Solutions de la magnétohydrodynamique idéale par la méthode des invariants de Riemann

Alexandre Duguay

Université du Québec à Trois-Rivières
Département de mathématiques et d'informatique

INTRODUCTION

Contexte

Les équations différentielles sont l'un des sujets les plus importants en dynamique des fluides, car leurs solutions permettent de prédire le comportement de systèmes physiques, par exemple l'écoulement d'un fluide. La **magnétohydrodynamique** (MHD) est l'étude des écoulements lorsqu'ils sont soumis à des champs magnétiques. Les solutions de ces systèmes sont d'une grande importance dans de nombreux domaines, tels qu'en géophysique et en astrophysique [1].

FIGURE 1 – Quelques exemples de la MHD : un tokamak, des vents solaires et le champ magnétique terrestre (www.iter.org/sci/tkmkresearch, www.worldatlas.com/articles/what-is-a-solar-wind.html, www.earth.com/news/earths-magnetic-poles-flip)

Problématique

Les systèmes MHD comportent des équations non linéaires, homogènes et aux dérivées partielles. Ces particularités font en sorte qu'elles sont difficiles à résoudre, ce qui nécessite l'élaboration de nouvelles méthodes de résolution.

Objectifs

- La méthode des invariants de Riemann sera utilisée afin de trouver de nouvelles solutions d'ondes simples et de leurs superpositions en termes des invariants de Riemann pour un système de la MHD.
- Pour chacune de ces solutions, des interprétations physiques seront faites afin de pouvoir prédire le comportement de ces systèmes.

ÉQUATIONS DE LA MHD

Cette recherche porte sur les équations de la MHD idéale décrivant l'écoulement d'un fluide sans résistance, non visqueux et adiabatique soumis à un champ magnétique. Sous ces hypothèses, les équations de la MHD prennent les formes

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0, && \text{Équation de continuité}\\
&\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\nabla p+\frac{1}{4\pi}\vec{H}\times(\nabla\times\vec{H})=0, && \text{Équation d'Euler}\\
&\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\nabla\times(\vec{v}\times\vec{H}), && \text{Équation d'induction du champ magnétique} \qquad (1)\\
&\nabla\cdot\vec{H}=0, && \text{Loi de Gauss pour le champ magnétique}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^{\kappa}}\right)=0, && \text{Conservation de l'entropie}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla), && \text{Dérivée convective}
\end{aligned}$$

où ρ, p, $\vec{v}$, $\vec{H}$ et κ sont respectivement la densité, la pression, le champ de vitesse, le champ magnétique et l'indice adiabatique du fluide étudié. Les variables indépendantes sont $x=(t,\vec{x})\in\mathcal{E}=\mathbb{R}^4$ et les variables dépendantes sont $u=(\rho,p,\vec{v},\vec{H})\in\mathcal{H}=\mathbb{R}^8$.

MÉTHODOLOGIE

Le système (1) peut s'écrire sous la forme d'un système de type hydrodynamique quasilinéaire hyperbolique

$$\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{j=1}^{8}a_j^{s\nu}(u)\frac{\partial u^j}{\partial x^\nu}=0, \qquad s=1,...,9, \tag{2}$$

où $u=(u^1,u^2,...,u^8)=(\rho,p,\vec{v},\vec{H})$ et $x=(x^1,x^2,x^3,x^4)=(t,\vec{x})$.
Les éléments matriciels $a_j^{s\nu}$ sont des fonctions qui dépendent du vecteur u.

La méthode des invariants de Riemann

D'après le formalisme de Riemann [2], un système d'équations aux dérivées partielles hydrodynamique de la forme (2) peut être représenté par un système algébrique. Pour ce faire, on décompose toutes les dérivées sous la forme

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\nu}=\gamma^j\lambda_\nu,$$

où les γ^j et les λ_ν sont des fonctions différentiables en u. Le système (2) devient donc

$$\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{j=1}^{8}a_j^{s\nu}(u)\gamma^j\lambda_\nu=0, \qquad s=1,...,9.$$

Pour une seule fonction R, la solution est appelée *onde simple* (solution de rang 1) et elle est déterminée par les relations

$$R=\phi\left(\lambda_\nu(R)x^\nu\right), \qquad u^j=f^j(R),$$

où ϕ est une fonction arbitraire. Les fonctions f^j satisfont l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}f^j}{\mathrm{d}R}=\gamma^j(f).$$

La fonction R est appelée *invariant de Riemann* et les fonctions $u^j=f^j(R)$ se nomment *ondes de Riemann* et elles sont des solutions du système (2).

RÉSULTATS

Exemple 1 : Onde simple entropique E_2 (solution de rang 1)

Lorsque $\vec{v}\parallel\vec{H}$, les solutions implicites du système (1) pour l'onde entropique E_2 sont

$$\rho=\rho(R), \qquad p(R)=p_0-\frac{\vec{H}^2}{8\pi}, \qquad \vec{H}(R)=\alpha(R)\vec{H}_0, \qquad \vec{v}(R)=\beta(R)\vec{H}_0,$$

où α, β et ρ sont des fonctions arbitraires, p_0 est une constante et $\vec{H}_0=(0,0,1)$. L'invariant de Riemann R est donné par la fonction arbitraire de x et y

$$R=R(x,y).$$

Par exemple, on peut faire l'hypothèse que la fonction $\rho(R)$ est donnée par un *puits algébrique* et que la fonction $R(x,y)$ est donnée par *une onde solitonique*,

$$\rho(R)=1-\frac{4}{1-4R^2}, \qquad R(x,y)=\tanh(x+y).$$

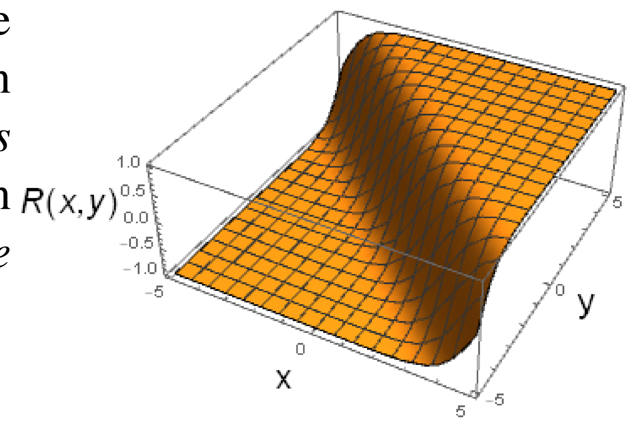

FIGURE 2 – Une onde solitonique représentant $R(x,y)$ donnée par un *kink*.

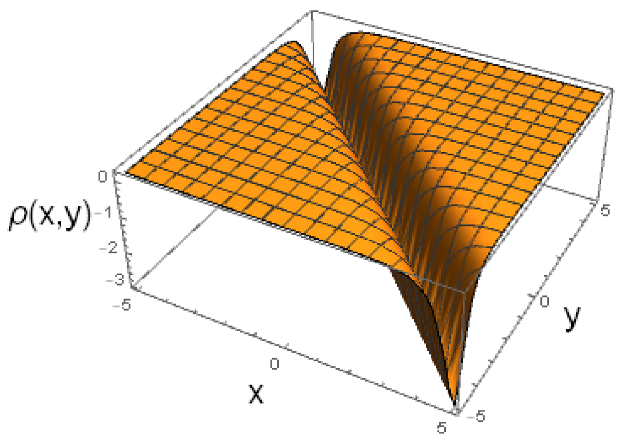

FIGURE 3 – Solution de $\rho(x,y)$ donnée par un *bump* pour l'onde entropique E_2.

Exemple 2 : Onde double d'Alfvén A_2A_2 (solution de rang 2)

Pour l'onde double, les solutions implicites dépendent de deux invariants R^1 et R^2. Lorsque $\vec{v}\parallel\vec{H}$, les solutions implicites du système (1) pour l'onde double d'Alfvèn A_2A_2 sont

$$\rho=\rho_0, \qquad p=p_0, \qquad \vec{H}=\vec{H}(R^1,R^2), \qquad \vec{v}(R^1,R^2)=\frac{\vec{H}(R^1,R^2)}{\sqrt{4\pi\rho}},$$

où ρ_0 et p_0 sont des constantes et $\vec{H}$ est un vecteur arbitraire soumis à certaines contraintes différentielles. On trouve que le champ magnétique et les invariants de Riemann sont donnés par

$$\vec{H}(R^1,R^2)=\begin{pmatrix}R^1\\ R^2\\ \sqrt{1-(R^1)-(R^2)}\end{pmatrix},$$

$$R^1(y)=\tanh(y), \qquad R^2(x)=\operatorname{sech}(x).$$

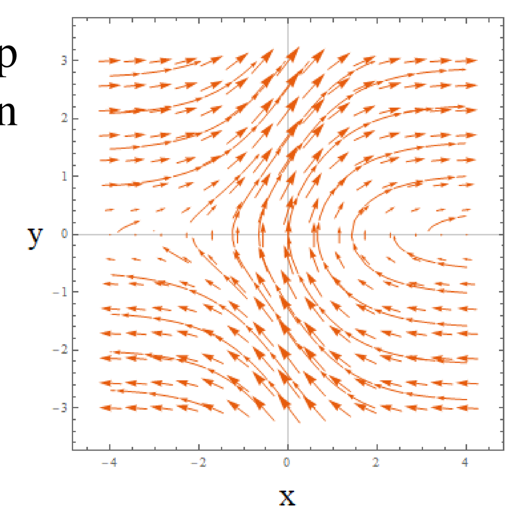

FIGURE 4 – Représentation du champ vectoriel $\vec{H}$ sur le plan xy.

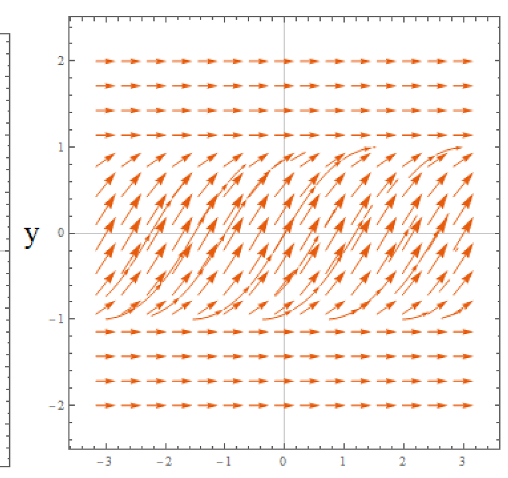

FIGURE 5 – Représentation du champ vectoriel $\vec{H}$ sur le plan zy à $x=1$.

CONCLUSIONS

- 10 classes de solutions de rang 2 ont été trouvées pour divers types d'ondes doubles.
- Puisque les solutions admettent plusieurs fonctions arbitraires d'au moins une variable, il faudra imposer plusieurs problèmes de Cauchy.
- Quelques solutions ont une signification physique, par exemple dans les tokamaks, les vents solaires et les dynamos magnétohydrodynamiques.

Références

[1] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation, 2013.

[2] A.M. Grundland and P.J. Vassiliou. On the solvability of the cauchy problem for riemann doublewaves by the monge-darboux method. *Analysis*, 11(2-3) :221–280, 1991.