du$$

$$= \frac{1}{-s} e^{-su} F_X(u) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-s} e^{-su} dF_X(u)$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-su} f_X d(u) = \frac{1}{s} L_X(s). \qquad \blacksquare$$

En 1997, Shaked et Wong ont proposé une nouvelle forme d'ordre de la transformée de Laplace en utilisant la fonction de survie $\overline{F}_X$. Soient d'abord

$$\mathfrak{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF_X(u), \qquad s > 0, \tag{2.29}$$

$$\mathfrak{F}_X^*(s) = \int_0^\infty e^{-su} \overline{F}_X(u) du, \qquad s > 0, \tag{2.30}$$

Ces dernières sont respectivement les transformées de Laplace-Stieltjes de F_X et $\overline{F}_X$. Dans ce cas, l'ordre peut être caractérisé par

$$X \leq_{Lt} Y \quad \text{si} \quad \mathfrak{F}_X^*(s) \leq \mathfrak{F}_Y^*(s) \quad \text{pour tout } s > 0. \tag{2.31}$$

Aussi, on démontre que

$$\mathfrak{F}_X^*(s) = \frac{1 - \mathfrak{F}_X(s)}{s}, \qquad s > 0. \tag{2.32}$$

En effet,
$$\mathfrak{F}_X^*(s) = \int_0^\infty e^{-su}\overline{F}_X(u)du$$
$$= \int_0^\infty e^{-su}\big(1 - F_X(u)\big)du$$
$$= \int_0^\infty \big(e^{-su} - e^{-su}F_X(u)\big)du$$
$$= \int_0^\infty e^{-su}du - \int_0^\infty e^{-su}F_X(u)\,du$$
$$= \frac{1}{-s}e^{-su}|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-su}F_X(u)\,du$$
$$= \frac{1}{s} - \int_0^\infty e^{-su}F_X(u)\,du.$$

On utilise l'intégration par partie en posant :
$$u = \frac{1}{-s}e^{-su} \qquad u' = e^{-su},$$
$$v = F_X(u) \qquad v' = dF_X(u).$$

alors,
$$\mathfrak{F}_X^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{-s}e^{-su}F_X(u)\Big|_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su}\,dF_X(u)$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-su}\,dF_X(u)$$
$$= \frac{1}{s}\big(1 - \mathfrak{F}_X(s)\big). \qquad \blacksquare$$

D'après le résultat (2.32), on écrit,

$$X \preceq_{Lt} Y \quad \text{si} \quad \mathfrak{F}_X(s) \geq \mathfrak{F}_Y(s) \quad \text{pour tout } s > 0. \tag{2.33}$$

Selon I. Elbatal (2007) [8], la transformée de Laplace peut être interprétée de plusieurs manières lorsque la variable aléatoire X représente la durée de vie d'un système ou d'un dispositif. Cela permet plusieurs applications de l'ordre de la transformée de Laplace. Par exemple, soit $X_{(t)} = [t - X | X < t], t \in \{x: F_X(x) < 1\}$ une variable aléatoire dont la distribution est la même que la distribution conditionnelle de $t - X$ étant donné que $X < t$. Lorsque la variable aléatoire X signifie la durée de vie d'un dispositif avec une probabilité égale à 1, alors $X_{(t)}$ est nommée la durée de vie résiduelle inversée ou le temps écoulé depuis la panne ou le temps d'inactivité.

Citons quelques propriétés de l'ordre $\preceq_{Lt}$.

P1. $X \preceq_{Lt} Y \quad \Rightarrow \quad E[X] \leq E[X]$ si les espérances existent;

P2. $X \preceq_{Lt} Y \quad \Rightarrow \quad E[\Phi(X)] \geq E[\Phi(Y)]$ pour toute fonction Φ monotone;

P3. L'ordre $\preceq_{Lt}$ est stable par convolution;

P4. L'ordre $\preceq_{Lt}$ est stable par mélange;

P5. L'ordre $\preceq_{Lt}$ est stable en convergence.

2.4 Exemple d'application[2]

Comparons les deux richesses *R1* et *R2* suivantes :

$$R1 = \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{cases} \quad \text{et} \quad R2 = \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{cases}$$

Elles ont les mêmes valeurs possibles. Mais *R1* peut être reconstituée en transformant *R2* de la manière suivante: on diminue la probabilité des richesses possibles les plus faibles, et on augmente celle de la plus élevée. Intuitivement, on soupçonne que tous les individus qui préfèrent plus à moins préféreront *R1* à *R2*. Avant de démontrer qu'il en va bien ainsi, voici comment on peut rationaliser cette intuition.

Partons de la valeur la plus élevée:

$$P(R1 \geq 3) = 0.5 \qquad P(R2 \geq 3) = 0.3$$

De ce point de vue, *R1* est préférable à *R2*. Voyons la valeur possible suivante:

$$P(R1 \geq 2) = 0.9 \qquad P(R2 \geq 2) = 0.8$$

De ce point de vue aussi, *R1* est préférable à *R2*. Enfin,

$$P(R1 \geq 1) = 1 \qquad P(R2 \geq 1) = 1$$

De ce point de vue, *R1* est équivalent à *R2*.

Au total, *R1* apparaît préférable à *R2* parce que, pour toute valeur *t*, on a,

$$P(R1 \geq t) \geq P(R2 \geq t)$$

Autrement, on peut écrire en utilisant les fonctions de répartition F et G,

$$1 - P(R1 \leq t) \geq 1 - P(R2 \leq t)$$

$$1 - F(t) \geq 1 - G(t)$$

$$F(t) \leq G(t).$$

[2] http://jlcayatte.free.fr/domstoc.pdf

CHAPITRE 3

III. ORDRES DE VARIABILITÉ UNIVARIÉS

La section précédente a porté sur les ordres stochastiques qui permettent de comparer la taille des variables aléatoires. Souvent, la variabilité d'une variable aléatoire est un phénomène intéressant à prendre en considération, puisqu'elle décrit le degré de risque d'un résultat incertain. Si deux variables aléatoires X et Y ayant la même moyenne décrivent les rendements de deux placements risqués, alors tous les décideurs averses au risque choisiront celle à faible variabilité. Si l'on veut comparer la dispersion entre deux fonctions de répartition, le plus simple serait de comparer leurs écarts-types ou certaines des mesures de dispersion. Toutefois, une telle comparaison est fondée uniquement sur deux nombres, et par conséquent, il n'est souvent pas très informatif.

Le concept de la variabilité est une base en statistique et de nombreux autres domaines connexes, tels que la théorie de fiabilité, l'économie et la science actuarielle. Au cours des deux dernières décennies, plusieurs ordres stochastiques plus raffinés qui permettent de comparer les variabilités de variables aléatoires en fonction de leurs fonctions de répartition ont été introduits dans la littérature. Par exemple, Müller et Stoyan (2002) [2] présentent des résultats approfondis sur la plupart de ces concepts et leurs propriétés. Pour leur part, Shaked et Shanthikumar (2007) [1] en donnent une description générale et détaillée en faisant la comparaison entre des risques. Ainsi, les ordres de variabilité sont d'un intérêt particulier dans le contexte de la prise de décision en situation de risque.

3.1 Ordres convexe et concave

L'ordre convexe, dans sa définition, utilise le concept de fonction convexe. Rappelons-nous que cette dernière est une fonction numérique vérifiant une propriété de sous-additivité vis-à-vis de la barycentration. Graphiquement, cela correspond à un graphe dont la partie bombée est tournée vers le bas, ce qui peut s'interpréter en termes de partie convexe du plan. À l'inverse, une fonction dont le graphe a sa partie bombée tournée vers le haut est une fonction concave. Elle vérifie une propriété de sur-additivité vis-à-vis de la barycentration.
L'intérêt des fonctions convexes (concaves) est de produire un grand nombre d'inégalités remarquables. Cela se manifeste dans plusieurs domaines notamment en économie et en finance, puisque la concavité de la fonction d'utilité correspond à l'aversion pour le risque. Par ailleurs, les actuaires utilisent la fonction du risque (nommée la désutilité) qui est une fonction convexe. Notons que, la fonction d'utilité est une mesure du bien-être ou de la satisfaction obtenue par la consommation ou l'obtention d'un bien ou d'un service.

Définition 3.1

La fonction d'utilité associe à chaque panier de consommation x un nombre $u(x)$ tel que le panier y est préféré au panier z, si et seulement si $u(y) > u(z)$[3].

En économie et en finance, on utilise le concept de dominance stochastique d'ordre 2 (nommé « ordre stop-loss » par les actuaires) au lieu d'ordre stochastique convexe (concave) pour comparer des variables aléatoires réelles représentant des

[3] http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_du_consommateur_(micro%C3%A9conomie)#Fonction_d.27utilit.C3.A9

gains ou des pertes. En effet, cet ordre généralise la théorie de l'utilité marginale puisqu'il n'impose aucune spécification explicite des fonctions d'utilité des agents. La théorie d'utilité marginale a été développée, simultanément mais indépendamment, par l'Anglais Stanley Jevons, l'Autrichien Carl Menger en 1871 et le Français Léon Walras en 1874. Ces économistes ont compris qu'il ne fallait pas raisonner en termes d'utilité totale ou moyenne, mais en termes d'utilité marginale, c'est-à-dire de degré de satisfaction apportée par la dernière unité consommée[4].

Dans la langue courante, le mot « convexité » a un sens directement relié au concept mathématique d'ensemble convexe, la convexité d'un objet désignant la partie de celui-ci qui a une forme bombée. En économie, la convexité est un indicateur de risque de taux directement lié au concept mathématique de fonction convexe[5]. Le mot convexe, lorsqu'il se rapporte à une forme géométrique ou un ensemble de points, il renvoie au concept d'ensemble convexe, et lorsqu'il se rapporte à une fonction, il renvoie au concept de fonction convexe. Suivant ce contexte, nous allons d'abord définir qu'est-ce qu'une fonction convexe, puis définir la fonction concave en fournissant la propriété qui les relie.

Définition 3.2

Une fonction f définie sur I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall(x_1, x_1) \in I^2$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad \forall t \in [0,1] \tag{3.1}$$

Cela signifie que pour tous x_1, x_2 de I, le segment $[A_1, A_2]$ de $\mathbb{R}^2$, où $A_1 = (x_1, f(x_1))$ et $A_2 = (x_2, f(x_2))$, est situé au-dessus de la courbe représentative de f.

[4] « Microéconomie ». Par Marc Montoussé, Isabelle Waquet

[5] http://fr.wikipedia.org/wiki/Convexit%C3%A9.

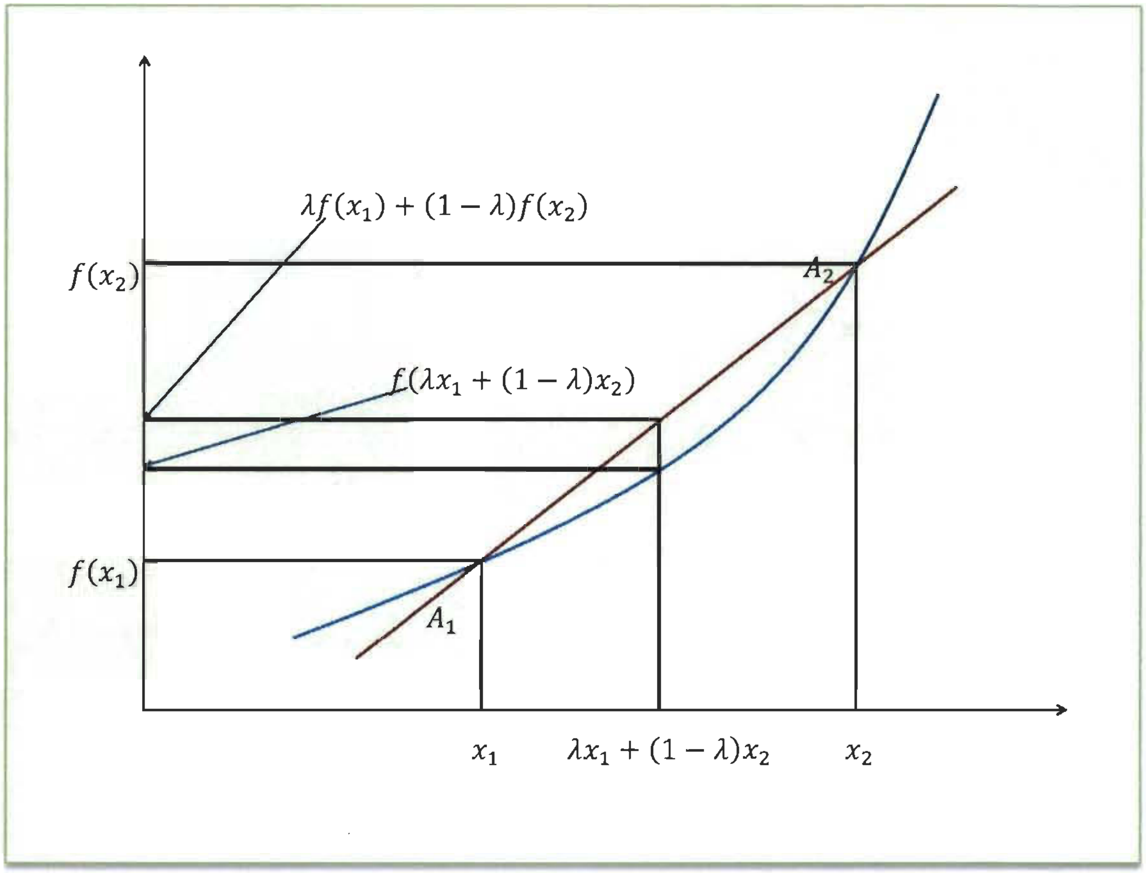

Figure 2 : graphique d'une fonction convexe

De façon pratique, soit f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles.

Il existe un lien entre la concavité et la convexité d'une fonction. Ainsi, une fonction f est dite concave si sa fonction opposée $(-f)$ est convexe.

Définition 3.3

Soient X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y par rapport à l'ordre stochastique convexe, noté par $X \preceq_{cx} Y$, si pour toute fonction convexe φ à valeurs réelles et lorsque les espérances sont bien définies,

$$E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]. \tag{3.2}$$

Définition 3.4

Soient X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre stochastique concave, noté par $X \preceq_{cv} Y$, si pour toute fonction concave φ à valeurs réelles et lorsque les espérances sont bien définies,

$$E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]. \tag{3.3}$$

En se basant sur le fait que la fonction $\varphi(x)$ est convexe si et seulement si $-\varphi(x)$ est concave, nous avons que

$$X \preceq_{cv} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad Y \preceq_{cx} X. \tag{3.4}$$

Suite à ce résultat, nous discuterons seulement des propriétés de l'ordre stochastique convexe. À noter que dans la littérature financière ou économique, les auteurs préfèrent utiliser la notion de dominance stochastique d'ordre 2 (Figure 3) au lieu de l'ordre stochastique convexe ou concave. En fait, la notion d'ordre stochastique est plus générale que la dominance puisqu'elle s'applique à tous les domaines qui se veulent aléatoire.

Proposition 3.1

Soient X et Y deux variables aléatoires de même espérance et de fonctions de répartition F et G. Alors, pour tout réel a et sous réserve que les intégrales soient bien définies, nous avons les résultats suivants :

i. $X \preceq_{cx} Y$ si et seulement si $\int_{-\infty}^{a} F(x)dx \leq \int_{-\infty}^{a} G(x)dx$ (3.5)

ii. $X \preceq_{cx} Y$ si et seulement si $\int_{a}^{\infty} \overline{F}(x)dx \leq \int_{a}^{\infty} \overline{G}(x)dx$ (3.6)

À noter que les fonctions $\overline{F}$ et $\overline{G}$ sont respectivement les survies de X et Y.

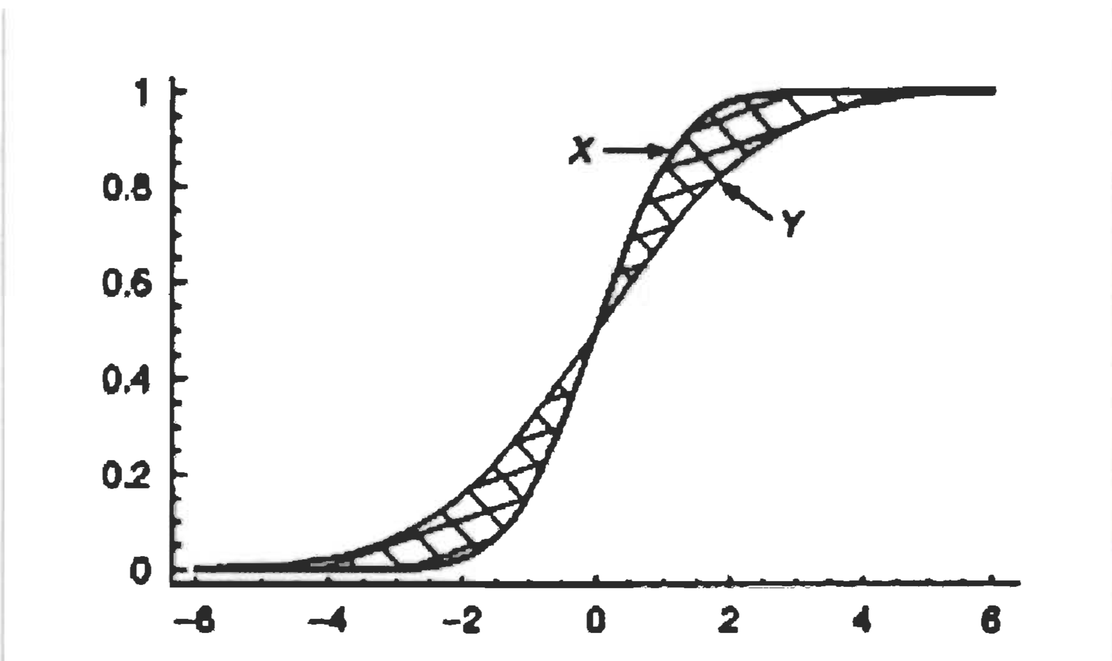

Figure 3 : dominance stochastique d'ordre 2[6]

[6] G. Saporta « Probabilités, analyse des données et statistique », Technip, 2006. Page 29

On voit que la répartition de X est moins dispersée que celle de Y. Un investisseur averse au risque préférera donc X à Y. Ainsi, l'ordre convexe implique le fait que la variance de X soit inférieure à celle de Y.

La proposition (3.1.i) peut s'écrire autrement. Pour tout réel a, on a

$$X \preceq_{cx} Y \qquad \text{si et seulement si} \qquad \int_{-\infty}^{a} \{F(x) - G(x)\}dx \leq 0 \tag{3.7}$$

Les résultats précédents (3.5) et (3.6) sont respectivement équivalents aux résultats (3.8) et (3.9), $\forall a \in \mathbb{R}$:

i. $X \preceq_{cx} Y$ si et seulement si $E[(X-a)^+] \leq E[(Y-a)^+]$ (3.8)

ii. $X \preceq_{cx} Y$ si et seulement si $E[(a-X)^+] \leq E[(a-Y)^+]$ (3.9)

Preuve :

1) $E[(X-a)^+] = \int_0^\infty P[(X-a)^+ \geq t]dt = \int_0^\infty P[X \geq t + a]dt = \int_a^\infty \bar{F}(t)dt$

2) La primitive $\mathfrak{F}(x)$ de la fonction de répartition $F(x)$ définie sur $\mathbb{R}^+$est continue, convexe, positive, croissante et s'écrit comme suit,

$$\mathfrak{F}(a) = \int_{-\infty}^{a} F(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{a} P[X \leq t]dt$$

En utilisant la fonction indicatrice $\mathbb{I}_{\{D\}}$ de l'ensemble D, nous pouvons réécrire la fonction $\mathfrak{F}(x)$ de façon équivalente ci-après.

$$\mathfrak{F}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{t \leq a\}} E\left[\mathbb{I}_{\{X \leq t\}}\right] dt$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X \leq t \leq a\}} dt\right]$$

$$= E[(a - X)^+],$$

par conséquent
$$\int_{-\infty}^{a} F(t)dt = E[(a - X)^+] \qquad \blacksquare$$

Dans ce qui va suivre, nous allons mentionner quelques propriétés utiles de l'intégrale. Nous avons jugé nécessaire de les citer, puisque l'ordre convexe (concave) fait partie des ordres intégraux. Aussi, nous allons rapporter certaines propriétés de l'ordre convexe (concave), plus loin.

Propriétés utiles

P1. L'intégrale d'une fonction positive est croissante intégrable;

P2. L'intégrale d'une fonction croissante est convexe;

P3. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors la fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens que f.

Propriétés utiles de l'ordre convexe (concave)

P4. Soient $\varphi(x) = x$ et $\psi(x) = -x$ deux fonctions convexes. L'application de la définition (3.3) nous amène à conclure que,

$$X \leq_{cx} Y \qquad \Rightarrow \qquad E(X) \leq_{cx} E(Y). \tag{3.10}$$

Ainsi, seules les variables aléatoires de même espérance peuvent être comparées par l'ordre convexe.

P5. En considérant le cas particulier d'une fonction convexe $\varphi(x) = (x - a)^2$, nous pouvons voir, lorsque $\text{var}(Y) < \infty$, que

$$X \leq_{cx} Y \qquad \Rightarrow \qquad \text{var}(X) \leq \text{var}(Y). \tag{3.11}$$

Par conséquent, cet ordre compare la dispersion de variables aléatoires de même espérance. De plus, il est plus fort que celui de la variance, car l'implication réciproque n'est pas vraie. Ainsi, on dit que

$$X \leq_{cx} Y \quad \Rightarrow \quad Y \text{ est plus variable (dispersive)que } X. \tag{3.12}$$

Dans ce cas, Y a plus de chances que X de prendre des valeurs extrêmes.

P6. En se basant sur la fameuse **inégalité de Jensen**, (qui stipule que si f une fonction convexe sur $]a\ b[$ et X une variable aléatoire d'espérance finie à valeurs dans $]a\ b[$, alors $f\{E[X]\} \leq E[f(X)]$) nous avons en particulier $E[X] \leq_{cx} X$ pour toute variable X. Plus généralement, si $g(x)$ est convexe, alors

$$E[g(X)] = E[g(E[Y|X])] \leq E\big[E[g(Y)|X]\big] = E[g(Y)]. \tag{3.13}$$

Cela implique que $X \leq_{cx} Y$, d'où le théorème fondamental suivant.

Théorème 3.1 (martingale de $\preceq_{cx}$)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $E[Y|X] = X$. Alors $X \preceq_{cx} Y$.

Donnons à présent quelques propriétés des ordres convexes appliqués à des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Malheureusement, il ne peut exister de caractérisation simple des ordres convexes. En revanche, un théorème de Strassen qui caractérise l'ordre convexe par construction sur le même espace de probabilité reste possible. Le lecteur intéressé par la preuve de ce théorème pourra consulter Szekli (1995) [4].

Théorème 3.2 de Strassen(1965)

Soient X et Y deux variables aléatoires dans $\mathbb{R}^n$ telles que $X \preceq_{cx} Y$, alors il existe deux variables aléatoires $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ définies sur le même espace de probabilité telles que

$$\hat{X} =_{st} X, \qquad \hat{Y} =_{st} Y \qquad \text{et} \qquad E\left[\hat{Y}\middle|\hat{X}\right] = \hat{X} \;\; p.s. \tag{3.14}$$

P7. Une caractérisation importante des ordres convexes est décrite dans le théorème qui suit, la preuve de celui-ci est un peu longue que nous allons omettre.

Théorème 3.3

Soient X et Y deux v. a. de fonctions de répartitions F et G, avec des espérances finies. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $X \preceq_{cx} Y$ sont les suivantes :

$i.$ $$\int_0^p F^{-1}(t)dt \geq \int_0^p G^{-1}(t)dt, \qquad \text{pour tout p} \in [0,1], \tag{3.15}$$

$ii.$ $$\int_p^1 F^{-1}(t)dt \leq \int_p^1 G^{-1}(t)dt, \qquad \text{pour tout p} \in [0,1]. \tag{3.16}$$

P8. L'ordre $\preceq_{cx}$ est stable par mélange. En effet, si X, Y et Θ sont des variables aléatoires telles que pour tout $\theta \in \Theta$,

$$[X|\Theta = \theta] \preceq_{cx} [Y|\Theta = \theta], \qquad \text{alors} \qquad X \preceq_{cx} Y \tag{3.17}$$

P9. L'ordre $\preceq_{cx}$ est stable par convolution. Soient X_i et Y_i des variables aléatoires indépendantes telles $X_i \preceq_{cx} Y_i$, pour $i = 1, \dots, n$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \preceq_{cx} \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{3.18}$$

P10. Si X et Y sont deux variables aléatoires, alors

$$X \preceq_{cx} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad -X \preceq_{cx} -Y, \tag{3.19}$$

cela signifie que l'ordre convexe ne dépend pas de l'interprétation des variables aléatoires comme étant des variables de gain ou de perte.

P11. Dans ce qui suit, des conditions qui caractérisent l'ordre convexe.

Théorème 3.4

Soient X et Y deux variables aléatoires de même moyenne, de densité f et g, de fonctions de répartitions F et G. Et soit $S^{-}(h)$ le nombre de changements de signe de la fonction h. Alors

si, $S^{-}(g - f) = 2$ tel que la séquence est $+ - +$

ou $S^{-}(G - F) = 1$ tel que la séquence est $+ -$

ou encore $S^{-}(\bar{F} - \bar{G}) = 1$ tel que la séquence est $+ -$

alors, $X \preceq_{cx} Y$

Preuve :

La preuve sera donnée seulement pour le cas continu.

Supposons que,

$$S^{-}(g-f)=2 \quad \text{tel que la séquence est } + \; - \; +$$

Notons par a et b $(a<b)$ les points d'intersection des densités f et g, tels que nous avons les intervalles suivants : $I_1=(-\infty,a]$, $I_2=(a,b]$, $I_3=(b,\infty)$.

Notons par $h(x)$ la différence des densités et par $H(x)$ la différence des distributions.

$$h(x)=g(x)-f(x), \qquad H(x)=G(x)-F(x).$$

Alors, $h(x)\geq 0$ dans I_1 et I_3, et $h(x)\leq 0$ dans I_2.

Ainsi,

$$H(x)=\int_{-\infty}^{x} h(u)du \text{ est croissante dans } I_1, I_2 \text{ et décroissante dans } I_1.$$

D'où,

$\lim_{x\to-\infty} H(x)=\lim_{x\to\infty} H(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad S^{-}(G-F)=1$ et la séquence est $+\;-$.

Maintenant on suppose que, $S^{-}(g-f)=1$ de séquence $+\;-$.

Soit c le point d'intersection de densités f et g tel que : $J_1=(-\infty,c]$ et $J_3=(c,\infty)$.

Ainsi, $h(x)\geq 0$ dans J_1, et $h(x)\leq 0$ dans J_2.

Il est clair que $\lim_{x\to-\infty} H(x)=0$, et puisque $E[X]=E[Y]$, on a

$$\lim_{x\to\infty} H(x)=\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x}[G(x)-F(x)]=0.$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{x} H(u)du\geq 0$, d'où $\int_{-\infty}^{x} F(u)du\geq\int_{-\infty}^{x} G(u)du \quad \forall x\in\mathbb{R}.$ ■

3.2 Ordre convexe croissant et ordre concave croissant

Ces ordres stochastiques sont utilisés dans la littérature sous plusieurs autres noms, par exemple Ross (1983), a appelé l'ordre $\preceq_{icx}$ « stochastiquement plus variable», tandis que Müller et Stoyan (2002) [2] l'ont appelé «plus petit au sens de durée de vie résiduelle moyenne». En actuariat, il est connu sous le nom d'ordre «stop-loss », alors que les économistes le nomme «domination stochastique du second ordre de deuxième type» désignée par $\preceq_{SSD2}$. Nous savons par l'analyse classique qu'une fonction dérivable f est croissante si la dérivée première est positive, et elle est convexe si la dérivée seconde est positive. Cette idée entre autres a été considérée dans la littérature, par exemple dans la théorie de files d'attente par Rolski et Stoyan (1974), et en sciences actuarielles par Denuit (2001).

Définition 3.5

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'espérances finies. On dit que

a) X est plus petite que Y au sens de l'ordre convexe croissant, noté $\preceq_{icx}$, si pour toute fonction convexe f,

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)]. \tag{3.20}$$

b) X est plus petite que Y au sens de l'ordre concave croissant, noté $\preceq_{icv}$, si pour toute fonction concave f,

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)]. \tag{3.21}$$

Dans le domaine de fiabilité des composantes, des formes équivalentes aux propriétés (a) et (b) peuvent être formulées.

Si $\overline{F} = 1 - F$ et $\overline{G} = 1 - G$ sont les fonctions de survie associées à X et Y, alors :

$$\text{(a. 1)} \qquad X \preceq_{icx} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_a^{\infty} \overline{F}(x)dx \leq \int_a^{\infty} \overline{G}(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \qquad (3.22)$$

$$\text{(b. 1)} \qquad X \preceq_{icv} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_0^{a} F(x)dx \leq \int_0^{a} G(x)dx. \quad \forall a \in \mathbb{R}. \qquad (3.23)$$

De cette façon, il est évident que l'ordre convexe croissant compare la partie supérieure de la fonction de distribution, tandis que l'ordre concave croissant met l'accent sur la partie inférieure de celle-ci (Figure 4). Cette différence conduit ainsi à des utilisations différentes de ces deux ordres.

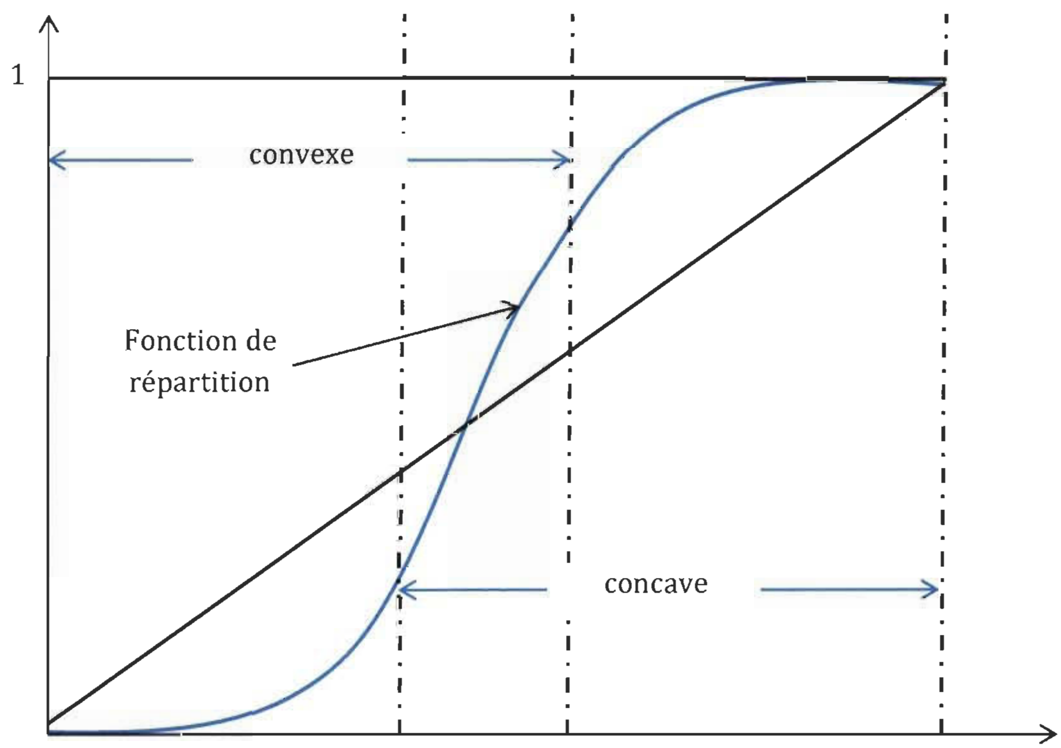

Figure 4 : la convexité et la concavité de la fonction de répartition

En sciences actuarielles, la propriété (a.1) est interprétée de la façon suivante :
Le risque associé aux pertes X est préférable à celui associé à Y si et seulement si,

$$E[\max(X - t, 0)] \leq E[\max(Y - t, 0)], \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.24}$$

Par contre, en économie et particulièrement dans la littérature de l'inégalité sociale et la mesure du bien-être, la propriété (b.1) peut être interprétée comme suit :
si $X \preceq_{icv} Y$, alors la distribution de la richesse $G(x)$ associée à Y est considérée plus encore que celle associée à X.

Comme on a vu dans la section précédente concernant l'ordre convexe et concave, il existe une relation entre l'ordre $\preceq_{icx}$ et $\preceq_{icv}$. En effet, la fonction $f(x)$ est convexe croissante si et seulement si la fonction $-f(-x)$ est concave croissante. D'où la propriété suivante,

$$X \preceq_{icx} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad -Y \preceq_{icv} -X \tag{3.25}$$

De ce fait, nous allons présenter seulement quelques propriétés importantes de l'ordre stochastique convexe croissant $\preceq_{icx}$.

Propriétés utiles de l'ordre convexe croissant (concave croissant)

P1. $$X \preceq_{icx} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad E[(X - a)^+] \leq E[(Y - a)^+]. \tag{3.26}$$

Cela est dû au résultat suivant,

$$E[(X - a)^+] = \int_a^\infty \overline{F}(t)dt \qquad \text{où} \qquad (X - a)^+ = \sup\{x - a, 0\}, \tag{3.27}$$

P2. Soient X et Y deux variables aléatoires,

$$\text{Si} \qquad E[Y|X] \geq X, \qquad \text{alors} \qquad X \preceq_{icx} Y \tag{3.28}$$

P3. L'ordre convexe croissant $\preceq_{icx}$ est stable par mélange.

P4. Le fameux théorème de Strassen est aussi valide pour l'ordre convexe croissant. En effet, si $X \preceq_{icx} Y$, alors il existe deux variables aléatoires $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ définies sur le même espace de probabilité que X et Y, et telles que

$$\hat{X} =_{st} X, \qquad \hat{Y} =_{st} Y \qquad \text{et} \qquad E\big[\hat{Y}\big|\hat{X}\big] = \hat{X}. \tag{3.29}$$

P5. La stabilité par convolution de l'ordre convexe croissant nous chemine vers des propriétés importantes, lesquelles nous allons citer sans émettre de démonstrations. Dans ce qui suit, X_i et Y_i sont deux suites de v. a. indépendantes et telles que

$$X_i \preceq_{icx} Y_i\,, \qquad \forall\; i = 1,2,\dots,n\,,$$

Et soient M, N deux v. a. dans $\mathbb{N}$ indépendantes des X_i et des Y_i, et telles que $M \preceq_{icx} N$, alors les propriétés suivantes sont vraies :

* $g(X_1,\dots,X_n) \preceq_{icx} g(Y_1,\dots,Y_n)$, $\forall g$ convexe croissante point par point (3.30)

* $$\sum_{j=1}^{N} X_i \preceq_{icx} \sum_{j=1}^{N} Y_i \tag{3.31}$$

* $$\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \preceq_{icx} \max\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} \tag{3.32}$$

* $$\sum_{j=1}^{M} X_i \preceq_{icx} \sum_{j=1}^{N} X_i \tag{3.33}$$

* $$\sum_{j=1}^{M} X_i \preceq_{icx} \sum_{j=1}^{N} Y_i \tag{3.34}$$

P6. La propriété suivante caractérise l'ordre convexe croissant $\preceq_{icx}$.

Notons par $S^{-}(f)$ le nombre de changements de signe de la fonction f dans un intervalle I donné. Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectivement F et G, (fonctions de survie $\bar{F}$ et $\bar{G}$) et telles que $E[Y] \geq E[X]$, alors

a) $S^{-}(\bar{F} - \bar{G}) \leq 1$ tel que la séquence est $+\ -$, alors $X \preceq_{icx} Y$. (3.35)

b) $S^{-}(G - F) \leq 1$ tel que la séquence est $+\ -$, alors $X \preceq_{icx} Y$. (3.36)

P7. Soient X et Y deux variables aléatoires, alors on a les relations suivantes :

i- $X \preceq_{st} Y \quad \Rightarrow \quad X \preceq_{icx} Y$ et $X \preceq_{icv} Y$; (3.37)

ii- $X \preceq_{cx} Y \quad \Rightarrow \quad X \preceq_{icx} Y$; (3.38)

iii- $X \preceq_{icx} Y$ et $\mathrm{E}[X] = E[Y] \quad \Rightarrow \quad X \preceq_{icv} Y$; (3.39)

iv- $X \preceq_{cv} Y \quad \Rightarrow \quad X \preceq_{icv} Y$; (3.40)

CHAPITRE 4

IV. ORDRES DISPERSIF ET EXCESS-WEALTH

Au fil des ans, plusieurs ordres stochastiques ont été introduits dans la littérature pour comparer les différents aspects des distributions de probabilité. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les ordres de variabilité sont d'une importance particulière pour comparer deux variables aléatoires. Parmi ces ordres, on trouve l'ordre dispersif et l'ordre *excess-wealth*. Les formules et les règles utilisées par ces ordres stochastiques sont basées sur la notion de fonctions quantiles. Celles-ci sont plus difficiles à saisir intuitivement, mais, comme on le verra dans ce chapitre, elles sont plus facilement extensibles au cas de la diversification entre les actifs risqués, contrairement aux distributions cumulatives qui sont très difficiles à généraliser.

Ce chapitre sera donc consacré à présenter et à étudier cette famille particulière d'ordres de variabilité en soulignant les propriétés importantes associées à chaque ordre. Dans la première section, nous allons donner une description de l'ordre dispersif ainsi que quelques caractérisations utiles. Par ailleurs, la deuxième section sera dédiée à une extension plus faible, à savoir l'ordre *excess-wealth*.

4.1 Ordre de dispersion (ordre dispersif)

Les ordres de variabilité indiquent qu'une distribution de probabilité est plus étalée ou dispersée qu'une autre, ils comparent ainsi les distributions de probabilité en fonction de leur étalement ou de leur dispersion. Différents appellations de l'ordre de dispersion ont été introduits dans la littérature mathématique pour comparer des variables aléatoires, par exemple, Doksum (1969) a introduit cet ordre sous le nom de « ordering of scale ». Shaked (1982), Schweder (1982) et Hickey (1986) ont analysé cet ordre afin de comparer des distributions en se basant sur le concept de dilatation. Dans cette section, nous étudions l'ordre dispersif et soulignons sa signification et ses propriétés. Soient X et Y deux v. a. de fonctions de répartition, respectivement, F et G. la fonction quantile de X est définie par

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\} \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{4.1}$$

Définition 4.1

La fonction de répartition F est plus petite que la fonction de répartition G au sens de l'ordre dispersif, noté $F \preceq_{disp} G$, $(X \preceq_{disp} Y)$, si

$$F^{-1}(t) - F^{-1}(s) \leq G^{-1}(t) - G^{-1}(s), \qquad \forall\, 0 < s < t < 1. \tag{4.2}$$

Notons que la formule (4.2) est à la fois réflexive et transitive, par contre elle n'est pas antisymétrique. Conceptuellement, il est clair que l'ordre dispersif consiste à comparer les variabilités des variables aléatoires X et Y en comparant la différence de leurs quantiles.

L'ordre dispersif peut aussi être défini comme suit :

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad x \to G^{-1}(x) - F^{-1}(x) \text{ est croissante dans } (0,1). \tag{4.3}$$

En termes de fonctions des survies, on a le résultat suivant :

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad x \to \bar{G}^{-1}(x) - \bar{F}^{-1}(x) \text{ est décroissante dans } (0,1). \tag{4.4}$$

Comme conséquence directe de (4.2) on a,

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Rightarrow \quad |X_1 - X_2| \preceq_{st} |Y_1 - Y_2| \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y), \tag{4.5}$$

où (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) sont respectivement deux copies indépendantes de X et Y.

Ci-dessous, une propriété intéressante de l'ordre $\preceq_{disp}$. La preuve de celle-ci suivra.

$$\text{Si} \quad X \preceq_{disp} Y \quad \text{et} \quad Y \preceq_{disp} X, \quad \text{alors} \quad Y =_{st} X + a, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Preuve :

Si $\quad X \preceq_{disp} Y \quad$ et $\quad Y \preceq_{disp} X,$

alors, $\quad F^{-1}(t) - F^{-1}(s) = G^{-1}(t) - G^{-1}(s) \quad \forall\, 0 < s < t < 1.$

Et puisque, $\quad X =_{st} F^{-1}(U) \quad$ et $\quad Y =_{st} G^{-1}(U),$

alors, $\quad F^{-1}(t) = G^{-1}(t) - G^{-1}(s) - F^{-1}(s),$

posons $\quad a = G^{-1}(s) - F^{-1}(s), \ \forall\, s \in (0,1),$

ainsi, $\quad F^{-1}(t) = G^{-1}(t) - a.$ ■

La relation d'ordre dispersif est stable par changement de position (location-free) et par changement d'échelle. En outre, si X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est strictement croissante dans $\mathbb{R}$, alors les variables aléatoires X et $k{\cdot}X$ (où $k{\neq}1$) forment une paire d'ordre de dispersion. Par ailleurs, nous avons la relation suivante :

$$X \preceq_{disp} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad X + c \preceq_{disp} Y \qquad \text{pour tout } c \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

Soit la quantité $F^{-1}(\cdot) + c$ l'inverse de la fonction de répartition de $X + c$, alors, pour un α fixé, on peut trouver un nombre c réel tel que :

$$F^{-1}(\alpha) + c = G^{-1}(\alpha) = x_0$$

Notons que le nombre c désiré est obtenu en variant le nombre α, tel que :

$$c = G^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\alpha)$$

Il s'ensuit de (4.5) qu'on peut trouver un nombre x_0 tel qu'on a les résultats suivants :

$$F(x + c) \geq G(x) \qquad \text{pour tout } \ x \geq x_0, \tag{4.8}$$

$$F(x - c) \leq G(x) \qquad \text{pour tout } \ x \leq x_0. \tag{4.9}$$

Par conséquent, si $S^{-}(f)$ désigne le nombre de changements de signe de la fonction f dans un intervalle donné, on a la caractérisation suivante (pour F continue):

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad S^{-}\{F(\cdot - c) - G(\cdot)\} \leq 1 \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

et tel que la séquence est $- +$.

Preuve :

1) Supposons que nous avons le contraire, c.-à-d.

$$X \leq_{disp} Y \quad \not\Rightarrow \quad S^{-}\{F(\cdot - c) - G(\cdot)\} \leq 1 \ \text{ avec la séquence } - +.$$

Ainsi, par continuité de F et de G, il existe des nombres x_0 et c tels que

$$F(x_0 - c) = G(x_0) = \alpha, \qquad (1)$$

et que pour un certain $\varepsilon > 0$, nous avons

$$F(x - c) - G(x) < 0, \qquad \text{pour} \quad x \in (x_0\,, x_0 + \varepsilon].$$

Posons $$\beta = F(x_0 - c + \varepsilon), \qquad (2)$$

alors,

$$G(x_0) = \alpha < \beta = F(x_0 - c + \varepsilon) < G(x_0 + \varepsilon),$$

par conséquent,

$$x_0 = G^{-1}(\alpha) < G^{-1}(\beta) < x_0 + \varepsilon \quad \text{et} \quad x_0 = G^{-1}(\alpha),$$

d'où, $$G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha) < \varepsilon,$$

mais, par (1) et (2), on $$F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha) = \varepsilon,$$

donc,

$$G^{-1}(\beta) - G^{-1}(\alpha) < F^{-1}(\beta) - F^{-1}(\alpha).$$

Mais, cela conduit à une contradiction.

2) Supposons que

$$S^{-}\{F(\cdot - c) - G(\cdot)\} \leq 1 \ \text{ et la séquence est } - +. \qquad (3)$$

Posons, pour un α fixé dans $(0,1)$,

$$C_\alpha = G^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\alpha) \qquad \text{et} \qquad x' = G^{-1}(\alpha),$$

Et définissons la fonction :

$$F_{C_\alpha}(x) = F(x - C_\alpha).$$

Par suite, nous avons

$$F^{-1}(\alpha) = G^{-1}(\alpha) - C_\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad F_{C_\alpha}(x') = \alpha = F(G^{-1}(\alpha) - C_\alpha) = G(x').$$

Par (3), nous pouvons dire que, $F_{C_\alpha}(x) \geq G(x)$, pour $x > x'$,

en particulier, si $\beta > \alpha$, alors $G^{-1}(\beta) > x'$,

donc, $F_{C_\alpha}\big(G^{-1}(\beta)\big) \geq G\big(G^{-1}(\beta)\big) = \beta$,

par conséquent, $F(G^{-1}(\beta) - C_\alpha) \geq \beta$,

d'où, $G^{-1}(\beta) - C_\alpha \geq F^{-1}(\beta)$,

c.-à-d., $G^{-1}(\beta) - F^{-1}(\beta) \geq C_\alpha = G^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\alpha)$,

cela implique $X \preceq_{disp} Y$ (par définition) ■

Les formules suivantes, équivalentes à (4.10), caractérisent l'ordre dispersif et peuvent être démontrées facilement :

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad G(G^{-1}(\alpha) + c) \leq F(F^{-1}(\alpha) + c) \quad \forall \alpha \in (0,1) \text{ et } c > 0. \tag{4.11}$$

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad G(G^{-1}(\alpha) - c) \leq F(F^{-1}(\alpha) - c) \quad \forall \alpha \in (0,1) \text{ et } c > 0. \tag{4.12}$$

De leur part, (4.11) et (4.12) s'écrivent alternativement comme suit :

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad \big(X - F^{-1}(\alpha)\big)_+ \preceq_{st} \big(Y - G^{-1}(\alpha)\big)_+ \quad \forall \alpha \in (0,1). \tag{4.13}$$

Les actuaires utilisent cette dernière définition pour minimiser les pertes. Ainsi, si $F^{-1}(\alpha)$ est la valeur à risque liée au portefeuille X, (4.13) peut être interprétée de la façon suivante:

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad (X - VaR[X;\alpha])_+ \preceq_{st} (Y - VaR[Y;\alpha])_+ \quad \forall\alpha \in (0,1). \quad (4.14)$$

La plupart de résultats concernant cet ordre sont démontrés et détaillés dans Oja (1981) et Shaked (1982). Toutefois, certaines de leurs preuves ne sont valides que pour le cas continu. Par exemple, si G est continue, alors

$$s = G(x) \text{ et } t = G(y) \qquad \text{tels que } (x < y) \text{ dans } \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Par conséquent, si F et G sont deux fonctions de répartitions continues, on a

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad F^{-1}(G(y)) - F^{-1}\big(G(x)\big) \leq y - x, \quad (x < y) \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Cela dit que l'ordre de dispersion peut aussi être caractérisé par la comparaison des transformées des variables aléatoires X et Y. D'où le théorème suivant.

Théorème 4.1

Soit ϕ une fonction croissante, alors

$$X \preceq_{disp} Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X =_{st} \phi(Y), \\ \quad \text{avec} \\ \phi(y) - \phi(x) \leq y - x \qquad \forall\, x < y. \end{cases} \quad (4.17)$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'un résultat qui fait appel à la notion de support d'une fonction. Dans ce qui suit, nous montrons le lemme (4.1) qui illustre le lien entre ce concept et l'ordre dispersif avec preuve.

Lemme 4.1

Soient F et G deux fonctions de répartition. L'implication suivante est vraie.

$$F \preceq_{disp} G \qquad \Rightarrow \qquad \text{supp}(F) \subseteq \text{supp}(G). \tag{4.18}$$

Preuve :

Soit G une fonction continue, alors on suppose qu'il existe un ensemble de points dans un intervalle dans le support de G tel que,

$$(x, x+e) \subseteq (0{,}1) \backslash \text{supp}(G). \tag{4.19}$$

Par conséquent,

$$G^{-1}(a) - G^{-1}(b) = 0 \qquad \forall\, x \leq a < b < x+e. \tag{4.20}$$

Aussi,

$$F \preceq_{disp} G \qquad \Longrightarrow \qquad F^{-1}(a) - F^{-1}(b) = 0.$$

D'où, le résultat

$$(x, x+e) \subseteq (0{,}1) \backslash \text{supp}(F). \qquad \blacksquare$$

Maintenant, d'après ce lemme, nous pouvons prouver le théorème précédent.

Preuve du théorème 4.1 :

$\Longrightarrow$

Supposons que $X \preceq_{disp} Y$. D'après le lemme (4.1), $\text{supp}(F) \subseteq \text{supp}(G)$. Ainsi,

$$X =_{st} \phi(Y) \qquad \text{avec} \qquad \phi(x) = F^{-1}\big(G(x)\big). \tag{4.21}$$

En outre,

$$X \preceq_{disp} Y \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(y) - \phi(x) \leq y - x \qquad \forall\, x < y,$$

où, $\quad x$ et $y \in \text{supp}(Y)$.

$\Leftarrow$

Similairement, on prouve l'implication,

$$\begin{cases} X =_{st} \phi(Y) \\ \quad \text{avec} \\ \phi(y) - \phi(x) \leq y - x \qquad \forall\, x < y \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad X \preceq_{disp} Y. \qquad \blacksquare$$

Oja (1981), Shaked et Shanthikumar (1994) ont montré le fait que si F et G sont des fonctions continues, alors la relation (4.17) peut s'écrire autrement :

$$X \preceq_{disp} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} Y =_{st} \phi(X), \qquad \text{et } \phi - \text{croissante,} \\ \quad \text{avec} \\ \phi(y) - \phi(x) \geq y - x \qquad \forall\, x < y. \end{cases} \tag{4.22}$$

À présent, nous allons mentionner certaines propriétés sans émettre de preuves.

P1. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux fonctions et soit X une variable aléatoire, alors

$$X \preceq_{disp} aX \qquad \text{chaque fois que } a \geq 1, \tag{4.23}$$

et plus généralement,

$$\mathcal{M} \preceq_{disp} \mathcal{N} \quad \text{si} \quad \mathcal{M}(y) - \mathcal{M}(x) \preceq_{disp} \mathcal{N}(y) - \mathcal{N}(x) \quad \text{pour} \quad x \leq y. \tag{4.24}$$

Notons que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont différentiables, alors

$$\mathcal{M} \preceq_{disp} \mathcal{N} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{M}' \leq \mathcal{N}', \tag{4.25}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{M}(X) \preceq_{disp} \mathcal{N}(X), \qquad \text{chaque fois que} \qquad \mathcal{M} \preceq_{disp} \mathcal{N}. \tag{4.26}$$

P2. Soient X et Y deux variables aléatoires, alors :

$$X \preceq_{disp} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad -X \preceq_{disp} -Y. \tag{4.27}$$

P3. L'ordre $\preceq_{disp}$ n'est pas stable par convolution. Le théorème suivant le confirme.

Théorème 4.2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et soit f la densité de X, alors

$$X \preceq_{disp} X + Y \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est logconcave.} \tag{4.28}$$

À noter qu'une fonction f est dite logconcave sur (a, b), si la fonction $\ln(f)$ est concave sur le même intervalle (a, b).

Définition 4.2

La variable aléatoire Z est dite dispersive, si la condition suivante est satisfaite,

$$X + Z \preceq_{disp} Y + Z \quad \text{pour} \quad X \preceq_{disp} Y \quad (Z \text{ indépendante de } X \text{ et } Y) \tag{4.29}$$

La variable aléatoire X est dite dispersive, si sa densité f est logconcave.

Théorème 4.3

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \preceq_{st} Y$.

- ✓ Si $X \preceq_{disp} Y$, alors $\psi(X) \preceq_{disp} \psi(Y)$, ψ est convexe croissante (4.30)
- ✓ Si $X \preceq_{disp} Y$, alors $\varphi(X) \succeq_{disp} \varphi(Y)$, φ est concave croissante (4.31)
- ✓ Si $\phi(X) \preceq_{disp} \phi(Y)$, ϕ est convexe décroissante, alors $X \preceq_{disp} Y$ (4.32)

Bien que l'ordre dispersif soit un outil important pour comparer deux variables aléatoires en termes de dispersion, il demande de fortes conditions d'application. Aussi, plusieurs distributions ne peuvent satisfaire aux exigences de cet ordre.

Cela justifie la commodité d'employer des ordres plus faibles pour comparer la dispersion de variables aléatoires, à savoir, l'ordre *excess-wealth*.

4.2 Ordre *excess-wealth* (*right spread*)

En 1998, l'ordre *excess-wealth* (excès de richesse) a été introduit simultanément et indépendamment par Shaked et Shanthikumar d'une part et Fernández-Ponce, Kochar et Munoz-Pérez [9] d'autre part où il a été nommé « *right spread* ». Comme l'ordre dispersif, *excess-wealth* est un outil très utile pour comparer la variabilité de deux distributions. Cet ordre de variabilité est largement utilisé dans plusieurs domaines, notamment dans la théorie de fiabilité, en économie et en actuariat.
Basé sur la notion des quantiles, cet ordre partiel compare la dispersion de deux distributions de probabilité. Toutefois, il est plus faible que l'ordre dispersif, mais il conserve la plupart de ses propriétés intéressantes. De ce fait, dans plusieurs cas, il est préférable de considérer l'ordre *excess-wealth* à la place de l'ordre de dispersion.
Dans sa définition, l'ordre *excess-wealth* (*Right Spread*) utilise le concept de la fonction nommée « the *right spread function* » qui peut être traduit comme « la fonction d'étalement à droite ». Cependant, Shaked et Shanthikumar (1998) préfèrent « la transformée *excess-wealth* ». Par conséquent, dans cette partie, avant d'étudier l'ordre en question, nous commençons par définir ladite fonction et d'en présenter quelques propriétés importantes. Nous allons noter la fonction d'étalement à droite par $S_x^+(p)$ pour la distinguer de la fonction d'étalement « *the spread function* » $S_x(p)$ introduite par Munoz-Pérez en 1990.

$$S_x(p) = E\left[\left(X - F^{-1}(p)\right)\right]. \tag{4.33}$$

Définition 4.3

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F et de moyenne finie. La fonction d'étalement à droite associée à F est définie par,

$$S_x^+(p) = E\left[\left(X - F^{-1}(p)\right)^+\right],$$

$$= E[\max\{X - F^{-1}(p), 0\}]$$

$$= \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x)dx, \qquad p \in [0,1] \tag{4.34}$$

où, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ est la fonction de survie et $F^{-1}(p)$ est la fonction quantile liées à la variable aléatoire X.

De ce fait, la fonction S_x^+ est croissante. De plus si X est positive, alors sa limite tend vers sa moyenne μ_F lorsque p tend vers *0*.

Propriété de la fonction S_x^+

Soit X une v. a. continue de fonction de répartition strictement croissante F, alors

i. $$E[X - F^{-1}(p)|X > F^{-1}(p)] = \frac{S_x^+(p)}{1-p}, \tag{4.35}$$

ii. $$\int_0^1 \left(\frac{S_x^+(p)}{1-p}\right)^2 dp = \mathrm{var}(X), \qquad \text{où } F^{-1}(0) = 0 \tag{4.36}$$

iii. $$\int_0^1 S_x^+(p)dp = \frac{1}{2}E[|X_1 - X_2|], \tag{4.37}$$

où X_1 et X_2 sont deux copies indépendantes de X.

La fonction (4.34) est représentée par la partie hachurée dans le graphique suivant.

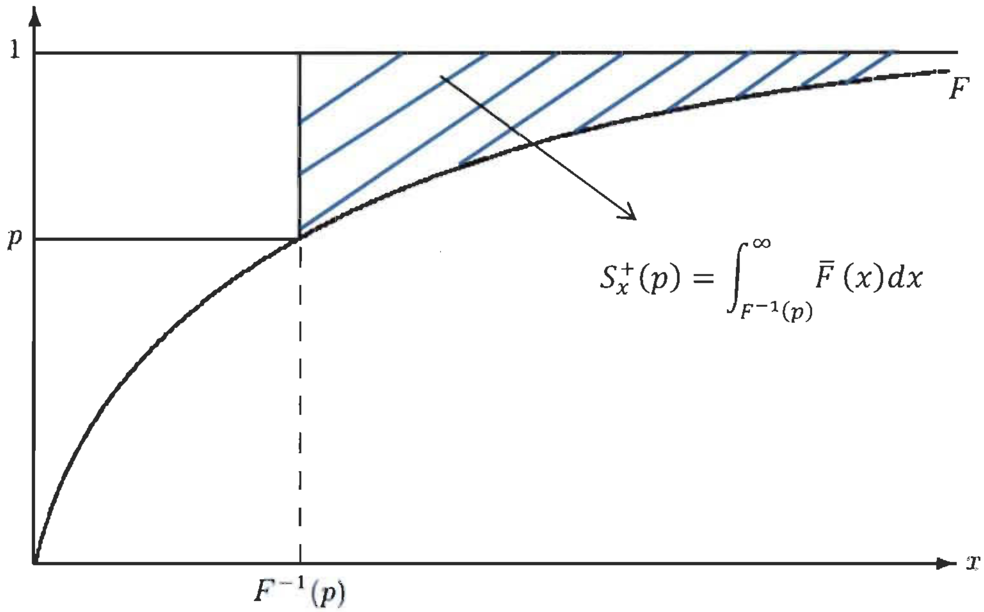

Figure 5 : la représentation graphique de la transformé $\boldsymbol{S_x^+}$

Définition 4.4

Soient X et Y deux v. a. de fonctions de répartition F et G. X est dite plus petite que Y au sens de l'ordre *excess-wealth*, dénoté par $\preceq_{ew}$, si et seulement si,

$$S_x^+(p) = E\left[\left(X - F^{-1}(p)\right)^+\right] \leq E\left[\left(Y - G^{-1}(p)\right)^+\right] = S_y^+(p),\ \ \forall\, p \in [0,1], \quad (4.38)$$

pourvu que ces moyennes existent. Autrement, on dit que $X \preceq_{ew} Y$, si

$$\int_{F^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}\,(x)dx \leq \int_{G^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}\,(x)dx, \quad \forall\, p \in [0,1]\,. \quad (4.39)$$

Dans un contexte économique, on interprète la transformée *excess-wealth* (4.34) de la façon suivante : si X est considérée comme un revenu, alors la fonction S_X^+ peut être considérée comme la proportion de la richesse supplémentaire des individus les plus riches dans la population, au-dessus du percentile $F^{-1}(p)$. Par contre, en actuariat, (4.34) représente le déficit prévu du portefeuille au niveau p avec une perte X et un capital de solvabilité requis $F^{-1}(p)$ (Dhaene et al., 2006). Par conséquent, l'ordre *excess-wealth* est un moyen naturel de comparer le degré de risques de deux distributions.

Adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_X(\alpha) &= \int_\alpha^\infty \bar{F}(x)dx \\ \mathcal{S}_Y(\alpha) &= \int_\alpha^\infty \bar{G}(x)dx \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.40}$$

Alors, on a le résultat suivant qui caractérise l'ordre *excess-wealth* :

$$X \leq_{ew} Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{S}_Y^{-1}(p) - \mathcal{S}_X^{-1}(p) \text{ est décroissante pour } p \geq 0. \tag{4.41}$$

Aussi, depuis les relations suivantes :

$$F^{-1}(p) = \bar{F}^{-1}(1-p) \qquad \text{et} \qquad G^{-1}(p) = \bar{G}^{-1}(1-p), \tag{4.42}$$

on peut donner une caractérisation équivalente à l'expression (4.39) comme suit :

$$\int_{\bar{F}^{-1}(p)}^{\infty} \bar{F}(x)dx \leq \int_{\bar{G}^{-1}(p)}^{\infty} \bar{G}(x)dx, \qquad \forall\, p \in [0,1]\,. \tag{4.43}$$

Il est claire de voir que l'ordre dispersif est plus fort que l'ordre *excess-wealth*, ainsi :

$$X \leq_{disp} Y \qquad \Longrightarrow \qquad X \leq_{ew} Y \tag{4.44}$$

Par conséquent, d'après la définition 4.1, on peut réécrire la relation (4.39) de la façon présentée ci-dessous.

$$\int_p^1 \left(F^{-1}(u) - F^{-1}(p)\right)du \leq \int_p^1 \left(G^{-1}(u) - G^{-1}(p)\right)du. \qquad (4.45)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int_p^1 \left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right)du \leq \int_p^1 \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right)du.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right)\int_p^1 du \leq \int_p^1 \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right)du.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right)u\Big|_p^1 \leq \int_p^1 \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right)du.$$

$$\Leftrightarrow \qquad (1-p)\left(G^{-1}(p) - F^{-1}(p)\right) \leq \int_p^1 \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right)du.$$

On aura donc, pour $p \in (0,1)$, le résultat ci-après,

$$X \leq_{ew} Y \quad \Leftrightarrow \quad G^{-1}(p) - F^{-1}(p) \leq \frac{1}{1-p}\int_p^1 \left(G^{-1}(u) - F^{-1}(u)\right)du. \qquad (4.46)$$

Ainsi, le résultat important ci-dessous caractérise l'ordre *excess-wealth*.

X est plus petite que Y au sens de l'ordre *excess-wealth*, si et seulement si, la fonction,

$$p \rightarrow \frac{1}{1-p}\int_p^1 \left(G^{-1}(x) - F^{-1}(x)\right)dx \quad \text{est croissante}, \quad \forall p \in (0,1). \qquad (4.47)$$

Maintenant, nous allons mentionner quelques propriétés importantes de l'ordre $\preceq_{ew}$.

P1. L'ordre *excess-wealth* est stable par changement de position (location-free). En effet, soient X et Y deux variables aléatoires, alors

$$X \preceq_{ew} Y \qquad \Longrightarrow \qquad X + c \preceq_{ew} Y \qquad \text{pour tout } c \text{ dans } \mathbb{R}. \tag{4.48}$$

P2. Soient X et Y deux variables aléatoires de moyennes $E[X]$ et $E[Y]$.

Si $E[X] = E[Y]$, alors $\quad X \preceq_{ew} Y \quad \Longrightarrow \quad X \preceq_{cx} Y.$ (4.49)

Par contre, Shaked and Shanthikumar ont prouvé que la réciproque de (4.49) n'est pas toujours vraie. C'est-à-dire, $X \preceq_{cx} Y \quad \not\Rightarrow \quad X \preceq_{ew} Y.$

P3. Soient X et Y deux variables aléatoires continues d'espérances finies. Alors, pour toute fonction convexe croissante $\mathcal{H}$, on a la caractérisation suivante,

$$X \preceq_{ew} Y \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{H}(X) \preceq_{ew} \mathcal{H}(Y). \tag{4.50}$$

CHAPITRE 5

V. ORDRE DISPERSIF ET EXCESS-WEALTH BIVARIÉS

En finance, les actuaires ont la tâche d'évaluer le plus précisément possible les risques souscrits par un assureur. Ces risques sont transférés à la compagnie d'assurance par le biais d'un contrat qui protège son détenteur en cas d'incidents accidentels. Dans ce sens, la théorie du risque sert à évaluer le risque global d'un portefeuille. Ce dernier est calculé à l'aide de la distribution du montant total des sinistres pour un portefeuille. Afin de simplifier l'estimation de celui-ci, les actuaires supposent l'indépendance entre les risques assurés. Cependant, dans plusieurs cas, cette supposition n'est pas vérifiée. L'actuaire sous-estime ainsi le risque auquel la compagnie d'assurance est exposée, car il ne tient pas compte de la dépendance entre les risques. En 1997, la communauté actuarielle s'est adressée à la famille scientifique afin de faire des recherches portant sur la modélisation de la dépendance entre les risques. Dès lors, on constate une curiosité croissante dans la littérature actuarielle pour des problèmes faisant intervenir une relation de dépendance entre les risques. Le chapitre précédent décrit les relations d'ordre stochastiques visant à exprimer mathématiquement des idées intuitives comme « être moins variable que » pour des variables aléatoires en comparant leurs variabilités. Ici, nous allons suivre la même route et présentons ces ordres de variabilité pour comparer deux vecteurs aléatoires. Précisément, nous allons étudier la volatilité d'un risque X_2 étant donné un risque X_1. Cela nous amène à présenter et étudier un nouvel ordre de variabilité, introduit par Denuit et Mesfioui (2011) [7], qui peut être une extension bivariée de l'ordre dispersif usuel étudié dans le chapitre précédent. Ce nouvel ordre sera utilisé pour analyser l'effet de la dépendance sur la variabilité d'un vecteur aléatoire. Nous allons illustrer ce concept en utilisant quelques familles de copules archimédiennes.

5.1 Ordre dispersif bivarié

Nous commençons cette section par introduire un nouvel ordre stochastique qui peut être vu comme une extension bivariée de l'ordre dispersif. Pour cela, définissons d'abord la notion de quantile dans le cas bivarié.

Définition 5.1 (quantile bivarié)

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire continu de loi conjointe F. Le quantile bivarié, noté $Q_{F,\alpha}$, est représenté par le α-quantile de X défini comme suit,

$$Q_{F,\alpha} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x_1, x_2) = \alpha\}, \quad \text{pour toute } 0 < \alpha < 1. \tag{5.1}$$

Désignons par F_{X_1} et F_{X_2} les fonctions de répartition marginales associées à X et notons par $F_{X_2|X_1 \leq x_1}(x_2)$ la loi conditionnelle de la variable aléatoire $[X_2|X_1 \leq x_1]$, à savoir

$$F_{X_2|X_1 \leq x_1}(x_2) = P(X_2 \leq x_2 \mid X_1 \leq x_1). \tag{5.2}$$

Ainsi,

$$F_{X_2|X_1 \leq x_1}(x_2) = \frac{P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2)}{P(X_1 \leq x_1)} = \frac{F(x_1, x_2)}{F_{X_1}(x_1)} = \frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}. \tag{5.3}$$

Par conséquent, on a,

$$x_2 = F^{-1}_{X_2|X_1 \leq x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right). \tag{5.4}$$

D'où, la fonction α-quantile de X peut être réécrite de la manière suivante,

$$Q_{F,\alpha} = \left\{ \left(x_1, F^{-1}_{X_2|X_1 \leq x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq F^{-1}_{X_1}(\alpha) \right\}, \quad \forall\, 0 < \alpha < 1. \qquad (5.5)$$

Ici, la condition $x_1 \geq F^{-1}_{X_1}(\alpha)$ est obtenue du fait que la loi marginale est toujours supérieure ou égale à la loi conjointe, c'est-à-dire $F_{X_1}(x_1) \geq F(x_1, x_2) = \alpha$.

De façon similaire et pour une valeur fixée x_2, on trouve le α-quantile de X donné par

$$Q_{F,\alpha} = \left\{ \left(F^{-1}_{X_1|X_2 \leq x_2}\left(\frac{\alpha}{F_{X_2}(x_2)}\right), x_2 \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq F^{-1}_{X_2}(\alpha) \right\}, \quad \forall\, 0 < \alpha < 1. \qquad (5.6)$$

Dans le cas continu, on peut affirmer que pour toute valeur x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$, on a

$$F\left(x_1, F^{-1}_{X_2|X_1 \leq x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right) \right) = \alpha \quad \text{et} \quad F\left(F^{-1}_{X_1|X_2 \leq x_2}\left(\frac{\alpha}{F_{X_2}(x_2)}\right), x_2 \right) = \alpha. \qquad (5.7)$$

Cela nous permet de définir un concept nouveau, celui de l'ordre dispersif bivarié.

Définition 5.2 (ordre dispersif bivarié)

Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux vecteurs aléatoires continus de fonctions de répartition F et G. Soient F_{X_1} et F_{X_2} les lois marginales de X_1, X_2 et soient G_{Y_1}, G_{Y_1} les lois marginales de Y_1, Y_2, respectivement.

X est plus petite que Y au sens de l'ordre dispersif, noté par $(X_1, X_2) \preceq_{disp} (Y_1, Y_2)$, si pour tout $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \min\left(F_{X_1}(x_1), G_{Y_1}(x_1)\right)$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, on a l'expression suivante.

$$F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{\beta}{F_{X_1}(x_1)}\right) - F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right) \le G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{\beta}{G_{Y_1}(x_1)}\right) - G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{\alpha}{G_{Y_1}(x_1)}\right), \quad (5.8)$$

et si pour tout $0 \le \alpha \le \beta \le \min\left(F_{X_2}(x_2), G_{Y_2}(x_2)\right)$ et $x_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$F^{-1}_{X_1|X_2\le x_2}\left(\frac{\beta}{F_{X_2}(x_2)}\right) - F^{-1}_{X_1|X_2\le x_2}\left(\frac{\alpha}{F_{X_2}(x_2)}\right) \le G^{-1}_{Y_1|Y_2\le x_2}\left(\frac{\beta}{G_{Y_2}(x_2)}\right) - G^{-1}_{Y_1|Y_2\le x_2}\left(\frac{\alpha}{G_{Y_2}(x_2)}\right). \quad (5.9)$$

De façon équivalente, nous pouvons dire que $(X_1, X_2) \preceq_{disp} (Y_1, Y_2)$ si la fonction :

$$\alpha \to G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{\alpha}{G_{Y_1}(x_1)}\right) - F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right), \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

est croissante dans $\left[0, \min\left(F_{X_1}(x_1), G_{Y_1}(x_1)\right)\right]$, et si la fonction,

$$\alpha \to G^{-1}_{Y_1|Y_2\le x_2}\left(\frac{\alpha}{G_{Y_2}(x_2)}\right) - F^{-1}_{X_1|X_2\le x_2}\left(\frac{\alpha}{F_{X_2}(x_2)}\right), \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

est croissante dans $\left[0, \min\left(F_{X_2}(x_2), G_{Y_2}(x_2)\right)\right]$.

Le résultat ci-après montre que cet ordre est stable par marginalisation.

Proposition 5.1

Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux vecteurs aléatoires continus.

$$(X_1, X_2) \preceq_{disp} (Y_1, Y_2) \quad \Longrightarrow \quad X_1 \preceq_{disp} Y_1 \quad \text{et} \quad X_2 \preceq_{disp} Y_2. \quad (5.10)$$

Afin de démontrer cette proposition, nous prouvons le lemme suivant.

Lemme 5.1

Soient $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire continu de fonction de répartition F, et soient F_{X_1} et F_{X_2} les lois marginales de X_1 et X_2 respectivement. Alors

$$\lim_{x_1 \to \infty} F^{-1}_{X_2|X_1 \le x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right) = F^{-1}_{X_2}(\alpha), \qquad \forall\, \alpha \in [0,1], \tag{5.11}$$

$$\lim_{x_2 \to \infty} F^{-1}_{X_1|X_2 \le x_2}\left(\frac{\alpha}{F_{X_2}(x_2)}\right) = F^{-1}_{X_1}(\alpha), \qquad \forall\, \alpha \in [0,1]. \tag{5.12}$$

Preuve du lemme (5.1) :

D'après l'expression (5.11), nous pouvons déduire que pour tout α dans $[0,1]$

$$\lim_{x_1 \to \infty} F\left(x_1, F^{-1}_{X_2|X_1 \le x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right) = \alpha,$$

et par (5.3),

$$F_{X_2}\left(\lim_{x_1 \to \infty} F^{-1}_{X_2|X_1 \le x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right) = \alpha,$$

d'où,

$$\lim_{x_1 \to \infty} F^{-1}_{X_2|X_1 \le x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right) = F^{-1}_{X_2}(\alpha).$$

De façon similaire, nous prouvons la relation (5.12). ■

Par conséquent, nous pouvons démontrer la relation (5.10) de la proposition (5.1).

Si on applique le résultat du lemme précédent aux formules (5.8) et (5.9) en faisant tendre respectivement x_1 et x_2 vers l'infini ($x_1 \to \infty,\ x_2 \to \infty$), nous obtiendrons le résultat (5.10) désiré.

C'est-à-dire, quand $x_1 \to \infty$ dans (5.8), on a

$$\lim_{x_1\to\infty}\left\{F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{\beta}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right\} - \lim_{x_1\to\infty}\left\{F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right\}$$
$$\le \lim_{x_1\to\infty}\left\{G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{\beta}{G_{Y_1}(x_1)}\right)\right\} - \lim_{x_1\to\infty}\left\{G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{\alpha}{G_{Y_1}(x_1)}\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$F^{-1}_{X_2}(\beta) - F^{-1}_{X_2}(\alpha) \le G^{-1}_{Y_2}(\beta) - G^{-1}_{Y_2}(\alpha).$$

De même, nous aurons $F^{-1}_{X_1}(\beta) - F^{-1}_{X_1}(\alpha) \le G^{-1}_{Y_1}(\beta) - G^{-1}_{Y_1}(\alpha)$ quand $x_2 \to \infty$. ■

5.2 Ordre *excess-wealth* bivarié

Extension de celui vu dans le chapitre 3, ce nouvel ordre, *excess-wealth* bivarié, sera défini et étudié dans cette section.

Définition 5.3 (ordre *excess-wealth* bivarié)

Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux vecteurs aléatoires continus de lois conjointes F et G. Les lois marginales de (X_1, X_2) sont F_{X_1}, F_{X_2} et les lois marginales de (Y_1, Y_2) sont G_{Y_1}, G_{Y_2}. On dit que $(X_1, X_2) \preceq_{ew} (Y_1, Y_2)$,

si pour tout $0 \le p \le \min\left(F_{X_1}(x_1), G_{Y_1}(x_1)\right)$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, on a l'inéquation suivante :

$$\int_{p}^{F_{X_1}(x_1)} \left[F_{X_2|X_1 \le x_1}^{-1} \left(\frac{u}{F_{X_1}(x_1)} \right) - F_{X_2|X_1 \le x_1}^{-1} \left(\frac{p}{F_{X_1}(x_1)} \right) \right] du$$

$$\le \int_{p}^{G_{Y_1}(x_1)} \left[G_{Y_2|Y_1 \le x_1}^{-1} \left(\frac{u}{G_{Y_1}(x_1)} \right) - G_{Y_2|Y_1 \le x_1}^{-1} \left(\frac{p}{G_{Y_1}(x_1)} \right) \right] du, \qquad (5.13)$$

et si pour tout $0 \le p \le \min\left(F_{X_2}(x_2), G_{Y_2}(x_2)\right)$, $x_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{p}^{F_{X_2}(x_2)} \left[F_{X_1|X_2 \le x_2}^{-1} \left(\frac{u}{F_{X_2}(x_2)} \right) - F_{X_1|X_2 \le x_2}^{-1} \left(\frac{p}{F_{X_2}(x_2)} \right) \right] du$$

$$\le \int_{p}^{G_{Y_2}(x_2)} \left[G_{Y_1|Y_2 \le x_2}^{-1} \left(\frac{u}{G_{Y_2}(x_2)} \right) - G_{Y_1|Y_2 \le x_2}^{-1} \left(\frac{p}{G_{Y_2}(x_2)} \right) \right] du. \qquad (5.14)$$

D'après le lemme (5.1), nous avons l'assurance d'affirmer les implications suivantes :

$$(5.13) \quad \Longrightarrow \quad \int_{p}^{1} \left[F_{X_2}^{-1}(u) - F_{X_2}^{-1}(p) \right] du \le \int_{p}^{1} \left[G_{Y_2}^{-1}(u) - G_{Y_2}^{-1}(p) \right] du, \qquad (5.15)$$

$$(5.14) \quad \Longrightarrow \quad \int_{p}^{1} \left[F_{X_1}^{-1}(u) - F_{X_1}^{-1}(p) \right] du \le \int_{p}^{1} \left[G_{Y_1}^{-1}(u) - G_{Y_1}^{-1}(p) \right] du. \qquad (5.16)$$

Dans ce qui suit, nous allons donner la preuve de ces dernières implications.

Preuve :

Pour (5.15), nous pouvons écrire que

$$\lim_{x_1\to\infty}\left\{\int_p^{F_{X_1}(x_1)}\left[F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{u}{F_{X_1}(x_1)}\right)-F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{p}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right]du\right\}$$
$$\le \lim_{x_1\to\infty}\left\{\int_p^{G_{Y_1}(x_1)}\left[G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{u}{G_{Y_1}(x_1)}\right)-G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{p}{G_{Y_1}(x_1)}\right)\right]du\right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_p^{\lim_{x_1\to\infty}F_{X_1}(x_1)}\left[\lim_{x_1\to\infty}\left\{F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{u}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right\}-\lim_{x_1\to\infty}\left\{F^{-1}_{X_2|X_1\le x_1}\left(\frac{p}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right\}\right]du$$
$$\le \int_p^{\lim_{x_1\to\infty}G_{Y_1}(x_1)}\left[\lim_{x_1\to\infty}\left\{G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{u}{G_{Y_1}(x_1)}\right)\right\}-\lim_{x_1\to\infty}\left\{G^{-1}_{Y_2|Y_1\le x_1}\left(\frac{u}{G_{Y_1}(x_1)}\right)\right\}\right]du$$

mais, par définition $\lim_{x_1\to\infty}F_{X_1}(x_1)=\lim_{x_1\to\infty}G_{Y_1}(x_1)=1,$

d'où, $$\int_p^1[F^{-1}_{X_2}(u)-F^{-1}_{X_2}(p)]du\le\int_p^1[G^{-1}_{Y_2}(u)-G^{-1}_{Y_2}(p)]du.$$

De manière similaire, nous obtiendrons la relation (5.16). C'est-à-dire

$$\lim_{x_2\to\infty}\left\{\int_p^{F_{X_2}(x_2)}\left[F^{-1}_{X_1|X_2\le x_2}\left(\frac{u}{F_{X_2}(x_2)}\right)-F^{-1}_{X_1|X_2\le x_2}\left(\frac{p}{F_{X_2}(x_2)}\right)\right]du\right\}$$
$$\le \lim_{x_2\to\infty}\left\{\int_p^{G_{Y_2}(x_2)}\left[G^{-1}_{Y_1|Y_2\le x_2}\left(\frac{u}{G_{Y_2}(x_2)}\right)-G^{-1}_{Y_1|Y_2\le x_2}\left(\frac{p}{G_{Y_2}(x_2)}\right)\right]du\right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_p^{\lim_{x_2\to\infty} F_{X_2}(x_2)} \left[\lim_{x_2\to\infty}\left\{F^{-1}_{X_1|X_2\le x_2}\left(\frac{u}{F_{X_2}(x_2)}\right)\right\} - \lim_{x_2\to\infty}\left\{F^{-1}_{X_1|X_2\le x_2}\left(\frac{p}{F_{X_2}(x_2)}\right)\right\}\right] du$$
$$\le \int_p^{\lim_{x_2\to\infty} G_{Y_2}(x_2)} \left[\lim_{x_2\to\infty}\left\{G^{-1}_{Y_1|Y_2\le x_2}\left(\frac{u}{G_{Y_2}(x_2)}\right)\right\} - \lim_{x_2\to\infty}\left\{G^{-1}_{Y_1|Y_2\le x_2}\left(\frac{p}{G_{Y_2}(x_2)}\right)\right\}\right] du$$

et puisque, $\lim_{x_2\to\infty} F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_2\to\infty} G_{Y_2}(x_2) = 1,$

$$\int_p^1 [F^{-1}_{X_1}(u) - F^{-1}_{X_1}(p)]du \le \int_p^1 [G^{-1}_{Y_1}(u) - G^{-1}_{Y_1}(p)]du. \qquad \blacksquare$$

Cela nous permet de fournir, comme auparavant pour l'ordre dispersif bivarié, la proposition suivante.

Proposition 5.2

Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux vecteurs aléatoires continus.

$$(X_1, X_2) \le_{ew} (Y_1, Y_2) \quad \Longrightarrow \quad X_1 \le_{ew} Y_1 \quad \text{et} \quad X_2 \le_{ew} Y_2. \tag{5.17}$$

5.3 Dépendance et variabilité

« La notion de dépendance peut prendre deux sens : le premier concerne les événements d'une expérience aléatoire. On dit alors que deux événements sont dépendants si la réalisation de l'un dépend de la réalisation de l'autre. Le deuxième sens du mot dépendance concerne la relation, en général fonctionnelle, qui peut exister entre deux variables aléatoires. On peut mesurer cette dépendance et, dans la plupart des cas, ces mesures font intervenir la covariance des variables aléatoires[7] ».

Le présent projet de recherche concerne l'étude de la variabilité d'un risque X_2 (variable aléatoire positive) étant donné un risque X_1. C'est-à-dire, l'étude de la volatilité d'un risque qui dépend d'un autre risque dans un portefeuille bivarié.

De ce fait, nous optons pour les ordres de variabilité bivariés introduits aux sections 5.2 et 5.3 qui, de notre point de vue, sont plus appropriés pour traiter notre problématique. Pour cela, on considère des variables aléatoires avec des marges fixées.

Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux variables aléatoires de fonction de répartition F et G. On suppose que X et Y ont les mêmes fonctions de répartition marginales notées, F_1 et F_2. Dans cette situation, la définition (5.2), s'écrit de la manière suivante : $X \preceq_{disp} Y$ si et seulement si,

$$F^{-1}_{X_2|X_1\leq x_1}(\beta) - F^{-1}_{X_2|X_1\leq x_1}(\alpha) \leq G^{-1}_{Y_2|Y_1\leq x_1}(\beta) - G^{-1}_{Y_2|Y_1\leq x_1}(\alpha), \tag{5.18}$$

et $$F^{-1}_{X_1|X_2\leq x_2}(\beta) - F^{-1}_{X_1|X_2\leq x_2}(\alpha) \leq G^{-1}_{Y_1|Y_2\leq x_2}(\beta) - G^{-1}_{Y_1|Y_2\leq x_2}(\alpha) \tag{5.19}$$

pour tout $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

[7] Yadolah Dodge, « Statistique: dictionnaire encyclopédique », p. 128. Springer - 2002

De façon équivalente, nous disons que $X \preceq_{disp} Y$, si pour tout x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont croissantes :

$$\begin{aligned}
&\alpha \to G^{-1}_{Y_2|Y_1 \leq x_1}(\alpha) - F^{-1}_{X_2|X_1 \leq x_1}(\alpha), \\
&\alpha \to G^{-1}_{Y_1|Y_2 \leq x_2}(\alpha) - F^{-1}_{X_1|X_2 \leq x_2}(\alpha).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Cela revient à dire que

$$(X_2|X_1 \leq x_1) \preceq_{disp} (Y_2|Y_1 \leq x_1), \qquad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}, \tag{5.21}$$

et

$$(X_1|X_2 \leq x_2) \preceq_{disp} (Y_1|Y_2 \leq x_2), \qquad \forall\, x_2 \in \mathbb{R}. \tag{5.22}$$

Maintenant, nous allons procéder de la même manière concernant l'ordre *excess-wealth* bivarié pour en venir aux mêmes conclusions (5.21) et (5.22). Pour cela, dans (5.13) et (5.14), nous procédons aux changements suivants :

$$F_{X_1} = G_{Y_1},\ \ F_{X_2} = G_{Y_2},\ \ v = \frac{u}{F_{X_1}(x_1)}, w = \frac{u}{F_{X_2}(x_2)},\ p' = \frac{p}{F_{X_1}(x_1)}\ \text{ et }\ q' = \frac{p}{F_{X_2}(x_2)}.$$

On dit alors que $X \preceq_{ew} Y$, si pour tout $0 \leq p' \leq 1$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, on a ce qui suit

$$\int_{p'}^{1} \left[F^{-1}_{X_2|X_1 \leq x_1}(v) - F^{-1}_{X_2|X_1 \leq x_1}(p')\right] dv \leq \int_{p'}^{1} \left[G^{-1}_{Y_2|Y_1 \leq x_1}(v) - G^{-1}_{Y_2|Y_1 \leq x_1}(p')\right] dv, \tag{5.23}$$

et, pour tout $0 \leq q' \leq 1$ et $x_2 \in \mathbb{R}$, on a ce qui suit

$$\int_{q'}^{1} \left[F^{-1}_{X_1|X_2 \leq x_2}(w) - F^{-1}_{X_1|X_2 \leq x_2}(q')\right] dw \leq \int_{q'}^{1} \left[G^{-1}_{Y_1|Y_2 \leq x_2}(w) - G^{-1}_{Y_1|Y_2 \leq x_2}(q')\right] dw, \tag{5.24}$$

Généralisons donc ces derniers résultats comme suit.

$X \preceq_{ew} Y$, si $\forall\, p \in [0,1]$ et $\forall\, x_1$ et x_2 dans $\mathbb{R}$, on a

$$\int_p^1 \left[F^{-1}_{X_2|X_1\leq x_1}(u) - F^{-1}_{X_2|X_1\leq x_1}(p)\right]du \leq \int_p^1 \left[G^{-1}_{Y_2|Y_1\leq x_1}(u) - G^{-1}_{Y_2|Y_1\leq x_1}(p)\right]du, \quad (5.25)$$

$$\int_p^1 \left[F^{-1}_{X_1|X_2\leq x_2}(u) - F^{-1}_{X_1|X_2\leq x_2}(p)\right]du \leq \int_p^1 \left[G^{-1}_{Y_1|Y_2\leq x_2}(u) - G^{-1}_{Y_1|Y_2\leq x_2}(p)\right]du. \quad (5.26)$$

Cela est équivalent à dire que $X \preceq_{ew} Y$, si

$$(X_2|X_1 \leq x_1) \preceq_{ew} (Y_2|Y_1 \leq x_1), \qquad \forall\, x_1 \in \mathbb{R}, \quad (5.27)$$

et

$$(X_1|X_2 \leq x_2) \preceq_{ew} (Y_1|Y_2 \leq x_2), \qquad \forall\, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.28)$$

Si on suit les mêmes démarches de (4.45) à (4.46) faites à la section 4.2 pour obtenir l'expression (4.47), nous obtenons des résultats équivalents aux (5.25) et (5.26) :

$X \preceq_{ew} Y$, si $\forall\, p \in [0,1]$ et $\forall\, x_1$ et $x_2 \in \mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont décroissantes,

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \frac{1}{1-p}\int_p^1 \left[G^{-1}_{Y_1|Y_2\leq x_2}(u) - F^{-1}_{X_1|X_2\leq x_2}(u)\right]du, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5.29) \\ p &\rightarrow \frac{1}{1-p}\int_p^1 \left[G^{-1}_{Y_2|Y_1\leq x_1}(u) - F^{-1}_{X_2|X_1\leq x_1}(u)\right]du. \end{aligned}$$

5.4 Dépendance et copules

Dans la théorie traditionnelle actuarielle, les risques individuels sont généralement supposés indépendants. Cependant, supposer l'indépendance entre les risques d'un portefeuille d'assurance est une hypothèse forte qui doit être vérifiée (Denuit et al. (2005)) [3]. Le comité CAS « Casualty Actuarial Society » reconnaît l'importance de la modélisation des risques dépendants, et souhaite favoriser le développement d'outils et de modèles qui permettent d'améliorer la précision de l'estimation des distributions de perte globale pour des portefeuilles risqués. En général, l'étude de variables corrélées nécessite la connaissance de leurs lois conjointes (multivariées). Toutefois, les données disponibles concernant l'association entre les variables sont souvent limitées à quelques statistiques sommaires, par exemple la matrice de corrélation. Mais, la corrélation, comme étant l'un des concepts les plus répandus dans la finance moderne et de l'assurance, est également l'un des concepts les plus mal compris. Une partie de la confusion résulte dans l'usage littéraire du mot pour couvrir toute notion de dépendance. Cependant, pour un statisticien la corrélation est seulement une mesure particulière de dépendance stochastique qui s'applique seulement au cas de dépendance linéaire. De ce fait, des modèles de dépendance spécifiques doivent être utilisés et, idéalement, doivent être faciles à implanter en ne nécessitant que relativement peu de paramètres. En outre, le choix du modèle de dépendance doit refléter la nature des risques actuariels.

5.4.1 Mesures de dépendance

Il existe plusieurs mesures de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires. La mesure la plus utilisée est le coefficient de corrélation de Pearson, noté $r_{X,Y}$. Celui-ci possède des lacunes, par exemple il arrive que ce coefficient soit nul, malgré que les variables soient dépendantes. Aussi, il n'indique en rien la structure de la dépendance. Deux exigences, parmi d'autres, qu'une mesure de dépendance doit satisfaire sont l'invariance sous des transformations monotones et l'indépendance des comportements marginaux, ce qui n'est pas le cas pour le coefficient de Pearson.

Plusieurs mesures de dépendance s'expriment en termes de copules (définies dans la section suivante). Parmi elles, le tau de Kendall et le rho de Spearman, notés respectivement $\tau_{X,Y}$ et ρ_S, basées sur la notion de concordance. Avant de définir ces quantités, il convient d'abord de rappeler la notion de concordance.

Définition 5.4 (concordance)

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux réalisations d'un vecteur aléatoire continu (X, Y), alors (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont dites concordantes si, $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0$ et dites discordantes si $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0$.

À noter que le coefficient de Pearson n'est pas une mesure de concordance, en revanche le tau de Kendall et le rho de Spearman le sont. Par ailleurs, ces mesures offrent l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires.

Définition 5.5 (tau de Kendall)

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux copies indépendantes du couple aléatoire (X, Y). Alors le tau de Kendall est défini comme la probabilité de concordance moins la probabilité de discordance, c'est-à-dire

$$\tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \tag{5.30}$$

La version échantillon du tau de Kendall est donnée par l'expression suivante :

$$\tau_{X,Y} = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{n}, \tag{5.31}$$

où c est le nombre de paires concordantes et d est le nombre de paires discordantes dans un échantillon $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$.

En 1904, Spearman a défini le coefficient de corrélation de rangs, nommé le rho de Spearman. De façon empirique, cette quantité consiste à calculer le coefficient de corrélation classique à partir des rangs des observations.

Définition 5.6 (rho de Spearman)

Soit un vecteur aléatoire (X, Y) tel que $U = F_X$, $V = F_Y$ et $F_{U,V}$ la loi conjointe de (U, V), où U et V sont uniformément distribuées. Le rho de Spearman est défini par

$$\rho_s(X, Y) = 12E[UV] - 3. \tag{5.32}$$

5.4.2 Copule bivarié

Le début de la théorie des copules commence par le théorème de Sklar (1959) [6] qui établit le lien entre les copules et les variables aléatoires et permet de tenir compte de la structure de dépendance sous-jacente à un vecteur, indépendamment des lois individuelles de chacune de ses composantes (Nelsen (2006)) [6].

Définition 5.7 (copule bivarié)

Soit l'intervalle $I = [0,1]$. Une copule bivariée est une fonction $C: I^2 \longrightarrow I$ qui vérifie :

i. $C(u,0) = C(0,u) = 0$ et $C(u,1) = C(1,u) = u, \quad \forall\, u \in I.$

ii. $C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0, \quad \forall u_1 \leq u_2\,, v_1 \leq v_2.$

Cette dernière caractérisation est appelée la 2-croissante.

Le théorème de Sklar ci-dessous élucide le rôle que les copules jouent dans la relation entre les fonctions de répartitions bivariées et leurs fonctions de répartition marginales.

Théorème 5.1 (Théorème de Sklar - 1959)

Soit F une fonction de répartition bidimensionnelle dont les marges sont F_{X_1} et F_{X_2}. Alors, il existe une copule C telle que,

$$F(x_1,x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right), \quad \forall\, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{5.33}$$

Par conséquent, un couple (X_1,X_2) s'explique par le comportement marginal de X_1, par le comportement marginal de X_2 et par la dépendance entre X_1 et X_2.

La copule C est unique si les marges F_{X_1} et F_{X_2} sont continues. Le corollaire suivant donne une procédure de construction d'une copule associée à un couple de variables aléatoires connaissant la distribution conjointe et les distributions marginales continues.

Corollaire 5.1

Soit F une fonction de répartition bivariée dont les distributions marginales sont F_{X_1} et F_{X_2}. Alors, il existe une copule C telle que

$$C(u,v) = F\left(F_{X_1}^{-1}(u), F_{X_2}^{-1}(v)\right), \quad \forall (u,v) \in [0,1]^2, \tag{5.34}$$

où, $F_{X_1}^{-1}$ et $F_{X_2}^{-1}$ sont respectivement l'inverse de F_{X_1} et F_{X_2}.

De l'expression (5.33), il découle que si F_{X_1} et F_{X_2} sont des marges uniformes, alors $F(x_1, x_2) = C(x_1, x_2)$, ce qui indique que la copule C est une distribution bivariée avec des marges uniformes dans l'intervalle (0,1). En d'autres mots, une copule bivariée est simplement une fonction de répartition bivariée définie sur $[0,1]^2$ dont les lois marginales sont uniformes. D'où l'expression probabiliste simple de la copule suivante :

$$C(u,v) = P(U \leq u, V \leq v), \quad \forall (u,v) \in [0,1]^2, \tag{5.35}$$

où U et V sont des variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0,1]$.

Par ce fait, la copule est un outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution jointe et ainsi de séparer dépendance et comportements marginaux.

Depuis une vingtaine d'années, plusieurs auteurs ont proposé et étudié les propriétés des copules. Certains modèles de copules s'obtiennent de lois multivariées connues, par exemple, les copules gaussiennes, de Student, des valeurs extrêmes ainsi que d'autres. Dans ce travail, nous allons considérer la famille archimédienne. Celles-ci ont le grand avantage de décrire des structures de dépendance très diverses dont notamment les dépendances dites asymétriques. À l'inverse, les copules gaussiennes et de Student, dites copules elliptiques, sont moins adaptées en assurance, car elles s'appliquent à des distributions symétriques. Introduite en 1986 par Genest & Mackay, cette classe de copules a la forme générale qui est définie comme suit :

Définition 5.8 (copule archimédienne)

Les copules archimédiennes sont définies de la manière suivante :

$$C(u,v) = \begin{cases} \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big) & \text{si} \quad \varphi(u) + \varphi(v) < \varphi(0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.36}$$

La fonction $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ est convexe, décroissante et telle que $\varphi(1) = 0$. Cette fonction est appelée Générateur de la copule.

La pseudo-inverse de φ, noté par $\varphi^{[-1]}$, est donnée par,

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si} \quad \varphi(0) \leq t \leq +\infty. \end{cases} \tag{5.37}$$

Notons que si $\varphi(0) = +\infty$, alors la copule C est dite strictement archimédienne, auquel cas la pseudo-inverse $\varphi^{[-1]}$ coïncide avec la réciproque de φ, nommé générateur strict. Cependant, si $\varphi(0) < +\infty$, alors φ est dite générateur non strict, et

$\varphi^{[-1]}$ coïncide avec la réciproque de φ dans l'intervalle $[0, \varphi(0)]$ et elle est nulle ailleurs.

Citons quelques exemples de copules archimédiennes bivariées sont :

Nom	**Générateur**	**Copule**
Clayton	$\varphi_\theta(t) = \dfrac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$	$C_\theta(u,v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}};\ \theta > -1$
Gumbel	$\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^{-\theta}$	$C_\theta(u,v) = \exp\left(-\left((-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)$ $\theta \geq 0$
Frank	$\varphi_\theta(t) = -\ln\dfrac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$C_\theta(u,v) = \dfrac{-1}{\theta}\ln\left(1 + \dfrac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$ $\theta \neq 0$

Tableau 1 : quelques copules archimédiennes

Une des propriétés essentielles dans la théorie des copules est celle de l'invariance par transformations strictement croissantes. Cela veut dire que la structure de dépendance est conservée sous transformation strictement croissante. Par conséquent, si on applique les transformations T_i aux risques financiers X_i, alors les images $T_i(X_i)$ auront la même forme de dépendance (copule) que les risques X_i.

- Les copules du tableau ci-dessus sont dites paramétriques. Le paramètre θ mesure le degré de dépendance entre les variables aléatoires. À noter que plus ce paramètre est élevé plus la dépendance est forte. Aussi une valeur positive de θ indique une dépendance positive.

➢ La copule de Gumbel ne permet de modéliser que les dépendances positives. Par contre, les copules de Franck et de Clayton permettent de modéliser les dépendances aussi bien positives que négatives.

Les mesures de concordance présentées ci-haut peuvent être exprimées en termes de copule par les formules ci-après :

$$\tau_{X,Y} = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u,v)dC(u,v) - 1. \tag{5.38}$$

$$\rho_s(X,Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u,v)dudv - 3. \tag{5.39}$$

Toutefois, nous pouvons démontrer que, pour les copules du tableau 1, le tau $\tau_{X,Y}$ de Kendall peut être exprimé en fonction du paramètre θ. Le tableau suivant présente ce paramètre de concordance en fonction de θ pour les copules exposées ci-haut.

Nom de la copule	**Tau de Kendall : $\tau_{X,Y}$**
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Gumbel	$1-\frac{1}{\theta}$
Frank	$1-\frac{4\left(1-\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{t}{e^t-1}dt\right)}{\theta}$

Tableau 2 : le tau de Kendall de certaines copules paramétriques

5.5 Les ordres de variabilité bivariés et copules

Dans cette section, nous allons examiner l'effet de la dépendance sur la volatilité (variabilité) d'un vecteur aléatoire. Pour cela, nous allons reformuler les ordres $\preceq_{ew}$ et $\preceq_{disp}$ bivariés, introduits précédemment, en termes de copules. Le résultat principal qui caractérise ces ordres stochastiques bivariés est présenté ci-après.

Proposition 5.3

Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux v. a. de fonction de répartition F et G dans $\Gamma(F_1, F_2)$ et de copule C_F et C_G, respectivement. Alors, pour tout $u \in [0,1]$,

1. $X \preceq_{disp} Y$, si et seulement si, les fonctions suivantes sont décroissantes:

i. $$\alpha \longrightarrow G_{Y_2}^{-1} \circ C_{G,u,L}^{-1}(\alpha) - F_{X_2}^{-1} \circ C_{F,u,L}^{-1}(\alpha), \tag{5.40}$$

ii. $$\alpha \longrightarrow G_{Y_1}^{-1} \circ C_{G,u,R}^{-1}(\alpha) - F_{X_1}^{-1} \circ C_{F,u,R}^{-1}(\alpha). \tag{5.41}$$

2. $X \preceq_{ew} Y$, si et seulement si, les fonctions suivantes sont décroissantes:

i. $$p \longrightarrow \frac{1}{1-p} \int_p^1 \left(G_{Y_2}^{-1} \circ C_{G,u,L}^{-1}(\alpha) - F_{X_2}^{-1} \circ C_{F,u,L}^{-1}(\alpha) \right) d\alpha, \tag{5.42}$$

ii. $$p \longrightarrow \frac{1}{1-p} \int_p^1 \left(G_{Y_1}^{-1} \circ C_{G,u,R}^{-1}(\alpha) - F_{X_1}^{-1} \circ C_{F,u,R}^{-1}(\alpha) \right) d\alpha. \tag{5.43}$$

où $C_{j,u,R}^{-1}(\alpha)$ et $C_{j,u,L}^{-1}(\alpha)$ désignent, respectivement, la fonction quantile à droite et la fonction quantile à gauche associées aux distributions conditionnelles suivantes.

$$C_{j,u,R}(v) = \frac{C_j(u,v)}{u} \qquad \text{et} \qquad C_{j,u,L}(v) = \frac{C_j(v,u)}{u}, \qquad j = F, G. \tag{5.44}$$

Dans le cas où les copules sont symétriques, les distributions conditionnelles à gauche et à droite coïncident, c.-à-d. $C_{j,u,R}(v) = C_{j,u,L}(v)$, où $j = F, G$.

Preuve

Partons du théorème de Sklar et des expressions (5.20), on pose $u = F_{X_1}(x_1)$ et $v = F_{X_2}(x_2)$, nous pouvons déduire que

$$\frac{F(x_1, x_2)}{F_{X_1}(x_1)} = \frac{C_F\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right)}{F_{X_1}(x_1)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{C_F(v,u)}{u} = \frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad C_{F,u,L}(v) = \frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad C_{F,u,L}\left(F_{X_2}(x_2)\right) = \frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad C_{F,u,L}^{-1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right) = F_{X_2}(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_2 = F_{X_2}^{-1}\left(C_{F,u,L}^{-1}\left(\frac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}\right)\right).$$

Posons $\alpha_1 = \dfrac{\alpha}{F_{X_1}(x_1)}$ alors $x_2 = F_{X_2}^{-1} \circ C_{F,u,L}^{-1}(\alpha_1)$.

Par conséquent et de façon générale, les quantiles des v. a. conditionnelles $(X_2|X_1 \leq x_1)$ et $(Y_2|Y_1 \leq x_1)$ s'écrivent, respectivement, comme suit

$$F_{X_2}^{-1} \circ C_{F,u,L}^{-1}(\alpha) \qquad \text{et} \qquad G_{Y_2}^{-1} \circ C_{G,u,L}^{-1}(\alpha).$$

De façon similaire, les quantiles de $(X_1|X_2 \leq x_2)$ et $(Y_1|Y_2 \leq x_2)$ sont, respectivement

$$F_{X_1}^{-1} \circ C_{F,u,R}^{-1}(\alpha) \qquad \text{et} \qquad G_{Y_1}^{-1} \circ C_{G,u,R}^{-1}(\alpha).$$

Ce qui démontre la partie 1 de la proposition (5.3), et par conséquent la partie 2. ■

La mise en œuvre de la proposition (5.3) sera concrètement vérifiée sur des copules archimédiennes. Ipso facto, nous nous intéressons aux vecteurs aléatoires dont les copules sont archimédiennes. Dans cette perspective, les ordres bivariés $\preceq_{ew}$ et $\preceq_{disp}$ peuvent être caractérisés en fonction de générateurs des copules et de lois marginales.

Commençons d'abord par définir la fonction quantile associée à la variable aléatoire conditionnelle $[U_1|U_2 \leq u_2]$ où U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires uniformément distribuées de fonction de répartition $C(u_1, u_2)$ où,

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}\big(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\big), \quad \forall (u_1, u_2) \in [0,1]^2 \tag{5.45}$$

Notons que la fonction marginale conditionnelle de $[U_1|U_2 \leq u_2]$ est définie par

$$F_{u_2}(u_1) = P(U_1 \leq u_1 | U_2 \leq u_2) = \frac{C(u_1, u_2)}{u_2}$$

$$F_{u_2}(u_1) = \frac{\varphi^{-1}\big(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\big)}{u_2}. \tag{5.46}$$

Si on pose $F_{u_2}(u_1) = \alpha$, le quantile associée à $[U_1|U_2 \leq u_2]$ sera de la forme

$$\varphi^{-1}\big(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)\big) = \alpha u_2 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u_1) = \varphi(\alpha u_2) - \varphi(u_2),$$

$$\Longrightarrow \quad F_{u_2}^{-1}(\alpha) = \varphi^{-1}\big(\varphi(\alpha u_2) - \varphi(u_2)\big). \tag{5.47}$$

Nous allons noter cette quantité par la fonction

$$\psi_u(\alpha) = \varphi^{-1}\big(\varphi(\alpha u) - \varphi(u)\big). \tag{5.48}$$

La plupart des copules archimédiennes appartiennent à des familles de copules paramétriques, lesquelles dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Dans une telle situation, les ordres bivariés $\preceq_{ew}$ et $\preceq_{disp}$ peuvent être caractérisés en fonction de ces dernières copules. Ceci est illustré dans la proposition (5.4) plus loin.

À noter, pour que la comparaison soit possible en termes de ces ordres bivariés on considère des générateurs de copules archimédiennes stricts dont les supports des fonctions marginales sont définis sur $(0, +\infty)$.

Proposition 5.4

Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux vecteurs aléatoires de mêmes fonctions de répartition marginales F_1 et F_2. On suppose que les copules associées aux vecteurs X et Y sont archimédiennes de générateurs respectifs φ_{θ_1} et φ_{θ_2}. Alors, pour tout $u \in [0,1]$ et pour tout $\theta_2 < \theta_1$:

1. $X \preceq_{disp} Y$, si et seulement si, les fonctions suivantes sont croissantes sur $[0,1]$:

$$\alpha \longrightarrow F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_2,u}(\alpha)\right) - F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_1,u}(\alpha)\right), \quad i = 1,2. \tag{5.49}$$

2. $X \preceq_{ew} Y$, si et seulement si, les fonctions suivantes sont croissantes sur $[0,1]$:

$$p \longrightarrow \frac{1}{1-p}\int_p^1 \left(F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_2,u}(\alpha)\right) - F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_1,u}(\alpha)\right)\right) d\alpha, \quad i = 1,2. \tag{5.50}$$

5.6 Illustration

Ici, nous illustrons les résultats précédents pour certaines familles de copules paramétriques populaires, à savoir, la famille de Clayton et la famille de Frank. Notre objectif consiste à examiner l'effet du paramètre de dépendance sur la variabilité. Afin d'assurer la comparaison au sens de l'ordre dispersif bivarié, nous allons choisir des fonctions de répartition marginales dont les supports sont infinis.

5.6.1 Familles de Clayton

Pour cette famille, nous allons considérer la loi marginale de Pareto :

$$F(x) = 1 - x^{-a}, \qquad \text{avec } x > 1 \text{ et } a > 0. \tag{5.51}$$

Nous supposons que les lois marginales F_1 et F_2 sont liées par la copule de Clayton :

$$C(u_1, u_2; \theta) = \left(u_1{}^{-\theta} + u_2{}^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}, \qquad \text{avec } \theta > 0, \tag{5.52}$$

dont le générateur est donné par

$$\varphi_\theta(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}, \qquad \text{avec } \theta > 0. \tag{5.53}$$

À noter que ce générateur est strict.

La fonction inverse de celui-ci peut être trouvée comme c'est montré ci-dessous.

$$\begin{aligned} (5.53) \quad &\Leftrightarrow \quad \theta x = t^{-\theta} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad t^{-\theta} = \theta x + 1, \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi_\theta^{-1}(t) = (\theta t + 1)^{-1/\theta}. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Ainsi, la quantité $\psi_{\theta,u}(\alpha)$définie dans l'expression (5.48) sera :

$$\begin{aligned}
\psi_{\theta,u}(\alpha) &= \varphi^{-1}\left(\frac{(\alpha u)^{-\theta}-1}{\theta}-\frac{u^{-\theta}-1}{\theta}\right)\\
&= \varphi^{-1}\left(\frac{(\alpha u)^{-\theta}-u^{-\theta}}{\theta}\right)\\
&= \left(\theta\,\frac{(\alpha u)^{-\theta}-u^{-\theta}}{\theta}+1\right)^{-1/\theta}\\
&= \left((\alpha u)^{-\theta}-u^{-\theta}+1\right)^{-1/\theta}. \qquad (5.55)
\end{aligned}$$

L'inverse de la distribution de Pareto (5.51) est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
F_1(x) = F_2(x) = 1 - x^{-a} = t,&\\
&\Leftrightarrow\ x^{-a} = 1-t,\\
&\Leftrightarrow\ x = (1-t)^{-1/a},\\
&\Leftrightarrow\ F_1^{-1}(t) = F_2^{-1}(t) = (1-t)^{-1/a}. \qquad (5.56)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_2,u}(\alpha)\right) - F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_1,u}(\alpha)\right) &=\\
&= \left(\left(1-\psi_{\theta_2,u}(\alpha)\right)^{-1/a}\right) - \left(\left(1-\psi_{\theta_2,u}(\alpha)\right)^{-1/a}\right)\\
&= \left(\left(1-\left((\alpha u)^{-\theta_2}-u^{-\theta_2}+1\right)^{-1/\theta_2}\right)^{-1/a}\right)\\
&\quad - \left(\left(1-\left((\alpha u)^{-\theta_1}-u^{-\theta_1}+1\right)^{-1/\theta_1}\right)^{-1/a}\right). \qquad (5.57)
\end{aligned}$$

Alors, on dit que $X \preceq_{disp} Y$ si, et seulement si, la fonction (5.57) est croissante sur $[0,1]$ pour tout u dans $[0,1]$ et quand $\theta_2 < \theta_1$. Le graphique plus bas, simulé par le logiciel Matlab, illustre cette affirmation et nous montre que cette la fonction est bel et bien croissante pour différentes valeurs de θ_1, et telles que $\theta_2 < \theta_1$.

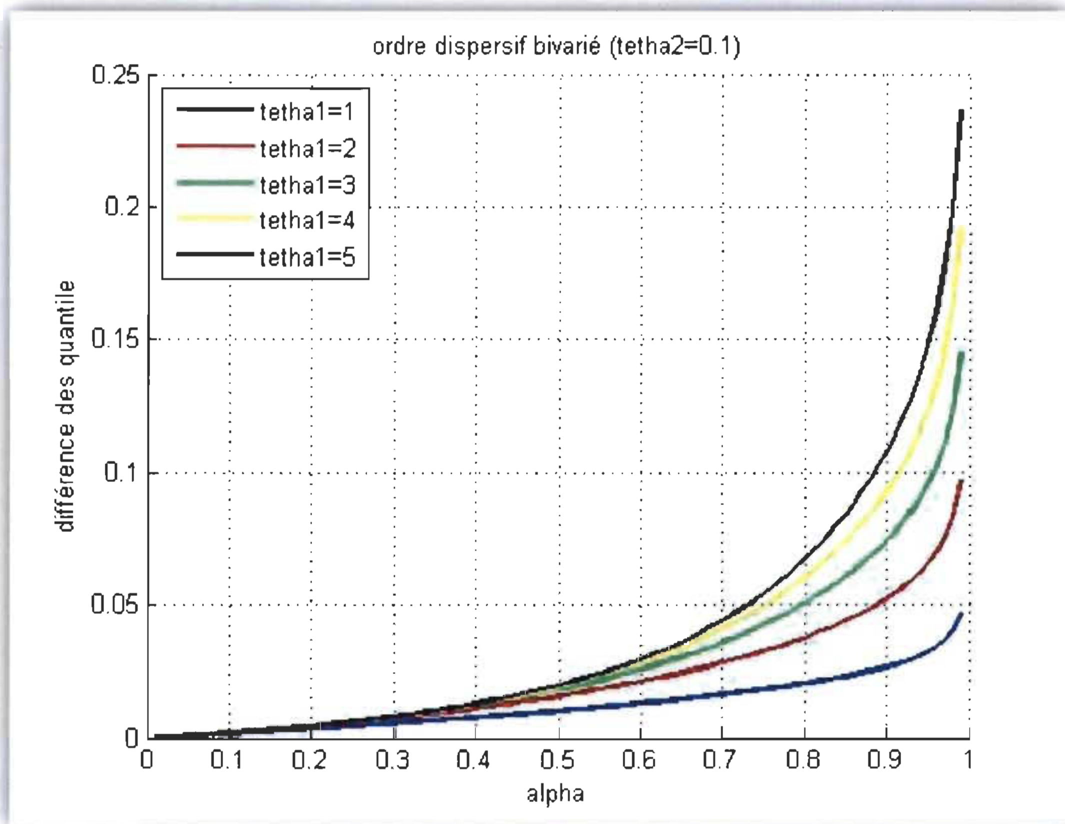

Figure 6 : illustration des résultats pour la famille Clayton

5.6.2 Familles de Frank

De même, nous considérons la copule de Frank décrite auparavant dans le tableau 1. Cette copule est définie de la façon suivante :

$$C(u_1, u_2, \theta) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right), \qquad \theta \neq 0. \tag{5.58}$$

Le générateur strict de cette copule est donné par la formule ci-après pour $\theta \neq 0$:

$$\varphi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right) = \ln(e^{-\theta} - 1) - \ln(e^{-\theta t} - 1). \tag{5.59}$$

Déterminons d'abord l'inverse du générateur de la copule de Frank.

$$\begin{aligned}
(5.59) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x = \ln(e^{-\theta} - 1) - \ln(e^{-\theta t} - 1) \\
&\Leftrightarrow \qquad e^x = \frac{e^{-\theta} - 1}{e^{-\theta t} - 1} \\
&\Leftrightarrow \qquad e^{-\theta t} = \frac{e^{-\theta} - 1}{e^x} + 1 \\
&\Leftrightarrow \qquad -\theta t = \ln\left(\frac{e^{-\theta} - 1 + e^x}{e^x}\right) \\
&\Leftrightarrow \qquad -\theta t = \ln(e^{-\theta} - 1 + e^x) - x \\
&\Leftrightarrow \qquad t = \frac{1}{\theta}\{x - \ln(e^{-\theta} - 1 + e^x)\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction inverse du générateur de la copule sera :

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = \frac{1}{\theta}\{t - \ln(e^t + e^{-\theta} - 1)\}. \tag{5.60}$$

Déterminons ensuite la fonction quantile $\psi_{\theta,u}(\alpha)$:

$$\psi_{\theta,u}(\alpha) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha u) - \varphi(u))$$

$$= \varphi^{-1}\left(\ln(e^{-\theta} - 1) - \ln(e^{-\theta\alpha u} - 1) - \ln(e^{-\theta} - 1) + \ln(e^{-\theta u} - 1)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\ln(e^{-\theta u} - 1) - \ln(e^{-\theta\alpha u} - 1)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta\alpha u} - 1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\theta}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta\alpha u} - 1}\right) - \ln\left(e^{\ln\left(\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta\alpha u}-1}\right)} + e^{-\theta} - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta\alpha u} - 1}\right) - \ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta\alpha u} - 1} + e^{-\theta} - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta\alpha u} - 1}\right) - \ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1 + (e^{-\theta} - 1)(e^{-\theta\alpha u} - 1)}{e^{-\theta\alpha u} - 1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\theta}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta u} - 1 + (e^{-\theta} - 1)(e^{-\theta\alpha u} - 1)}\right)\right\}. \tag{5.61}$$

Alors, d'après la proposition (5.4), pour tout $u \in [0,1]$ et pour tout $\theta_2 < \theta_1$,

$X \preceq_{disp} Y \qquad \Leftrightarrow \qquad$ la fonction (5.49) est croissante sur l'intervalle [0,1].

Vérifions cela pour les mêmes marges de Pareto définies précédemment.

Notons que la fonction inverse de Pareto est définie par (5.56). Alors,

$$F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_2,u}(\alpha)\right) - F_i^{-1}\left(\psi_{\theta_1,u}(\alpha)\right)$$

$$= F_i^{-1}\left(\frac{1}{\theta_2}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta_2 u}-1}{e^{-\theta_2 u}-1+(e^{-\theta_2}-1)(e^{-\theta_2 \alpha u}-1)}\right)\right\}\right)$$

$$- F_i^{-1}\left(\frac{1}{\theta_1}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta_1 u}-1}{e^{-\theta_1 u}-1+(e^{-\theta_1}-1)(e^{-\theta_1 \alpha u}-1)}\right)\right\}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{\theta_2}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta_2 u}-1}{e^{-\theta_2 u}-1+(e^{-\theta_2}-1)(e^{-\theta_2 \alpha u}-1)}\right)\right\}\right)^{-1/a}$$

$$- \left(1-\frac{1}{\theta_1}\left\{\ln\left(\frac{e^{-\theta_1 u}-1}{e^{-\theta_1 u}-1+(e^{-\theta_1}-1)(e^{-\theta_1 \alpha u}-1)}\right)\right\}\right)^{-1/a}$$

Le graphique ci-dessous nous confirme que cette fonction est croissante dès que $\theta_2 < \theta_1$. Ce qui implique que $X \preceq_{disp} Y$.

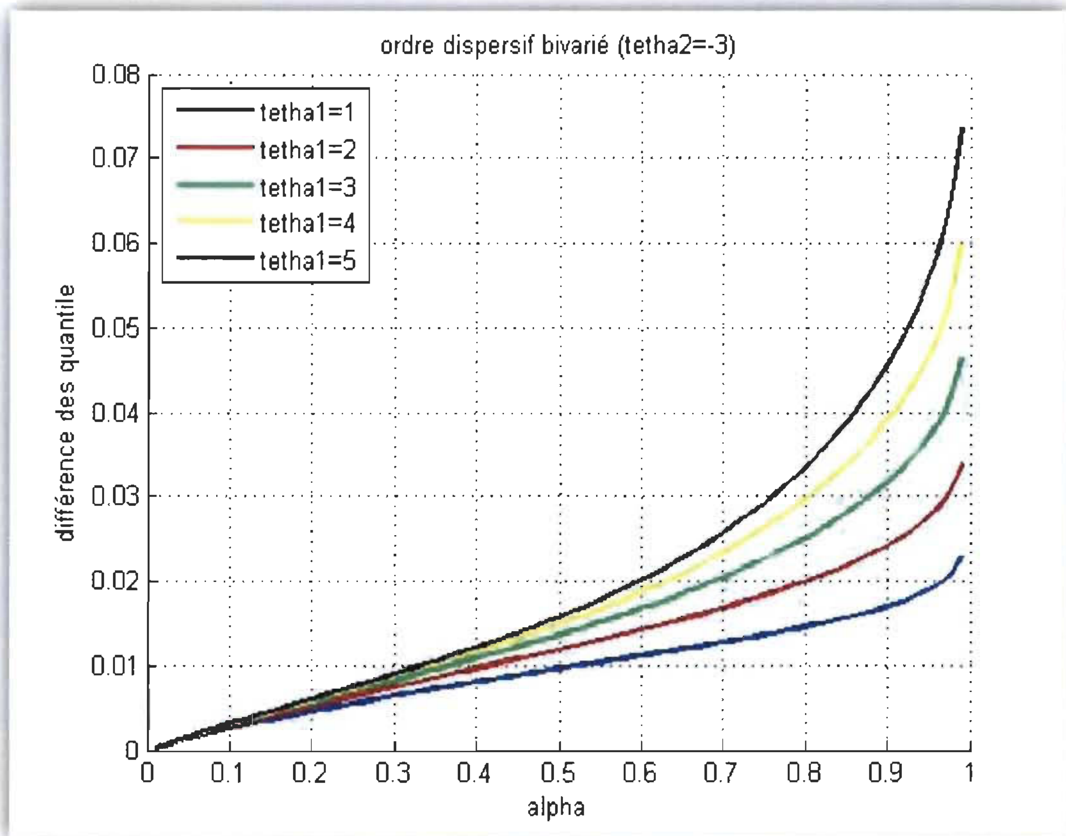

Figure 7 : illustration des résultats pour la famille Frank

VI. CONCLUSION

Bien que la variance soit une mesure raisonnable pour comparer la variabilité de deux variables aléatoires, ce concept pose problème. Ainsi, la nécessité de fournir une comparaison appropriée entre deux variables aléatoires a été à l'origine de la théorie des ordres stochastiques. Celle-ci a beaucoup évolué au cours des 40 dernières années. Dans le présent mémoire nous avons décrit l'importance d'utiliser les ordres stochastiques comme outils de comparaison entre des variables aléatoires, avons étudié différents types de ces ordres et avons analysé certaines de leurs propriétés. Divers ordres partagent certaines similarités, mais elles sont toutes distinctes, et chacune est utile dans des contextes différents.

Ces dernières années nous ont montré que cette technique de comparaison prend de la place dans la modélisation de la dépendance entre les risques financiers des portefeuilles multivariés. Malgré que de nombreux résultats soient établis, un nouvel élan en reconsidérant l'effet de la dépendance sur la variabilité des variables aléatoires est récemment venu s'imposer dans différents domaines, à savoir la gestion des risques et l'assurance.

Notre but principal était d'analyser l'influence de la dépendance sur la variabilité conditionnelle des variables aléatoires. Dans cette perspective, nous avons introduit et étudié de nouveaux ordres de variabilité bivariés qui peuvent être vus comme des extensions bivariées des ordres dispersif et excess-wealth usuels. Ces ordres ont été utilisés pour analyser la variabilité d'un vecteur aléatoire en fonction de degrés de dépendance entre ses composantes. Des illustrations numériques faisant intervenir certaines familles de copules paramétriques ont été exposées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Moshe Shaked, J. George Shanthikumar (2007). Stochastic orders. NY : Springer.

[2] Alfred Müller, Dietrich Stoyan, (2002). Comparison methods for stochastic models and risks. England : John Wiley & sons.

[3] M. Denuit, J. Dhane, M. Goovaerts & R. Kaas. (2005). Actuarial theory for dependent risks. Measures, Orders and Models. West Sussex : John Wiley & sons.

[4] Szekli R. (1995). Stochastic ordering and dependence in applied probability. New York : Springer-Verlag.

[5] Songsak Sriboonchitta, et al. (2010). Stochastic dominance and applications to finance, risk and economics. États Unis : CRC Press.

[6] Roger B. Nelsen (2006). An introduction to copulas. (2e ed.). New York : Springer.

[7] Michel M. Denuit, Mhamed Mesfioui. Dispersive effect of cross-aging with archimedean copulas. *Statistics and Probability Letters (à paraître).*

[8] I. Elbatal (2007). The Laplace Order and Ordering of Reversed Residual Life. *J. of Applied mathematical sciences*, 36(1), 1773-1778.

[9] J. M. Fernadez-Ponce, S. C. Cochar, J. Munoz-Perez (1998). Partial Orderings of Distributions Based on Right-Spread Functions. *J. of Applied Probability*, 35 (1), 221-228.